

Fiche de révision n°11

Exercice

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{-u_n+2}{-2u_n+3}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leq 1$.
- 2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- 3) La suite (u_n) est-elle convergente ?
- 4) On introduit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{1}{u_n-1}$.
 - a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .
 - b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- 5) Etudier la convergence de la suite (u_n) .
- 6) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n .

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$ et on note (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

Partie A : Etude de la fonction f

- 1) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2) Démontrer que la droite $(\Delta) : y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$. Préciser la position de (C_f) par rapport à (Δ) .
- 3) On note f' et f'' les dérivées première et seconde de f .
 - a) Calculer f' et f'' .
 - b) Etudier les variations de f' et dresser son tableau de variations.
 - c) Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f' suivant les valeurs de x .
 - d) Dresser le tableau de variations de f .
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β et que : $1,9 \leq \alpha \leq 2$ et $-0,6 \leq \beta \leq -0,5$.
- 5) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.
- 6) Tracer la courbe (C_f) .

Partie B : On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$.

- 1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$ sur $[0; +\infty[$.
- 2) Etudier les variations de g .
- 3) Soit $I = [1,9; 2]$.
 - a) Montrer que, $\forall x \in I, g(x) \in I$.
 - b) Montrer que, $\forall x \in I, |g'(x)| \leq \frac{1}{9}$.
- 4) Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
 - a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
 - b) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$.
 - c) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$.
 - d) En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

Partie C : Calcul d'aire

- 1) En intégrant par parties, calculer $J = \int_1^\alpha xe^{x-1} dx$.
- 2) Calculer, en unité d'aires, l'aire de la portion du plan limitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.