

Devoir de Mathématiques

Classe : MTGC et MTI

Durée : 02 heures

Exercice1:

1. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :(1.5pt)

$$A = (3 - 2i)(1 + i) ; B = \frac{1 - 2i}{2 + i} \quad C = (3 + 4i)^3$$

2. On donne les nombres complexes $a = 1 + i\sqrt{3}$; $b = 1 + i$; $c = ab$; $d = \frac{a}{b}$

a) Ecrire sous forme algébrique, trigonométrique puis exponentielle les nombres complexes a , b , c , et d . (2pts)

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \quad (1pt)$$

3. Déterminer le module et un argument de $z = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1 + i\sin\frac{\pi}{6}$ (0.5pt)

Exercice2 :

1. On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + (-4 + i)z + 5 + i = 0$

Résoudre l'équation (E) (2pts)

2. a-) Calculer $(1 + 3i)^4$ (0.5pt)

b-) Déterminer les racines quatrièmes de 1 et en déduire les solutions de l'équation : $z \in \mathbb{C}$, $(z - i)^4 = 28 - 96i$ (1.5pt)

3. Déterminer l'entier naturel n tel que $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$ soit réel (1pt)

Exercice3 :

1. Linéariser $(\cos 2x)^2 (\sin x)^3$ (2pts)

2. Soit l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - (5 + i)z^2 + 2(5 + 3i)z - 8(1 + 2i) = 0$

a-) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure (1pt)

b-) En déduire une résolution de l'équation (E) (3pts)

c-) Soit A le point image de la solution imaginaire pure, B celui dont la partie imaginaire est positive et C celui dont la partie imaginaire est négative.

-Déterminer la nature du triangle ABC (1pt)

-Démontrer que les points A, B, C appartiennent à même cercle dont on précisera le centre et rayon (1pt)

-Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un parallélogramme (1pt)

-Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$\arg\left(\frac{z - 2i}{z - 3 - i}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \text{ est un entier relatif} \quad (1pt)$$