

ARITHMETIQUE :

~ ENONCES ~

EXERCICE 1

1) Les entiers $\overline{ab}$ et $\overline{ba}$ sont écrits en base quatre.

Résoudre le système en examinant toutes les possibilités pour $\alpha \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \overline{ba} - \overline{ab} = \alpha \\ a + b + 3 = \overline{ab} \end{cases}$$

2) a et b prenant les valeurs trouvées en 1), écrire en base dix puis en base deux chacun des entiers naturels $\overline{3a3b}$ (écrits en base 4).

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

a) l'équation $3x - 5y = 6$

b) le système $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y \equiv x^2 [5] \end{cases}$

EXERCICE 3

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n-2) = (n+1)(n+2) \dots \times 2n$$

EXERCICE 4

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1}$ est divisible par 11

2) Déterminer l'ensemble des entiers naturels a tels que $3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1}$ soit divisible par 11 pour tout entier naturel n .

EXERCICE 5

1) Démontrer que pour tout entier naturel p , $81p^5 - 45p^3$ est divisible par 5.

2) Déterminer les entiers naturels p tels que $p^3 + p - 2$ soit divisible par 7.

EXERCICE 6

A tout couple (x, n) d'entiers x et n supérieurs ou égaux à deux, on associe le Nombre entier noté $a(x, n)$, qui, dans le système de numération de base x , s'écrit avec n chiffres dont le premier et le dernier sont des 1 et les autres (s'il y en a) des zéros.

Ainsi $a(3, 2) = 11$ en base 3 qui est l'entier quatre.

$$a(3, 3) = \overline{101}_3 = 10$$

a) Montrer que quelle que soit la base x , $a(x, n)$ est divisible par $a(x, 2)$ si n est paire et ne l'est pas si n est impaire.

b) A quelles conditions les entiers x et n doivent-ils satisfaire pour que le couple $a(x, n)$ soit divisible par 3.

EXERCICE 7

Soit N un entier naturel tel que, en numération décimale, N s'écrit $\overline{abcd}$ et que l'entier qui s'écrit $\overline{bcda}$ par 7.

1) Montrer que si $a = 7$ alors $\overline{bcda} - 10N \equiv 0 [m0d7]$

En déduire que pour cette valeur de a , N est divisible par 7.

2) Montrer que $10N - 3a$ est divisible par 7 ; en déduire que si N est divisible par 7, alors $a = 7$

EXERCICE 8

1) Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans le système de numération de base 13 est $N = \overline{25 \times 3}$. Pour quelles valeurs de x : N est-il divisible par 6 ? divisible par 4 ? divisible par 24 ?

2) Déterminer l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}$ qui vérifient : $3x \equiv 23 \pmod{17}$. En déduire l'ensemble des courbes (x, y) de $\mathbb{Z}^2$ qui vérifient $3x - 7y = 23$.

(D'après Bac SET 1991)

EXERCICE 9

1) Trouver trois naturels a, b, c différents de 1, premiers entre eux deux à deux et tels que $a \times b \times c = 495$

2) x, y, z étant des chiffres de la base dix, on considère le nombre $A = \overline{x13y8z}$ en base dix. Déterminer tous les triplets (x, y, z) pour lesquels A est multiple de 495.

(D'après Bac SET 1980)

EXERCICE 10

Les chiffres dans le système de numération de base seize sont : 0, 1, 2, ..., 9, a, b, c, d, e, f .

1) Calculer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne des nombres M par N dans les cas suivants : (la disposition pratique de la technique de la division en base seize est exigée)

a) $M = \overline{cafe}$ et $N = \overline{bac}$

b) $M = \overline{abada}$ et $N = \overline{def}$

2) Vérifier les résultats du 1) à l'aide des écritures de M, N, Q et R dans le système décimal

3) Déterminer deux entiers relatifs x et y tels que $51966x + 2988y = 18$; 51966 et 2988 sont donnés dans le système de numération de base dix.

EXERCICE 11

1) Montrer que si p et q sont deux entiers relatifs premiers entre eux, il en est de même de p et q^3 .

2) On se propose de trouver les racines rationnelles de l'équation (1) : $3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0$

a) soit $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel écrit sous forme irréductible. Montrer que, s'il est solution de (1) alors a divise 4 et b divise 3.

b) Montrer qu'une solution de (1) ne peut être négative.

c) Déduire de ce qui précède que la seule solution rationnelle de (1) est $\frac{2}{3}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0$

EXERCICE 12

- 1) Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 7^n par 10.
- 2) Dans le système de numération décimale, déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le chiffre des unités de l'entier $A(n)$ définie par $A(n) = 1 + 7^2 + \dots + 7^n$

EXERCICE 13

- 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $17q - 11p = 2$
- 2) On considère par $\bar{n}$ la classe d'équivalence modulo 187 de l'entier $n \in \mathbb{Z}$. Résoudre dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \bar{1} = \bar{0}$

EXERCICE 14

Soit E l'anneau $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$, la classe de l'entier naturel n sera noté $\bar{n}$

- 1) Soit f l'application de E dans E définie par $f(x) = 17x + 9$
Trouver l'inverse de $\bar{17}$. Résoudre dans E l'équation $f(x) = \bar{0}$
- 2) Montrer que f est une bijection dont on donnera la bijection réciproque.

EXERCICE 15

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $3^{3x} - 5x3^{2x} - 3^x + 5 \equiv 0[11]$

EXERCICE 16

- 1) Déterminer le PGCD des nombres 21590 et 9525
- 2) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x pour lesquels $34x \equiv 2[5]$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $21590x + 9525y = 1270$

EXERCICE 17

On désigne par $\bar{a}$ la classe d'équivalence modulo 15 de l'entier a .

- 1) Déterminer les couples $(\bar{a}, \bar{b})$ tels que $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$ et $\bar{b} \neq \bar{0}$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \bar{6}x + \bar{5} = \bar{0}$
- 3) Résoudre dans $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{3}y = \bar{0} \\ \bar{2}x + y = \bar{5} \end{cases}$$

EXERCICE 18

b est un entier strictement positif supérieur à 1. On rappelle que $b^2 - 1 = (b+1)(b-1)$

- 1) Quel est le PGCD de b^2 et $(b-1)$?
- 2) Quel est l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $b^2x + (b-1)y = 1$?

APPLICATION NUMERIQUE : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $9x + 2y = 1$

Arithmétique

EXERCICE 19

- Déterminer les couples d'entiers naturels (a, b) tels que
- 1) $\begin{cases} a + b = 168 \\ \text{PGCD}(a, b) = 21 \end{cases}$
 - 2) $\begin{cases} \text{PGCD}(a, b) = 27 \\ \text{PPCM}(a, b) = 108 \end{cases}$
 - 3) $(a, b) \neq (0, 0) \quad \text{PGCD}(a, b) + \text{PPCM}(a, b) = b + 9$

EXERCICE 20

- Déterminer les paires d'entiers naturels $\{a, b\}$ qui vérifient :
- $-16d = 1977$ où $m = \text{PPCM}(a, b)$ et $d = \text{PGCD}(a, b)$

EXERCICE 21

- 1) Etablir que $\forall (a, b, q) \in \mathbb{Z}^3, a \wedge b = b \wedge (a - bq)$. La notation $a \wedge b$ désigne le PGCD des entiers relatifs a et b .
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad (5n^3 - n) \wedge (n + 2) = (n + 2) \wedge 38$
- 3) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(n + 2)$ divise $(5n^3 - n)$.
- 4) Quelles sont les valeurs possibles du PGCD de $5n^3 - n$ et $n + 2$?
- 5) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = 19$

EXERCICE 22

- 1) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (1) : $5x - 4y = 2$.
- 2) On considère l'ensemble des couples (a, b) solutions de (1)
- Quelles sont les valeurs possibles du PGCD de a et b ?
- 3) Montrer qu'il existe un seul couple (a, b) dont le PPCM de a et b est 60 et le PGCD de a et b est 2.

EXERCICE 23

- 1) Démontrer, quel que soit l'entier naturel n , on a : $3^{2n+3} + 2^{n+3} \equiv 0 \pmod{7}$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + 2x + 6 = 0$
- 3) Résoudre le système $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$ m étant le PPCM des entiers a et b .

(D'après Bac SET. MTL MTGC. 1998)

EXERCICE 24

- 1) On sait que : $10^3 - 1 = 9 \times 111$,
 $10^3 - 1 = 7 \times 11 \times 13$
- Pour tout entier naturel, on considère le nombre $A = 10^{9n} + 2 \times 10^{6n} + 2 \times 10^{3n} + 1$.
- Déterminer le reste de la division de A par 111.
- 2) On suppose n impaire. Démontrer que A est divisible par 7, par 11, par 13.
- 3) On suppose n pair
 - a) Démontrer que $A - 6$ est divisible par 11, par 7, par 13.
 - b) Quel est le reste de la division de A par 111×1001 ?

(D'après Composition 1^{re} Période District de Bko 1997)

EXERCICE 25

- 1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de 4^n par 7.
- 2) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ par 7.
- 3) On considère le nombre B qui s'écrit dans le système de numération à base quatre, $B = 2103211$. Déterminer dans le système décimal le reste de la division du nombre B par 7.

~ SOLUTIONS ~

EXERCICE 1

1) Les racines ab et ba sont écrit en ba quatre :

$$\begin{cases} \overline{ba} - \overline{ab} = \alpha \\ a + b + 3 = ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b + a - 4a - b = \alpha \Rightarrow 3a(b - a) = \alpha \quad (1) \\ a + b + 3 = 4a + b \Rightarrow a = 1 \quad (2) \end{cases}$$

L'équation (1) est équivalente aux cas suivants :

- Si $\alpha = 0$ alors $b = 1$ et on a : $\overline{3131}^4 = 221 = \overline{11011101}^2$
- Si $\alpha = 3$ alors $b = 2$ et on a : $\overline{3132}^4 = 222 = \overline{11011110}^2$
- Si $\alpha = 6$ alors $b = 3$ et on a : $\overline{3133}^4 = 223 = \overline{11011111}^2$

EXERCICE 2

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

a) L'équation $3x - 5y = 6$:

$$3x - 5y = 6 \Leftrightarrow 3x = 6 + 5y \Leftrightarrow 3x \equiv 6[5] \Leftrightarrow x \equiv 2[5] \Leftrightarrow x = 5k + 2$$

(on obtient dans $3x - 5y = 6$, $y = 3k$)

L'ensemble solution dans $\mathbb{Z}^2$ de $3x - 5y = 6$ est $S = \{(5k + 2, 3k) ; k \in \mathbb{Z}\}$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y \equiv x^2[5] \end{cases}$. D'après a) :

$$3x - 5y = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 5k + 2 \\ y \equiv x^2[5] \end{cases} \Leftrightarrow y \equiv (5k + 2)^2[5] \Leftrightarrow y \equiv 4[5] \Leftrightarrow y = 5k' + 4$$

Puisque nous avons aussi $y = 3k$ alors on obtient $5k' + 4 = 3k$

Soit $-5k' + 3k = 4 \Leftrightarrow k = 5\alpha + 2$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$) d'où l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ du système

$$\text{est : } x = 5k + 2 = 25\alpha + 8 ; y = 3k = 15\alpha + 6 \text{ ie } S = \{(25\alpha + 8, 15\alpha + 6) \mid \alpha \in \mathbb{Z}\}$$

EXERCICE 3

Déterminons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n - 2) = (n + 1)(n + 2) \dots 2n$$

Nous savons que pour $n = 1$: $2 = 2$ de même pour $n = 2$ on a $2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n ie $2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n - 2) = (n + 1)(n + 2) \dots 2n$ et

montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$ ie

$$2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n - 2)(4n + 2) = (n + 2)(n + 3) \times \dots \times 2(n + 1)$$

D'après l'hypothèse de récurrence $2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n - 2) = (n + 1)(n + 2) \times \dots \times 2n$ donc

$$2 \times 6 \times 10 \times \dots \times (4n - 2)(4n + 2) = (n + 1)(n + 2) \times \dots \times 2n \times (4n + 2)$$

$$= (n + 1)(n + 2) \times \dots \times 2n \times (2n + 1) \times 2 = (n + 2) \times (n + 3) \times \dots \times 2n \times (2n + 1) \times 2(n + 1)$$

$$= (n + 2)(n + 3) \dots 2(n + 1).$$

Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $(n + 1)$

EXERCICE 4

1) Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1}$ est divisible par 11 :

$$3^{2n+1} = 3 \times 3^{2n} = 3 \times 9^n ; \quad 4^{3n+1} = 4 \times 4^{3n}$$

Nous savons que $4^n \equiv 9[11]$ donc $2 \times 4^{3n+1} = 8 \times 4^{3n} \equiv 8 \times 9^n[11]$

$$\text{Ainsi } 3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1} \equiv (3 \times 9^n + 8 \times 9^n)[11] \Leftrightarrow 3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1} \equiv 0[11]$$

$$\text{Car } 3 \times 9^n + 8 \times 9^n = 11 \times 9^n \equiv 0[11]$$

2) $3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1} \equiv 0[11] \Rightarrow 3 \times 9^n + 4 \cdot a \cdot 9^n \equiv 0[11] \Rightarrow 4a + 3 \equiv 0[11] \Leftrightarrow a \equiv 2[11]$

$$\text{d'où } a \in \{11k + 2\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

EXERCICE 5

1). Démontrons que pour tout naturel p $81p^5 - 45p^3 + 4p$ est divisible par 5

Nous savons que $81 \equiv 1[5]$, $45 \equiv 0[5]$ et $4 \equiv 4[5]$ alors $81p^5 - 45p^3 + 4p \equiv p^5 + 4p[5]$

$$\text{Pour } p = 1 \quad p^5 + 4p = 5 \equiv 0[5]$$

$$\text{Pour } p = 2 \quad p^5 + 4p = 40 \equiv 0[5]$$

Supposons que pour tout $p \in \mathbb{N}$ $p^5 + 4p \equiv 0[5]$ montrons alors que $(p+1)^5 + 4(p+1) \equiv 0[5]$

$$\text{On a : } (p+1)^5 + 4(p+1) = p^5 + 4p + 5(p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p + 1) \equiv 0[5] \text{ par } p^5 + 4p \equiv 0[5]$$

Par suite, pour tout entier naturel p , $81p^5 - 45p^3 + 4p$ est divisible par 5.

2) Déterminons les entiers naturels p tels que $p^3 + p - 2$ soit divisible par 7.

Pour $p \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $p^3 + p - 2$ n'est pas divisible par 7

$$\text{Pour } p = 1 \quad p^3 + p - 2 = 0 \equiv [7]$$

$$\text{Pour } p = 3 \quad p^3 + p - 2 = 28 \equiv [7]$$

Par suite $p^3 + p - 2$ est divisible par 7 si $p = 1 + 7k$ ou $p = 3 + 7k$, $k \in \mathbb{N}$

EXERCICE 6

Soit $a(x, n) = \overline{100 \dots 001}^x$ (n chiffres)

$$\text{a) } a(x, n) = \overline{100 \dots 001}^x \quad (n \text{ pair}) \quad a(x, 2) = \overline{11}^x$$

Lorsque n est pair la somme des chiffres de rang pair est 1 et celle des chiffres de rang impair est 1 :

$$1 - 1 = 0 \equiv 0[\overline{11}^x] \text{ d'où } N \text{ est divisible par } a(x, 2)$$

Lorsque n est impair la somme des chiffres de rang pair est 2 et celle des chiffres de rang impair est 1 :

$$2 - 1 = 1 \text{ n'est pas divisible par } \overline{11}^x \text{ d'où } n \text{ n'est pas divisible par } \overline{11}^x$$

$$\text{b) } a(x, n) = x^{n-1} - 1 \equiv 0[3] \text{ ssi } x^{n-1} \equiv 2[3]$$

pour que x^{n-1} soit congru à 2 modulo 3 il faut que $x \equiv 2[3]$ et $n \equiv 1[3]$

En conclusion $a(x, n)$ est divisible par 3 si $x = 3k + 2$ et $n = 3k' + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $k' \in \mathbb{N}$

EXERCICE 7

$$N = \overline{abcd} \text{ et } \overline{bcda} \equiv 0[7]$$

1) Montrons que : si $a = 7$ alors $\overline{bcda} - 10N \equiv 0[7]$

$$\text{On a } \overline{bcda} - 10N = b \cdot 10^3 + c \cdot 10 + a - 10(a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d)$$

$$= (1 - 10^4)a$$

$$\text{Si } a = 7 \text{ alors } \overline{bcda} - 10N = 7(1 - 10^4) \equiv 0[7]$$

$$\text{D'autre part } \begin{cases} \overline{bcda} - 10N \equiv 0[7] \\ \overline{bcda} \equiv 0[7] \end{cases} \Rightarrow 10N \equiv 0[7] \Rightarrow N \equiv 0[7]$$

car 10 n'est pas divisible par 7

2) Montrons que $10N - 3a$ est divisible par 7

$$10N - 3a = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d - 3a = b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + a + a \cdot 10^4 - 4a,$$

$$10N - 3a = \overline{bcda} + a(10^4 - 4)$$

$$0 \equiv 3[7] \Rightarrow 10^4 \equiv 4[7] \Leftrightarrow 10^4 - 4 \equiv 0[7] \Leftrightarrow a(10^4 - 4) \equiv 0[7]$$

$$\text{Puisque } \overline{bcda} \equiv 0[7] \text{ alors } 10N - 3a = \overline{bcda} + a(10^4 - 4) \equiv 0[7]$$

$$\text{Si } N \text{ est divisible par 7 alors } 10N \equiv 0[7] \text{ et comme } 10N - 3a \equiv 0[7] \text{ alors } 3a \equiv 0[7] \Rightarrow a \equiv 0[7]$$

$$\text{Or } a \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\} \text{ donc } a = 7$$

EXERCICE 8

1) $N = 25 \times 3$ dans le système de numération de base 13

$$N = 2 \cdot 13^3 + 5 \cdot 13^2 + x \cdot 13 + 3$$

$$\text{On a : } 13 \equiv 1[6] \Rightarrow N \equiv 2 + 5 + x + 3[6] \Leftrightarrow N \equiv x + 4[6]$$

$$N \equiv 0[6] \Leftrightarrow x + 4 \equiv 0[6] \Rightarrow x + 4 = 6k \Rightarrow x = 6k - 4, k \in \mathbb{N}^*$$

$$x \in \{0, 1, 2, \dots, 12\} \Rightarrow 0 \leq 6k - 4 \leq 12 \Rightarrow k \in \{1, 2\}$$

$$\text{pour } k = 1, \quad x = 2$$

$$\text{pour } k = 2, \quad x = 8$$

$$\text{On a aussi : } 13 \equiv 1[4] \Rightarrow N \equiv 2 + 5 + x + 3[4] \Leftrightarrow N \equiv x + 2[4]$$

$$N \text{ divisible par 4} \Leftrightarrow x + 2 \equiv 0[4] \Leftrightarrow x = 4k - 2, k \in \mathbb{N}^*$$

$$x \in \{0, 1, 2, \dots, 12\} \Rightarrow 0 \leq 4k - 2 \leq 12 \Rightarrow k \in \{1, 2, 3\}$$

$$\text{pour } k = 1, \quad x = 2$$

$$\text{pour } k = 2, \quad x = 6$$

$$\text{pour } k = 3, \quad x = 10$$

N est divisible par 24 ssi N est divisible par 4 et par 6 car $24 = 6 \times 4$

$$N \text{ divisible par 24} \Leftrightarrow x \in \{2, 8\} \cap \{2, 6, 10\} \Leftrightarrow x = 2$$

$$2) \quad 3x \equiv 23[7] \Leftrightarrow 3x = 7k + 23 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = 7k + 23 \Leftrightarrow \frac{3}{7}k + \frac{23}{7} \Leftrightarrow \frac{3}{k+2} \text{ puisque } 7 \equiv 1[3] \text{ et } 23 \equiv 2[3]$$

$$\Leftrightarrow 3 \mid k+2 \Rightarrow k+2 = 3\alpha \Rightarrow k = 3\alpha - 2; \alpha \in \mathbb{Z} \text{ d'où :}$$

$$3x = 7k + 23 \Leftrightarrow 3x = 7(3\alpha - 2) + 23$$

$$3x = 21\alpha + 9 \Rightarrow x = 7\alpha + 3$$

$$\text{Donc } 3x \equiv 23[7] \Leftrightarrow x = 7\alpha + 3; \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{r|l} \overline{aback} & \overline{bac} \\ - \overline{a734} & = \overline{c5} \\ \hline \overline{479a} & \\ - \overline{45ab} & \\ \hline \overline{1ef} & \end{array}$$

$\overline{ba} < \overline{def}$ donc on divise $\overline{abad}$ par $\overline{def}$ ou $\overline{ab}$ par d :

$$\overline{ab} = 10 \times 16 + 11 = 10(14 + 2) + 11 = 12 \times 14 + 3 = c \times d + 3$$

$$c \times f = 12 \times 15 = 11 \times 16 + 4 = \overline{b4}$$

$$c \times e = 12 \times 14 = 12(16 - 2) = 10 \times 16 + 8 = \overline{a8}$$

$$c \times d = 12 \times 13 = 9 \times 16 + 12 = \overline{9c}$$

d'où $c \times \overline{def} = \overline{a479}$. On procède comme précédemment pour déterminer le quotient de $\overline{479a}$ par $\overline{def}$ et le reste.

En conclusion $\overline{abada} = \overline{def} \times \overline{c5} + \overline{1ef}$

2) Vérification : $\overline{cafe}^{16} = 12 \times 16^3 + 10 \times 16^2 + 15 \times 16 + 14 = 51955$ (en base dix)

$$\overline{17}^{16} = 16 + 1 = 17 ; \overline{bac}^{16} = 11 \times 16^2 + 10 \times 16 + 12 = 2988$$

$$\overline{12}^{16} = 4 \times 16^2 + 9 \times 16 + 2 = 1170 ; 51966 = 17 \times 2988 + 1170$$

$$\overline{1ada}^{16} = 10 \times 10^4 + 11 \times 10^3 + 10 \times 16^2 + 13 \times 16 + 10 = 703194 \text{ (en base dix)}$$

$$\overline{1ef} = 3567 ; \overline{c5} = 197 ; \overline{1ef} = 495$$

$$3567 \times 197 + 495 = 703194$$

$$3) 51966x + 2988y = 18 \quad 2887x + 166y = 1$$

L'algorithme d'Euclide nous donne :

		17	2	1	1	1
2887		166	65	36	29	7
65		36	29	7	1	

Nous en déduisons les relations suivantes :

$$65 = 2887 - 17 \times 166 ; 36 = 166 - 2 \times 65 ; 29 = 65 - 1 \times 36 ; 7 = 36 - 1 \times 29 \text{ et } 1 = 29 - 4 \times 7 \text{ d'où}$$

$$1 = 29 - 4 \times (36 - 29) \Leftrightarrow 1 = -4 \times 36 + 5 \times 29 \Leftrightarrow 1 = -4 \times 36 + 5(65 - 36)$$

$$1 = -9 \times 36 + 5 \times 65 \Leftrightarrow 1 = -9(166 - 2 \times 65) + 5 \times 65 \Leftrightarrow 1 = -9 \times 166 + 23 \times 65$$

$$\Leftrightarrow 1 = -9 \times 166 + 23 \times (2887 - 17 \times 166) \Leftrightarrow 1 = 2887 \times 23 + 166 \times (-400)$$

Une solution particulière de l'équation $2887X + 166Y = 1$ est alors $(23, -400)$.

L'ensemble de ses solutions dans $\mathbb{Z}^2$ est : $S = \{(-166k + 23; 2887k - 400); k \in \mathbb{Z}\}$

EXERCICE 11

1) Nous savons que si p et q sont deux entiers relatifs tels que $p \wedge q = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, p \wedge q^n = 1$; en particulier $p \wedge q^3 = 1$

2) Soit l'équation (1) : $3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0$

a) Soit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $a \wedge b = 1$, si $\frac{a}{b}$ est une solution de (1) alors $3\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 6\left(\frac{a}{b}\right) - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 3a^3 - 2a^2b + 6ab^2 - 4b^3 = 0$$

$$a(3a^2 - 2ab + 6b^2) - 4b^3 = 0 \Leftrightarrow a(3a^2 - 2ab + 6b^2) = 4b^3$$

En posant $k = 3a^3 - 2ab + 6b^2$ alors on a : $ka = 4b^3$: a et b^3 étant premier entre eux, d'après Gauss b divise 4. De même $\frac{a}{b}$ solution de (1), si $3a^3 - b(2a^2 - 6ab + 4b^2) = 0 \Leftrightarrow 3a^3 = k'b$.

$$(k' = 2a^2 - 6ab + 4b^2)$$

En vertu du même théorème de Gauss b divise 3

b) Soit x une solution de (1), supposons $x < 0$ alors $a > 0$ tel que $x = -a$ donc

$$3(-a)^3 - 2(-a)^2 + b(-a) - 4 = 0 \Leftrightarrow 3a^3 + 2a^2 + 6a + 4 = 0 \text{ ce qui est impossible car } a \text{ étant positif alors } 3a^3 + 2a^2 + 6a + 4 > 0 \text{ d'où } x \text{ ne peut être négatif}$$

c) D'après les questions a) et b), si $\frac{a}{b}$ est solution de (1), alors $a \in \{1, 2, 4\}$ et $b \in \{1, 3\}$; on vérifie

aisément que seule $\frac{3}{2}$ est solution de (1)

3) $\frac{3}{2}$ étant une solution de (1), $3x^3 - 2x^2 + 6x - 4$ est divisible par $x - \frac{2}{3}$. La division nous donne

$$3x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = \left(x - \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 6) \text{ ainsi (1) } x = \frac{2}{3} \text{ ou } 3x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2 \Leftrightarrow x = i\sqrt{2} \text{ où } x = -i\sqrt{2}.$$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de (1) sont : $\frac{2}{3}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$.

EXERCICE 12

1) n étant un entier naturel, on a : $7^0 \equiv 1[10], 7^1 \equiv 7[10], 7^2 \equiv 9[10]$ et $7^{4k} \equiv 1[10], 7^{4k+1} \equiv 7[10], 7^{4k+2} \equiv 9[10]$ et $7^{4k+3} \equiv 3[10]$ avec $k \in \mathbb{N}$

2) $A(n) = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^n$ nous remarquons que la somme des restes est : $1 + 7 + 9 + 3 = 20$ (le chiffre des unités est 0)

- Si $n = 4k$ le chiffre des unités de $A(n)$ est 1
- Si $n = 4k + 1$ le chiffre des unités de $A(n)$ est $1 + 7 = 8$
- Si $n = 4k + 2$ le chiffre des unités de $A(n)$ est $1 + 7 + 9 = 17$ qui est 7
- Si $n = 4k + 3$ le chiffre des unités de $A(n)$ est celui de $17 + 3 = 20$ qui est 0.

EXERCICE 13

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $17q - 11p = 2$

$$17q - 11p = 2 \Leftrightarrow 17q \equiv 2[11] \Leftrightarrow 6q \equiv 2[11] \Leftrightarrow q \equiv 4[11] \Leftrightarrow q = 11k + 4$$

On obtient $p = 17k + 6$; l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de $17q - 11p = 2$ est

$$S = \{(17k + 6; 11k + 4), k \in \mathbb{Z}\}$$

2) $\bar{n}$ désigne la classe de n dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$

$$\text{Résoudre } \mathbb{Z}/187\mathbb{Z} \Rightarrow x^2 - \bar{1} = \bar{0}$$

$$x^2 - \bar{1} = \bar{0} \Leftrightarrow (x - \bar{1})(x + \bar{1}) = \bar{0} \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \equiv 0[187] \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = (11 \times 17)\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z})$$

$$x^2 - \bar{1} = \bar{0} \Leftrightarrow [(x-1=11p \text{ et } x+1=17q) \text{ ou } (x-1=17q \text{ et } x+1=11p)]$$

$$* \begin{cases} x-1=11p \\ x+1=17q \end{cases} \Rightarrow 17q-11p=2. \text{ Cela nous donne } p=17k+6.$$

$$\text{Dans ce cas } x=187k+67 \Leftrightarrow x=\overline{67}$$

$$* \begin{cases} x-1=17q \\ x+1=11p \end{cases} \Rightarrow 17q+11p=2 ; \text{ on obtient } p=17k-6.$$

$$\text{Dans ce cas } x=187k-67 \Leftrightarrow x=\overline{120}$$

Dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$ $\bar{1} = \bar{1}$ et $x = -\bar{1} = \overline{186}$ sont aussi solutions

En conclusion les solutions de l'équation $x^2 - \bar{1} = \bar{0}$ sont $\bar{1}$, $\overline{186}$, $\overline{120}$ et $\overline{67}$

EXERCICE 14

$\mathbb{N}$ est l'anneau $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$. $\bar{n}$ est la classe de n

1) $f: E \rightarrow E: x \mapsto f(x) = \overline{17}x + \bar{9}$. L'inverse de 17 dans E est l'élément a tel que $\overline{17} \times a = \bar{1}$: on obtient $a = \bar{2}$ car $17 \times 2 \equiv 1[33]$

$$f(x) = \bar{0} \Leftrightarrow \overline{17}x + \bar{9} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{2} \times \overline{17} + \bar{2} \times \bar{9} = \bar{0} \Leftrightarrow x + \overline{18} = \bar{0} \Leftrightarrow x = \overline{15}$$

f est bijective ssi $\forall y \in E, \exists x \in E$ tel que $y = f(x) \Leftrightarrow y = \overline{17}x + \bar{9} \Leftrightarrow \overline{17}x = y + \bar{24} \Leftrightarrow x = \bar{2}y + \overline{15}$

(le x étant unique pour y donné alors f est bijective: $f^{-1}(x) = \bar{2}x + \overline{15}$)

2) $g: E \rightarrow E: x \mapsto g(x) = \overline{22}x + \bar{7}$. Nous remarquons que $22 = 11 \times 2$; puisque $\overline{11} \times \bar{3} = \bar{0}$ alors:

• Si $x = 3k$ est élément de E alors $g(x) = \overline{22} \times 3k + \bar{7} = \bar{7}$

• Si $x = 3k+1$ alors $g(x) = \overline{22} \times (3k+1) + \bar{7} = \overline{29}$

• Si $x = 3k+2$ alors $g(x) = \overline{22} \times (3k+2) + \bar{7} = \overline{18}$

En conclusion l'ensemble des images des éléments de E par g est $S = \{\bar{7}, \overline{18}, \overline{29}\}$

EXERCICE 15

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation d'inconnu x :

$$3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 \equiv 0[11]$$

$$3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 = (3^{2x} - 1)(3^x - 5)$$

$$(3^{2x} - 1)(3^x - 5) \equiv 0[11] \Leftrightarrow 3^{2x} - 1 \equiv 0[11] \text{ ou } 3^x - 5 \equiv 0[11]$$

Les restes de la division par 11 des puissances de 3 sont: $3^{5k} \equiv 1[11]$

$$3^{5k+1} \equiv 3[11]; 3^{5k+2} \equiv 9[11]; 3^{5k+3} \equiv 5[11]; 3^{5k+4} \equiv 4[11] \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$3^{2x} - 1 \equiv 0[11] \Leftrightarrow 3^{2x} \equiv 1[11] \Leftrightarrow 2x = 5k \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = 5\alpha$$

$$3^x - 5 \equiv 0[11] \Leftrightarrow 3^x \equiv 5[11] \Leftrightarrow x = 5k+3. \text{ En conclusion les solutions dans } \mathbb{N} \text{ de l'équation}$$

$$3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 \equiv 0[11] \text{ sont: } x = 5k \text{ ou } x = 5k+3 \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

EXERCICE 16

1) Déterminer le PGCD des nombres 21590 et 9525

Après décomposition on obtient : $21590 = 2 \times 5 \times 17 \times 127$ et $9525 = 3 \times 5^2 \times 127$ d'où PGCD
 $(21590, 9525) = 5 \times 127 = 635$

Remarque : l'algorithme d'Euclide nous donne :

	2	3	1	3
21590	9525	2540	1905	635
2540	1905	635	0	

Ce qui nous conduit à PGCD $(21590, 9525) = 635$

2) $34x \equiv 2[15] \Leftrightarrow 17x \equiv 1[15] \Leftrightarrow 2x \equiv 1[15] \Leftrightarrow x \equiv 8[15] \Leftrightarrow x = 15k + 8 \quad k \in \mathbb{N}$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $21590x + 9525y = 1270$

Cette équation est équivalente à : $34x + 15y = 2 \Leftrightarrow 34x = 2 - 15y \Leftrightarrow 34x \equiv 2[15] \Leftrightarrow x = 15k + 8$.

D'où l'ensemble des solutions de l'équation est : $S = \{(15k + 8, -34k - 18), k \in \mathbb{Z}\}$

EXERCICE 17

$\dot{0}$ désigne la classe d'équivalence modulo 15 de l'entier a.

1) $\dot{a}\dot{b} = \dot{0}$ avec $\dot{a} \neq \dot{0}$ et $\dot{b} \neq \dot{0} \Leftrightarrow (\dot{a}, \dot{b}) \in \{(\dot{3k}, \dot{5k'}, 3k)\}$ avec $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $k' \in \{1, 2\}$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$

$$x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0} \Leftrightarrow (x - \dot{1})(x - \dot{5}) = \dot{0} \Rightarrow x = \dot{1} \text{ ou } x = \dot{5} \text{ ou } \begin{cases} x - \dot{1} = 3k \\ x - \dot{5} = 5k' \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - \dot{1} = 5k' \\ x - \dot{5} = 3k \end{cases}$$

$$x - \dot{1} = 3k \text{ et } x - \dot{5} = 5k' \Leftrightarrow 4 = 3k - 5k' \text{ on obtient } k = 3 \text{ et } k' = 1 \text{ ce qui nous donne } x = \dot{10}$$

$$x - \dot{1} = 5k' \text{ et } x - \dot{5} = 3k \Leftrightarrow 5k' - 3k = 4 \text{ on obtient } k = 3 \text{ ce qui nous donne } x = \dot{11}$$

En conclusion l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ $x^2 - \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$ est $S = \{\dot{1}, \dot{5}, \dot{10}, \dot{11}\}$

3) Résoudre dans $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^2$ $\begin{cases} \dot{3}x + \dot{3}y = \dot{3} & (1) \\ \dot{2}x + y = \dot{5} & (2) \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow y = \dot{5} - \dot{2}x : (1) \text{ devient alors } \dot{3}x + \dot{3}(\dot{5} - \dot{2}x) = \dot{3}x \Leftrightarrow -\dot{3}x = \dot{3} \Leftrightarrow \dot{3}x = -\dot{3} \Leftrightarrow \dot{3}x = \dot{12}$$

d'où $x = \dot{4}$ ou $x = \dot{9}$

Pour $x = \dot{4}$ on trouve $y = \dot{12}$; pour $x = \dot{9}$ on trouve $y = \dot{2}$

L'ensemble des solutions du système est $S = \{(\dot{4}, \dot{12}), (\dot{9}, \dot{2})\}$

EXERCICE 18

b est un entier naturel strictement supérieur à 1

1) Puisque $b^2 - 1 = (b+1)(b-1)$ alors $b^2 - (b+1)(b-1) = 1$

En posant $u = 1$ et $-(b+1) = v$ alors $b^2(b-1)$ vérifient l'identité de Bézout, ils sont donc premiers entre eux.

2) $b^2x + (b-1)y = 1$. D'après 1) $(1, -(b+1))$ est une solution particulière de cette équation ;

l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ est $S = \{(-k(b-1)+1; kb^2 - (b+1)); k \in \mathbb{Z}\}$

3) $9x + 2y = 1$ est de la forme $b^2x + (b-1)y = 1$ avec $b = 3$ d'où l'ensemble de ses solutions est $S = \{(-2k+1, 9k-4)\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

EXERCICE 19

1) Déterminer les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $\begin{cases} a+b=168 \\ \text{PGCD}(a, b)=21 \end{cases}$

$\text{PGCD}(a, b) = 21 \Rightarrow \begin{cases} a = 21a' \\ b = 21b' \end{cases}$ où a' et b' sont deux entiers naturels premiers entre eux alors

$$a+b=168 \Leftrightarrow 21a'+21b'=168 \Leftrightarrow a'+b'=8$$

a'	1	2	3	4	5	6	7
b'	7	6	5	4	3	2	1

On obtient

$$\begin{cases} a'=1 \\ b'=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=21 \\ b=147 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} a'=7 \\ b'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=147 \\ b=21 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} a'=3 \\ b'=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=63 \\ b=105 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} a'=5 \\ b'=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=105 \\ b=63 \end{cases}$$

Les couples d'entiers naturels (a, b) solutions sont donc $(21, 147); (147, 21); (63, 105); (105, 63)$

2) Déterminons les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $\begin{cases} \text{PGCD}(a, b) = 27 \\ \text{PPCM}(a, b) = 108 \end{cases}$

$$1^{\text{re}} \text{ part : } \text{PGCD}(a, b) = 27 \Rightarrow \begin{cases} a = 27a' \\ b = 27b' \end{cases} \text{ avec } \text{PGCD}(a', b') = 1$$

$$2^{\text{e}} \text{ autre part : } \text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = ab \Leftrightarrow ab = 27 \times 108$$

$$27a' \times 27b' = 27 \times 108 = 4$$

a'	1	2	4
b'	4	2	1

On obtient

$$* \begin{cases} a'=1 \\ b'=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=27 \\ b=108 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} a'=4 \\ b'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=108 \\ b=27 \end{cases}$$

Les couples d'entiers naturels (a, b) solutions sont : $(27, 108); (108, 27)$

3) Déterminons les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $\text{PGCD}(a, b) + \text{PPCM}(a, b) = b + 9$

Ponons $\text{PGCD}(a, b) = d$ et $\text{PPCM}(a, b) = m$

Alors $a = da'$, $b = db'$, $m = da'b'$ avec $a' \wedge b' = 1$

$$\text{Ainsi } d + m = b + 9 \Leftrightarrow d + da'b' - db' = 9 \Leftrightarrow d(1 + a'b' - b') = 9 \text{ } d \text{ est donc un diviseur de } 9 :$$

$$d \in \{1, 3, 9\}$$

$$* \text{ Si } d=1 \text{ alors } a'b' - b' = 8 \Leftrightarrow b'(a'-1) = 8 \Rightarrow b' \text{ est un diviseur de } 8 \text{ } b' \in \{1, 2, 4, 8\}.$$

Remarquons que pour $d=1$, $a = a'$ et $b = b'$ d'où on aura : $b=1$ et $a=9$; $b=2$ et $a=5$; $b=4$ et $a=3$

$$* \text{ Si } d=3 \text{ alors } a'b' - b' = 2 \Leftrightarrow b'(a'-1) = 2 \text{ On aura : } b'=1 \text{ et } a'=3$$

Ce qui nous donne $a = 9$ et $b = 3$

* Si $d = 9$ alors $a'b' - b' = 0 \Leftrightarrow b'(a' - 1) = 0 \Leftrightarrow a' = 1$ et $b' \in \mathbb{N}$

d'où $a = 9$ et $b = 9b'$. L'ensemble des solutions est

$$S = \{(9, 1), (5, 2), (3, 4), (9, 3), (9, 9b'); b' \in \mathbb{N}^*\}$$

EXERCICE 20

1) Déterminons les paires d'entiers naturels (a, b) qui vérifient

$$m - 16d = 1977 \text{ où } m = a \vee b, d = a \wedge b$$

Nous avons $a = da'$, $b = db'$, $m = da'b'$ avec $a' \wedge b' = 1$

$$m - 16d = 1977 \Leftrightarrow d(a'b' - 16) = 1977 : d \text{ est alors un diviseur de } 1977 \Rightarrow d \in \{1, 3, 659, 1977\}$$

• Si $d = 1$ alors $a'b' = 1993$: $a' = 1$ et $b' = 1993 \Rightarrow a = 1$ et $b = 1993$

• Si $d = 3$ alors $a'b' = 675 = 27 \times 25$: on aura $a' = 1$ et $b' = 675$

ce qui nous donne $a = 3$ et $b = 2025$ ou $b' = 25$

ce qui donne $a = 81$ et $b = 75$

• Si $d = 659$ alors $a'b' = 19 \Rightarrow a' = 1$ et $b' = 19$; cela nous donne $a = 659$ et $b = 12521$

• Si $d = 1977$ alors $a'b' = 17 \Rightarrow a' = 1$ et $b' = 17$, cela nous donne $a = 1977$ et $b = 33609$.

L'ensemble des paires (a, b) est donc

$$S = \{(1, 1993), (3, 2025), (81, 75), (659, 12521), (1977, 33609)\}$$

EXERCICE 21

1) D'après l'algorithme d'Euclide si $a = bq + r$ alors $a \wedge b = b \wedge r$ puisque $r = a - bq$ alors $a \wedge b = b \wedge (a - bq)$

2) La division euclidienne de $5n^3 - 10n + 9$ et pour reste $r = -38$

$$d'où $(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = (n + 2) \wedge (-38) = (n + 2) \wedge 38$$$

3) $5n^3 - n$ est divisible par $n + 2$ si $(5n^3 - n) \wedge (n + 2) = n + 2 \Leftrightarrow (n + 2) \wedge 38 = n + 2$. Pour cela $n + 2$ doit être un diviseur de 38

$$d'où : $n + 2 \in \{-38, -19, -2, -1, 1, 2, 19, 38\} \Leftrightarrow \{-40, -21, -4, -3, -1, 0, 17, 36\}$$$

3) Les valeurs possibles du PGCD de $(5n^3 - n)$ et $(n + 2)$ sont les diviseurs positifs de 38 qui sont :

$$1, 2, 19, \text{ et } 38 \quad (5n^3 - n) \wedge (n + 2) = 19 \text{ si } n + 2 \equiv 0[19] \text{ et } n + 2 \text{ est impair d'où}$$

$$n + 2 = 19(2k + 1) \Rightarrow n = 38k + 17 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

EXERCICE 22

1) Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (1): $5x - 4y = 2$ $(2, 2)$ est une solution particulière de l'équation (1). Les couples (x, y) solutions de l'équation (1) sont tels que

$$x = 4k + 2 \text{ et } y = 5k + 2, k \in \mathbb{Z} \quad S = \{(4k + 2, 5k + 2), k \in \mathbb{Z}\}$$

$$4) (a, b) \text{ est (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4k + 2 \\ b = 5k + 2 \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

a) On a :

$$a \wedge b = (5k+2) \wedge (5k+2) = (4k+2) \wedge (5k+2-4k-2) = (4k+2) \wedge k = k \wedge (4k+2-4k) = k \wedge 2$$

$$\Rightarrow a \wedge b = 2 \text{ ou } a \wedge b = 1$$

$$2) \begin{cases} a \vee b = 60 \\ a \wedge b = -2 \\ a = 4k+2 \\ b = 5k+2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{On sait que } ab = (a \vee b) \times (a \wedge b)$$

$$(4k+2)(5k+2) = 60 \times 2$$

$$20k^2 + 18k - 115 = 0$$

$$\Delta' = 2401 = 49^2$$

$$k_1 = \frac{-9-49}{20} = \frac{-29}{10} \notin \mathbb{Z} ; \quad k_2 = \frac{-9+49}{20} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\text{alors } k = 2 \Rightarrow a = 10 \text{ et } b = 12$$

EXERCICE 23

1) Démontrons que :

Pour tout entier naturel n , $3^{2n+3} + 2^{n+3} \equiv 0 [7]$ on a $3^2 \equiv 2 [7]$

alors pour tout entier naturel n , $3^2 \equiv 2 [7]$

$$\text{Par suite } 3^{2n+3} + 2^{n+3} \equiv 2^n \times 3^3 + 2^n \times 2^3 [7]$$

$$3^{2n+3} + 2^{2n+3} \equiv 2^n \times 35 [7]$$

$$\text{où } 3^{2n+3} + 2^{2n+3} \equiv 0 [7]$$

Soit à résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'équation $x^2 + 2x + 6 = 0$

$$x' = 1 - 6 = -5 = 2 = (3)^2$$

$$x'' = -1 - 3 = 3 \quad x'' = -1 + 3 = 2$$

$$\text{où } S = \{2, 3\}$$

2) Soit à résoudre le système $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases}$ m étant le PPCM des entiers a et b .

Soit d le PGCD des entiers a et b . On sait que $md = ab$ et $a = a'd$ et $b = b'd$ où a' et b' sont deux entiers naturels premiers entre eux $3m = ab \Leftrightarrow md = 3d$ alors $d = 3$ et $a = 3a'$, $b = 3b'$

$$a^2 - b^2 = 405 \Leftrightarrow 9(a'^2 - b'^2) = 405$$

$$a'^2 - b'^2 = 45 \Leftrightarrow (a' + b')(a' - b') = 45$$

les entiers a' , b' solutions sont $(a' = 23 \text{ et } b' = 22)$ ou $(a' = 7, b' = 2)$

D'où l'ensemble des couples (a, b) solutions est : $S = \{(69, 66)(21, 6)\}$

EXERCICE 24

$$1) 10^3 - 1 = 9 \times 111 \quad 10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$$

n est un entier naturel quelconque

$$A = 10^{9n} + 2 \times 10^{6n} + 2 \times 10^{3n} + 1$$

$$A = (10^{3n} + 1)[10^{3n}(10^{3n} + 1) + 1]$$

On sait que $10^3 - 1 = 9 \times 111 \Rightarrow 10^3 \equiv 1(111)$

alors $10^{3n} \equiv 1(111)$ et $10^{3n} + 1 \equiv 2(111)$

par suite $A \equiv 2 \times 3(111) \Leftrightarrow A \equiv 6(111)$

2) On sait que $10^3 + 1 = 7 \times 11 \times 13$

alors $10^3 \equiv -1(7)$; $10^3 \equiv -1(11)$ et $10^3 \equiv -1(13)$

Pour tout entier impaire n , on a : $10^{3n} \equiv -1(7)$; $10^{3n} \equiv -1(11)$ et $10^{3n} \equiv -1(13)$

$10^{3n} + 1 \equiv 0(7)$, $10^{3n} + 1 \equiv 0(11)$ et $10^{3n} + 1 \equiv 0(13)$

d'où $A \equiv 0(7)$, $A \equiv 0(11)$ et $A \equiv 0(13)$

5) a) Pour tout entier naturel paire n , $10^{3n} \equiv 1(7)$; $10^{3n} \equiv 1(11)$ et $10^{3n} \equiv 1(13)$

alors $10^{3n} + 1 \equiv 2(7)$, $10^{3n} + 1 \equiv 2(11)$ et $10^{3n} + 1 \equiv 2(13)$

d'où $A \equiv 6(7)$, $A \equiv 6(11)$ et $A \equiv 6(13)$

donc $A - 6$ est divisible par 7, par 11 et par 13.

EXERCICE 25

1) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de 4^n par 7

$4^0 \equiv 1(7)$, $4 \equiv 4(7)$, $4^2 \equiv 2(7)$, $4^3 \equiv 1(7)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $4^{3k} \equiv 1(7)$, $4^{3k+1} \equiv 4(7)$, $4^{3k+2} \equiv 2(7)$ donc pour tout entier naturel n ,

$4^n \equiv r(7)$ avec $r \in \{1, 2, 4\}$

2) Déterminons suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division de

$A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2$ par 7

$$\left. \begin{array}{l} 851 \equiv 4(7) \Rightarrow 851^{3n} \equiv 4^{3n}(7) \\ 4^{3n} = (4^3)^n \equiv 1(7) \end{array} \right\} \Rightarrow 851^{3n} \equiv 1(7)$$

$$\left. \begin{array}{l} 851^{2n} \equiv 4^{2n}(7) \\ 4^{2n} = (4^2)^n \equiv 2^n(7) \end{array} \right\} \Rightarrow 851^{2n} \equiv 2^n(7)$$

$851^n \equiv 4^n(7)$

Par suite $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2 \equiv 1 + 2^n + 4^n + 2(7)$

Pour $n=0$ $A \equiv 5(7)$, pour $n=1$ $A \equiv 2(7)$, pour $n=2$ $A \equiv 2(7)$, pour $n=3$ $A \equiv 5(7)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n=3k \Rightarrow A \equiv 5(7)$, $n=3k+1 \Rightarrow A \equiv 2(7)$, $n=3k+2 \Rightarrow A \equiv 2(7)$

Donc $A \equiv r(7)$ avec $r \in \{2, 5\}$

3) $B = 2103211^4 = 2 \times 46 + 4^5 + 3 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 4 + 1$

$B = 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 1(7)$

donc $B \equiv 2(7)$

Exercice : PGCD ET PPCM

Déterminer les couples d'entiers $(a ; b)$ vérifiant :

$$1) \begin{cases} PGCD(a; b) = 27 \\ PPCM(a; b) = 108 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} a + b = 168 \\ PGCD(a; b) = 21 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} ab = 14196 \\ PGCD(a; b) = 13 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} a + b = 56 \\ PPCM(a; b) = 105 \end{cases}$$

$$5) m - 16d = 1977 \text{ où } m = PPCM(a; b) \text{ et } PGCD(a; b)$$

$$6) PGCD(a; b) + PPCM(a; b) = b + 9$$

$$7) \begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ 3m = ab \end{cases} \text{ } m \text{ étant le PPCM des entiers } a \text{ et } b$$

8) Un enfant compte ses oranges par 12, par 16, par 20. Il lui reste 8 à chaque fois.

En les comptant par 13 il lui en reste plus.

Combien d'oranges possède – t-il au moins.

9) On veut carreler une salle rectangulaire de 4,75m sur 3,61m avec des carreaux carrés dont le coté mesure un nombre entier de centimètres.

a) Quel est le plus grand coté possible du carreau a utilisé pour carreler cette salle. Combien de carreaux de ce type faut-il – commandé alors ?

INDICATION :

1°) **Poser $PGCD(a, b) = 27$ alors $a = 27a'$ et $b = 27b'$ avec $a' \ b' = 1$**
Puis $PPCM(a; b) \cdot PGCD(a; b) = ab$ on obtient $a'b' = 4$

a'	1	2	4
b'	4	2	1

En déduire a et b

2°) **Poser $PGCD(a, b) = 21$ alors $a = 21a'$ et $b = 21b'$ avec $a' \ b' = 1$**

Puis remplacer a et b dans $a + b = 168$ on obtient $a' + b' = 8$

a'	1	2	3	4	5	6	7
b'	7	6	5	4	3	2	1

En déduire a et b

3°) Poser $PGCD(a, b) = 13$ alors $a = 13a'$ et $b = 13b'$ avec $a' \cdot b' = 1$

Puis remplacer a et b dans $a \cdot b = 14196$ on obtient $a' \cdot b' = 84$

a'	1	3	4	7	12	21	28	84
b'	84	28	21	12	7	4	3	1

4) Idem à 2°)

$$8) \text{ Poser } N = \text{nombre d'oranges} \quad \begin{cases} N \equiv 8[12] \\ N \equiv 8[16] \\ N \equiv 8[20] \\ N \equiv 0[13] \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} N - 8 \equiv 0[12] \\ N - 8 \equiv 0[16] \\ N - 8 \equiv 0[20] \\ N \equiv 0[13] \end{cases}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} N - 8 \equiv 0[PPCM(12,16,20)] \\ N \equiv 0[13] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N - 8 \equiv 0[240] \\ N \equiv 0[13] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N = 240p + 8 \\ N = 13q \end{cases}$$

Avec (p, q) des entiers naturels et $PPCM(12,16,20)=240$

Poser ensuite $N=N$ on obtient $6p \equiv 5[13]$ ce qui donne $p=3$ et $N=728$ Oranges

9) a) $PGCD(361,475) = 19$ d'où des carreaux de 19cm coté

b) On obtient 19 carreaux longueur 25 carreaux en largeur soit un total de 475 carreaux en tout