

COMPOSITION DE LA SECONDE PÉRIODE			
SÉRIE : 12 ^{ème} STI	ANNÉE-SCOLAIRE	DURÉE :	COEF :
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	2025 - 2026	4 h 00 mn	5

Exercice 1 5 pts

1. On considère la fonction polynôme définie par :

$$P(x) = 3x^3 - 8x^2 - x + 10$$

- (a)
 - i. Calcule $P(2)$
 - ii. Déduis que $P(x)$ peut se mettre sous la forme : $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c désignent trois nombre réels que l'on déterminera.
 - iii. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
- (b) Déduis de 1-) les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations
 - i. $3\ln^3 x - 8\ln^2 x - \ln x + 10 = 0$
 - ii. $3\log_2^3 x - 8\log_2^2 x - \log_2 x + 10 = 0$
 - iii. $3e^{3x} - 8e^{2x} - e^x + 10 = 0$

2. Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

$$(a) \begin{cases} \ln(3x + 4y) - \ln 7 = \ln(2 - 5x) + \ln 5 \\ e^{x-2} \times e^{y+3} = 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 4^x \times (\sqrt{2})^y = 2^{2x+1} \\ 2^x \times 8^y = 4^{y-1} \end{cases}$$

Exercice 2 5 pts

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - \frac{e}{x}$.

1. (a) Étudie les variation de f , puis dresse son tableau de variations.
(b) Calcule $f(e)$. En déduis le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
2. Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = (x - e)(-1 + \ln x)$
 - (a) Étudie les variations de g .
 - (b) Étudie les limites de g en 0 puis en $+\infty$.
 - (c) Calcule une valeur approchée à 10^{-1} près de $g(5)$ et $g(10)$.
3. Soit (C_g) la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 - (a) Étudie la position de (C_g) par rapport à la droite (D) d'équation $y = -x + e$.
 - (b) Trace (C_g) et (D) dans un même repère.

Problème 1 10 pts

Partie A On donne les fonctions numériques f et g définies par :

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -1 + \sqrt{1 + x^2} & x \mapsto \frac{x^2}{1 + |x|} \end{array}$$

1. Démontre que f et φ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$
2. (a) Étudie les limites de $f(x)$ et $\varphi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
(b) Montre que les courbes représentatives (C) de f et (Γ) de φ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admettent pour asymptote la droite d'équation $y = x - 1$
3. Étudie les variations de f et φ puis dresse leurs tableaux de variations.
4. (a) Montre que : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + |x| \leq 1 + \sqrt{1 + x^2}$ et que $f(x) \leq \varphi(x)$.

- (b) En déduis la position relative de (C) et de (Γ) que l'on construira en plaçant les points d'abscisses $1; 2; 3; 4$ notamment, puis dont les coordonnées seront calculés à 10^{-1} près par excès.

Justifie la position de (C) et de (Γ) par rapport à leurs asymptote commune

5. (a) Montre que $\forall x \in [0; 1], 0 \leq f'(x) \leq 1$.

- (b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis montre que $\forall x \in [0; 1], 0 \leq f(x) \leq x$.

Partie B On donne la fonction h définie par $h(x) = -(2x + 1)e^{-2x} + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Calcule $h'(x)$, étudie les variations de h .
(b) Calcule $h(0)$ et détermine le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit g la fonction définie par

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x + 1)e^{-2x} + 2x - 2 \end{aligned}$$

On note (C_g) la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- (a) Détermine les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
- (b) Calcule $g'(x)$ et dresse le tableau de variations de g .
- (c) Montre que (C_g) l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0 < \alpha < 1$
3. (a) Montre que (C_g) admet une asymptote (Δ) en $+\infty$ dont on détermine une équation cartésienne.
Étudie la position relative (C_g) et (Δ) .
(b) Détermine une équation de la tangente (T) au point $x_0 = 0$
4. Construis (Δ) , (T) et (C_g) .