

DEVOIR SURVEILLESÉRIE : 12^{ème} STI

DURÉE : 4 HEURES

LYCEE technique

Année Scolaire 2016/2017

COEFF : 04

EXERCICE (8 points)A) On considère la fonction polynôme définie par : $p(x) = 3x^3 - 8x^2 - x + 10$ 1) a) calculez $p(2)$ b) Déterminez les réels $a; b; \text{ et } c$ tels que $p(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$ c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $p(x) = 0; p(x) \leq 0$ 2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des équations et inéquations

a) $3e^{2x} - 8e^x + 10e^{-x} - 1 = 0$

b) $3 \times 8^x - 8 \times 4^x - 2^x + 10 = 0$

c) $3(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 - \ln x + 10 \leq 0$

B) Soit $p(h)$ et $q(h)$ les polynômes définis sur $[0; +\infty[$ par :

$$p(h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \text{ et } q(h) = p(h) - \frac{h^4}{4} \text{ et } f \text{ la fonction définie sur } [0; +\infty[\text{ par } f(h) = \ln(1 + h)$$

1) tracez dans un repère orthonormal, les courbes représentant les fonctions p, q et f . Que remarquez-vous ?2) On pose $u(h) = \ln(1 + h) - p(h)$ et $v(h) = \ln(1 + h) - q(h)$ a) Etudiez les variations des fonctions u et v b) Calculez $u(0); v(0)$ et déterminer les signes de $u(h)$ et $v(h)$ pour tout h de $[0; +\infty[$ c) Démontrer que, pour tout h de $[0; +\infty[$:

$$h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} \leq \ln(1 + h) \leq h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}$$

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x(\ln x + \frac{1}{x})$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthogonal unités : 4cm en abscisse et 1 cm en ordonnées

1) Etude des limites de f

a) Calculer la limite de f en $+\infty$

b) En remarquant que, pour tout x de $]0; +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{e^x}{x}(x \ln x + 1)$

calculer la limite de f en 0 et interpréter le résultat obtenu.

2) Fonction dérivée de f

Soit f' la dérivée de f ; démontrer que tout x de $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = (\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})e^x$$

3) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$, par $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

a) Dressez le tableau de variation de g

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a une et une seule solution notée α sur $]0; +\infty[$,

c) Déterminez le nombre entier n tel que : $\frac{n}{100} \leq \alpha \leq \frac{n+1}{100}$

d) Déduisez-en, suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$

4) Tableau de variation de f

a) Dresser le tableau de variation de f

b) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{(1-\alpha)e^\alpha}{\alpha^2}$

c) De l'encadrement obtenu pour α , déduisez un encadrement de $f(\alpha)$

5) Courbe représentative de f

Tracez la courbe (C) de f

2h30

Série : Terminale STI

Exercice 1 : 3pts

Une source sonore émet un son dont l'intensité est de 1000 décibels. Une plaque d'isolation phonique absorbe 45% de l'intensité du son.

Déterminer le nombre minimal de plaques que doit traverser le son pour que son intensité soit inférieure ou égale au dixième de sa valeur initiale.

Exercice 2 : 5pts

Soit la fonction f définie par $f(x) = x \ln(x) - x$. Sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$.

1) Montrer que f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$ pour $x \in I$.

2) Calculez les limites de f aux bornes de I .

Prolongez par continuité la fonction f en zéro.

Soit h la fonction ainsi définie sur $[0 ; +\infty[$.

3) Etudiez les variations de h sur $[0 ; +\infty[$.

Problème : 12pts

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$

1) Calculez $f'(x)$ et $f''(x)$.

2) Soit g la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

a) Etudiez les variations de la fonction g' sur $[0 ; 1]$ et donnez son signe.

b) En utilisant les variations de g , prouvez que l'équation $f(x) = x$ admet, dans $[0 ; 1]$ une solution α et une seule.

3) a) En déduire les variations de f

b) Tracez la courbe C représentative de f dans un repère ortho normal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 10 cm) et la droite Δ d'équation $y = x$.

c) Représentez sur l'axe $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les premiers termes des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0, v_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geq 1, u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = f(v_n)$.

4) a) On considère des nombres réels x' et x'' tels que : $0 \leq x' \leq \alpha \leq x'' \leq 1$.

Etablir que $x' \leq f(x') \leq \alpha \leq f(x'') \leq x''$.

b) En déduire que la suite (u_n) est croissante, que la suite (v_n) est décroissante et que, pour tout $n \geq 0, u_n \leq \alpha \leq v_n$.

c) Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) convergent.

5) a) Etablir que pour tout élément x de $[0 ; 1], \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 0, v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(v_n - u_n)$ puis $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c) Déterminez un entier n_0 tel que $v_{n_0} - u_{n_0} \leq 10^{-3}$.

d) Donnez un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3} et proposez une valeur approchée de α .

LYCEE TECHNIQUE DE BAMAKO (LTB)

DEVOIR :	SURVEILLE	DATE:	15 MARS 2021
ÉPREUVE DE :	Mathématiques		
SÉRIE :	Terminale STI	DURÉE :	03 heures
		COEF :	04

EXERCICE : 8points

- On donne $z_1 = 1$; $z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_3 = \frac{5+i\sqrt{3}}{4}$; écris sous forme algébrique $Z = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ (4pts)
- Ecris sous forme trigonométrique $z = 2(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4})$ (1,5pt)
- Détermine le module et l'argument de $z = 1 + \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$ (1,5pt)
- Calcule $(2 + 3i)^3$ et en déduis les racines cubiques de $-46 + 9i$ (3pts)
- Linéarise $\cos^2 \frac{2\theta}{3} \times \sin^3 \frac{2\theta}{3}$ (2pts) (4pts)

PROBLEME 12points

PARTIE A

Soit l'application $f: p \rightarrow p; M(z) \mapsto M'(z')$ avec $z' = \frac{z-4-2i}{z+2i}$

On donne les points A, B, C d'affixes $z_A = -2i$; $z_B = 4 - 2i$; $z_C = 4 + 2i$

- Détermine les images B' et C' des points B et C avec f (1pt)
- Interprète géométriquement $|z'|$ et $\arg(z')$ (1pt)
- Montre que A, B' et C' sont alignés (1pt)
- Détermine la nature du triangle $B'DC'$ (1pt)
- Détermine l'ensemble des points M du plan tel que $|z'| = 1$; z' soit un réel (2pts)

PARTIE B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct. On considère l'équation (E): $z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$

- Montre que l'équation (E) admet une solution de la forme $z_0 = ib$; où b est un réel à déterminer (1pt)
- Dans la suite on prendra $b = -1$; en déduis une factorisation du polynôme $p(z) = z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i$ (1pt)
- Finalise alors la résolution de l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes. (2pts)
- On appelle A, B, C les points d'affixes respectives $4 + i$; $4 - i$; et $-i$
 - Soit D le point d'affixe 2; on appelle S le point tel que le triangle DAS soit rectangle isocèle direct en D ; calcule l'affixe de S (1pt)
 - Démontre que les points B, A, S, C appartiennent au cercle de centre $K(2; 0)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$ (1pt)

Exercice : (8 points)

1) $z_1 = 1$; $z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_3 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{4}$

Ecrivons sous forme algébrique $Z = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

$$Z = \frac{\frac{5 + i\sqrt{3}}{4} - 1}{1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - 1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4(\sqrt{2} + i\sqrt{2})} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{4(4)} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} + \sqrt{6}}{16} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{16} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{16}i$$

$$Z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{16} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{16}i$$

2) Ecrivons sous forme trigonométrique $z = 2(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4})$

$$z = 2[\cos \frac{\pi}{4} - i \sin(\pi - \frac{\pi}{4})] = 2[\cos(\frac{\pi}{4}) - i \sin(\frac{\pi}{4})] = 2[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})]$$

$$z = 2[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})] \quad (1)$$

3) Déterminons le module et l'argument de $z = 1 + \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$

$$z = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - i 2\cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} = 2\cos \frac{\pi}{8} (\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8})$$

$$0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{8} > 0 ; z = 2\cos \frac{\pi}{8} [\cos(-\frac{\pi}{8}) + i \sin(-\frac{\pi}{8})]$$

$$|z| = 2\cos \frac{\pi}{8} \text{ et } \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{8} \quad (1)$$

4) calculons $(2+3i)^3$

$$(2+3i)^3 = (2+3i)^2(2+3i) = (4+12i-9)(2+3i) = (-5+12i)(2+3i) = -10-15i+24i-36 = -46+9i$$

$$(2+3i)^3 = -46+9i \quad (1)$$

En déduisons les racines cubiques de $-46+9i$

$$(2+3i)^3 = -46+9i \Rightarrow 2+3i \text{ est une racine cubique de } -46+9i$$

Pour trouver les racines cubiques de $-46+9i$ on multiplie $2+3i$ par les racines cubiques de l'unité.

Cherchons les racines cubiques de l'unité

$$z_k = \cos(\frac{2k\pi}{3}) + i \sin(\frac{2k\pi}{3}) \text{ avec } k \in \{0, 1, 2\}$$

Pour $k=0$; $z_0 = \cos 0 + i \sin 0 \Rightarrow z_0 = 1$

Pour $k=1$; $z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (1)$

Pour $k=2$; $z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \Rightarrow z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

les racines cubiques de $-46+9i$ sont :

$$z'_0 = (2+3i) \times 1 \Rightarrow z'_0 = 2+3i$$

$$z'_1 = (2+3i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \Rightarrow z'_1 = -1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} + i(\sqrt{3} - \frac{3}{2})$$

(1)

$$z'_2 = (2+3i)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) \Rightarrow z'_2 = -1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + i(-\sqrt{3} - \frac{3}{2})$$

5) Linearisons

$$\cos^2 \frac{2\theta}{3} \times \sin^3 \frac{2\theta}{3}$$

$$\cos^2 \frac{2\theta}{3} \sin^3 \frac{2\theta}{3} = \left(\frac{e^{i\frac{2\theta}{3}} + e^{-i\frac{2\theta}{3}}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{i\frac{2\theta}{3}} - e^{-i\frac{2\theta}{3}}}{2i} \right)^3$$

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \frac{2\theta}{3} \times \sin^3 \frac{2\theta}{3} &= \frac{1}{4} (e^{i\frac{4\theta}{3}} + 2e^{i\frac{2\theta}{3}} + e^{i\frac{0\theta}{3}}) \left(-\frac{1}{8i}\right) (e^{i\frac{6\theta}{3}} - 3e^{i\frac{4\theta}{3}} + 3e^{i\frac{2\theta}{3}} - e^{i\frac{0\theta}{3}}) \\
 &= -\frac{1}{32i} (e^{i\frac{4\theta}{3}} + 2 + e^{-i\frac{4\theta}{3}}) (e^{i2\theta} - 3e^{i\frac{2\theta}{3}} + 3e^{-i\frac{2\theta}{3}} - e^{-i2\theta}) \\
 &= -\frac{1}{32i} (e^{i\frac{10\theta}{3}} - 3e^{i2\theta} + 3e^{i\frac{2\theta}{3}} - e^{-i\frac{2\theta}{3}} + 2e^{i2\theta} - 6e^{i\frac{2\theta}{3}} + 6e^{-i\frac{2\theta}{3}} - 2e^{-i2\theta} + e^{-i\frac{2\theta}{3}} - 3e^{-i2\theta} - e^{-i\frac{10\theta}{3}}) \\
 &= -\frac{1}{32i} [(e^{i\frac{10\theta}{3}} - e^{-i\frac{10\theta}{3}}) - (e^{i2\theta} - e^{-i2\theta}) - 2(e^{i\frac{2\theta}{3}} - e^{-i\frac{2\theta}{3}})] \\
 &= -\frac{1}{32i} (2i \sin \frac{10\theta}{3} - 2i \sin 2\theta - 4i \sin \frac{2\theta}{3}) = -\frac{1}{16} (\sin \frac{10\theta}{3} - \sin 2\theta - 2 \sin \frac{2\theta}{3}) \\
 \cos^2 \frac{2\theta}{3} \sin^3 \frac{2\theta}{3} &= -\frac{1}{16} (\sin \frac{10\theta}{3} - \sin 2\theta - 2 \sin \frac{2\theta}{3}) \quad (15)
 \end{aligned}$$

Problème : (12 pts)

Partie A

$f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P} \quad M(z) \mapsto M'(z')$ avec $z' = \frac{z-4-i}{z+i}$

$z_A = -i$; $z_B = 4-i$; $z_C = 4+i$

a) Déterminons les images B' et C' des pts B et C par f .

$z_{B'} = \frac{z_B - 4 - i}{z_B + i} = \frac{4-i-4-i}{4-i+i} = \frac{-4i}{4} = -i$ $z_{B'} = -i \quad B'(-i)$ (0,5)

$z_{C'} = \frac{z_C - 4 - i}{z_C + i} = \frac{4+i-4-i}{4+i+i} = 0$ $z_{C'} = 0 \quad C'(0)$ (0,5)

b) Interprétons géométriquement : $|z'|$ et $\arg(z')$

$|z'| = \left| \frac{z-z_C}{z-z_A} \right| = \frac{|z-z_C|}{|z-z_A|} = \frac{CM}{AM}$ (0,5)

$\arg(z') = \arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_A}\right) = \text{mes}(\widehat{AM}; \widehat{CM})$ (0,5)

c) Montrons que A, B' et C' sont alignés :

$\frac{z_{C'} - z_A}{z_{C'} - z_{B'}} = \frac{0+i}{0-i} = 2 \in \mathbb{R}^+$ alors A, B' et C' sont alignés (1)

d) Déterminons la nature du triangle BCC'

$BC = |z_C - z_B| = |4+i-4-i| = |2i| = 2$

$BC' = |z_{C'} - z_B| = |0-4-i| = \sqrt{20}$

$CC' = |z_{C'} - z_C| = |0-4-i| = \sqrt{20}$

$BC' = CC' = \sqrt{20}$ alors BCC' est un triangle isocèle en C' (1)

e) Déterminons l'ensemble des pts M :

$|z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{CM}{AM} = 1 \Leftrightarrow CM = AM$ alors l'ensemble des pts M est la médiatrice du segment $[CA]$ (1)

z' est réel $\Leftrightarrow z' = 0$ ou $\arg(z') = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ alors l'ensemble des pts est la droite (AC) privée du pt $A(0)$ (1)

Problème

(3)

Partie B

$$(E): z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$$

1) Montrons que l'équation (E) admet une solution de la forme $z_0 = ib$

$$(ib)^3 + (-8+i)(ib)^2 + (17-8i)ib + 17i = 0$$

$$\Leftrightarrow -ib^3 + 8b^2 - ib^2 + 17ib + 8b + 17i = 0$$

$$\Leftrightarrow 8b^2 + 8b + i(-b^3 - b^2 + 17b + 17) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8b^2 + 8b = 0 & (1) \\ -b^3 - b^2 + 17b + 17 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 8b^2 + 8b = 0$$

$$8b(b+1) = 0$$

$$b = 0 \text{ ou } b = -1$$

$$(2) \quad -(-1)^3 - (-1)^2 + 17(-1) + 17 = 0$$

$$0 = 0 \text{ Vraie}$$

$b = -1$ vérifie l'équation

$$\text{Alors } \boxed{b = -1; z_0 = -i} \quad (1)$$

2) $b = -1$ factorisons $P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$

	1	-8+i	17-8i	17i
-i	1	-i	8i	-17i
	1	-8	17	0

$$P(z) = (z+i)(z^2 - 8z + 17) \quad (1)$$

3) Résolution de l'équation (E)

$$(z+i)(z^2 - 8z + 17) = 0$$

$$z+i=0 \text{ ou } z^2 - 8z + 17 = 0$$

$$z = -i$$

$$\Delta = 64 - 68 = -4 = 4i^2 = (2i)^2$$

$$z_1 = \frac{8-2i}{2} = 4-i; z_2 = 4+i$$

$$\boxed{S = \{-i, 4-i, 4+i\}} \quad (2)$$

4) A(4+i) B(4-i) C(-i)

a) D(2); S le pt tel que DAS soit rectangle isocèle direct en D.
calculons l'abscisse de S

$$\text{DAS rectangle isocèle direct en D} \Rightarrow \begin{cases} DA = DS \\ \text{mes}(\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{DS'}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{z_S - z_D}{z_A - z_D} = i$$

$$z_S - z_D = i(z_A - z_D) \Rightarrow z_S = i(4+i-2) + 2 = 1+2i \quad (1)$$

b) Démontrons que les pts B, A, S, C appartiennent au cercle de centre K(2;0) et de rayon $R = \sqrt{5}$

$$KB = |z_B - z_K| = |4-i-2| = |2-i| = \sqrt{5}$$

$$KA = |z_A - z_K| = |4+i-2| = |2+i| = \sqrt{5}$$

$$KS = |z_S - z_K| = |1+2i-2| = |-1+2i| = \sqrt{5}$$

$$KC = |z_C - z_K| = |-i-2| = \sqrt{5}$$

$KB = KA = KS = KC = \sqrt{5} = R$ alors B, A, S, C appartiennent au cercle de centre K(2;0) et de rayon $R = \sqrt{5}$ (1)