

NOMBRES COMPLEXES : MTI-MTGC**EXERCICE 1 :**

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

$$\text{a) } Z = \frac{1+2i}{1-3i} \quad \text{b) } Z = \frac{i-13}{-12+14i} \quad \text{c) } Z = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)}$$

2) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$$\begin{aligned} \text{a) } Z &= \sqrt{2} + i\sqrt{2} & \text{b) } Z &= \frac{(1+i\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta} \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \\ \text{c) } Z &= \frac{-\cos 2x + i\sin 2x}{2\cos 3x - 2i\sin 3x} & \text{d) } Z &= -3e^{\frac{-2\pi}{3}i} \end{aligned}$$

3) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes :

$$\begin{aligned} \text{a) } Z &= -1 + i & \text{b) } Z &= \frac{2\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right)}{\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}} & \text{c) } Z &= \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{10} \end{aligned}$$

EXERCICE 2 :

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 11 + (11\sqrt{3} - 2)i}{2 + 11i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4+2i}{3-i}$$

1) a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.

b) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .

2) On pose $Z = \frac{z_2}{z_1}$

a) Ecrire Z sous forme trigonométrique puis algébrique.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$.

c) Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R} ; (\sqrt{6} - \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2})\sin x = 2.$

EXERCICE 3 :

On considère l'équation d'inconnue complexe z ,

$$(E) : z^4 + 5z^3 + (11 - 3i)z^2 + (10 - 10i)z - 8i = 0$$

- 1) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
- 2) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 que l'on déterminera.
- 3) Acheter la résolution dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation (E).
- 4) Donner le module et un argument de chacune des solutions de (E).

EXERCICE 4 :

I) Linéariser : $\cos^5 x$, $\sin^3 \frac{\theta}{2}$, $\sin^4 x$, $\cos^3 x \sin^2 x$.

II) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$1) 2z - 5\bar{z} + 3 - 7i = 0 \quad 2) \bar{z}^2 + 2|z|^2 - 9 = 0 \quad 3) z^2 + 2i\bar{z} - 1 = 0$$

III) z étant un nombre complexe, on considère l'équation (E) : $z^4 = -7 + 4i\sqrt{2}$

- 1) Vérifier que $U = \sqrt{2} + i$ est une solution de (E)
- 2) Déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de l'unité. En déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes toutes les solutions de (E) sous forme algébrique.

IV) On considère le nombre complexe Z défini par $Z = \frac{z^2}{z+i}$ où $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

- 1) On note $Z = X + Yi$, $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. Ecrire X et Y en fonction de x et y .
- 2) Au complexe z on associe le point $M(x, y)$ d'un plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur non nul.
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz - 2 = 0$. Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble (Γ) .

V) Soit les points $A(-1 + i)$, $B(-1 - i)$, $C(2i)$ et $D(2 - 2i)$.

- 1) Etudier la nature des triangles ACD et BCD .

2) Démontrer que les points A, B, C et D sont cocycliques (c'est-à-dire appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon).

EXERCICE 5 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm). A est le point d'affixe $z_A = 1$, B celui d'affixe $z_B = 3 + 2i$ et le point C d'affixe $z_C = 3 - 2i$. On note M le point d'affixe $z = x + iy$.

1) Calculer le module et un argument de $Z = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$. Que peut-on alors dire du triangle ABC ?

2) Déterminer :

a) L'ensemble (E) des points M du plan tels que : $|z - 1| = |z - 3 - 2i|$

b) L'ensemble (F) des points M du plan tels que : $|z - 3 + 2i| = |z_A - z_B|$

c) L'ensemble (T) des points M tels que : $|z - 3 + 2i| \leq 5$

3) Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z du plan distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{z - 1 + 2i}{z - 1}$

a) Calculer les affixes des points O' et B', images respectives des points O et B par f. Placer les points A, O', B et B' dans le plan.

b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan d'affixe z tels que z' soit un réel.

c) Calculer pour $z \neq 1$ le produit $(z' - 1)(z - 1)$. En déduire que pour tout point M distinct de A on a : $AM \times AM' = 2$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

d) Démontrer que, si M appartient au cercle (C) de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle (C') dont on précisera le centre et rayon. Construire (C) et (C').

e) Déterminer l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.

EXERCICE 6 :

Dans l'ensemble des nombres complexes on considère l'équation :

$$(F) : z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10 = 0$$

- 1) Démontrer que si le complexe z_0 est une solution de l'équation (F) alors il en est de même pour son conjugué $\bar{z}_0$ (c'est-à-dire $\bar{z}_0$ est aussi une solution de (F))
- 2) Vérifier que $z_0 = 1 - i$ est une solution l'équation (F). En déduire une seconde solution z_1 de l'équation (F).
- 3) Déterminer les deux autres solutions z_2 et z_3 de l'équation (F).
- 4) Représenter dans le plan complexe les points images des quatre solutions de l'équation (F).

EXERCICE 7 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ direct d'unité graphique 2cm. Soit A le point d'affixe 1, B le point d'affixe $2i$ et C d'affixe z .

- 1) Que représente géométriquement $\left| \frac{z-2i}{1-2i} \right|$ et $\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)$?
- 2) Dans la suite on suppose que le point C d'affixe z est définie par : $BC = \sqrt{\frac{2}{5}} \times BA$ et $(\widehat{BA, BC}) = \alpha$ où $\alpha \in]-\pi; 0]$ et $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Calculer $\sin\alpha$.
- 3) Démontrer que $\frac{z-2i}{1-2i} = \frac{1-3i}{5}$. En déduire le complexe z et vérifier que le triangle ABC est isocèle. On fera une figure.

EXERCICE 8 :

I) A tout nombre complexe z on considère le nombre complexe $Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$

- 1) Déterminer l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles Z est défini.
- 2) Déterminer les ensembles des points M dont l'affixe z vérifie les conditions suivantes :
 - a) $|Z| = 1$.
 - b) Z est un réel.
 - c) Z est un imaginaire pur.
- 3) Soit A d'affixe $2 + 3i$, K d'affixe $-iz$. Déterminer l'ensemble des points M tels que A, M et K soient alignés.

II) On pose $E = \mathbb{C} - \{-i\}$ où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes ; f l'application de E dans $\mathbb{C}$ définie par : $z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}$. Soit M le point d'affixe z dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(o; \vec{u}, \vec{v})$.

1) Déterminer les coordonnées du point B d'affixe z_0 telle que $f(z_0) = 1 + 2i$

2) Soit z élément de E . On désigne par r le module de $z+i$ et θ une mesure de son argument. Exprimer la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et de θ .

3) Soit A le point d'affixe $-i$.

a) Déterminer l'ensemble C des points M dont l'affixe z vérifie $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble D des points d'affixe z tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de $f(z) - i$.

b) Montrer que B appartient à C et D . Construire C et D .