

Exercice n°1 : (7,5 points)

A) On pose $a = \sqrt{2}(1 + i)$; $b = \sqrt{3} + i$; $c = a^3b$.

1) Déterminer le module et un argument de a et b. (1pt)

2) Ecrire le nombre c sous forme trigonométrique. (1.5pt)

3) Calculer c sous forme algébrique. (1pt)

4) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$. (1pt)

5) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la plus petite valeur de n telle que c^n soit réel. (1pt)

B) 1) Linéariser l'expression $A(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)\sin x$. (1pt)

2) En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ et } \sin 2x = 2\sin x \cos x. \text{ (1pt)}$$

Exercice n°2 : (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 3 + i$; $z_B = 2i$, $z_C = 2 - 2i$

1) Placer ces points dans le repère. (1pt)

2) Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. En déduire la nature précise du triangle ABC (1pt)

3) Déterminer l'affixe de D tel que ABDC soit un parallélogramme. (1pt)

4) Déterminer puis construire les ensembles suivants :

(D) : ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - 3 - i| = |z - 2i|$ (1pt)

(E) : ensemble des points M d'affixe z telle que $\arg\left(\frac{z-3-i}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ (1pt)

Exercice n°3 : (7,5 points)

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité 2cm.

On considère l'application f de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{C}$ telle que $f(z) = z + \frac{4}{z}$

1) Calculer $f(i)$ et $f(1 + i)$ sous forme algébrique. (1,5pts)

2) A tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = f(z)$.

On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. $Re(z)$ est la partie imaginaire de z .

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y . (2pts)

b) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tel que z' soit imaginaire. (1pt)

c) Soit (H) l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $f(z) = 2Re(z)$.

Montrer que $M \in (H) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4 = 0$. (1pt)

En déduire la nature de (H) puis construire cet ensemble. (1pt)

3) Montrer que si $OM = 1$ alors $MM' = 4$. (1pt)