

ACCADEMIE RIVE GAUCHE
LYCEE TECHNIQUE DE BAMAKO
DUREE : 03H

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

1°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f puis calculer f'(x) dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \frac{1 - \ln x}{(1 - 2x)^2}$ b) $f(x) = \ln \left| \frac{4x - 12}{1 - x^2} \right|$ c) $f(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{2 - x}}$

2°) Calculer la limite de la fonction h en x_0 dans chacun cas suivants :

a) $h(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$; $x_0 = +\infty$ b) $h(x) = \frac{\ln x + x^2 - 3x + 2}{x - 1}$; $x_0 = 1$

3) Déterminer une primitive F de f sur I dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = (\cos^3 x)(\sin x)$ I = $[0 ; \pi]$; b) $f(x) = \frac{2 \ln x}{x} \left(\sqrt{3} \ln x + \frac{1}{2} \right)$ I = $[2 ; +\infty[$

4) soit q la fonction définie sur $[2 ; 10]$ par : $q(x) = \frac{3x^2 - 4x + 2}{(x - 1)^3}$

a) Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout $x \in [2 ; 10]$

$$q(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3}$$

la primitive Q de q sur $[2 ; 10]$ dont la courbe passe

b) Trouver

par le point $A \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

5) a) Résoudre dans IR :

$a_1) \ln(x-1) + \ln\left(\frac{2}{x}\right) = 0$ $a_2) (\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

b)

Soit p la fonction polynôme définie par :

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$$

b₁) Calculer $p(1)$ puis factoriser $p(x)$.

b₂) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$p(x) = 0 \text{ puis } p(x) < 0$$

b₃) En déduire une résolution dans $\mathbb{R}$ de :

$$2(\ln x)^2 + \ln x = \frac{5\ln x - 2}{\ln x}$$

$$2[(\ln x)^3 + 1] < 5\ln x - (\ln x)^2$$

Problème

A) Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 + \ln x - 1$.

1°) Quel l'ensemble de g .

2°) Dresser le tableau de variation de g .

3°) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$

Montrer que g est bijective puis calculer $(g^{-1})'(0)$, (où g^{-1} désigne la bijection réciproque de g).

4°) a) Montrer que $\forall x \in [1; 2], 2 < g'(x) \leq 5$

b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall x \in [1; 2], 2(x-1) < g(x) \leq 5(x-1)$

B Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - 3 - \frac{\ln x}{x}$

On note (Γ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère ortho normal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

1°) Quel l'ensemble de définition D de f .

2°) Déterminer les limites de f aux bornes de D

3°) Montre que la droite Δ d'équation $y = x - 3$ est asymptote à (Γ) puis étudier la position de (Γ) par rapport à Δ

4°) a) Calculer $f'(x)$ et montre $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que l'équation : $x \in D, f(x) = 0$ admet deux solutions α et β tels que : $0 < \alpha < 1$ et $3 < \beta < 4$

5°) Tracer (Γ) et Δ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$