

APPLICATION AFFINE

EXERCICE 1 :

1. a. Trouve l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{U} \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{2} \right)$
b. Dédus l'image A' du points $A(1; 2)$ par cette translation
2. Trouve l'expression analytique de la projection orthogonale d'axe $(\Delta) : -x + y - 1 = 0$
3. Trouve l'expression analytique de la projection d'axe $(\Delta) : -x + y - 1 = 0$ parallèlement à la droite (D) d'équation $x + 4y = 0$
4. Trouve l'expression analytique de l'homothétie h de centre $\Omega \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de rapport -2
5. Trouve l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe $(D) : x - 2y = 0$
6. Trouve l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe $(d) : x = \frac{1}{2}$
7. Trouve l'expression analytique de la symétrie d'axe $(\Delta) : x - 2y = 0$ parallèlement à la droite (D) d'équation $x + y + 1 = 0$
8. Trouve l'expression analytique de la rotation de centre $O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$
9. Trouve l'expression analytique de la rotation de centre $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$
10. Détermine l'expression analytique projection orthogonale sur le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $x + y - z + 2 = 0$
11. Détermine l'expression analytique de la projection sur le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $2x + 2y - z + 1 = 0$ parallèlement à la droite (Δ) d'équation
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$
12. Détermine l'expression analytique projection sur la droite (D) d'équation
$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$
 parallèlement au plan (Π) , d'équation $x - 4y + 1 = 0$
13. Détermine l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{U} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
14. Détermine l'expression analytique de l'homothétie de centre $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de rapport $k = \frac{1}{3}$
15. Détermine l'expression analytique de la symétrie orthogonale-plan de base (P) d'équation : $x + y - z + 1 = 0$

EXERCICE 2 : Soit P la projection orthogonale

d'expression analytique
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{10}(9x + 3y - 1) \\ y' = \frac{1}{10}(3x + y + 3) \end{cases}$$

1. Détermine les points invariants par la projection P
2. Détermine $P \circ P$

EXERCICE 3 :

On considère l'application affine f définie du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x; y)$ associe le point

$M'(x'; y')$ tel que
$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \end{cases}$$

1. Détermine l'ensemble des points invariants par f
2. Détermine la matrice de l'application linéaire associée à f
3. Montre que f est une isométrie.
4. En-dédus la nature et les éléments caractéristiques de f

EXERCICE 4 :

On considère l'application affine f définie du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x; y)$ associe le point

$M'(x'; y')$ tel que
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2) \end{cases}$$

1. Quel est la nature de f ?
2. Détermine les éléments caractéristiques de f

EXERCICE 5 :

On considère l'application affine f définie du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x; y)$ associe le point

$M'(x'; y')$ tel que
$$\begin{cases} x' = -x + \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} \\ y' = -\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1. f est-elle bijective ? Justifie la réponse
2. Détermine l'ensemble des points invariants par f
3. On désigne par z et z' les affixes respectives des points M et M' . Exprime z' en fonction de z
4. En-dédus la nature et les éléments caractéristiques de f

EXERCICE 6 :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application affine f définie du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x; y)$ associe le point

$M'(x'; y')$ tel que
$$\begin{cases} x' = -\frac{6}{5}x + \frac{8}{5}y - \frac{8}{5} \\ y' = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y - \frac{1}{5} \end{cases}$$

1. a. f est-elle bijective ? Justifie la réponse
b. Détermine l'ensemble des points invariants par f
c. Détermine l'image par f de la droite $(D) : y = 2x + 1$
2. On désigne par $M(x; y)$ le point d'affixe z et par $M'(x'; y')$ le point d'affixe z' où z et z' sont deux nombres complexes
a. Sachant que $f(M) = M'$, exprime z' en fonction de z
b. En-dédus la nature et les éléments caractéristiques de f

EXERCICE 7 : On considère l'application affine f définie du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point $M(x; y)$

associe le point $M'(x'; y')$ tel que
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

- Démontre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera
- Démontre que $f \circ f = f$
- a. Détermine l'ensemble des points invariants par f
b. En-déduis la nature et les éléments caractéristiques de f

EXERCICE 8 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x; y)$ fait correspondre le point

$M'(x'; y')$ tel que
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x - 4y + 3) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y + 14) \end{cases}$$

- Démontre que f est un antidéplacement.
- a. Démontre qu'il existe une droite (Δ) et un vecteur $\vec{u}$ de la direction de (Δ) tels que $f = s \circ t = t \circ s$ où s est la symétrie orthogonale de base (Δ) et t la translation de vecteur $\vec{u}$
b. Détermine une équation de la droite (Δ) et les composantes du vecteur $\vec{u}$

EXERCICE 9 :

Dans le plan orienté, $AFED$ est un carré de côté 1 tel que $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}$

Soit l la longueur du segment $[AB]$ du rectangle $ABCD$.

$(l > 1)$

- On suppose qu'il existe une similitude directe f transformant respectivement les points A, B, C, D en B, C, E, F . Détermine la valeur de l
- a. Quels sont l'angle et le rapport de la similitude f ?
b. Montre que le centre de la similitude f est le point d'intersection des droites (AC) et (EB) . On pourra utiliser $f \circ f$

- A tout point $M(z)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AD})$ on fait correspondre le point $g(M)$ d'affixe

$$z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}iz + \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

- Montre que g est une similitude directe dont on donnera le centre, l'angle et le rapport
- Détermine les images par g des points A, B, C, D

EXERCICE 10 : Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x; y)$ fait correspondre le

point $M'(x'; y')$ tel que
$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + 1 \\ y' = x - 2y + 2 \end{cases}$$

- Démontre f est bijective puis détermine sa bijection réciproque f^{-1}
- Détermine l'ensemble des points invariants par f
- f est-elle un antidéplacement? Justifie la réponse

- En-déduis qu'il existe une droite (Δ) et un vecteur $\vec{u}$ de la direction de (Δ) tels que $f = s \circ t = t \circ s$ où s est la symétrie orthogonale de base (Δ) et t la translation de vecteur $\vec{u}$
- Quelle est donc la nature de f ?
- Détermine l'équation de la droite (Δ) et les composantes du vecteur $\vec{u}$

EXERCICE 11 : Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et soit f_α l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x; y)$ fait correspondre le

point $M'(x'; y')$ tel que
$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

- Démontre que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ f_α est bijective et qu'elle admet un seul point invariant Ω que l'on déterminera.
- Démontre qu'il existe une unique valeur de α pour laquelle f_α est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
- Démontre qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles f_α est une isométrie.
- Vérifie que ces deux cas d'isométrie sont réciproques l'une de l'autre. On les notera f et f^{-1} .

EXERCICE 12 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et soit T l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x; y)$ fait correspondre le point

$M'(x'; y')$ tel que
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{25}(-7x + 24y - 64) \\ y' = \frac{1}{25}(24x + 7y + 48) \end{cases}$$

- Montre que T est une isométrie
- T est-elle un déplacement ou un antidéplacement?
- Détermine l'ensemble des points invariants par T .
Que peut-on en déduire quant à la nature de T ?

EXERCICE 13 :

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ du plan complexe, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$z_A = 3 - i$ et $z_B = -1 + i$ et la droite (D) d'équation $y = -2x + 3$

- Donne l'écriture complexe de la réflexion d'axe (AB) notée $S_{(AB)}$
- Donne l'écriture complexe de la réflexion d'axe (D) notée $S_{(D)}$
- On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\bar{z} + \frac{2}{5} + \frac{26}{5}i$$

- Montre que f est un antidéplacement. Détermine l'ensemble des points invariants par f .
- f est-elle une réflexion?
- Montre que $f \circ S_{(D)}$ est un déplacement.
- Détermine l'écriture complexe de $f \circ S_{(D)}$ et en déduis les éléments caractéristiques de $f \circ S_{(D)}$
- En déduis une décomposition simple de f