

Exercice 1 :

I-/ 1°) Établir que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3, a \text{ } \mathfrak{Z} \text{ } b \Rightarrow b \text{ } \mathfrak{Z} \text{ } (a - bq)$. La notation $a \text{ } \mathfrak{Z} \text{ } b$ désigne le PGCD des entiers relatifs a et b .

2°) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, (5n^3 - n) \text{ } \mathfrak{Z} \text{ } (n+2) = (n+2) \text{ } \mathfrak{Z} \text{ } 38$

3°) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que : $(n+2)$ divise $(5n^3 - n)$

4°) Quelles sont les valeurs possibles du PGCD de $(5n^3 - n)$ et $(n+2)$?

5°) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que : $(5n^3 - n) \text{ } \mathfrak{Z} \text{ } (n+2) = 19$.

II-/ Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g à variable réelle définies par

$$\text{par } \begin{matrix} f(x) \\ = \end{matrix} \frac{-x}{g(x)} \text{ et } \begin{matrix} g(x) \\ = \end{matrix} \sqrt{\cos x + \sin x}.$$

Exercice 2 :

I-/ On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = x \times \sqrt[3]{\frac{x}{x}}$.

1°) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

2°) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe ; puis dresser le tableau de variation de f .

3°) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) de f au point O (0 ; 0).

II-/ 1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{12} = 1$. Donner les solutions sous formes trigonométriques.

2°) u désignant un nombre complexe différent de 1, calculer en fonction de u^{n+1} et u la somme :

$$1 + u + u^2 + u^3 + \dots + u^n.$$

3°) Donner les solutions de l'équation : $z^2 + z^4 + 1 = 0$ en utilisant les questions précédentes.

Problème :

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 4cm.

u

Soit I le point d'affixe 1. On note (V) le cercle de diamètre [OI] et on note Ω son centre.

I-/ On pose $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et on note A_0 son image.

i

$$\frac{0}{2} = \frac{1}{2}$$

1°) Montrer que A_0 appartient au cercle (V) .

2°) Soit B le point d'affixe $b = -1 + 2i$ et B' le point d'affixe $b' = a_0 \times b$.

a) Calculer b'

b) Montrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

II-/ Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, A son image dans le plan complexe. A tout point M d'affixe Z non nulle, on associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = aZ$.

1°) a) Interpréter géométriquement $\arg \frac{a-1}{a}$

b) Montrer que $\arg \left(\frac{M'O}{M'M} \right) = \arg \left(\frac{a-1}{a} \right) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

2°) En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si, A appartient au cercle (V) privé de O et I.

III-/ 1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

On note z' et z'' les solutions avec $\text{Im}(z') > 0$. Donner les résultats sous forme exponentielle.

2°) Donner la valeur exacte de $(z')^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B :

1°) Pour tout entier relatif n , la notation $n\&$ désigne la classe de n dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

a) Trouver tous les couples $(a\&; b\&)$ d'éléments de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$ tels que l'on ait :

$$a\& \times b\& = 0\& \quad \text{et} \quad a\& - b\& = 5\&$$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, l'équation

$$x^2 + 3\&x - 4\& = 0\&.$$

c) Déterminer les entiers naturels x , tels que le nombre entier N qui s'écrit $\overline{123}$ en base x , soit divisible par 12.

2°) Montrer que, pour tout entier naturel n , $2^{2n}(2^{2n+1} - 1) - 1$ est divisible par 9.