

TRAVAUX DIRIGES SUR LES NOMBRES COMPLEXES**Exercice 1**

Mets les nombres complexes suivants sous forme algébrique

$$(2 - 5i)(3 + i); (1 + i)(1 - 2i)(1 + 3i); (2 - i)^3; (2 + i)^4$$

$$\frac{(3+2i)(1+i)}{i-1}; \frac{2-3i}{1+i} + \frac{1-2i}{1-i}; \frac{4-3i}{2-i} - \frac{1-i}{2+i}$$

Exercice 2

$$\text{Soit } f(z) = \frac{1+z+z^2+z^3}{1+z} \quad (z \neq -1)$$

a) Calcule $f(i); f(i-1); f(2+i)$

b) Trouve les deux solutions de $f(z) = 0$

Exercice 3Résous dans $\mathbb{C}$ les équations

a) $(1 + 2i)z - (i - 1) = iz - 3$

b) $z(z + i)(1 - i - z) = 0$

c) $\frac{1+2iz}{1+2z} = i \frac{z-1}{z+3}$

d) $2z - \bar{z} = 3 - 6i$

e) $-i\bar{z} + (2 - 3i)z = 1$

f) $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$

Exercice 4

Le plan étant muni d'un repère orthogonal

a) Place les points A, B , et C d'affixes $z_A = -1 + i; z_B = -2 - i$ et

$$z_C = \frac{1}{2} - 2i$$

b) Détermine l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$

c) Calcule l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme

Exercice 5On donne les points A, B, C de coordonnées respectives $(1; -3); (4; 5)$ et $(-3; 2)$

a) Donne les affixes des points A, B, C et des vecteurs $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}$

b) On définit les points D et E par :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \text{ et } 3\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$$

Détermine l'affixe de chacun des points D et E

Démontre que A, D et E sont alignés

Exercice 6

1) On considère $z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$

a) Détermine le module et un argument de z^2 . En déduis le module et un argument de z .

b) Déduis de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

- c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\sqrt{3} + 1) \cos x + (\sqrt{3} - 1) \sin x = \sqrt{2}$
- 2) Linéarise
- $\sin^4 \frac{x}{2}; \cos^5 x$
 - $\cos^4 2x; \sin^5 x$
 - $\cos^4 x + \sin^4 x$
 - $\cos^4 x \times \sin^4 x$
 - $\cos 3x \times \sin^3 2x$

Exercice 7

- 1) Détermine le module et un argument des complexes

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$$

$$z_3 = -3(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$

$$z_4 = 2(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$z_5 = 1 + \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$$

$$z_6 = (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) + (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$z_7 = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha \text{ avec } \alpha \in [0; \pi[$$

$$z_8 = \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha} \text{ avec } \alpha \in [0; \pi[$$

$$z_9 = \frac{-\cos 2x + i \sin 2x}{2 \cos 3x - 2i \sin 3x}$$

$$z_{10} = \frac{(1 + i \tan x)^2}{1 + \tan^2 x} \text{ avec } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Exercice 8

- Détermine sous la forme algébrique les racines sixièmes de l'unité
- Calcule $(1 - i)^6$
- En utilisant les questions 1) et 2) donne la forme algébrique des solutions de l'équation (E): $z \in \mathbb{C} \mid 8z^6 + i = 0$
- Détermine la forme trigonométrique des solutions de (E)
- Donne la forme algébrique du nombre complexe $(\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2})^{11}$

Exercice 9

- On considère le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$
Mets z sous forme trigonométrique
Calcule z^2 et z^3 en déduire z^{1992} et z^{1994}
- Résous dans l'ensemble des nombres complexes $z^3 + 8 = 0$ (On remarquera que cette équation a une racine évidente réelle)
En déduis les solutions dans l'ensemble des nombres complexes de l'équation $(iz - 1)^3 + 8 = 0$
Donne les solutions sous forme algébrique

Exercice 10

- Développe $(1 - \sqrt{2})^2$
- Résous dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$

3) Résous dans l'ensemble des nombres complexes les équations : $z + \frac{1}{z} = 1$ puis $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$

4) Soit $P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1$

Vérifie que pour tout nombre complexe z non nul, on a :

$$\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$$

En déduis les solutions de l'équation $P(z) = 0$

Exercice 11

Dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1cm, on donne les points

A ; B et C d'affixes respectives $a = 2 - 2i\sqrt{3}$; $b = 2 + 2i\sqrt{3}$; $c = 8$

1) Ecris a et b sous forme trigonométrique. Place les points A , B et C

2) Calcule le quotient $\frac{a-c}{b-c}$, que l'on écrira sous la forme exponentielle. En déduis la nature du triangle ABC

Exercice 12

I) On considère le nombre complexe $z = x + iy$ ayant pour image M , on pose $Z = \frac{z+2}{z+i}$

1) Ecris Z sous forme algébrique en fonction de x et y

2) Détermine l'ensemble des points M du plan tels que

a) Z soit réel

b) Z soit imaginaire pur

II) Détermine et construis l'ensemble des points M dont l'affixe de z vérifie

a) $|z - 2 + 4i| = |z + 1 - 2i|$

b) $|z - 3i| = 2$

III) Ecris sous forme algébrique les solutions de l'équation $z^6 = -1$. En déduis les solutions de l'équation : $(z - i\sqrt{3})^6 = i^2(\sqrt{3}z - 2i)^6$

Exercice 13

Pour tout nombre complexe z on pose :

$$P(z) = z^3 - (3 + 5i)z^2 + (10i - 6)z + 8$$

1) Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera

2) Factorise $P(z)$

3) a) Détermine les racines carrées du nombre complexe $U = 2i$

b) Résous dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$

4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

On désigne par A , B , et C les points d'affixes respectives $2i$; $1 + i$; $2 + 2i$

a) place les points A , B et C dans le plan

b) Calcule les longueurs AB , AC , et BC . En déduire la nature du triangle ABC

c) Détermine l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Place D

Exercice 14

- 1) Résous dans l'ensemble des nombres complexes
 - a) $2z + \bar{z} - iz - 7 - i = 0$
 - b) $\bar{z}^2 + 2|z|^2 - 3 = 0$
 - c) $z^2 + (1 + \sqrt{3})z + 2 + \sqrt{3} = 0$ (on remarquera que $(1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$)
- 2) Soit $z = 3 - i$ et $Z = 28 - 96i$
 - a) Calcule z^4
 - b) En déduis les racines quatrièmes de Z

Exercice 15

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé, A est le point d'affixe $z_A = 1$, B celui d'affixe $z_B = 3 + 2i$, C d'affixe $z_C = 3 - 2i$ et D d'affixe $z_D = 1 + 2i$. On note M le point d'affixe $z = x + iy$

- 1) Calcule le module et un argument de $Z = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$. Que peut on alors dire du triangle ABC ? Place A, B, C, D dans la plan
- 2) Détermine :
 - a) L'ensemble (E_1) des points M du plan tels que $|z - 1| = |z - 3 - 2i|$
 - b) L'ensemble (E_2) des points M du plan tels que $|z - 3 + 2i| = |z_A - z_B|$
 - c) L'ensemble (E_3) des points M du plan tels que $|\bar{z} - 3 - 2i| \leq 5$
- 3) a) Le milieu I du segment $[BD]$ a pour image, par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, le point J . Donne l'affixe du point J sous forme exponentielle
b) On considère le point E symétrique du point C par rapport au point O . Place le point E puis déterminer z_E de E
c) Soit le point F , image du point B par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$. Place le point F puis déterminer l'affixe z_F de F
- 4) Soit l'application f qui à tout point M d'affixe z du plan distinct de A associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$
 - a) calcule les affixes des points O' et B' , images respectives des points O et B par f . Place les points O' et B' dans le plan
 - b) Détermine l'ensemble (γ) des points M du plan d'affixe z tels que z' soit réel
 - c) Calcule pour $z \neq 1$ le produit $(z' - 1)(\bar{z} - 1)$. En déduire que pour tout point M distinct de A on a : $AM \times AM' = 2$ et $(\vec{u}, \vec{AM}) + (\vec{u}, \vec{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$
 - d) Démontre que si M appartient à un cercle (C) de centre A passant par O alors M' appartient à un cercle (C') dont on précisera le centre et le rayon. Construire (C) et (C')
 - e) Détermine l'angle $(\vec{u}; \vec{AB})$

Exercice 16

- 1) on considère l'équation $(E): z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i = 0$
 - a) Détermine la solution imaginaire pure z_0 de l'équation (E)
 - b) Achève la résolution de (E) (on appelle z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 la troisième solution)
- 2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $3i$; $3 + 3i$ et $3 - 2i$

- Place les points A, B et C dans le repère.
 - Calcule $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduire la nature du triangle ABC
- 3) Soit f la similitude directe qui laisse invariant le point B et qui transforme le point A en C
- Donne une écriture complexe de f
 - Donne la nature et les éléments caractéristiques de f

Exercice 17

Le plan complexe est rapporté à un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal (unité 2cm)

On considère la suite des nombres complexes définie par
$$\begin{cases} z_0 = 4 \\ z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n \end{cases}$$
 pour tout entier naturel n

- On appelle M_n le point du plan complexe d'affixe z_n
 - Détermine algébriquement les nombres complexes z_1 ; z_2 et z_3
 - Construis les points M_0, M_1, M_2 et M_3
- Ecris le nombre $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$ sous forme trigonométrique
- En utilisant la question 2) écrire z_{n+3} en fonction de z_n . Que peux-tu dire pour les vecteurs $\overrightarrow{OM_{n+3}}$ et $\overrightarrow{OM_n}$?
- On pose ρ_n le module du nombre complexe z_n c'est-à-dire $\rho_n = |z_n|$
Démontre que la suite (ρ_n) est géométrique. Préciser la limite de la suite (ρ_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 18

θ est un réel quelconque, on considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $(E): z^2 - 2(1 + 2 \cos \theta)z + 5 + 4 \cos \theta = 0$

- Résous dans l'ensemble des nombres complexes les équations $E\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$ en donnant à θ respectivement les valeurs $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{6}$
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B, C , et D d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $z_B = 1 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $z_C = \overline{z_B}$ et $z_D = \overline{z_A}$
 - Détermine les formes algébriques des affixes des points puis place dans le repère
 - Détermine la nature du quadrilatère $ABCD$ et celle du triangle ABD
 - En déduis que ces points appartiennent à un cercle (C) dont on déterminera une équation

Exercice 19

α étant un nombre réel, $\alpha \in [0, 2\pi]$, et z un nombre complexe, on considère le polynôme $P(z)$ défini par $P(z) = z^3 - (1 - 2 \sin \alpha)z^2 + (1 - 2 \sin \alpha)z - 1$

- Calcule $P(1)$
- En déduis l'existence de trois nombres réels a, b, c tels que $P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c)$
- Résous dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$

- 4) On considère $z_1 = 1$; $z_2 = -\sin \alpha + i \cos \alpha$ et $z_3 = -\sin \alpha - i \cos \alpha$; écris z_1 , z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.

Exercice 20

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique 2 cm

- 1) On rappelle que pour tous nombre complexes a et b , $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
Résous dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$
- 2) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par $a = 2$; $b = -1 + i\sqrt{3}$; et $c = -1 - i\sqrt{3}$. On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On pose $B' = r'(B)$ et $c' = r(C)$ et on note b' et c' les affixes respectives de B' et C'
 - a) Place les points A, B , et C dans le repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$. Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure
 - b) Montre que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$
 - c) Montre que b' et c' sont des nombres complexes conjugués
- 3) On appelle M, N, P , et Q les milieux respectifs des segments $[CB]$; $[BB']$; $[B'C']$ et $[C'C]$. On note $m; n; p$; et q leurs affixes
 - a) Montre que l'affixe n du point N est égal à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$. En déduire que les points $O; N$ et C sont alignés
 - b) Montre que $n + 1 = i(q + 1)$. Que peut-on dire pour le triangle MNQ ?
 - c) Montre que le quadrilatère $MNQP$ est un carré.

Exercice 21

On considère le nombre complexe $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On note I, A, B, C, D les points du plan complexe d'affixe $1, a, a^2, a^3, a^4$

- 1) Vérifie que $a^5 = 1$
- 2) Montre que $IA = AB = BC = CD = DI$
- 3) Vérifie que, pour tout z complexe $z^5 - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$
- 4) En déduis que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$
- 5) Montre que $a^3 = \bar{a}^2$ et que $a^4 = \bar{a}$
- 6) En déduis que $(a + \bar{a})^2 + (a + \bar{a}) - 1 = 0$
- 7) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$
- 8) Calcule $(a + \bar{a})$ et en déduis la valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$