

COMPOSITION DU 1^{er} TRIMESTRE 2013 – 2014

EPREUVE DE : MATHÉMATIQUES

SERIE : 12^{ème} STI

DUREE : 04H

COEF :

Exercice n°1 : (05points)

I-) 1- Enoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

2- Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème e Bézout.

II-) Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$

par : $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

1- Déterminer les fonctions f' et f .

2- Dresser le tableau de variation de f .

3- Démontrer que pour tout x appartenant à $[0 ; 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

4- Etablir que l'égalité $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in [0 ; 1]$

5- En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que

$$\forall x \in [0 ; 1], |f(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3} |x - \alpha|.$$

Exercice n°2 : (05points)

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) :
$$\begin{cases} n \equiv 13 [19] \\ n \equiv 6 [12] \end{cases}$$

**1-a) Démontrer qu'il existe un couple $(u ; v)$ d'entiers relatif tel que $19u + 12v = 1$.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).**

b) Vérifier que pour un tel couple, le nombre $N = 13 \cdot 12v + 6 \cdot 19u$ est une solution de (S).

2-a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système équivaut à
$$\begin{cases} n \equiv n_0 [19] \\ n \equiv n_0 [12] \end{cases}$$

b) Démontrer que le système
$$\begin{cases} n \equiv n_0 [19] \\ n \equiv n_0 [12] \end{cases} \iff n \equiv n_0 [12 \cdot 19].$$

3-a) Trouver un couple (u, v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S). (On pourra utiliser la question 2-b)).

4- Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228 = 12 \cdot 19$. Quel est le reste de cette division ?

Problème : (10points)

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction numérique d'une variable réelle f définie

pour tout nombre réel x différent de -1 par :

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On notera (C_f) la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 4 \text{ cm}$.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|.$$

1- Déterminer le domaine de définition de la fonction g et calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2- Etudier les variations de g . (on ne demande pas de calculer ses limites en -1 et en 0)

3- Calculer $g\left(-\frac{1}{2}\right)$; en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Etude de la limite de f en l'infini

1- Après une brève étude sur l'intervalle $[0; +\infty[$ des fonctions $h: t \mapsto \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right)$ et

$k: t \mapsto \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$, démontrer que $\forall t \geq 0, t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

2- En déduire que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

3- En utilisant les résultats précédents, démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. On admettra que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

4- Donner une interprétation graphique des résultats de la question précédente.

Partie C : Etude de la fonction f

1- Donner le domaine de définition de la fonction f et calculer la limite f en -1 .

2- Etudier la continuité de f en 0 .

3- Démontrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

4- Calculer la dérivée de f et démontrer que $f'(x) = xg(x)$.

5- Dresser le tableau de variation de f .

6- a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0 .

b) Préciser les asymptotes à (C_f) .

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a pour solution 0 et β avec $-0,8 \leq \beta \leq -0,7$.

7-a) Tracer la tangente (T) , les asymptotes, et la courbe (C_f) .

b) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

8- Soit φ la fonction numérique d'une variable réelle définie pour tout nombre réel x

différent de 1 par :
$$\begin{cases} \varphi(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| & \text{si } x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

a) Dire comment peut-on obtenir la courbe (Γ) de la fonction (φ) à partir de la courbe (C_f) de la fonction f .

b) Construire la courbe (Γ) dans le même repère que la courbe (C_f) .