

♥ Les Équations Différentielles ♥

1) Équation différentielle du 1^{er} ordre

$$y' = ay + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Solution générale :

$$y(x) = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Astuce :

On divise par a et on utilise
le facteur intégrant e^{-ax}

$$y' = ay \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Solution générale :

$$y(x) = \alpha e^{ax}, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Astuce :

$$\text{Séparable : } \frac{dy}{y} = a dx \Rightarrow \ln |y| = ax + C$$

a) $\Delta < 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow$ deux racines complexes

$$r_1 = p + iq, \quad r_2 = p - iq$$

$$\text{avec : } p = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad q = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Solution générale :

$$y(x) = e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) \\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Astuce :

Pense à Euler :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Équations Différen- tielles

2) Équation différentielle du 2^{ème} ordre

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

Équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Astuce :

On cherche les racines $\Delta = b^2 - 4ac$

· Si $\Delta < 0 \rightarrow$ 2 racines complexes

· Si $\Delta = 0 \rightarrow$ 1 racine double

· Si $\Delta > 0 \rightarrow$ 2 racines réelles distinctes

b) $\Delta = 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ racine double

$$r_0 = -\frac{b}{2a}$$

Solution générale :

$$y(x) = e^{r_0 x} (\alpha x + \beta) \\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Astuce :

Quand $\Delta = 0$, on multiplie
la solution par x

c) $\Delta > 0$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ deux racines réelles
distinctes

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Solution générale :

$$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Astuce :

Utilise bien les formules pour r_1
et r_2 , ne te trompe pas de signes !

Exemples

$$\text{Ex 1 : } y' = 2y + 4$$

$$a = 2, \quad b = 4$$

$$y(x) = \alpha e^{2x} - \frac{4}{2} = \alpha e^{2x} - 2$$

$$\text{Ex 2 : } y'' - 4y = 0$$

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -4$$

$$\Delta = 0^2 - 4(1)(-4) = 16 > 0$$

$$r_1 = 2, \quad r_2 = -2$$

$$y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$$

$$\text{Ex 3 : } y'' + 4y = 0$$

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = 4$$

$$\Delta = 0 - 4(1)(4) = -16 < 0$$

$$p = 0, \quad q = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

$$y(x) = \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$$

Crois en toi

Sois régulier, curieux et positif!
Tu vas y arriver

Les maths, c'est logique
et tout le monde peut comprendre !

CAS 1 : $y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}$)

Méthode (Séparation des variables)

① $y' = ay \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ay$

② $\frac{dy}{y} = a dx$ ($y \neq 0$)

③ $\int \frac{dy}{y} = \int a dx$

④ $\ln |y| = ax + C$

⑤ $y = Ce^{ax}$ ($C \in \mathbb{R}^*$)

Exercice : Résoudre $y' = 3y$

Solution :

• $\frac{dy}{dx} = 3y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 3 dx$

• $\int \frac{dy}{y} = \int 3 dx \Rightarrow \ln |y| = 3x + C$

• $y = Ce^{3x}$ ($C \in \mathbb{R}^*$)

Vérification :

✓ $y = Ce^{3x} \Rightarrow y' = 3Ce^{3x}$

✓ $3y = 3(Ce^{3x}) = 3Ce^{3x} = y'$ ✓

Astuce :

Pour $y' = ay$, on a toujours

$$y = Ce^{ax}$$

À retenir :

• Si $a > 0 \Rightarrow y = Ce^{ax}$ croît

• Si $a < 0 \Rightarrow y = Ce^{ax}$ décroît

• Si $a = 0 \Rightarrow y = C$ (constante)

CAS 2 : $y' = ay + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

Méthode (Facteur intégrant)

① $y' - ay = b$

② Facteur intégrant : e^{-ax}

③ $(ye^{-ax})' = be^{-ax}$

④ $ye^{-ax} = \int be^{-ax} dx = -\frac{b}{a} e^{-ax} + C$

⑤ $y = -\frac{b}{a} + Ce^{ax}$ ($a \neq 0$)

Exercice : Résoudre $y' - 2y = 4$

Solution :

• $y' - 2y = 4$

• Facteur intégrant : e^{-2x}

• $(ye^{-2x})' = 4e^{-2x}$

• $ye^{-2x} = \int 4e^{-2x} dx = -2e^{-2x} + C$

• $y = -2 + Ce^{2x}$ ($C \in \mathbb{R}$)

Vérification :

✓ $y = -2 + Ce^{2x} \Rightarrow y' = 2Ce^{2x}$

✓ $y' - 2y = 2Ce^{2x} - 2(-2 + Ce^{2x})$
 $= 2Ce^{2x} + 4 - 2Ce^{2x} = 4$ ✓

Astuce :

La solution générale de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$)

est toujours : $y = -\frac{b}{a} + Ce^{ax}$

À retenir :

• $-\frac{b}{a}$ est la solution particulière (constante)

• Ce^{ax} est la solution de l'équation homogène

• La solution générale = particulière + homogène

Sois régulier, curieux et positif!

Tu vas y arriver

Exercices Corrigés

Équations Différentielles du 2^{ee} ordre : $\Delta > 0$

♥ Deux racines réelles distinctes ♥

CAS 1 : $y'' - 5y' + 6y = 0$

Méthode :

- ① Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$
Ici : $r^2 - 5r + 6 = 0$
- ② Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$
 $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 > 0$
- ③ Racines : $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
 $r_1 = \frac{5 - 1}{2} = 2$, $r_2 = \frac{5 + 1}{2} = 3$
- ④ Solution générale : $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$

Exercice : Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 0$

Solution :

- Équation caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = 0$
- $\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 > 0$
- $r_1 = 2$, $r_2 = 3$
- Donc la solution générale est :

$$y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Vérification : (on vérifie que la solution convient)

- ✓ Soit $y = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$
- $y' = 2\alpha e^{2x} + 3\beta e^{3x}$
- $y'' = 4\alpha e^{2x} + 9\beta e^{3x}$
- $y'' - 5y' + 6y = (4\alpha e^{2x} + 9\beta e^{3x}) - 5(2\alpha e^{2x} + 3\beta e^{3x}) + 6(\alpha e^{2x} + \beta e^{3x})$
 $= (4 - 10 + 6)\alpha e^{2x} + (9 - 15 + 6)\beta e^{3x} = 0$ ✓

Astuce : Trouver r_1 et r_2 rapidement !

- On cherche deux nombres dont :
 - la somme $= -\frac{b}{a} = 5$
 - le produit $= \frac{c}{a} = 6$
- Ces nombres sont 2 et 3 ($2 + 3 = 5$ et $2 \times 3 = 6$)
- Donc $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ sans calcul du discriminant

CAS 2 : $y'' + 2y' - 8y = 0$

Méthode :

- ① Équation caractéristique : $r^2 + 2r - 8 = 0$
- ② Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$
 $\Delta = 2^2 - 4(1)(-8) = 4 + 32 = 36 > 0$
- ③ Racines : $r_1 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2}$, $r_2 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2}$
 $r_1 = \frac{-2 - 6}{2} = -4$, $r_2 = \frac{-2 + 6}{2} = 2$
- ④ Solution générale : $y(x) = \alpha e^{-4x} + \beta e^{2x}$

Exercice : Résoudre $y'' + 2y' - 8y = 0$

Solution :

- Équation caractéristique : $r^2 + 2r - 8 = 0$
- $\Delta = 2^2 - 4(1)(-8) = 4 + 32 = 36 > 0$
- $r_1 = -4$, $r_2 = 2$
- Donc la solution générale est :

$$y(x) = \alpha e^{-4x} + \beta e^{2x} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Vérification :

- ✓ Soit $y = \alpha e^{-4x} + \beta e^{2x}$
- $y' = -4\alpha e^{-4x} + 2\beta e^{2x}$
- $y'' = 16\alpha e^{-4x} + 4\beta e^{2x}$
- $y'' + 2y' - 8y = (16\alpha e^{-4x} + 4\beta e^{2x}) + 2(-4\alpha e^{-4x} + 2\beta e^{2x}) - 8(\alpha e^{-4x} + \beta e^{2x})$
 $= (16 - 8 - 8)\alpha e^{-4x} + (4 + 4 - 8)\beta e^{2x} = 0$ ✓

Astuce : Attention aux signes ! $\triangle$

- Bien écrire l'équation caractéristique.
- Ne pas oublier les signes de b et c.
- Vérifier que $\Delta > 0$ sinon ce n'est pas ce cas.

Sois régulier, curieux et positif ! Tu vas y arriver