

Exercice 1..... (5 points)

Soit $P(z) = z^4 + (2i-9)z^3 + (28-18i)z^2 + (56i-20)z - 40i$

1°) a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 et une solution réelle z_1 .

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2°) Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = -2i$, $z_B = 4 - 2i$, $z_C = 4+2i$ et $z_D = 1$. Placer les points A, B, C et D dans le plan muni d'un repère orthonormal $(\vec{u}, \vec{v})$

3°) Soit l'application $f : P \rightarrow P$

$$M(z) \xrightarrow{f} M'(z') \text{ avec } z' = \frac{z-4-2i}{z+2i}$$

a) Déterminer les images B' et C' des points B et C par f.

b) Interpréter géométriquement $|z'|$ et $\arg(z')$.

c) Montrer les points A, B' et C' sont alignés.

d) Quelle est la nature du triangle B'DC' ?

Exercice 2..... (5 points)

1°) Résoudre :

$$\begin{array}{l} \text{a) } x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \\ \text{b) } (x; y) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{array}{l} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \begin{array}{l} 3x + 2 = 0 \\ 3x + 4y = 1 \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{l} \downarrow \\ 2x - 3y = 4 \end{array} \end{array}$$

2°) Soit l'équation (E) : $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \quad 5x - 7y = 4$.

a) Parmi les couples suivants indiquer celui qui est solution de l'équation (E) : (0, 1) ; (5, 3) ; (1, 8).

b) En déduire la résolution de l'équation (E).

3) On pose $a = 7k + 5$ et $b = 5k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$.

a) Déterminer les valeurs possibles du PGCD (a ; b).

b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles PGCD (a ; b)=1.

PROBLÈME..... (10 points)

$$\text{Soit } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \text{ a } f(x) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[\\ f(x) = \frac{-x-1}{x} & \text{si } x \in]-1, 0[\\ f(x) = -x^2 + 2x & \text{si } x \in [0, 2] \end{cases}$$

I) 1) Soit $f_1 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \text{ a } f_1(x) = -x^2 + 2x$$

Dresser le tableau de variations de f_1 .

2) Soit $f_2 : [-1, 0[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \text{ a } f_2(x) = \frac{-x-1}{x}$$

a) Dresser le tableau de variations de f_2 .

b) Préciser l'asymptote à la courbe (C_{f_2})

c) Donner l'équation de la tangente à (C_{f_2}) au point abscisse $x_0 = -1$.

3) Soit $f_3 :]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \text{ a } f_3(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f_3(x)}{x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f_3(x)}{x-2}$

En donner une interprétation graphique de chaque résultat.

b) Etudier les variations de f_3 .

c) Déterminer les asymptotes à la courbe (C_{f_3}).

II) 1) a) Etudier la dérivabilité de f aux points d'abscisses -1 et 2.

b) Dresser le tableau de variations de f .

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $f(x) = 0$.

l'équation

b) Préciser les asymptotes à la courbe (C_f).

c) Tracer la courbe (C_f).

3) a) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m l'existence du nombre et du signe des solutions de l'équation $f(x) = m$.

b) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[2, +\infty[$ réalise une bijection de $[2, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Donner l'équation de la tangente à (C_g^{-1}) au point d'abscisse 2. Tracer la courbe (C_g^{-1}).

III) Soit la fonction h définie par : a) Déterminer D_h .

$$h(x) = \frac{1}{\overline{f(x)}}$$

b) Etudier h puis dresser le tableau de variations de h.