

COMPOSITION DE LA PREMIÈRE PERIODE				
EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES	SERIE : SET-MTI-MTGC	2011/2012	DURÉE : 4 HEURES	COEF : 06

Exercice 1 (4 points)

Soit $f_{\theta}(z) = z^2 - (i + e^{i\theta})z + (1 + i)(e^{i\theta} - 1)$ avec $\theta \in [0; 2\pi]$

- 1) a) Vérifier que $f_{\theta}(1 + i) = 0$. (1 pt)
- b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_{\theta}(z) = 0$. (1 pt)
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé. On considère les points $A(1)$, $B(i\sqrt{3})$ et $M(-1 + e^{i\theta})$.
- a) Montrer que lorsque θ varie dans $[0; 2\pi]$, M varie sur un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon. (1 pt)
- b) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la droite (BM) est tangente au cercle (C) . (1 pt)

Exercice 2 : (6 points)

- 1) Soit n un entier naturel, montrer que $3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est un multiple de 5. (1 pt)
- 2) Quels sont les couples (a, b) d'entiers naturels tels que : $a > b$, $a^2 - b^2 = 405$ et $\text{PGCD}(a, b) = 3$. (2 pts)
- 3) Soit n un entier naturel. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible. (1 pt)
- 4) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$. (1 pt)
- 5) Soit l'équation $(E): 19x + 17y = 710$. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer une solution particulière de (E) dans $\mathbb{Z}^2$. (1 pt)

Problème : (10 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$, et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

- 1) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. (0,5 pt)

b) Quelle conséquence graphique peut-on en déduire pour (C_f) ? (0,25 pt)

2) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? (1 pt)

3)a) Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. (0,25 pt)

b) Déterminer la dérivée f' de f . (1 pt)

c) En déduire le signe de f' sur $]0; +\infty[$. (0,5 pt)

d) En déduire le tableau de variation de la fonction f . (0,5 pt)

Partie B :

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 1$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f . (0,25 pt)

2) Ecrire f sans le symbole de la valeur absolue. (1,25 pt)

3) Etudier la dérivabilité de f en 1 et en 3. Que peut-on conclure ? (1,25 pt)

4) Démontrer que f admet quatre (4) demi-tangentes dont on déterminera les équations. (1 pt)

5) Etudier les variations de f , puis dresser son tableau de variation. (1,25 pt)

6) Tracer la courbe (C) de f ainsi que ses quatre demi-tangentes. (1 pt)