

ARITHMETIQUE : TSE-STI

EXERCICE 1:

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul on a :

a) $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

b) $\sum_{p=1}^n P.P! = (n+1)! - 1$

2) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

a) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ divisible par 7 b) $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ divisible par 11 c) $n^3 - n$ divisible par 3.

2) La division euclidienne de 800 par un entier naturel b a pour quotient 17 et pour reste r . Quelles sont les valeurs possibles de b et r ?

3) On considère les trois entiers naturels A, B, C qui s'écrivent dans la base n : $A = \overline{114}$; $B = \overline{111}$; $C = \overline{13054}$. Sachant que $C = AB$, déterminer n , puis l'écriture de chacun des nombres dans le système décimal.

4) a) Quel est le reste de la division de 5^{136} par 7 ?

b) Un nombre s'écrit : $\overline{3x53}$ en base dix. Déterminer x pour que : $5^{136} + \overline{3x53}$ soit divisible par 7.

EXERCICE 2:

1) On désigne respectivement par a et b (entiers naturels non nuls) la longueur et la largeur mesurées en mètres d'un rectangle. Sachant que $a = 72$ et que le plus petit multiple commun à a et b est 216, quelles sont les valeurs possibles de b ?

2) Trouver les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de l'entier 240. Calculer l'entier naturel n tel que $n^2 - 240$ est un carré parfait.

3) Un nombre s'écrit $\overline{28x75y}$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 3 et 11.

4) Déterminer $N = \text{PGCD}(17787, 689, 297)$; $M = \text{PPCM}(1640, 492)$.

5) On pose $a = 9k + 3$ et $b = 5k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer les valeurs possibles du $\text{PGCD}(a, b)$.

EXERCICE 3 :

Deux commerçantes, Awa et Fanta se rendent au marché pour acheter des mangues. Chaque mangue coûte 5F l'unité. Awa dit à Fanta, je dispose d'un montant égal à m_1 Francs et Fanta répond, moi aussi j'ai une somme égale à m_2 Francs.

L'entier m_1 s'écrit $m_1 = 1x00y2$ dans le système de numération de base huit et m_2 s'écrit $m_2 = x1y003$ dans le système de numération de base sept

1) Déterminer les chiffres x et y pour que chacune des deux commerçantes puisse, avec la totalité de son argent, acheter un nombre maximum de mangues.

2) Déterminer le montant que dispose chacune des commerçantes. En déduire le nombre de mangues que chacune d'elles peut acheter.

3) a) Décomposer m_1 et m_2 en produit de facteurs premiers.

b) En déduire le nombre de diviseurs de m_1 et m_2 puis le $\text{pgcd}(m_1; m_2)$.

4) a) Vérifier que le couple $(3059; -1683)$ est une solution de l'équation (E) :

$$(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad m_1 u + m_2 v = 5$$

b) Résoudre l'équation (E).

EXERCICE 4:

Un lot à usage d'habitation a la forme d'un trapèze dont les deux bases mesurent respectivement $30m$ et $21m$; les deux autres côtés mesurent $18m$ et $12m$. Pour la clôture, le propriétaire a besoin des poteaux de support à égale distance mesurée en nombre entier de mètres pour un nombre minimum de poteaux, avec un poteau à chaque sommet.

a) Quelle est la distance entre deux poteaux ?

b) Déterminer le nombre de poteaux nécessaire à la clôture.

EXERCICE 5:

1) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $23x - 17y = 6$

b) En déduire les entiers naturels A inférieurs à 1000 tels que la division euclidienne de A par 23 le reste soit 2 et dans la division euclidienne de A par 17 le reste soit 8 .

2) a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers naturels x et y tels que : $45x - 28y = 1$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $45x - 28y = 1$

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E') : $45x - 28y = 6$

EXERCICE 6 :

1) Montrer que pour tout entier relatif n les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2) On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs

a) Vérifier en utilisant par exemple la question 1, que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0; y_0)$ de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$

c) **Application :** Déterminer les points de la droite D d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100

Indication : On remarquera que le point $M(x; y)$ appartient à la droite D si et seulement si le couple $(x; -y)$ vérifie l'équation (E).

EXERCICE 7:

1) Déterminer les couples (a, b) d'éléments de $(\mathbb{N}^*)^2$

a) $\begin{cases} a \wedge b = 7 \\ a \vee b = 84 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a \wedge b = 5 \\ a + b = 40 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a \vee b = 105 \\ a + b = 56 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ a \wedge b = 3 \end{cases}$

e) $(a \vee b) - 9(a \wedge b) = 13$

2) a) Trouver l'entier N du système décimal qui s'écrit : $\overline{ab}7^9$ et $\overline{a7b}^8$

b) Déterminer l'ensemble des diviseurs de 124 .

c) Déterminer l'ensemble des couples (x, y) de $(\mathbb{N}^*)^2$ tels que :

$$d = x \wedge y \text{ et } m = x \vee y \text{ vérifient la relation : } \begin{cases} m - 4d = 124 \\ 3 < d < 50 \end{cases}$$

EXERCICE 8:

1) Soit $A = \frac{2n+18}{n+3}$; $n \in \mathbb{N}$

a) Pour quelles valeurs de n , A est-il un entier naturel ?

b) Pour quelle valeur de n , A est-il irréductible ?

2) α et β étant deux entiers naturels et $p = 2^\alpha \times 3^\beta$. Le nombre de diviseurs de p^2 est le triple du nombre de diviseur de p

a) Prouver que $(\alpha-1)(\beta-1)=3$.

b) En déduire les valeurs de p .

EXERCICE 9:

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + x - 2 \equiv 0[7]$.

2) Résoudre dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$: $x^2 + x + 6 = 0$

3) Résoudre dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$: $\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

4) Résoudre dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$: $\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

5) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, les congruences suivantes :

a) $n+5 \equiv 0[n+3]$ b) $n^2 - 3n + 6 \equiv 0[n+1]$

6) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ x \equiv 2[7] \end{cases}$

EXERCICE 10:

Soit (x_n) et (y_n) les suites définies par :
$$\begin{cases} x_0 = 3, & y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$$

1) Démontrer par récurrence que les points M_n de coordonnées $(x_n ; y_n)$ sont sur la droite D d'équation : $2x - y - 5 = 0$.

2) En déduire x_{n+1} en fonction de x_n .

3) Démontrer que (x_n) et (y_n) des suites d'entiers relatifs.

4) Soit n un entier naturel

a) Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5.

b) Démontrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 5, alors ils sont premiers entre eux.

5) a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2^{n+1} + 1$.

b) Soit n entier naturel. Démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4} .

c) En déduire les valeurs de n pour lesquelles x_n et y_n sont divisibles par 5.

EXERCICE 11:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.