

SERIE SCHAU

WILLIAM A. NASH

RESISTANCE DES MATERIAUX 1

**COURS
ET
PROBLEMES**



**345
EXERCICES
RESOLUS**

Code
8669
(1)
EASN

SERIE SCHAU

WILLIAM A. NASH

RESISTANCE DES MATERIAUX 1



Pour plus de document gratuit visiter
<https://book4yours.blogspot.com>

**COURS
ET
PROBLEMES**

**345
EXERCICES
RESOLUS**

Y. Tcharonijsky

RESISTANCE DES MATERIAUX. Cours et problèmes, est traduit de :
Strength of Materials by William A. Nash

Copyright © 1974 by McGraw-Hill Inc., New York

Copyright © 1974 by McGraw-Hill Inc., Paris pour la traduction française

ISBN France : 2-7042-0014-9

ISBN Canada : 0-07-082104-6

(Edition originale : ISBN 0-07-045894-4 McGraw-Hill Inc., New York)

3669

La Loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'Article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code Pénal.

McGraw-Hill, 28 Rue Beaunier, 75014 Paris

Préface de l'auteur

Cette seconde édition garde le plan de la première, mais dans un cadre considérablement élargi. Le sujet est également divisé en chapitres couvrant tous les domaines de la théorie et des applications pratiques. Au début de chaque chapitre, est donné un abrégé des définitions, des principes et des théorèmes, qui sont appliqués ensuite dans une série graduée de problèmes résolus et de problèmes supplémentaires. Les problèmes résolus sont ainsi consacrés à l'établissement de formules et à la démonstration des théorèmes. Les problèmes et leur solution ont été choisis de manière à fournir une interprétation claire des principes. Ils sont utilisés pour développer et illustrer la théorie et assurer la répétition des principes de base, qui est essentielle pour un enseignement fructueux et pour mettre en lumière les points capitaux pour une compréhension parfaite.

Depuis la publication de la première édition, les cours sur la Résistance des Matériaux sont plus sophistiqués et ont tendance à inclure des données sur l'analyse de la plasticité et la conception plastique, sur les centres de cisaillement, les poutres courbes et sur l'utilisation des fonctions de singularité pour décrire le comportement des poutres. Il est devenu également courant de préparer les étudiants aux méthodes d'énergie de déformation, d'analyse élastique et aux éléments de la Théorie de l'Elasticité. On trouvera donc dans la présente édition des problèmes résolus dans tous ces domaines, ainsi que pour d'autres non présentés précédemment.



Pour plus de document gratuit visiter
<https://book4yours.blogspot.com>

William A. Nash
Amherst, Massachusetts

Préface des traducteurs

L'ouvrage de William A. Nash intitulé "Théorie et problèmes de Résistance des Matériaux" (2^{ème} édition), dont nous présentons la traduction en français, appartient à la série Schaum qui traite des Sciences de l'Ingénieur, ce terme étant pris au sens le plus général et le plus élevé, puisqu'il s'y trouve aussi bien des traités de mathématique très avancée que des ouvrages de physique et de mécanique théorique et pratique.

Tous ces ouvrages présentent un caractère particulier qui mérite d'être signalé. Les exposés théoriques constituant ce qui pourrait être appelé le "cours magistral" y sont réduits aux éléments de base indispensables, très clairement exposés.

Par contre, chaque chapitre comporte un très grand nombre de problèmes dont la solution complète est très détaillée et qui constituent pour partie la démonstration des théorèmes fondamentaux et pour d'autres des applications numériques variées. L'ensemble est complété par des problèmes proposés au lecteur et pour lesquels seule la réponse numérique est indiquée.

Ainsi le lecteur acquiert à la fois la connaissance des principes de base et la dextérité indispensable pour l'application pratique des connaissances apprises.

On remarquera que cette façon de procéder est bien dans le sens de l'évolution actuelle des méthodes pédagogiques et que son intérêt est particulièrement évident dans le cas qui nous occupe ici, la pratique de la résistance des matériaux étant fondamentalement liée à l'habileté du calculateur.

L'ouvrage de W.A. Nash est intéressant à un autre point de vue, parce qu'il expose des méthodes de calcul rarement présentées avec suffisamment de détails dans les ouvrages courants.

C'est ainsi, par exemple, que l'utilisation des fonctions de singularité pour l'étude des poutres y est longuement développée. Cette méthode introduite par Macauley en 1919 n'a pas jusqu'à présent reçu le développement qu'elle mérite.

De même, les calculs pratiques dans le domaine plastique, dont on sait que son importance croît rapidement dans les techniques modernes, sont ici l'objet d'une étude sérieuse et de nombreuses applications.

Le flambement est aussi développé de façon importante, ainsi que l'étude des coques.

Enfin, l'ouvrage se termine par un exposé sur la Théorie de l'Elasticité, qui permet au lecteur de comprendre pourquoi celle-ci est une approximation meilleure que la résistance des matériaux et le prépare à l'étude des ouvrages spécialisés.

Ainsi conçu, ce livre est susceptible de rendre de très grands services non seulement aux étudiants, mais aussi aux projeteurs et aux ingénieurs si souvent confrontés aux problèmes de Résistance des Matériaux.

H. Le Boiteux
R. Boussard

Table des matières

	Page
Chapitre 1 TENSION ET COMPRESSION. EFFETS INTERNES DES FORCES	1
Chapitre 2 SYSTEMES DE FORCES STATIQUEMENT INDETERMINES. TENSION ET COMPRESSION	25
Chapitre 3 RECIPIENTS SOUS PRESSION A PAROI MINCE	40
Chapitre 4 CONTRAINTES DIRECTES DE CISAILLEMENT	54
Chapitre 5 LA TORSION	61
Chapitre 6 FORCE DE CISAILLEMENT ET MOMENT DE FLEXION	80
Chapitre 7 CENTRES D'INERTIE. MOMENTS D'INERTIE ET PRODUITS D'INERTIE DES SURFACES PLANES	105
Chapitre 8 CONTRAINTES DANS LES POUTRES	122
Chapitre 9 DEFLEXION ELASTIQUE DES POUTRES : METHODE PAR DOUBLE INTEGRATION	155
Chapitre 10 DEFLEXION ELASTIQUE DES POUTRES : METHODE PAR L'AIRES DES MOMENTS	181
Chapitre 11 DEFLEXION ELASTIQUE DES POUTRES : METHODE DES FONCTIONS DE SINGULARITE	198
INDEX	Se reporter à la fin du Tome II



Pour plus de document gratuit visiter
<https://book4yours.blogspot.com>

CHAPITRE I

Tension et compression Effets internes des forces



Pour plus de document gratuit visiter
<https://book4yours.blogspot.com>

Ce livre a pour objet l'étude de ce qui pourrait être appelé les *effets internes* des forces agissant sur un corps. Dans l'ouvrage, les corps eux-mêmes ne seront plus considérés comme parfaitement rigides, comme cela était admis en Statique, mais on tiendra compte aussi de leurs déformations. En effet, un des buts principaux de la Résistance des Matériaux est le calcul des déformations des corps sous différents types de charges.

BARREAU CHARGE AXIALEMENT

Au début, le cas le plus simple à étudier est celui d'un barreau de métal de section droite constante, chargé à ses extrémités par deux forces opposées co-linéaires coïncidant avec l'axe longitudinal du barreau et agissant au centre de chaque section droite. Pour réaliser l'équilibre statique, les forces doivent être d'égale grandeur. Si les forces sont dirigées vers l'extérieur du barreau, celui-ci est dit en *tension*. Si elles sont dirigées vers l'intérieur du barreau, il existe un état de *compression*. Ces deux états sont représentés dans la fig. 1-1.

Sous l'action de ces deux forces, il s'établit dans le barreau des forces internes résistantes, qui peuvent être étudiées en coupant le barreau en un point quelconque de sa longueur par un plan perpendiculaire à l'axe longitudinal. Un tel plan est indiqué par *a-a* dans la fig. 1-2(a). Pour des raisons exposées plus loin, ce plan ne doit pas être "trop voisin" de l'une ou l'autre extrémité du barreau. Si pour l'analyse, la portion du barreau à droite de ce plan est supposée enlevée, comme dans la fig. 1-2(b) elle doit être remplacée par un effet exercé sur la portion de gauche. Avec cette méthode du plan coupant, les forces internes à l'origine deviennent extérieures, en ce qui concerne la portion subsistante du corps. Pour maintenir l'équilibre de la portion de gauche, cet "effet" doit être une force horizontale de grandeur P . Toutefois, cette force P agissant suivant la normale à la section droite *a-a* est en fait, la résultante de forces distribuées agissant sur cette section et dans une direction perpendiculaire.

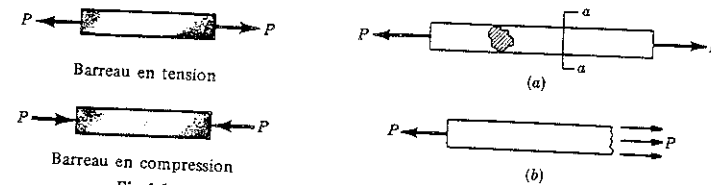


Fig. 1-2

DISTRIBUTION DES FORCES RESISTANTES

Arrivé à ce stade, il est nécessaire de faire une hypothèse sur la répartition de ces forces distribuées. Puisque la force résultante P est appliquée au centre, il est couramment admis qu'elles sont uniformément réparties sur toute la section. Une telle distribution n'est probablement jamais réalisée exactement en raison de l'orientation aléatoire des grains de cristaux composant le barreau. La valeur exacte de la force agissant sur un très petit élément quelconque de la section est

fonction de la nature et de l'orientation de la structure cristalline en ce point. Cependant, l'hypothèse d'une distribution uniforme sur la section droite assure aux calculs techniques une précision suffisamment raisonnable.

CONTRAINTE NORMALE

Pour une étude comparative, au lieu de considérer la force interne agissant sur un petit élément de la surface, il est préférable de partir de la force normale agissant sur une unité de surface de la section. La *contrainte normale* est définie comme l'intensité de la force normale par unité de surface et elle est exprimée en unités de force par unité de surface, c'est-à-dire en kg/cm^2 . Le terme *contrainte totale* est parfois utilisé pour dénommer la force axiale résistante en kilogrammes. Si les forces appliquées aux extrémités du barreau sont telles qu'il soit en tension, elles engendrent des *contraintes de tension*. Si le barreau est en compression, ce sont des *contraintes de compression*. Il est essentiel que la ligne d'action des forces appliquées passe par le centre de toutes les sections droites du barreau.

EPROUVETTES D'ESSAI

Le type de charge axiale de la fig. 1-2(a) se rencontre fréquemment dans les projets de structures et de machines. Pour reproduire au laboratoire ce type de charge, on fixe une éprouvette dans les mâchoires d'une machine d'essai à engrenage mue électriquement ou hydrauliquement. Ces deux types de machine sont couramment utilisés dans les laboratoires d'essai des matériaux pour appliquer une tension axiale.

Pour normaliser les méthodes d'essai des matériaux, l'American Society for Testing Materials (A.S.T.M.) a élaboré des spécifications utilisées dans toute l'Amérique. Pour les essais en tension et compression axiales, ces normes prévoient toute une série d'éprouvettes pour divers matériaux métalliques et non métalliques. Deux seulement seront présentées ici, une pour les plaques de métal de plus de 3/16 de pouce (4,76 mm) d'épaisseur, fig. 1-3 et l'autre pour les métaux d'épaisseur supérieure à 1,5 pouce (38,10 mm) représentée dans la fig. 1-4. Les dimensions indiquées sont celles spécifiées par l'A.S.T.M., mais les extrémités des éprouvettes peuvent présenter la forme voulue pour s'adapter aux mâchoires de la machine d'essai. Comme on peut le voir sur les figures, la partie centrale est un peu moins large que les extrémités, pour que la rupture ne se produise pas dans les parties fixées dans les mâchoires. Les arrondis sont prévus pour éviter les concentrations de contrainte à la transition entre les deux portions d'inégale longueur. La longueur normalisée sur laquelle est mesuré l'allongement est de 8 pouces (203,20 mm) pour l'éprouvette de la fig. 1-3 et de 2 pouces (50,80 mm) pour celle de la fig. 1-4^(*).

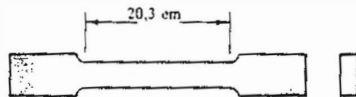


Fig. 1-3

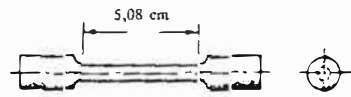


Fig. 1-4

(*) Les normes AFNOR spécifient les dimensions des éprouvettes de traction utilisée en France. Pour les tôles et bandes d'acier, la norme NF 03-160 indique les dimensions suivantes :

Norme NF 03-160 DIMENSIONS DES EPROUVETTES

EPROUVETTE	EPAISSEUR	LARGEUR	LONGUEUR ENTRE REPÈRES	LONGUEUR CALIBRÉE	LONGUEUR DES BANDES A CÔTÉS PARALLÈLES
	en millimètres	en millimètres	en millimètres	en millimètres	en millimètres
1	0,5 à 3,0 exclus	20	80	120	140
2	0,5 à 2,0 inclus	12,5	50	75	87,5

Les allongements sont mesurés à l'aide d'extensomètres mécaniques ou optiques ou bien en fixant par collage une jauge de déformation à résistance électrique à la surface du matériau. Cette jauge de déformation est constituée d'un certain nombre de fils très fins orientés dans la direction axiale du barreau. Lorsque le barreau s'allonge, la résistance électrique des fils change et ce changement de résistance est détecté par un pont de Wheatstone et transformé en allongement.

DEFORMATION NORMALE

Plaçons une de ces éprouvettes de traction dans une machine d'essai de traction-compression et appliquons graduellement des forces de tension aux extrémités. L'allongement sur la longueur de référence peut être mesuré comme indiqué ci-dessus, pour des incréments déterminés de la force axiale. A partir de ces valeurs, on peut déterminer l'allongement par unité de longueur, qui est la *déformation normale* notée ϵ . Pour cela, on divise l'allongement total Δ par la longueur de référence L . Donc : $\epsilon = \Delta/L$. La déformation est habituellement exprimée en mm par mm. Elle est donc sans dimension. Pour exprimer l'allongement en mm, on utilise parfois le terme *déformation totale*.

COURBE CONTRAINTE-DEFORMATION

En appliquant graduellement la charge par incréments, l'allongement total est mesuré sur la longueur de référence pour chaque incrément de charge et ceci jusqu'à rupture de l'éprouvette. La *contrainte normale* σ peut être calculée pour toute valeur de la charge axiale à partir de la surface initiale de la section droite, en utilisant l'équation :

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

où P est la charge axiale en kg et A la surface initiale de la section droite. Quand on a obtenu un certain nombre de valeurs numériques, on peut tracer une courbe en mettant en abscisses la déformation normale ϵ et en ordonnées la contrainte normale σ . On obtient la *courbe* ou le *diagramme contrainte-déformation* du matériau pour ce type de charge. Les allures de ces courbes sont très différentes suivant les matériaux. La fig. 1-5 est la courbe d'un acier de construction à teneur moyenne en carbone ; la fig. 1-6, celle d'un acier allié et la fig. 1-7 est relative à des aciers durs et à certains alliages non-ferreux. Pour des alliages non-ferreux et la fonte, la courbe présente la forme de la fig. 1-8, tandis que pour le caoutchouc, on obtient l'allure caractéristique de la fig. 1-9.

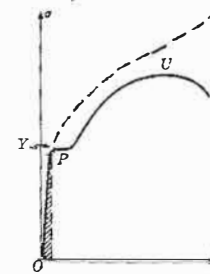


Fig. 1-5

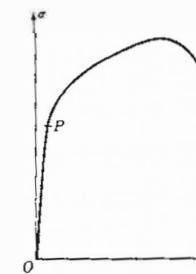


Fig. 1-6

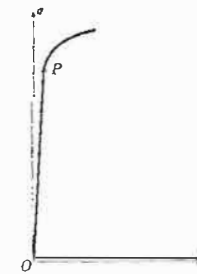


Fig. 1-7

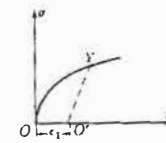


Fig. 1-8

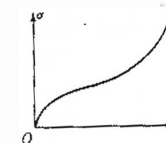


Fig. 1-9

Pour plus de document gratuit visiter
<https://book4yours.blogspot.com>

MATERIAUX DUCTILES ET MATERIAUX FRAGILES

Les matériaux de construction sont habituellement classés en *ductiles* et en *fragiles*. Un *matériau ductile* présente une déformation par tension relativement grande jusqu'au point de rupture (acier de construction ou aluminium, par exemple), tandis qu'un *matériau fragile* ne subit qu'une déformation relativement petite jusqu'à ce point. Une déformation arbitraire de 0,05 cm/cm est fréquemment considérée comme la démarcation entre ces deux classes de matériaux. La fonte et le béton sont des exemples de matériaux fragiles.

LOI DE HOOKE

Pour tous les matériaux dont la courbe contrainte-déformation a la forme des fig. 1-5, 1-6 ou 1-7, il est clair que, dans le cas de valeurs relativement petites de déformation, la relation entre la contrainte et la déformation est linéaire. Cette relation linéaire entre l'allongement et la force axiale qui la produit (puisque ces quantités ne diffèrent chacune de la déformation ou de la contrainte que d'un facteur constant) a été observée pour la première fois en 1678 par Sir Robert Hooke et est appelée "loi de Hooke". Dans le domaine linéaire de déformation du matériau, on peut donc écrire la relation :

$$\sigma = E \epsilon$$

où E est la pente de la portion linéaire OP de chacune des courbes des fig. 1-5, 1-6 et 1-7.

MODULE D'ELASTICITE

La quantité E , rapport de la contrainte unitaire à la déformation unitaire est le *module d'élasticité* du matériau en tension ; il est souvent nommé *module d'Young*. Les valeurs de E pour un grand nombre de matériaux techniques sont portées dans les manuels. Puisque la déformation unitaire ϵ est un nombre pur (étant le rapport de deux longueurs), il est clair que E s'exprime par les mêmes unités que la contrainte, donc en kg/cm² par exemple. Pour un grand nombre de matériaux techniques courants, le module d'élasticité en compression est sensiblement égal à celui en tension. Il faut noter soigneusement que le comportement des matériaux sous charge étudié dans l'ouvrage est limité (sauf indication contraire) à la partie linéaire de la courbe contrainte-déformation.

PROPRIETES MECANIQUES DES MATERIAUX

La courbe contrainte-déformation de la fig. 1-5 peut servir à caractériser plusieurs propriétés mécaniques des matériaux. Ce sont :

LIMITE DE PROPORTIONNALITE

L'ordonnée du point P est nommée *limite de proportionnalité*. C'est la contrainte maximale pouvant être appliquée dans un essai de tension pure, dans lequel la contrainte est une fonction linéaire de la déformation. Un matériau dont la courbe contrainte-déformation a l'allure de la fig. 1-8 ne possède pas de limite de proportionnalité.

LIMITE ELASTIQUE

L'ordonnée d'un point qui coïncide presque avec P est dénommée *limite élastique*. C'est la contrainte maximale pouvant être appliquée dans un essai de tension pure, tel qu'après suppression de la charge, il ne subsiste aucune déformation permanente ou résiduelle. Pour de nombreux matériaux, les valeurs numériques de la limite élastique et de la limite de proportionnalité sont presque identiques et ces termes sont parfois considérés comme synonymes. Dans les cas où la distinction entre les deux termes existe, la limite élastique est toujours supérieure à la limite de proportionnalité.

DOMAINE ELASTIQUE ET DOMAINE PLASTIQUE

La partie de la courbe contrainte-déformation s'étendant depuis l'origine jusqu'à la limite de proportionnalité est dénommée *domaine élastique*. La partie de la courbe s'étendant depuis la limite de proportionnalité jusqu'au point de rupture est le *domaine plastique*.

SEUIL DE PLASTICITE

L'ordonnée du point Y , notée σ_{yp} pour lequel il y a accroissement de la déformation sans augmentation de la contrainte est nommé *seuil de plasticité* du matériau. Lorsque la charge atteint le point Y , on dit que le corps cède. Quelques matériaux présentent deux points de la courbe contrainte-déformation pour lesquels se produit une augmentation de déformation sans augmentation de contrainte. On les dénomme *seuils de plasticité supérieur et inférieur*.

RESISTANCE A LA TENSION

L'ordonnée du point U , ordonnée maximale de la courbe est dénommée *résistance à la tension* du matériau.

RESISTANCE A LA RUPTURE

L'ordonnée du point B est appelée *résistance à la rupture* du matériau.

MODULE DE RESILIENCE

Le travail effectué par unité de volume du matériau pendant l'augmentation graduelle de la force de tension pure depuis zéro jusqu'à la valeur nécessaire pour atteindre la limite de proportionnalité du matériau est défini comme le *module de résilience*. On peut le calculer en prenant l'aire en-dessous de la courbe contrainte-déformation depuis l'origine jusqu'à la limite de proportionnalité ; elle est représentée par la surface hachurée de la fig. 1-5. Cette quantité s'exprime en kg/cm². La résilience d'un matériau est donc son aptitude à absorber de l'énergie dans le domaine élastique.

COEFFICIENT DE DURETE

Le travail effectué par unité de volume du matériau pendant l'augmentation graduelle de la tension pure depuis zéro jusqu'à la valeur causant la rupture est défini comme le *coefficient de dureté*. Pour le calculer, on mesure l'aire de la courbe contrainte-déformation depuis l'origine jusqu'à la rupture. La dureté d'un matériau est son aptitude à absorber de l'énergie dans le domaine plastique.

POURCENTAGE DE REDUCTION DE SECTION

On appelle *pourcentage de réduction de section* le rapport, multiplié par 100, de la réduction de la section de rupture à sa valeur *initiale*. Il faut noter que, sous l'action des forces de tension, la section du barreau diminue, mais que le calcul de la contrainte normale est toujours effectué sur la base de la section initiale. C'est le cas de la fig. 1-5. Comme la déformation devient de plus en plus grande, il est de plus en plus important de tenir compte des valeurs instantanées de la section (qui décroissent). On obtient alors la courbe *vraie* contrainte-déformation. Elle est représentée en traits discontinus dans la fig. 1-5.

POURCENTAGE D'ALLONGEMENT

Le *pourcentage d'allongement* est l'augmentation, multipliée par 100, de la longueur (longueur de référence) après rupture, divisée par la longueur initiale. Le pourcentage de réduction de section, ainsi que le pourcentage d'allongement constituent des mesures de la *ductilité* du matériau.

CONTRAINTE PRATIQUE

Les caractéristiques de résistance mentionnées ci-dessus peuvent servir à adopter une valeur de *contrainte pratique*. Dans l'ouvrage, toutes les contraintes pratiques utilisées sont comprises dans le domaine élastique du matériau. Le plus fréquemment, on la fixe en divisant simplement la contrainte au seuil de plasticité ou la résistance à la tension par un nombre appelé *facteur de sécurité*. Le choix du facteur de sécurité dépend du jugement et de l'expérience du projecteur. Les facteurs particuliers de sécurité sont souvent spécifiés dans les codes de construction. Voir les problèmes 1.4, 1.12 et 1.13.

ECROUISSAGE PAR DEFORMATION

Lorsqu'un matériau ductile peut être fortement contraint au-delà du seuil de plasticité sans céder, on dit qu'il est *écroui*. De nombreux métaux de construction possèdent cette propriété.

Pour les matériaux fragiles, la courbe contrainte-déformation, qui n'est pas linéaire, permet de définir plusieurs autres grandeurs de résistance, qui n'apparaissent pas lorsque la courbe possède une région linéaire. Ce sont :

RESISTANCE A LA PLASTICITE

L'ordonnée de la courbe contrainte-déformation, telle que le matériau présente une déformation permanente prédéterminée après suppression de la charge est appelée *résistance à la plasticité* du matériau. La déformation permanente prédéterminée est souvent considérée comme étant de 0,002 % à 0,035 %. Ces valeurs sont arbitraires, bien entendu. Dans la fig. 1-8, a été tracée sur l'axe de déformation, une déformation permanente ϵ_1 et une droite O'Y a été tirée parallèlement à la tangente à l'origine de la courbe. L'ordonnée de Y représente la résistance à la plasticité du matériau, parfois dite *contrainte d'essai*.

MODULE TANGENT

Le taux de changement de la contrainte par rapport à la déformation est dit *module tangent*. C'est essentiellement un module instantané donné par $E_t = d\sigma/d\epsilon$.

Il existe encore d'autres propriétés des matériaux, qui sont utiles pour les projets de construction. Ce sont :

COEFFICIENT DE DILATATION LINEAIRE

Ce coefficient est la variation de longueur par unité de longueur d'un barreau droit soumis à un changement de température de un degré. Ce coefficient est indépendant de l'unité de longueur employée, mais il dépend de l'échelle de température. On utilise habituellement l'échelle

Celsius. Dans ce cas, le coefficient, noté α est pour l'acier de $11.10^{-6}/^{\circ}\text{C}$. Exactement comme les charges, les changements de température produisent des contraintes internes dans les structures. Voir le problème 1.7.

COEFFICIENT DE POISSON

Lorsqu'un barreau est soumis à une tension pure, il se produit une augmentation de longueur en direction de la charge, mais aussi une diminution des dimensions latérales perpendiculairement à la charge. Le rapport de la déformation latérale à celle en direction axiale est le *coefficient de Poisson*. Dans l'ouvrage, il est symbolisé par la lettre grecque μ . Il se situe entre 0,25 et 0,35 pour la plupart des métaux. Voir les problèmes 1.16, 1.20.

FORME GENERALISEE DE LA LOI DE HOOKE

La forme simple de la loi de Hooke a été énoncée pour une tension axiale, la charge étant entièrement dirigée en ligne droite. Elle ne considère que la déformation dans la direction de la charge et est :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Dans le cas le plus général, un élément de matière est soumis à trois contraintes perpendiculaires σ_x , σ_y et σ_z , accompagnée respectivement par les déformations ϵ_x , ϵ_y et ϵ_z . En superposant les composantes de déformation dues à la contraction latérale résultant de l'effet de Poisson aux déformations directes, on obtient la forme généralisée de la loi de Hooke :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Voir les problèmes 1.17 et 1.20.

COMPARAISON DE L'ANALYSE ELASTIQUE ET DE L'ANALYSE PLASTIQUE

Dans certaines structures, on tolère souvent la présence de contraintes et de déformations dans le domaine plastique du matériau. Certains codes de construction admettent une déformation plastique. Des pièces de structures d'avion ou de missiles sont volontairement calculées pour fonctionner dans le domaine plastique, de manière à gagner du poids. En outre, de nombreuses méthodes de formage des métaux nécessitent une déformation plastique du matériau. Pour de petites déformations plastiques d'aciers de construction à carbone bas ou moyen la courbe contrainte-déformation de la fig. 1-5 est habituellement idéalisée par deux lignes droites, l'une avec une pente de E pour le domaine élastique, l'autre avec une pente nulle représentant le domaine plastique. Ce tracé représenté dans la fig. 1-10, s'applique à un matériau dit *élastique et parfaitement plastique*. Il ne rend pas compte des déformations plastiques plus fortes se produisant dans la région d'écrouissage représenté par la portion à droite de la fig. 1-5. Voir le problème 1.21.

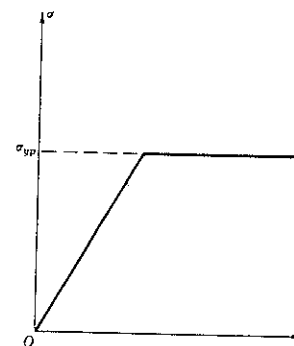


Fig. 1-10

CLASSIFICATION DES MATERIAUX

L'exposé a été basé entièrement sur l'hypothèse que deux caractéristiques des matériaux sont prédominantes : Ces hypothèses sont :

LE MATERIAU EST HOMOGÈNE, il possède les mêmes propriétés élastiques (E, μ) en tous les points du corps et

LE MATERIAU EST ISOTROPE, il possède les mêmes propriétés élastiques dans toutes les directions en un point quelconque du corps. Les matériaux ne sont pas tous isotropes. Lorsqu'un matériau ne présente par une forme quelconque de symétrie élastique, il est dit *anisotrope* ou parfois *aéolotrope*. Une substance de ce genre possède 21 constantes élastiques au lieu des deux constantes élastiques indépendantes (E, μ) des matériaux isotrope. Lorsque le matériau possède trois plans perpendiculaires de symétrie élastique, il est dit *orthotrope*. Dans ce cas, le nombre de constantes indépendantes est de 9. Dans l'ouvrage, seule sera traitée l'analyse des matériaux isotropes.

EFFETS DYNAMIQUES

Dans la détermination des propriétés mécaniques d'un matériau à l'aide de l'essai de tension ou de compression, la vitesse d'application de la charge a parfois une influence notable sur les résultats. En général, les matériaux ductiles manifestent la plus grande sensibilité aux variations de vitesse d'application de la charge. Par contre, l'influence de la vitesse de l'essai sur les matériaux fragiles, tels que la fonte, a été trouvée négligeable. Pour l'acier doux, matériau ductile, on a trouvé qu'une augmentation de 170 % du seuil de plasticité était obtenu par une application extrêmement rapide de la force axiale. Il est intéressant de remarquer cependant que dans ce cas, l'allongement total reste identique à celui trouvé en appliquant la charge plus lentement.

Problèmes résolus

- J.1 Calculer l'allongement total d'un barreau initialement rectiligne de longueur L , de section A et de module d'élasticité E , sous l'effet d'une charge de tension P , appliquée à ses extrémités.

La contrainte unitaire dans la direction de la force P est simplement le rapport de la charge par l'aire de la section, c'est-à-dire $\sigma = P/A$. La déformation unitaire ϵ est obtenue également en divisant l'allongement total Δ par la longueur initiale : $\epsilon = \Delta/L$. Par définition, le module d'élasticité E est le rapport de σ et de ϵ , donc :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{P/A}{\Delta/L} = \frac{PL}{A\Delta} \quad \text{ou} \quad \Delta = \frac{PL}{AE}$$

Noter que Δ s'exprime en unités de longueur, en cm ou en m.

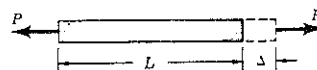


Fig. 1-11

- 1.2. Un ruban de chaîne d'arpenteur de 25 m de long a une section de 6 mm sur 0,8 mm. Calculer l'allongement du ruban développé et maintenu raide par une force de 6 kg. Le module d'élasticité est de $2,1 \cdot 10^6$ kg/cm².

$$\text{Allongement } \Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(6)(2.500)}{(0,6)(0,08)(2,1 \cdot 10^6)} = 0,15 \text{ cm}$$

- 1.3. Un barreau d'acier de 5 cm² de section est sollicité par les forces représentées dans la fig. 1-12(a). Calculer l'allongement total du barreau. Pour l'acier $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm².

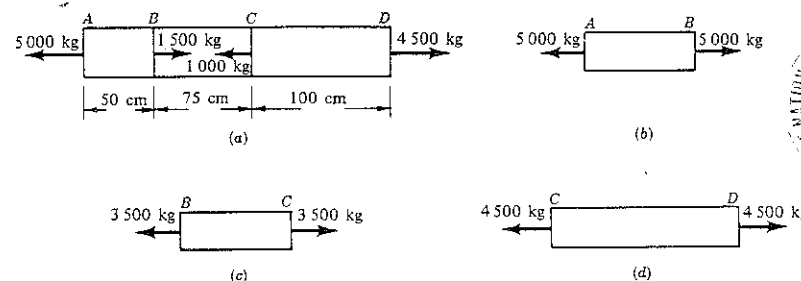


Fig. 1-12

Le barreau entier est en équilibre, donc aussi toutes ses parties. La portion entre A et B subit sur chacune de ses sections une force résultante de 5000 kg. Un schéma de corps libre d'une longueur de 50 cm du barreau est représentée dans la fig. 1-12(b). Pour maintenir l'équilibre avec la force appliquée à l'extrémité de gauche, il faut que la force appliquée à l'extrémité de droite soit de 5000 kg. L'allongement de cette portion est :

$$\Delta_1 = \frac{PL}{AE} = \frac{5.000(50)}{(5)(2,1 \cdot 10^6)} = 0,024 \text{ cm}$$

La force agissant sur le segment entre B et C se calcule en prenant la somme algébrique des forces agissant sur la gauche de la section entre B et C. On trouve une force résultante de 3500 kg, donc la section est soumise à une tension. On aurait obtenu le même résultat en prenant la somme algébrique des forces agissant sur la droite de cette section. Le schéma de corps libre de cette portion BC est donné dans la fig. 1-12(c).

$$\text{Son allongement est : } \Delta_2 = \frac{3.500(75)}{(5)(2,1 \cdot 10^6)} = 0,025 \text{ cm.}$$

De même, pour maintenir l'équilibre avec la charge appliquée en D, la force agissant sur les sections entre C et D doit être de 4500 kg. Le schéma de corps libre du segment CD est représenté dans la fig. 1-12(d).

$$\text{L'allongement de ce segment est : } \Delta_3 = \frac{(4.500)(100)}{(5)(2,1 \cdot 10^6)} = 0,043 \text{ cm.}$$

$$\text{L'allongement total est donc : } \Delta = 0,024 + 0,025 + 0,043 = 0,092 \text{ cm.}$$

- 1.4. La poutre triangulée Howe de la fig. 1-13(a) porte la seule charge de 60000 kg. En admettant pour la contrainte pratique du matériau en tension 1200 kg/cm², calculer la section nécessaire des barres DE et AC. Calculer l'allongement de la barre DE sur sa longueur de 6 m. Faire l'hypothèse que la valeur limitant la contrainte pratique en tension est le seul facteur à considérer pour le calcul de la section requise. Module $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm².

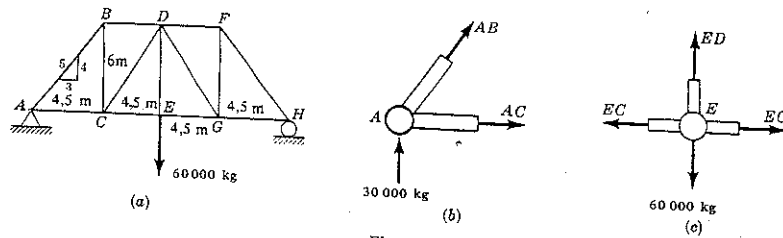


Fig. 1-13

La poutre est statiquement déterminée, tant extérieurement qu'intérieurement. Ce qui veut dire que les réactions aux appuis peuvent être déterminées par les équations de l'équilibre statique et que la force axiale dans chaque barre peut être calculée par une simple analyse statique.

Il faut d'abord déterminer les réactions verticales en A et en H. Par symétrie, elles valent 30 000 kg chacune. La fig. 1-13(b) est un schéma de corps libre du joint en A, dans lequel les forces agissant sur les barres ont été notées AB et AC, comme les barres elles-mêmes et on admet que ce sont des forces axiales. Si on les trouve positives, ce sont des tensions, si elles sont négatives, ce sont des compressions, en accord avec la convention usuelle de signe. L'application de l'équilibre statique à ce schéma de corps libre donne :

$$\Sigma F_v = 30.000 + \frac{4}{5}(AB) = 0 \quad \text{ou} \quad AB = -37.500 \text{ kg}$$

$$\Sigma F_h = \frac{3}{5}(-37.500) + AC = 0 \quad \text{ou} \quad AC = 22.500 \text{ kg}$$

De même au point E, le schéma de corps libre est donné dans la fig. 1-13(c). De la statique, on a :

$$\Sigma F_v = ED - 60.000 = 0 \quad \text{ou} \quad ED = 60.000 \text{ kg}$$

La théorie simple des poutres triangulées admet que toutes les barres sont des membrures à deux forces, c'est-à-dire soumises à une tension ou une compression axiales, sans autres charges.

La contrainte en charge axiale est $\sigma = P/A$, P étant la force axiale et A la section de la barre. Ici, la contrainte admissible est de 1 200 kg/cm² dans chaque barre. Les sections sont donc :

$$A_{DE} = \frac{60.000}{1.200} = 50 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad A_{AC} = \frac{22.500}{1.200} = 18,75 \text{ cm}^2$$

L'allongement de la barre sous tension axiale est $\Delta = PL/AE$. Pour chaque barre DE, on a :

$$\Delta = \frac{(60.000)(600)}{(50)(2,1 \cdot 10^6)} = 0,34 \text{ cm}$$

15. Déterminer l'augmentation de longueur totale d'un barreau de section constante suspendu verticalement et soumis seulement à son propre poids. Le barreau est droit au départ.

La contrainte normale (de tension) sur toute section horizontale est produite par le poids du matériau en dessous de cette section. L'allongement de l'élément d'épaisseur dy représenté est :

$$d\Delta = (A\gamma/AE) dy$$

où A est l'aire de la section du barreau et γ son poids volumique (poids par unité de volume). En intégrant, l'allongement total du barreau est :

$$\Delta = \int_0^L \frac{A\gamma dy}{AE} = \frac{A\gamma L^2}{2AE} = \frac{(A\gamma L)L}{2AE} = \frac{WL}{2AE}$$

où W est le poids total du barreau. Remarquer que l'allongement total dû au poids du barreau est égal à celui produit par une charge moitié de son poids appliquée à l'extrémité.

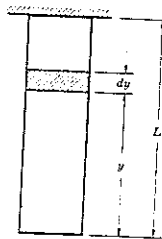


Fig. 1-14

16. Un câble d'acier de 6 mm de diamètre est utilisé pour le levage dans la construction immobilière. Si 150 m de câble sont suspendus verticalement et servent à lever une charge de 200 kg suspendue à l'extrémité inférieure, calculer l'allongement total du câble. Le poids volumique de l'acier est de 0,0078 kg/cm³ et $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

L'allongement total est produit, en partie par la force appliquée de 200 kg et en partie par le poids du câble. L'allongement dû à la charge de 200 kg est :

$$\Delta_1 = \frac{PL}{AE} = \frac{(200)(15.000)}{\frac{\pi}{4}(0,6)^2(2,1 \cdot 10^6)} = 5 \text{ cm}$$

D'après le problème 1.5, l'allongement dû au poids est :

$$\Delta_2 = \frac{WL}{2AE} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)(0,6)^2(15.000)(0,0078)(15.000)}{2\left(\frac{\pi}{4}\right)(0,6)^2(2,1 \cdot 10^6)} = 0,4 \text{ cm}$$

L'allongement total est : $\Delta = 5 + 0,4 = 5,4 \text{ cm}$.

17. Un fil d'aluminium de 30 m de long est soumis à une contrainte de tension de 700 kg/cm². Calculer l'allongement total du fil. Quelle température produirait le même allongement ? Prendre $E = 7 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ et pour α (coefficient de dilatation linéaire $21,6 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$).

$$\text{L'allongement total est : } \Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(700)(3.000)}{7 \cdot 10^5} = 3 \text{ cm}$$

L'élévation de température ΔT produisant le même résultat est donnée par :

$$3 = (21,6 \cdot 10^{-6})(3.000)(\Delta T) \quad \text{et} \quad \Delta T = 46^\circ \text{C}$$

18. Deux barreaux prismatiques sont fixés ensemble rigidement et sont soumis à une charge de 5 000 kg, fig. 1-15. Le barreau supérieur est en acier de masse volumique 0,0078 kg/cm³, de longueur 10 m et de section de 60 cm². Le barreau inférieur est en bronze, de masse volumique 0,008 kg/cm³, de longueur 6 m et de section de 50 cm². Pour l'acier, $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ pour le bronze $E = 9 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$. Calculer la contrainte maximale dans chaque matériau.

La contrainte maximale dans le bronze se produit immédiatement en-dessous de la jonction, à la section B-B. La contrainte normale verticale en cet endroit due à l'effet combiné de la charge de 5 000 kg et du poids de la barre entière de bronze, en-dessous de B-B.

Le poids de la barre de bronze est :

$$P_b = (600)(50)(0,008) = 240 \text{ kg}$$

La contrainte dans cette section A-A est :

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{5.000 + 240}{50} = 105 \text{ kg/cm}^2$$

La contrainte maximale dans la barre d'acier se produit sur la section A-A, zone de suspension, parce qu'à cet endroit, c'est le poids entier de l'acier et du laiton qui produit la contrainte normale, tandis que dans les sections situées plus bas, seule une partie du poids de l'acier engendre la contrainte.

Le poids de la barre d'acier est : $P_a = (1.000)(60)(0,0078) = 468 \text{ kg}$

La contrainte sur la section A-A est : $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{5.000 + 240 + 468}{60} = 95 \text{ kg/cm}^2$.

19. Une barre pleine conique de section circulaire a un diamètre d à son extrémité de faible section et D à sa base. La longueur de la barre est L. Déterminer l'allongement dû à une force axiale P appliquée à chaque extrémité, fig. 1-16.

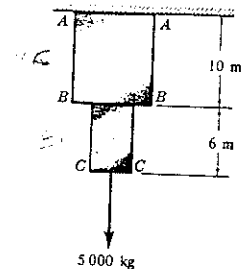


Fig. 1-15

Appelons x la distance depuis la petite extrémité pour un élément en forme de disque d'épaisseur dx . A l'aide de la formule des triangles semblables, le rayon de ce petit élément est donné par :

$$r = \frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right)$$

L'allongement de cet élément de disque se calcule à partir de la formule de l'allongement dû à la charge axiale $\Delta = PL/AE$. Cette expression devient :

$$d\Delta = \frac{P dx}{\pi \left[\frac{d}{2} + \frac{x}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right) \right]^2 E}$$

L'allongement du barreau entier s'obtient en intégrant les allongements de tous les éléments semblables sur le barreau. En appelant Δ l'allongement de la barre entière :

$$\Delta = \int_0^L d\Delta = \int_0^L \frac{4P dx}{\pi [d + (x/L)(D-d)]^2 E} = \frac{4PL}{\pi D d E}$$

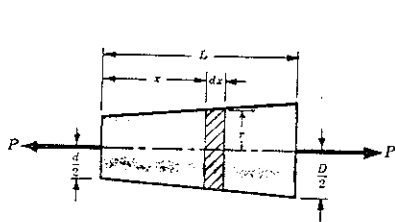


Fig. 1-16

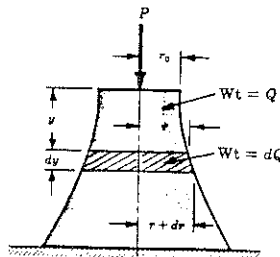


Fig. 1-17

- 1.10 Un solide de révolution, fig. 1-17 supporte une charge P . Le rayon de la base supérieure de solide est r_0 et le poids volumique du matériau est γ . Déterminer la variation du rayon avec l'altitude, de manière que la contrainte de compression soit constante sur toutes les sections. Le poids du solide n'est pas négligeable.

Soit y la hauteur mesurée à partir de la force supérieure et Q le poids de la portion du corps à l'altitude y . dQ est l'incrément de Q pour un incrément d'altitude dy . Soient r et $r + dr$ les rayons des faces supérieure et inférieure de cet élément horizontal et A et $A + dA$ leurs surfaces. En considérant les contraintes normales de compression agissant sur les deux surfaces de cet élément, on a :

$$\frac{P+Q}{A} = \frac{P+Q+dQ}{A+dA} = \sigma = \text{constante}$$

d'où

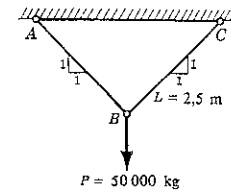
$$\frac{dA}{dQ} = \frac{A}{P+Q} = \frac{1}{\sigma} \quad (1)$$

L'incrément d'aire entre les faces supérieure et inférieure de l'élément est : $dA = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr$. L'incrément de poids est : $dQ = \pi r^2 \gamma (dy)$. D'après l'équation (1), $\frac{2\pi r dr}{\pi r^2 \gamma (dy)} = \frac{1}{\sigma}$. En intégrant :

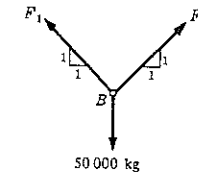
$$2 \ln r = (\gamma/\sigma)y + C_1$$

En appliquant la condition aux limites, à savoir que $r = r_0$ pour $y = 0$, on trouve $C_1 = 2 \ln r_0$. Également à partir des conditions à la face supérieure, $\sigma = P/\pi r_0^2$. Finalement : $r = r_0 e^{\gamma \pi r_0^2 y / 2P}$.

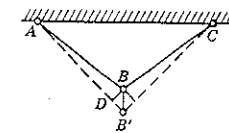
- 1.11 Deux barres d'acier identiques sont assemblées par des broches et portent une charge de 50 000 kg, fig. 1-18(a). Calculer la section des barres telle que la contrainte subie ne soit pas plus grande que 2 100 kg/cm². Calculer également le déplacement vertical du point B. Prendre $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm².



(a)



(b)



(c)

Fig. 1-18

Un schéma de corps libre de la broche en B est représenté dans la fig. 1-18(b), où F_1 est la force (kg) dans chaque barre.

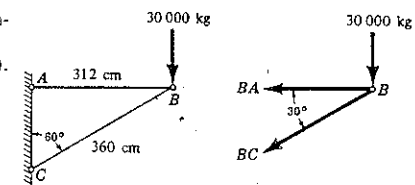
D'après la statique : $\Sigma F_v = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) F_1 - 50.000 = 0$ ou $F_1 = 35.355$ kg.

On en tire la section requise : $A = \frac{35.355}{2.100} = 17$ cm²

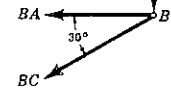
Comme notre étude de la résistance des matériaux se limite aux cas des petites déformations, la géométrie de base de la structure est essentiellement inchangée. Pour la position des barres déformées, nous pouvons admettre les lignes discontinues de la fig. 1-18(c) et l'angle $DB'B$ est très voisin de 45°. L'allongement de la barre de gauche est représentée par DB' et est obtenu en partant de l'expression de l'allongement axial (problème 1.1) :

$$DB' = \frac{(35.355)(250)}{(17)(2,1 \cdot 10^6)} = 0,25 \text{ cm} \quad \text{et ainsi} \quad BB' = \frac{0,25}{\cos 45^\circ} = 0,35 \text{ cm}$$

- 1.12 Les deux barres d'acier AB et BC sont assemblées par broches à chaque extrémité et supportent une charge de 30 000 kg, fig. 1-19(a). Le métal est de l'acier coulé revenu, ayant un seuil de plasticité de 4 200 kg/cm². Les facteurs de sécurité admis sont 2 pour les membrures en tension et 3,5 pour celles en compression. Calculer les sections requises de ces barres, ainsi que les composantes horizontale et verticale au point B. Prendre $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm².



(a)



(b)

Fig. 1-19

En admettant que les forces inconnues soient de tension, le schéma de corps libre du joint en B est représenté par la fig. 1-19(b).

D'après la statique : $\Sigma F_v = -30.000 - BC \sin 30^\circ = 0$ ou $BC = -60.000$ kg
 $\Sigma F_h = -BA - BC \cos 30^\circ = 0$ ou $BA = 52.000$ kg

Les contraintes pratiques sont : $4200/2 = 2100 \text{ kg/cm}^2$ en tension et : $4200/3,5 = 1200 \text{ kg/cm}^2$ en compression.

Les sections requises se calculent en divisant la force axiale dans chaque barre par la contrainte pratique admissible :

$$A_{AB} = \frac{52.000}{2.100} = 24,7 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad A_{BC} = \frac{60.000}{1.200} = 50 \text{ cm}^2$$

Pour trouver le déplacement du point B, il est d'abord nécessaire de calculer la déformation axiale de chacune des barres. A partir de l'expression trouvée dans le problème 1.1, l'allongement de AB est :

$$\Delta_{AB} = \frac{(52.000)(312)}{(24,7)(2,1 \times 10^6)} = 0,31 \text{ cm}$$

et la compression de BC est :

$$\Delta_{BC} = \frac{(60.000)(360)}{(50)(2,1 \times 10^6)} = 0,2 \text{ cm}$$

La position du point B après déformation peut être trouvée en constatant que la barre AB s'est allongée de 0,31 cm et tourne rigidement autour de la broche en A. De même, la barre BC se raccourcit de 0,2 cm et tourne également autour de la broche en C.

La fig. 1-19(c) montre le mouvement du point B vers sa nouvelle position en B'. Comme les déformations de la structure sont petites, le déplacement de la barre allongée AB dû à la rotation autour de A peut être représenté par la ligne droite B'B' plutôt que par un arc de cercle de centre A. Le même raisonnement s'applique à la rotation de la barre BC. Du croquis représenté, on tire les composantes du déplacement du point B :

$$\Delta_h = 0,31 \text{ cm}$$

$$\Delta_v = \left[\frac{(0,2 \cos 30^\circ) + 0,31}{\tan 30^\circ} \right] + 0,2 \sin 30^\circ = 0,85 \text{ cm}$$

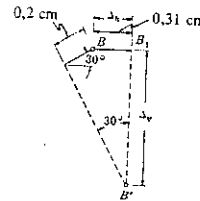


Fig. 1-19(c)

- 1.13 Le cadre assemblé par broches de la fig. 1-20 est supporté en A de manière à empêcher le déplacement vertical, un déplacement horizontal restant possible. Les deux barres sont en acier de section 6 cm^2 . La barre AB est chauffée à 50°C au-dessus de la température de référence lorsque le système est libre de contraintes, mais la barre AC est maintenue à cette température de référence. Admettre que les deux barres restent rectilignes et calculer les contraintes dans chacune. Prendre $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$.

Pour le calcul supposons d'abord qu'il n'existe pas de liaison entre A et les barres. Sous l'influence de l'élévation de température, la barre AB s'allongera de :

$$\frac{50(11 \cdot 10^{-6}) 3 \cdot 10^2}{\cos 30^\circ} = 0,19 \text{ cm}$$

Du fait de cet allongement, on peut admettre que la barre AB subira une rotation rigide autour du point B et son extrémité de gauche se trouvera en un point A' à la gauche de A.

Mais comme les barres sont en réalité reliées à leurs extrémités de gauche, une force de tension F_2 est exercée en A vers la gauche sur la barre horizontale AC qui tend à l'allonger horizontalement. Pour l'équilibre horizontal en A, il se produit donc une force de compression F_1 dans la barre AB. Le schéma de corps libre de la broche A est représenté dans la fig. 21.

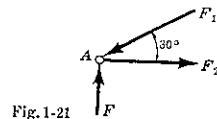


Fig. 1-21

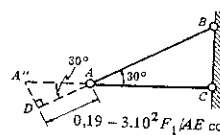


Fig. 1-22

Pour l'équilibre :

$$F_2 - F_1 \cos 30^\circ = 0$$

ou

$$F_2 = F_1 \cos 30^\circ$$

La fig. 1-22 montre que la barre AB, sous l'action combinée de la dilatation thermique et de la compression axiale, tourne rigidement autour de B, son extrémité de gauche venant en position finale en A'. De la géométrie de la figure, on tire :

$$\overline{AD} = \overline{AA'} \cos 30^\circ$$

En partant des résultats du problème 1.1, on peut écrire :

$$0,19 - \frac{F_1 \cdot 3 \cdot 10^2}{AE \cos 30^\circ} = \frac{F_2 \cdot 3 \cdot 10^2}{AE} \cos 30^\circ = \frac{F_1 (\cos 30^\circ)^2 \cdot 3 \cdot 10^2}{AE}$$

où A est l'aire de section de chaque barre. En résolvant :

$$F_1 = 700 \text{ A} \quad F_2 = 606 \text{ A}$$

d'où

$$\sigma_{AB} = 700 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_{AC} = 606 \text{ kg/cm}^2$$

1.14

Soient les deux tiges ou fils de la fig. 1-23(a), assemblés par broches en A, B et C et initialement horizontaux et de longueur L lorsque aucune charge n'est appliquée. Le poids des fils est négligeable. On applique (graduellement) une force Q au point B. Calculer la valeur de Q nécessaire pour produire une déflexion verticale δ du point B.

C'est un exemple extrêmement intéressant d'un système dans lequel les allongements de toutes les membrures satisfont individuellement la loi de Hooke et où pourtant, la déflexion n'est pas proportionnelle à la force pour une raison géométrique.

Chaque tige satisfait la relation $\Delta = PL/AE$, où P est la force axiale dans chaque tige et Δ l'allongement axial. Au début, chaque tige possède une longueur L qui devient L' après application de la charge totale Q. Ainsi :

$$L' - L = \frac{PL}{AE} \quad (1)$$

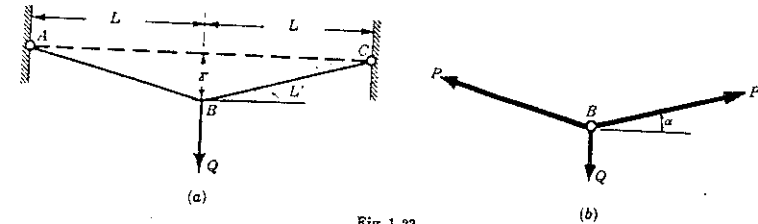


Fig. 1-23

Le schéma de corps libre de la broche en B est montré dans la fig. 1-23(b). D'après la statique :

$$\Sigma F_v = 2P \sin \alpha - Q = 0 \quad \text{ou} \quad Q = 2P \left(\frac{\delta}{L'} \right)$$

En utilisant l'équation (1) :

$$Q = 2 \frac{(L' - L)AE}{L} \frac{\delta}{L'} = \frac{2\delta AE}{L} \left(1 - \frac{L}{L'} \right) \quad (2)$$

Mais :

$$(L')^2 = L^2 + \delta^2 \quad (3)$$

Par conséquent :

$$Q = \frac{2\delta AE}{L} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + \delta^2}} \right) \quad (4)$$

D'après le théorème du binôme, on a :

$$\sqrt{L^2 + \delta^2} = L \left(1 + \frac{\delta^2}{L^2} \right)^{1/2} = L \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{L^2} + \dots \right) \quad (5)$$



et ainsi :

$$1 - \frac{L}{L \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{L^2} \right)} \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{L^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{L^2} \quad (6)$$

On en tire la relation approchée entre force et déplacement :

$$Q \approx \frac{2AE\delta}{L} \frac{\delta^2}{2L^2} = \frac{AE\delta^3}{L^3} \quad (7)$$

laquelle correspond à l'équation (4).

Ainsi, le déplacement δ n'est pas proportionnel à la force Q , bien que la loi de Hooke s'applique pour chaque barre individuellement. On notera que Q devient plus près de la proportionnalité à δ quand δ augmente, dans l'hypothèse où la loi de Hooke s'applique encore aux allongements des barres. Dans cet exemple, la superposition n'est pas vérifiée. La caractéristique de cette structure est que l'action de la force extérieure est notablement affectée par les petites déformations produites. Dans un tel cas, les contraintes et les déplacements ne sont pas des fonctions linéaires des charges appliquées et la superposition ne s'applique pas.

Résumé : Un matériau doit suivre la loi de Hooke si on peut appliquer la loi de superposition. Mais cette exigence seule n'est pas suffisante il faut considérer si l'action des charges appliquées est ou n'est pas affectée par de petites déformations de la structure. Si cet effet est notable, la loi de superposition n'est pas valable.



Pour plus de document gratuit visiter
<https://book4yours.blogspot.com>

- 1.15. Considérons le système étudié dans le problème 1.14, avec des fils chacun de longueur initiale de 150 cm, de section de 0,6 cm² et avec $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm². Pour une charge Q de 10 kg, calculer la déflexion centrale δ avec les relations exactes et les relations approchées.

L'équation exacte reliant force et déflexion est $Q = \frac{2\delta AE}{L} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + \delta^2}} \right)$. En introduisant les valeurs numériques, on obtient : $10 = \frac{2\delta(0,6)(2,1 \cdot 10^6)}{(150)} \left[1 - \frac{150}{\sqrt{(150)^2 + \delta^2}} \right]$. En résolvant par tâtonnement, on trouve $\delta = 2,994$ cm.

L'équation approchée entre force et déflexion est : $Q = \frac{AE\delta^3}{L^3}$. En substituant les valeurs numériques :

$$10 = \frac{(0,6)(2,1 \cdot 10^6)\delta^3}{150^3} \quad \text{d'où} \quad \delta = 2,992 \text{ cm}$$

- 1.16. Un barreau carré d'acier de 5 cm de côté et de 1 m de long est soumis à une force de tension axiale de 32 000 kg. Calculer la diminution de dimension latérale due à cette charge. Prendre $E = 2,1 \cdot 10^6$ et $\mu = 0,3$.

Puisque la charge est axiale, la contrainte dans la direction de cette charge est :

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{32.000}{25} = 1.280 \text{ kg/cm}^2$$

La forme simple de la loi de Hooke donne pour une charge uniaxiale $E = \sigma/\epsilon$. La déformation ϵ en direction de la charge est donc : $1.280/2.100.000 = 0,00061$.

Le rapport de la déformation latérale à la déformation axiale est le coefficient de Poisson, c'est-à-dire que :

$$\mu = \frac{\text{déformation latérale}}{\text{déformation axiale}}$$

On a trouvé 0,00061 pour la déformation axiale. La déformation latérale est égale à μ fois cette valeur, soit : $(0,3)(0,00061) = 0,000183$. Comme la déformation latérale est de 0,000183 pour une

longueur de 5 cm, la diminution de la dimension latérale est de 0,000915.

On notera que la définition du coefficient de Poisson comme le rapport de deux déformations, suppose que la membrure supporte seulement une charge uniaxiale unique.

- 1.17. Considérons un élément dans un état tel que, subissant une contrainte σ_x dans une direction, une contraction puisse se produire dans une seconde direction z , mais soit totalement impossible dans la troisième direction y . Calculer le rapport de la contrainte dans la direction x à la déformation dans cette même direction. Calculer également le rapport de la déformation dans la direction z à celle dans la direction x .

Reprenons l'examen de la loi de Hooke généralisée exposée plus haut. Si dans ces équations, nous posons $\sigma_z = 0$ et $\sigma_y = 0$ de manière à satisfaire les conditions du problème, la loi de Hooke devient :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + 0)] \quad (a)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + 0)] = 0 \quad (b)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [0 - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (c)$$

D'après l'équation (b),

$$\sigma_y = \mu\sigma_x$$

Par conséquent, l'équation (a) devient :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu^2\sigma_x) = \frac{1 - \mu^2}{E} \sigma_x$$

En résolvant cette équation pour σ_x en fonction de ϵ_x et en substituant dans l'équation (c), on a

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \mu\sigma_x) = -\frac{\mu(1 + \mu)}{E} \frac{\epsilon_x E}{1 - \mu^2} = -\frac{\mu\epsilon_x}{1 - \mu}$$

On peut alors former les rapports :

$$\frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{E}{1 - \mu^2} \quad \text{et} \quad -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} = \frac{\mu}{1 - \mu}$$

La première quantité, $E/(1 - \mu^2)$ est habituellement nommée le *module effectif d'élasticité* et est utile dans la théorie des plaques minces et des coques. Le second rapport, $\mu/(1 - \mu)$ est dit la *valeur effective du coefficient de Poisson*.

- 1.18. Soit un élément de bloc soumis à une tension uniaxiale. Calculer les expressions approchées du changement de volume par unité de volume produit par cette charge.

Désignons par ϵ_x la déformation en direction des forces. Les déformations dans les deux autres directions orthogonales sont alors chacune $-\mu\epsilon_x$. Donc si les dimensions initiales de l'élément sont dx , dy et dz , les dimensions finales sont :

$$(1 + \epsilon_x) dx, (1 - \mu\epsilon_x) dy, (1 - \mu\epsilon_x) dz$$

et le volume après déformation est :

$$\begin{aligned} V' &= [(1 + \epsilon_x) dx][(1 - \mu\epsilon_x) dy][(1 - \mu\epsilon_x) dz] \\ &= (1 + \epsilon_x)(1 - 2\mu\epsilon_x) dx dy dz \\ &= (1 - 2\mu\epsilon_x + \epsilon_x) dx dy dz \end{aligned}$$

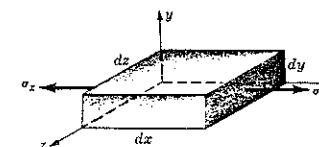


Fig. 1-24

puisque les déformations sont suffisamment petites pour que leurs carrés et leurs produits puissent être négligés.

Le volume initial étant $dx dy dz$, le changement de volume par unité de volume est :

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\mu)\epsilon_x$$

On en conclut que, pour une force de tension, le volume augmente légèrement et qu'il diminue pour une force de compression.

De même l'aire de la section de l'élément dans un plan normal à la direction de la force appliquée est donnée approximativement par : $A = (1 - \mu\epsilon_x)^2 dy dz = (1 - 2\mu\epsilon_x) dy dz$.

- 1.19. Un barreau carré en aluminium de 5 cm de côté et de 25 cm de long est soumis à des forces axiales de tension à ses extrémités. L'expérience montre que la déformation en direction de la charge est de 0,001 cm/cm. Calculer le volume du barreau sous charge. Prendre $\mu = 0,33$.

D'après le problème 1.18, le changement de volume par unité de volume est donné par :

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon(1 - 2\mu) = 0,001(1 - 0,66) = 0,00034$$

En conséquence, le changement de volume du barreau entier est donné par :

$$\Delta V = (5)(5)(25)(0,00034) = 0,212 \text{ cm}^3$$

Le volume initial du barreau en état non contraint est de 625 cm^3 . Puisqu'une force de tension augmente le volume, le volume final est $625,212 \text{ cm}^3$. On remarquera que les méthodes usuelles de mesure physique ne donneraient pas une précision de six chiffres significatifs.

- 1.20. La forme généralisée à trois dimensions de la loi de Hooke, dans laquelle les composantes des déformations sont exprimées en fonction des composantes des contraintes a été décrite. Dans certains cas, il peut être nécessaire d'exprimer les composantes des contraintes en fonction des composantes des déformations. Etablir ces expressions.

Etant donné les expressions précédentes :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (1)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (2)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (3)$$

introduisons la notation :

$$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (4)$$

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (5)$$

Avec ces notations, les équations (1), (2) et (3) peuvent être aisément résolues par des déterminants, pour donner les valeurs inconnues σ_x , σ_y et σ_z :

$$\sigma_x = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \epsilon + \frac{E}{1 + \mu} \epsilon_x \quad (6)$$

$$\sigma_y = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \epsilon + \frac{E}{1 + \mu} \epsilon_y \quad (7)$$

$$\sigma_z = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \epsilon + \frac{E}{1 + \mu} \epsilon_z \quad (8)$$

Ce sont les expressions cherchées.

A partir de l'équation (5), une autre information peut-être tirée de l'équation (1). En additionnant les équations (1), (2) et (3) et en introduisant les symboles ϵ et σ , on obtient :

$$\epsilon = \frac{1}{E} (1 - 2\mu) \sigma \quad (9)$$

Dans le cas particulier d'un solide soumis à une pression uniforme hydrostatique p : $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$. De là :

$$\epsilon = \frac{-3(1 - 2\mu)p}{E} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{\sigma} = -\frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

La quantité $E/3(1 - 2\mu)$ est souvent symbolisée par K et dénommée *module de volume* ou *module de dilatation cubique* du matériau. Physiquement, le module de volume K est une mesure de la résistance du matériau au changement de volume sans changement de forme.

On voit que le volume final d'un élément de côtés dx , dy , dz avant application de la charge et soumis aux contraintes σ_x , σ_y et σ_z est : $(1 + \epsilon_x)dx(1 + \epsilon_y)dy(1 + \epsilon_z)dz = (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)dx dy dz$. Ainsi le taux de l'accroissement de volume initial est donné approximativement par :

$$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

Ce changement de volume par unité de volume est appelé *dilatation cubique*.

- 1.21. Une force axiale de 60 000 kg est appliquée, comme le montre la fig. 1-25(a) sur un barreau de section circulaire uniforme de 5 cm de diamètre. Le barreau est fixé rigidement de façon telle que ses extrémités ne puissent pas se rapprocher. Utiliser la courbe contrainte-déformation donnée dans la fig. 1-10 avec $\sigma_{yp} = 2100 \text{ kg/cm}^2$ et calculer les contraintes dans les deux régions du barreau.

Appelons σ_1 la contrainte axiale dans la région supérieure du barreau et σ_2 celle dans la région inférieure. La fig. 1-25(b) donne le schéma de corps libre de la portion du barreau entourant le point d'application de la charge. Puisque l'aire de la section est $\pi 25^2/4 = 6,25 \pi \text{ cm}^2$, nous avons :

$$6,25 \pi \sigma_1 + 6,25 \pi \sigma_2 - 60\,000 = 0$$

$$\text{ou} \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 3061 \text{ kg/cm}^2 \quad (a)$$

Il est évident que le point d'application de la force de 60 000 kg se déplace vers le bas. Donc l'extension de la région supérieure 1 doit être égale numériquement à la compression dans la région inférieure 2.

Faisons l'hypothèse que toutes les contraintes sont inférieures au seuil de plasticité. A partir des résultats du problème 1.1, on a :

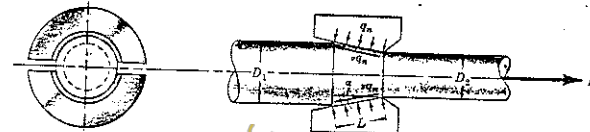
$$\frac{6,25 \pi \sigma_1 \cdot 270}{\pi E} = \frac{6,25 \pi \sigma_2 \cdot 30}{\pi E} \quad \text{soit :} \quad 9 \sigma_1 = \sigma_2$$

En substituant cette valeur dans l'équation d'équilibre, on trouve :

$$\sigma_1 = 306 \text{ kg/cm}^2 \quad \sigma_2 = 2754 \text{ kg/cm}^2$$

Ces valeurs seraient les contraintes correctes si le matériau était élastique jusqu'à une contrainte de 2754 kg/cm^2 , mais la contrainte maximale admissible dans la région 2 est de 2100 kg/cm^2 , qui est la contrainte du seuil de plasticité. Donc la contrainte correcte dans cette région est $\sigma_2 = 2100 \text{ kg/cm}^2$ et, à partir de l'équation (a), on trouve $\sigma_1 = 961 \text{ kg/cm}^2$ qui est la valeur correcte de la contrainte dans la région 1.

- 1.22. Dans l'étrépage de fil, un fil cylindrique est lentement tiré dans une filière tronconique. Le diamètre est réduit de D_1 à D_2 . La filière est fendue suivant un plan diamétral, mais empêchée de s'ouvrir. Etant donné un coefficient de friction ν entre le fil et la filière, calculer la force normale q_n exercée sur le fil par la filière.



La fig. 1-26 représente les forces exercées sur le fil par la filière. La surface de fil en contact avec la filière est donnée par $(A_1 - A_2)/\sin \alpha$ où A_1 est l'aire de la section en D_1 et A_2 celle en D_2 . En additionnant les forces horizontalement, on a pour l'équilibre :

$$P - \left(\frac{A_1 - A_2}{\sin \alpha} \right) (q_n \sin \alpha + \nu q_n \cos \alpha) = 0 \quad (a)$$

La fig. 1-27 représente le schéma de corps libre de la moitié supérieure de la filière, où S est la force de séparation entre les deux moitiés de l'outil. L'équilibre vertical de cette moitié supérieure de l'outil peut être déterminée en projetant sur le plan horizontal les forces radiales q_n exercées par le fil sur la filière, c'est-à-dire en considérant qu'elles agissent verticalement sur la surface horizontale trapézoïdale formée par la projection de la surface conique de contact du fil et de la filière sur le plan horizontal. Ainsi :

$$-\frac{S}{2} - \frac{S}{2} + (q_n \cos \alpha) \left(\frac{D_1 + D_2}{2} \right) L - q_n \left(\frac{D_1 + D_2}{2} \right) L \nu \sin \alpha = 0 \quad (b)$$

En résolvant simultanément les équations (a) et (b), on trouve :

$$q_n = \frac{\pi S}{(A_1 - A_2)(\cot \alpha - \nu)}$$

On mesure habituellement la force S à l'aide de jauges de déformation à résistance fixées sur la face extérieure de la filière.

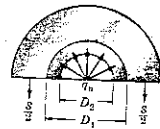


Fig. 1-27

Problèmes supplémentaires

- 1.23. Un barreau rectiligne de section uniforme est soumis à une tension axiale. Sa section a une surface de 6 cm^2 et le barreau a une longueur de 4 m . Si l'allongement total est de $0,40 \text{ cm}$, sous une charge de 12600 kg , trouver le module d'élasticité du matériau. *Rép.* $2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.
- 1.24. Calculer la hauteur à laquelle peut être construit un mur de béton, en admettant une résistance à la compression de 176 kg/cm^2 et un facteur de sécurité de 4. Le poids volumique du béton est 2200 kg/m^3 . *Rép.* 200 m .
- 1.25. Un cylindre creux en fonte a un diamètre extérieur de $7,5 \text{ cm}$ et un diamètre intérieur de 6 cm . Sur le cylindre est appliqué une force axiale de compression de 5000 kg . Calculer la contraction totale sur une longueur de 50 cm . Calculer également la contrainte normale sous cette charge. Prendre comme module d'élasticité $E = 1,05 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et négliger la possibilité de flambement latéral du cylindre. *Rép.* $\Delta = 0,015 \text{ cm}$ $\sigma = 314 \text{ kg/cm}^2$.
- 1.26. Une tige cylindrique pleine en acier de 6 mm de diamètre et de 40 cm de long est fixée rigidement à l'extrémité d'un barreau carré en bronze de 2 cm de côté et de 30 cm de long. Les axes des deux barreaux sont dans le prolongement l'un de l'autre. Une force axiale de tension de 500 kg est appliquée à chacune des extrémités. Calculer l'allongement total de l'ensemble. Pour l'acier $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et pour le bronze $E = 9,5 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$. *Rép.* $0,0376 \text{ cm}$.
- 1.27. La poutre triangulée de la fig. 1-28 est fixée par broches et elle supporte une seule force de 15000 kg . Les barreaux sont tous en acier SAE 1020 ayant un seuil de plasticité de 2450 kg/cm^2 . Un coefficient de sécurité de 2 convient pour les membrures en tension. Calculer les sections requises pour les barreaux CD et AB. *Rép.* section de CD = $6,12 \text{ cm}^2$ section de AB = $7,65 \text{ cm}^2$.

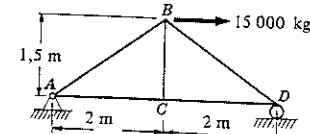


Fig. 1-28

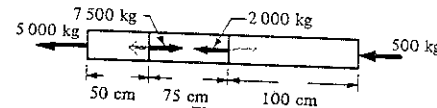


Fig. 1-30

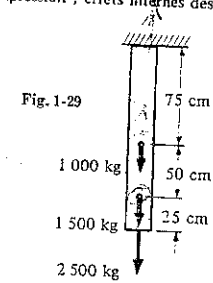


Fig. 1-29

- 1.28. Une barre d'acier de section constante est suspendue verticalement et porte à son extrémité inférieure une charge de 2500 kg , fig. 1-29. A une distance de 25 cm au-dessus de cette charge, est appliquée une force verticale de 1500 kg et à 50 cm au-dessus de ce dernier point est appliquée une charge de 1000 kg . La barre a une longueur totale de 150 cm et une section de 6 cm^2 . Le module d'élasticité est de $2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Calculer l'allongement total de la barre. *Rép.* $0,0506 \text{ cm}$.
- 1.29. Un barreau de bronze de section 10 cm^2 est soumis aux forces axiales représentées dans la fig. 1-30. Calculer l'allongement total du barreau. Pour le bronze $E = 9 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$. *Rép.* $0,0013 \text{ cm}$.
- 1.30. Des rails d'acier sont posés avec un écartement de 3 mm entre les extrémités lorsque la température est de 15°C . Chaque rail a une longueur de 12 m . Le module d'élasticité est $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$. (a) calculer l'écartement entre les rails pour une température de 24°C (b) à quelle température les rails sont-ils en contact ? (c) calculer la contrainte de compression pour une température de 45°C . Négliger toute possibilité de flambement des rails. *Rép.* écartement $0,815 \text{ cm}$ $T = 37,7^\circ\text{C}$ $\sigma = 168 \text{ kg/cm}^2$.
- 1.31. Dans un essai de traction d'une éprouvette cylindrique en acier étiré à froid de 13 mm de diamètre, on obtient les résultats suivants :

Charge axiale (kg)	Allongement sur une longueur de référence de 5 cm	Charge axiale (kg)	Allongement sur une longueur de référence de 5 cm
0	0	3.140	0.0300
570	0.0010	3.140	0.0400
830	0.0015	3.120	0.0500
1.090	0.0020	3.140	0.0600
1.380	0.0025	3.160	0.1250
1.650	0.0030	3.500	0.2500
1.920	0.0035	4.230	0.5000
2.200	0.0040	4.460	0.7500
2.460	0.0045	4.560	1.0000
2.750	0.0050	4.560	1.2500
3.040	0.0055	4.460	1.5000
3.300	0.0060	4.300	1.7500
3.110	0.0100	4.020	1.8750
3.140	0.0200		

Après rupture, le diamètre de l'éprouvette à l'endroit de la cassure est de $0,75 \text{ mm}$. La longueur de référence initiale de 5 cm est devenue $6,875 \text{ cm}$. A partir des résultats fournis déterminer la limite de proportionnalité, le module d'élasticité du matériau, le pourcentage de réduction de section, le pourcentage d'allongement et la charge de rupture.

Rép. : Limite de proportionnalité = 2480 kg/cm^2 $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, réduction de section = $66,8$, pourcentage d'allongement = $37,5$, charge de rupture = 3029 kg/cm^2

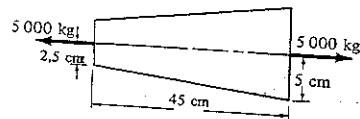


Fig. 1-31

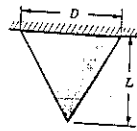


Fig. 1-32

1.32. Soit la plaque d'acier de forme triangulaire de la fig. 1-31. Son épaisseur est de 12 mm et, sur une longueur de 450 mm, sa conicité varie uniformément de 50 mm à 100 mm. Une force axiale de 5000 kg est appliquée à chaque extrémité. Calculer l'allongement de la plaque. Prendre $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.
Rép. : 0,0124 cm

1.33. Un barreau conique de section circulaire est suspendu verticalement, comme le montre la fig. 1-32. Sa longueur est L , le diamètre de la base D , le module d'élasticité E et le poids par unité de volume γ . Calculer l'allongement du barreau sous l'effet de son propre poids. Rép. : $\Delta = \gamma L^2 / 6E$.

1.34. Un trépied dont les pieds ont même longueur porte à sa partie supérieure à une hauteur h au-dessus du sol une charge verticale P . Pour empêcher les pieds de glisser sur le sol, ils sont réunis au milieu par des cordes minces de longueur L . Les cordes sont identiques et ont une section A et un module d'Young E . Calculer l'allongement de chaque corde. Rép. : $2PL^2 / 9hAE$.

1.35. Dans la fig. 1-33, AB , AC , BC , CD et BD sont des tiges assemblées par des broches. Le point B est attaché au point E par un ressort de longueur initiale de 30 cm au repos et de constante $4,5 \text{ kg/cm}$. En négligeant le poids de toutes les tiges et du ressort, calculer la grandeur de la charge appliquée en D rendant CD horizontal. Rép. : 21,8 kg.

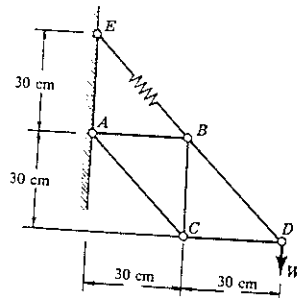


Fig. 1-33

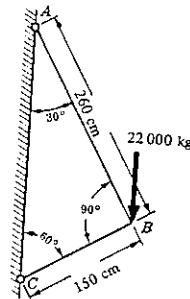


Fig. 1-34

1.36. Les tiges d'acier AB et BC sont chevillées à chaque extrémité et portent une charge de 22000 kg, comme le montre la fig. 1-34. Le matériau est un acier de construction de seuil de plasticité de $2,45 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2$. Des facteurs de sécurité de 2 pour la tension et de 3,5 pour la compression sont considérés comme satisfaisants. Calculer la dimension de chaque tige et les composantes horizontale et verticale du déplacement du point B . Prendre $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Négliger toute possibilité de flambement de la tige BC .
Rép. : section de $AB = 15,55 \text{ cm}^2$, section de $BC = 15,71 \text{ cm}^2$, $\Delta_h = 0,032 \text{ cm}$ vers la droite $\Delta_v = 0,156 \text{ cm}$ vers le bas.

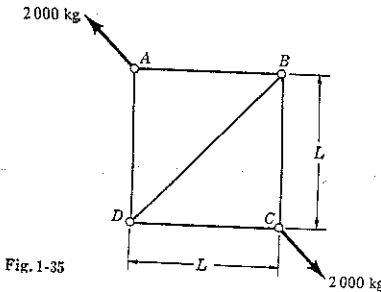


Fig. 1-35

1.37. La structure à cinq tiges assemblées par broches de la fig. 1-35 est chargée par deux forces de 2000 kg, chacune agissant selon une diagonale. Les tiges sont toutes en acier de module $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et de section $6,25 \text{ cm}^2$. Calculer l'augmentation de longueur de AC . Rép. : $0,000518 L$

1.38. Un barreau plein cylindrique en bronze de 2 cm de diamètre est soumis à une force de tension axiale de 5000 kg. Calculer la diminution de diamètre du barreau sous l'effet de cette charge. Pour le bronze, $E = 9,5 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ et $\mu = 0,28$. Rép. : 0,00047 cm

1.39. Soit un barreau en acier carré de 5 cm de côté et de 25 cm de long. Il est sollicité par une force de tension axiale de 20000 kg. Si $E = 2,1 \cdot 10^6$ et $\mu = 0,3$, calculer le changement de volume par unité de volume. Rép. : 0,000152

1.40. Soit le barreau carré en aluminium du problème 1.19, mais soumis à une charge axiale inversée de manière à produire une compression ; on considère que la déformation par compression a pour valeur 0,001 cm/cm. Calculer le volume du barreau lorsque la force de compression est appliquée. Rép. : 624,788 cm^3

1.41. Soit un élément dans lequel est exercé une contrainte σ_x dans une direction et où toute contraction latérale est totalement entravée dans chacune des deux autres directions. Calculer le module d'élasticité effectif et la valeur effective du coefficient de Poisson.

$$\text{Rép. : module effectif} = \frac{E(1-\mu)}{(1-2\mu)(1+\mu)}, \text{ coefficient effectif de Poisson} = 0$$

1.42. Soit un barreau soumis à la compression en direction axiale. La dilatation latérale est limitée à la moitié de la quantité qu'elle aurait si les faces latérales étaient libres de charge. Calculer le module effectif d'élasticité. Rép. : $\frac{E(1-\mu)}{1-\mu-\mu^2}$

1.43. Un barreau de section uniforme est soumis à une tension uniaxiale et présente une déformation de $1/800$ en direction de la force. Calculer le changement de volume par unité de volume. Admettre que $\mu = 1/3$. Rép. : $1/2400$ (augmentation).

1.44. Une tige rectiligne en aluminium de diamètre 3 cm est soumise à une force de tension axiale de 5000 kg. Si $E = 7 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\mu = 1/4$, calculer :

- | | |
|--|-------------------------------|
| (a) la contrainte unitaire | Rép. (a) 710 kg/cm^2 |
| (b) la déformation unitaire | (b) 0,00101 cm/cm |
| (c) l'allongement sur une longueur de référence de 20 cm | (c) 0,0202 cm |
| (d) le changement de diamètre | (d) -0,000757 cm |
| (e) le changement de section | (e) -0,00356 cm^2 |
| (f) le changement de volume sur une longueur de référence de 20 cm | (f) 0,0706 cm^3 |

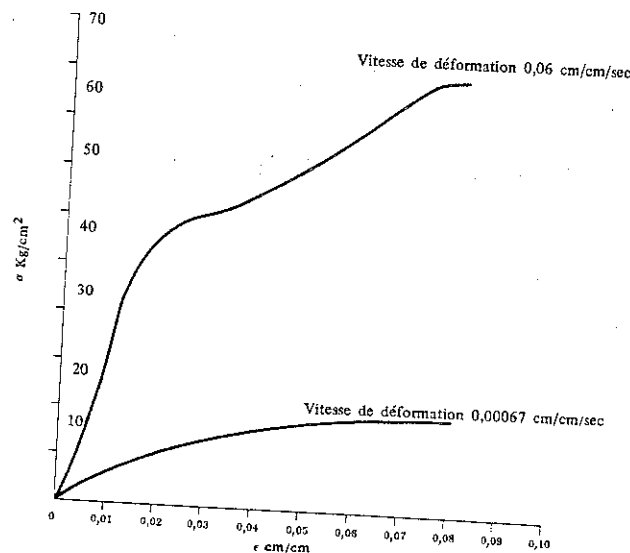


Fig. 1-36

- 1.45. Un plastique préparé en mélangeant des parties égales de résine Shell Epon 815 et d'agent durcissant Shell V-40 présente les courbes contrainte-déformation tracées dans la fig. 1-36 pour deux vitesses de charge différentes. Pour montrer l'importance de cette vitesse d'application de la charge sur ce produit, calculer le rapport de la contrainte pour une vitesse de déformation de 0,06 cm/cm/sec à celle pour une vitesse de 0,00067 cm/cm/sec, lorsque la déformation est 0,08. Dans un troisième essai, pour lequel la courbe contrainte-déformation n'est pas représentée, mais présente l'allure de la partie supérieure des deux courbes tracées, la vitesse de déformation était de 720 cm/cm/sec. Dans ce cas, un seuil de plasticité de 315 kg/cm² a été atteint. Calculer le rapport de ce seuil de plasticité à la contrainte de pointe pour une vitesse de déformation de 0,00067 cm/cm/sec. Rép. : 4,5 ; 22,5

CHAPITRE 2

Systèmes de forces statiquement indéterminés
Tension et compression

DEFINITION D'UN SYSTEME DE FORCES DETERMINE

Lorsque les valeurs de toutes les forces extérieures agissant sur un corps peuvent être calculées à l'aide des équations de l'équilibre statique, le système de forces est dit *statiquement déterminé*. Les problèmes du chapitre 1 sont tous de ce type.

Exemple 1.

Une force P est appliquée sur le barreau de la fig. 2-1. Les réactions sont R_1 , R_2 et R_3 . Le système est statiquement déterminé, puisque l'on dispose de trois équations d'équilibre statique pour le système qui suffisent pour calculer les trois inconnues.

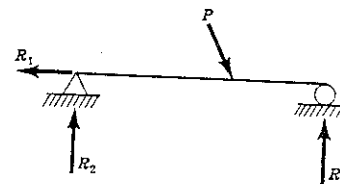


Fig. 2-1

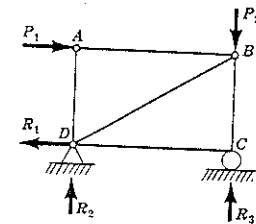


Fig. 2-2

Exemple 2.

Sur la poutre triangulée $ABCD$ de la fig. 2-2, sont appliquées des forces P_1 et P_2 . Les réactions sont R_1 , R_2 et R_3 . Ici aussi, puisque l'on dispose de trois équations d'équilibre statique, les trois réactions inconnues peuvent être calculées et, par conséquent, le système extérieur de forces est statiquement déterminé.

Les deux exemples ci-dessus se réfèrent uniquement à des réactions extérieures et ces systèmes de forces peuvent être définis comme déterminés statiquement *extérieurement*.

DEFINITION D'UN SYSTEME DE FORCES INDETERMINE

Dans de nombreux cas, les forces agissant sur un corps ne peuvent pas être déterminées par les seules équations de l'équilibre, car il existe davantage de forces inconnues que d'équations d'équilibre. Dans de tels cas, le système de forces est dit *statiquement indéterminé*.

Exemple 3;

Une force P est appliquée sur la barre de la fig. 2-3. Les réactions sont R_1 , R_2 , R_3 et R_4 . Ce système de forces est statiquement indéterminé, puisqu'il existe quatre réactions inconnues et seulement trois équations d'équilibre statique. Un tel système de forces est dit indéterminé au premier degré.

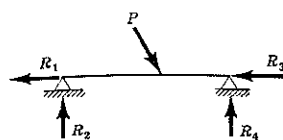


Fig. 2-3

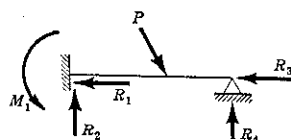


Fig. 2-4

Exemple 4.

Le barreau de la fig. 2-4 est statiquement indéterminé au second degré, car il existe cinq réactions inconnues R_1 , R_2 , R_3 , R_4 et M_1 et seulement trois équations d'équilibre statique. Il en résulte que les valeurs des réactions ne peuvent pas être toutes calculées à partir des seules équations de l'équilibre statique.

METHODE D'ANALYSE ELASTIQUE

Nous aborderons la question par la méthode dite des *déformations* parce qu'elle tient compte des déformations du système. Brièvement, on peut dire que la méthode d'analyse d'un système indéterminé consiste d'abord à écrire toutes les équations de l'équilibre statique applicables au système, puis à les compléter par des équations supplémentaires basées sur les déformations de la structure. Il faut écrire un nombre suffisant d'équations comportant des déformations pour que le nombre total des équations de la statique et des déformations soit égal au nombre de forces inconnues. Voir les problèmes 2.1 à 2.4, 2.9 et 2.10.

ANALYSE DE LA RESISTANCE LIMITE (CONCEPTION LIMITE)

Supposons que la courbe contrainte-déformation du matériau ait l'allure de la fig. 2-5, caractérisant un matériau très ductile, tel un acier de construction. L'acier à bas carbone est un bon exemple d'un comportement idéalisé élastoplastique de ce genre. Cette représentation suppose qu'il ne peut pas se former dans le matériau des contraintes supérieures au seuil de plasticité.

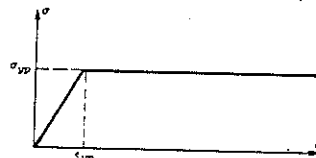


Fig. 2-5

Dans un système statique indéterminé, le comportement inélastique modifie l'état des contraintes. Dans ces conditions modifiées, la structure peut habituellement supporter une charge supérieure à celle prévisible sur la base d'un comportement totalement élastique de l'ensemble de la structure. La conception d'une structure statiquement indéterminée soumise à une charge telle que l'ensemble ou une partie de la structure soit contraint au seuil de plasticité et qu'il y ait *affaissement* de la structure est dite *conception limite*. La *charge limite* correspondant à une telle conception est, bien entendu, divisée par un facteur de sécurité, ce qui fournit la *charge pratique*. Lorsque la notion de conception limite est employée, elle s'applique uniquement aux structures statiquement indéterminées. Pour les applications, se référer aux problèmes 2.11 à 2.14.

Problèmes résolus

ANALYSE ELASTIQUE

Dans les problèmes 2.1 à 2.10, on admet que le comportement de la structure reste dans la région linéaire élastique de la courbe du matériau.



(a)



(b)

Fig. 2-6

2.1. La barre de la fig. 2-6(a) à une section constante et elle est maintenue rigidement entre les murs. Une charge axiale P est appliquée sur la barre à une distance L_1 de l'extrémité de gauche. Calculer les réactions des murs sur la barre.

Il faut d'abord dessiner le schéma de corps libre de la barre, montrant la charge appliquée et les réactions des murs sur la barre. Ces réactions sont notées R_1 et R_2 , fig. 2-6(b).

On ne dispose que d'une seule équation d'équilibre statique, à savoir :

$$\Sigma F_h = R_1 - P + R_2 = 0$$

Puisque cette équation contient deux inconnues (R_1 et R_2), le problème est statiquement indéterminé. Il faut donc ajouter une équation basée sur les déformations de la barre.

La contraction de la portion de longueur L_1 de la barre doit être égale à l'allongement de la partie de longueur L_2 . Ce fait permet d'écrire l'équation des déformations. Le changement de longueur d'une barre sous charge axiale a fait l'objet du problème 1.1. La force axiale agissant sur la région de gauche de la barre est R_1 et sur la région de droite, R_2 . L'équation reliant les déformations devient :

$$\frac{R_1 L_1}{AE} = \frac{R_2 L_2}{AE}$$

où A est la section de la barre et E le module d'élasticité. De cette équation, on tire $R_1 L_1 = R_2 L_2$ et en résolvant conjointement avec l'équation statique, on trouve :

$$R_1 = \frac{P L_2}{L_1 + L_2} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{P L_1}{L_1 + L_2}$$

A partir de ces valeurs des réactions, on peut calculer l'allongement de la portion L_2 de droite de la barre :

$$\Delta_e = \frac{R_2 L_2}{AE} = \frac{P L_1 L_2}{(L_1 + L_2) AE}$$

et la contraction de la portion L_1 de gauche est donc :

$$\Delta_c = -\frac{R_1 L_1}{AE} = -\frac{P L_1 L_2}{(L_1 + L_2) AE}$$

Ainsi :

$$\Delta_e = -\Delta_c$$

2.2. Soit un tube en acier entourant un cylindre plein en aluminium, l'ensemble étant comprimé entre deux plaques de couverture rigides, par des forces appliquées dans l'axe, comme le montre la fig. 2-7(a). Le cylindre en aluminium a un diamètre de 7,5 cm et le tube en acier a un diamètre de 9 cm. Calculer la contrainte dans l'acier et dans l'aluminium pour $P = 24\,000$ kg. Pour l'acier, $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm² et pour l'aluminium $E = 2,8 \cdot 10^5$ kg/cm².

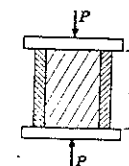


Fig. 2-7(a)

Coupons l'assemblage par un plan horizontal à un niveau quelconque en dehors des plaques de couverture et enlevons une des portions, la partie supérieure, par exemple. La partie enlevée doit être remplacée par l'effet qu'elle produisait sur celle qui subsiste et qui consiste en contraintes verticales normales réparties sur les deux métaux. Le schéma de corps libre de la portion de l'assemblage sous le plan coupant est représenté dans la fig. 2-7(b) où les contraintes normales existant dans l'acier et l'aluminium sont notées par σ_{ac} et σ_{al} .

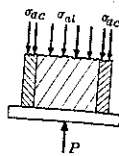


Fig. 2-7(b)

Appelons P_{ac} (kg) la force résultante supportée par l'acier et P_{al} celle supportée par l'aluminium. Alors $P_{ac} = A_{ac} \sigma_{ac}$ et $P_{al} = A_{al} \sigma_{al}$, où A_{ac} et A_{al} sont les sections du tube en acier et du cylindre en aluminium. Pour un tel système de forces, on ne dispose que d'une seule équation d'équilibre statique qui a la forme :

$$\Sigma F_v = P - P_{ac} - P_{al} = 0$$

Nous avons donc deux inconnues et une seule équation ; le problème est donc statiquement indéterminé. Nous devons ajouter à l'équation statique dont nous disposons une équation tirée des déformations de la structure. Une telle équation est facile à écrire, car les plaques de couverture rigides contraignent les déformations axiales des deux métaux à être égales.

La déformation due à la charge axiale est donnée par $\Delta = PL/AE$. En écrivant que les déformations axiales de l'acier et de l'aluminium sont égales, on a :

$$\frac{P_{ac} \cdot L}{A_{ac} \cdot E_{ac}} = \frac{P_{al} \cdot L}{A_{al} \cdot E_{al}} \quad \text{ou} \quad \frac{P_{ac} \cdot L}{\frac{\pi}{4} [(9)^2 - (7.5)^2] (2.1 \times 10^6)} = \frac{P_{al} \cdot L}{\frac{\pi}{4} (7.5)^2 (2.8 \times 10^5)} \quad \text{d'où} \quad P_{ac} = 3.3 P_{al}$$

En résolvant cette équation avec l'équation statique $P - P_{ac} - P_{al} = 0$, on trouve : $P_{al} = 0.233 P$ et $P_{ac} = 0.767 P$.

Pour une charge $P = 24\,000$ kg, on obtient $P_{al} = 5\,590$ kg et $P_{ac} = 18\,410$ kg. Les contraintes cherchées se calculent en divisant la force résultante dans chaque métal par sa section :

$$\sigma_{al} = \frac{5.590}{\frac{\pi}{4} (7.5)^2} = 126 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{ac} = \frac{18.410}{\frac{\pi}{4} [(9)^2 - (7.5)^2]} = 947 \text{ kg/cm}^2$$

2.3. La barre AB est totalement rigide et supportée par trois tiges, comme le montre la fig. 2-8(a). Les deux tiges extérieures sont en acier et ont chacune une section de 3 cm^2 . La tige centrale est en cuivre et a une section de 9 cm^2 . Pour l'acier $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et pour le cuivre $E = 1.2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Les tiges ont toutes la même longueur de 2.10 m . Les trois tiges sont également espacées et les charges de $6\,000 \text{ kg}$ sont appliquées à mi-chemin des tiges. En négligeant le poids de la barre AB , calculer la force dans chacune des tiges verticales. La barre AB reste horizontale après application de la charge.

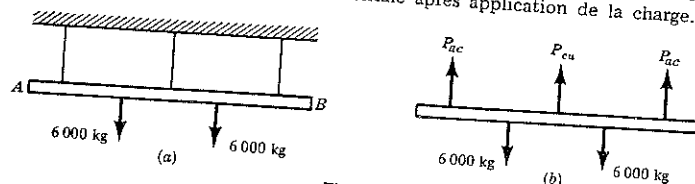


Fig. 2-8

Traçons d'abord un schéma de corps libre de la barre AB montrant les forces qui agissent sur elle. Ces forces comprennent les deux charges appliquées et les réactions des tiges verticales sur la barre AB . En appelant P_{ac} (kg) la force dans chacune des tiges d'acier et P_{cu} (kg) celle dans le cuivre, le schéma de corps libre prend la forme représentée dans la fig. 2-8(b). Pour poser l'égalité des forces dans les tiges d'acier, on a utilisé la condition de symétrie ; il ne subsiste donc qu'une seule équation d'équilibre statique qui est :

$$\Sigma F_v = 2P_{ac} + P_{cu} - 12.000 = 0$$

Nous ne disposons que d'une seule équation à deux inconnues et le problème est statiquement indéterminé. Nous devons ajouter une équation des déformations de la structure.

Comme les allongements de l'acier et du cuivre sont égaux, il est facile de poser cette équation. L'allongement dû à la charge axiale est $\Delta = PL/AE$ et en appliquant cette expression aux tiges d'acier et de cuivre, on a :

$$\frac{P_{ac} (210)}{(3)(2.1 \times 10^6)} = \frac{P_{cu} (210)}{(9)(1.2 \times 10^6)} \quad \text{ou} \quad P_{ac} = 0.583 P_{cu}$$

En résolvant cette équation jointe à l'équation statique, on obtient :

$$2(0.583 P_{cu}) + P_{cu} - 12.000 = 0$$

En résolvant : $P_{cu} = 5\,540 \text{ kg}$ $P_{ac} = 3\,230 \text{ kg}$

2.4. La barre AB est supposée totalement rigide et horizontale avant l'application d'une charge de $20\,000 \text{ kg}$, fig. 2-9(a). La liaison en A est une broche et AB est supportée par la tige en acier EB et la tige en cuivre CD . CD a une longueur de 90 cm et EB une longueur de 150 cm . Les sections sont de 5 cm^2 pour CD et de 3 cm^2 pour EB . Calculer la contrainte dans chacune des tiges verticales et l'allongement de la tige en acier. Négliger le poids de AB . Pour le cuivre, $E = 1.2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et pour l'acier $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

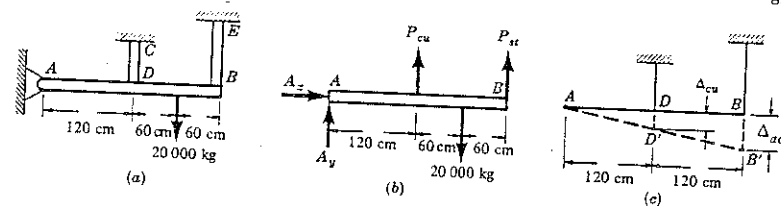


Fig. 2-9

La première phase de la solution consiste à tracer le schéma de corps libre de la barre AB , montrant toutes les forces qui agissent sur elle, fig. 2-8(b). D'après la statique, nous avons :

$$(1) \Sigma F_h = A_x = 0$$

$$(2) \Sigma M_A = 120 P_{cu} + 240 P_{ac} - 20.000(180) = 0$$

$$(3) \Sigma F_v = A_y + P_{cu} + P_{ac} - 20.000 = 0$$

Puisque les deux dernières équations statiques contiennent trois inconnues, le problème est statiquement indéterminé. Nous devons donc recourir aux déformations de la structure pour trouver une autre équation. Comme la barre est rigide, le seul mouvement qu'elle peut effectuer est une rotation d'ensemble autour de la broche en A comme axe. La ligne discontinue de la fig. 2-9(c) représente la position finale de la barre AB après l'application de la charge de $20\,000 \text{ kg}$. A l'origine, la barre est horizontale, comme le montre la droite en trait plein.

Les extrémités inférieures des tiges sont à l'origine en D et en B et elles se déplacent en D' et en B' après l'application de la charge de $20\,000 \text{ kg}$. Comme la barre est rigide, les triangles semblables ADD' et ABB' fournissent une relation simple entre les déformations des deux tiges, à savoir $\Delta_{cu}/120 = \Delta_{ac}/240$ où Δ_{cu} et Δ_{ac} représentent les allongements des tiges de cuivre et d'acier. L'équation additionnelle basée sur les déformations est :

$$\Delta_{ac} = 2\Delta_{cu}$$

Mais l'allongement sous charge axiale est donné par $\Delta = PL/AE$. En utilisant cette équation dans la dernière relation de déformation, on obtient :

$$\frac{P_a(150)}{(3)(2,1 \times 10^6)} = \frac{2P_{cu}(90)}{(5)(1,2 \times 10^6)} \quad \text{ou} \quad P_a = 1,26P_{cu}$$

En résolvant cette équation simultanément avec l'équation statique (2) on obtient :

$$120P_{cu} + 240(1,26P_{cu}) = 360.000; \quad P_{cu} = 8.500 \text{ kg} \quad \text{et} \quad P_a = 10.700 \text{ kg}$$

Les contraintes sont données par la relation simple $\sigma = P/A$:

$$\text{dans la tige de cuivre : } \sigma_{cu} = 8.500/5 = 1.700 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{dans la tige d'acier : } \sigma_a = 10.700/3 = 3.600 \text{ kg/cm}^2$$

- 2.5. Le barreau de cuivre de la fig. 2-10 de section uniforme est rigidement fixé aux murs, comme le montre la figure. Il a une longueur de 150 cm et une section de 15 cm^2 . Dans sa forme représentée, le barreau est libre de contrainte à la température de 25°C . Calculer la contrainte dans le barreau lorsque la température tombe à 10°C . Admettre que les supports ne cèdent pas. Pour le cuivre, $E = 1,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et $\alpha = 16 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$.

Pour aborder le problème, il faut d'abord imaginer que le barreau est libre entre les murs et l'extrémité de droite. Dans cette condition, il peut se contracter quand la température baisse et il se contracte d'une quantité : $\Delta = (16 \cdot 10^{-6})(150)(15) = 0,036 \text{ cm}$ selon la définition du coefficient de dilatation cubique (chapitre 1).

Il est ensuite nécessaire de trouver la force axiale P devant être appliquée sur le barreau pour remettre l'extrémité de droite en sa position correcte, puisque nous savons qu'en fait, cette extrémité ne bouge pas quand la température baisse. Pour calculer cette force P , on utilise l'équation :

$$\Delta = PL/AE \quad \text{qui donne} \quad 0,036 = \frac{P(150)}{15(1,1 \cdot 10^6)} \quad \text{ou} \quad P = 3.960 \text{ kg}$$

La contrainte axiale engendrée par cette force est : $\sigma = P/A = 3.960/15 = 264 \text{ kg/cm}^2$.

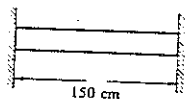
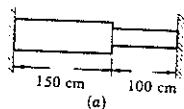
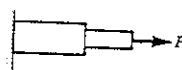


Fig. 2-10



(a)



(b)

Fig. 2-11

- 2.6. Le barreau composite de la fig. 2-11(a) est rigidement fixé aux deux supports. La portion de gauche du barreau est en cuivre, de section uniforme de 70 cm^2 et de longueur de 150 cm. La portion de droite est en aluminium, de section uniforme de 18 cm^2 et de longueur de 100 cm. L'assemblage est totalement libre de contrainte à la température de 25°C . La température de l'ensemble tombe et il en résulte que le support de droite se déplace de 0,05 cm en direction de la contraction du métal. Calculer la température minimale à laquelle l'assemblage peut être soumis pour que la contrainte dans l'aluminium n'excède pas 1.700 kg/cm^2 .

$$\text{Pour le cuivre} \quad E = 1,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 \quad \alpha = 17 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$$

$$\text{Pour l'aluminium} \quad E = 7 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2 \quad \alpha = 22,2 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$$

Comme dans le problème précédent, il est peut-être plus simple d'imaginer que l'extrémité de droite du barreau touche seulement le mur, ce qui fait qu'il peut se contracter sous l'effet de la chute de température ΔT . Conformément à la définition du coefficient de dilatation linéaire, la contraction totale du barreau composite est donnée par :

$$(17 \cdot 10^{-6})(150)(\Delta T) + (22,2 \cdot 10^{-6})(100)(\Delta T)$$

on notera que la forme de la section n'a aucune influence sur le changement de longueur du barreau résultant du changement de température.

Bien que le barreau se soit contracté de cette quantité, il est encore libre de contrainte. Néanmoins, il ne s'agit pas d'une analyse complète, puisque nous n'avons pas tenu compte de la réaction du mur de droite. Nous devons représenter l'effet de ce mur par une force axiale P appliquée sur le barreau, comme le montre la fig. 2-11(b). Pour avoir l'équilibre, la force résultante agissant sur toute section du cuivre ou de l'aluminium doit être égale à P . L'application de la force P allonge le barreau composite de la quantité :

$$\frac{P(150)}{70(1,1 \cdot 10^6)} + \frac{P(100)}{18(7 \cdot 10^5)}$$

Si le mur de droite ne cédait pas, nous devrions évaluer cette dernière expression à celle donnant la contraction totale due à la chute de température. En fait, le mur de droite cède de 0,05 cm et nous pouvons par conséquent écrire :

$$\frac{P(150)}{70(1,1 \cdot 10^6)} + \frac{P(100)}{18(7 \cdot 10^5)} = (17 \cdot 10^{-6})(150)(\Delta T) + (22,2 \cdot 10^{-6})(100)(\Delta T) - 0,05$$

La contrainte dans l'aluminium ne doit pas dépasser 1.700 kg/cm^2 et puisqu'elle est donnée par la formule $\sigma = P/A$, la force maximale P devient :

$$P = A \cdot \sigma = 18(1.700) = 30.600 \text{ kg}$$

En substituant cette valeur de P dans l'équation ci-dessus des déformations, nous trouvons $\Delta T = 74^\circ\text{C}$. Par conséquent, la température peut tomber de 74°C depuis la valeur d'origine de 25°C . La température finale sera : -49°C .

- 2.7. Soit la barre en acier conique de la fig. 2-12, fixée aux deux extrémités à des supports non flexibles. A l'origine, il n'existe aucune contrainte dans la barre. Calculer la contrainte normale maximale lorsque la température de la barre tombe de 22°C . Prendre $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$.

La méthode la plus simple pour résoudre ce problème est peut-être d'imaginer qu'une extrémité de la barre, celle de droite, par exemple, est séparée du support et devient libre. La barre se contracte alors sous l'influence de la chute de température de la quantité :

$$(22)(90)(11 \cdot 10^{-6}) = 0,0218 \text{ cm}$$

Ensuite, déterminons la force axiale P devant être appliquée à l'extrémité libre de droite pour allonger la barre de 0,0218 cm, ceci pour que soit satisfaite intégralement à l'extrémité de droite, la condition de fixation. En utilisant le système de coordonnées indiquées, nous avons :

$$r = 5 + 5x/90 = 5 + x/18$$

Puisque l'angle de conicité est relativement petit, la force de tension peut être supposée distribuée uniformément sur une section quelconque. Ainsi, comme il n'y a pas changement brusque de section, nous pouvons calculer l'allongement de l'élément hachuré en forme de disque d'épaisseur dx en appliquant la relation $\Delta = PL/AE$ pour $L = dx$ à ce disque et en intégrant ensuite sur la barre entière :

$$0,0218 = \int_0^{90} \frac{P dx}{\pi(5 + x/18)^2 E} = \int_0^{90} \frac{324 P dx}{\pi E (90 + x)^2} = \frac{324 P}{180 E \pi}$$

en résolvant, $P = 80.000 \text{ kg}$ où P est la force axiale résultante agissant sur une section quelconque. C'est donc la force nécessaire pour redonner à la barre sa longueur initiale.

Il y a lieu de noter que P (kg) est la force résultante sur chaque section verticale pour l'équilibre de toute partie de la barre. Toutefois, comme la surface des sections de la barre varie d'une extrémité à l'autre, la contrainte varie d'une valeur maximale à l'extrémité de gauche — où la section a une surface minimale — jusqu'à un minimum à l'extrémité de droite, où la surface est maximale.

La contrainte maximale à l'extrémité de gauche est donnée par : $\sigma_{\max} = \frac{80.000}{\pi(5)^2} = 1.020 \text{ kg/cm}^2$

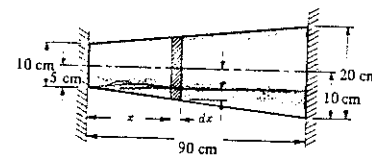
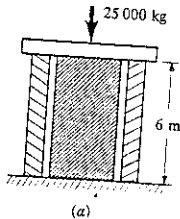


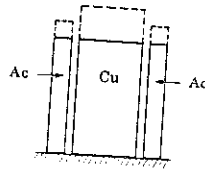
Fig. 2-12

- 2.8. Un cylindre creux en acier enveloppe un cylindre plein en cuivre et l'assemblage est soumis à une charge axiale de 25 000 kg, comme le montre la fig. 2-13(a). L'acier a pour section 18 cm² et le cuivre 60 cm². Avant application de la charge, les deux cylindres sont de longueur égale. Calculer l'élévation de température du système entier nécessaire pour que toute la charge soit reportée sur le cylindre en cuivre. La plaque de cuivre au sommet de l'assemblage est rigide. Pour le cuivre, $E = 1,1 \cdot 10^6$ kg/cm² $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$, tandis que pour l'acier, $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm² et $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$.

Pour résoudre ce problème, une des méthodes possibles est de supposer que la charge ainsi que la plaque supérieure sont enlevées et que le système peut se dilater librement verticalement sous l'effet de l'élévation de température ΔT . Dans ce cas, les extrémités supérieures des cylindres prennent les positions représentées par les lignes en tirets de la fig. 2-13(b).



(a)



(b)

Fig. 2-13

Le cylindre de cuivre s'allonge plus que celui en acier vers le haut, car le coefficient de dilatation linéaire du cuivre est supérieur à celui de l'acier. L'allongement vers le haut de l'acier est :

$$(11 \times 10^{-6})(600)(\Delta T)$$

tandis que celui de cuivre est :

$$(17 \times 10^{-6})(600)(\Delta T)$$

Ceci ne représente pas la situation réelle, puisque l'on n'a pas tenu compte de la charge appliquée de 25 000 kg. Si cette charge axiale est intégralement supportée par le cuivre, seul ce dernier sera comprimé et la compression du cuivre est donnée par :

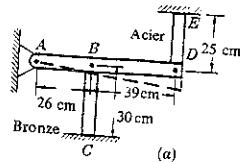
$$\Delta_{cu} = \frac{PL}{AE} = \frac{25.000(600)}{(60)(1,1 \times 10^6)}$$

La condition posée dans le problème est que l'élévation de température ΔT est juste suffisante pour faire supporter la charge par le cuivre. Donc, la force aura pour effet de raccourcir l'extension du cuivre indiquée par les tirets dans le croquis. L'allongement net du cuivre est donc égal à la dilatation due à l'élévation de température diminuée de la compression due à la charge. Le changement de longueur de l'acier résulte uniquement de l'élévation de température. On peut donc écrire :

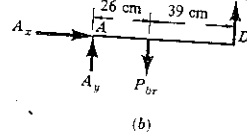
$$(17 \times 10^{-6})(600)(\Delta T) - \frac{25.000(600)}{(60)(1,1 \times 10^6)} = (11 \times 10^{-6})(600)(\Delta T) \quad \text{ou} \quad \Delta T = 63^\circ\text{C}$$

- 2.9. Le barreau rigide AD est goupillé en A et fixé aux barreaux BC et ED , Fig. 2-14(a). Le système entier est à l'origine libre de contrainte et le poids de tous les barreaux est négligeable. On abaisse la température du barreau BC de 30°C et on élève celle du barreau ED de 30°C . En négligeant toute possibilité de flambement latéral, calculer les contraintes normales dans les barreaux BC et ED . Pour BC qui est en bronze, prendre $E = 9,8 \cdot 10^5$ kg/cm² et $\alpha = 17,7 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ et pour ED qui est en acier, prendre $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm² et $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$. Le barreau BC a une section de 6 cm² et le barreau ED de 3 cm².

Appelons P_{ac} et P_{br} les forces agissant sur AD dans les directions indiquées dans le schéma de corps libre, Fig. 2-14(b). Puisque AD tourne rigidement autour de A (comme cela est représenté par la ligne en tirets), nous avons $\Delta_{br}/26 = \Delta_{ac}/65$ où Δ_{br} est la contraction axiale de BC et Δ_{ac} l'allongement axial de ED .



(a)



(b)

Fig. 2-14

Le changement total de longueur de BC est la somme d'une contraction due à la chute de température et d'un allongement dû à la force axiale P_{br} . Le changement total de longueur de DE se compose d'un allongement dû à l'élévation de température et d'une contraction due à la force P_{ac} . Nous avons donc :

$$\frac{2}{5} [(11 \times 10^{-6})(25)(30) + \frac{P_{ac}(25)}{(3)(2,1 \times 10^6)}] = -(17,7 \times 10^{-6})(30)(30) + \frac{P_{br}(30)}{(6)(9,8 \times 10^5)}$$

ou

$$5,102P_{br} - 1,587P_{ac} = 19,230$$

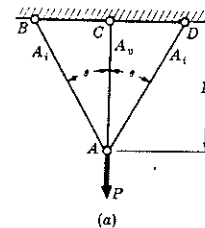
D'après la statique :

$$\Sigma M_A = 26P_{br} - 65P_{ac} = 0$$

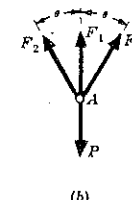
En résolvant simultanément ces équations : $P_{ac} = 1\,720$ kg et $P_{br} = 4\,300$ kg.

En utilisant pour chaque barre $\sigma = P/A$, nous obtenons : $\sigma_{ac} = 573$ kg/cm² $\sigma_{br} = 716$ kg/cm²

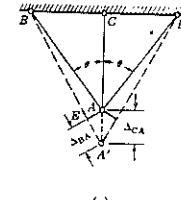
- 2.10. Soit la structure statiquement indéterminée, assemblée par broches de la Fig. 2-15(a). La structure entière ne subit aucune contrainte avant application de la charge P . Calculer la force axiale dans chaque tige produite par la charge verticale P . Les deux tiges extérieures sont identiques et de section A_t ; la tige centrale a une section A_v . Le module d'élasticité E est le même pour toutes les tiges.



(a)



(b)



(c)

Fig. 2-15

Le schéma de corps libre de la broche en A est représenté dans la Fig. 2-15(b), où F_1 et F_2 sont les forces axiales (kg) dans la tige verticale et les tiges inclinées. D'après la statique, on a :

$$\Sigma F_v = F_1 + 2F_2 \cos \theta - P = 0$$

Nous ne disposons que de cette seule équation statique, puisque nous avons fait usage de la symétrie en posant que les forces dans les tiges inclinées sont égales. Comme elle contient deux inconnues F_1 et F_2 , le système de forces est statiquement indéterminé. Nous devons donc recourir aux déformations du système pour obtenir une autre équation. Sous l'effet de la charge P , les tiges prennent les positions indiquées par les lignes en tirets de la Fig. 2-15(c).

Comme les déformations du système sont petites, la géométrie du système reste inchangée et on peut conserver à l'angle $BA'A$ la valeur θ . AEA' est un triangle rectangle et AE , qui est en réalité un arc de rayon égal à la longueur des tiges inclinées, est perpendiculaire à BA' . L'allongement de la tige verticale est donc représenté par AA' et celui des tiges inclinées par EA' . Pour ce petit triangle, on a :

$$\Delta_{BA} = \Delta_{CA} \cos \theta$$

où Δ_{BA} est l'allongement des tiges inclinées et Δ_{CA} l'allongement de la tige verticale.

Puisque ces tiges sont soumises à une charge axiale, leurs allongements sont donnés par $\Delta = PL/AE$. De là, on tire :

$$\Delta_{BA} = \frac{F_2(L/\cos \theta)}{A_t E} \quad \text{et} \quad \Delta_{CA} = \frac{F_1 L}{A_v E}$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation donnant la relation entre Δ_{BA} et Δ_{CA} on a :

$$\Delta_{BA} = \frac{F_2(L/\cos \theta)}{A_1 E} \quad \text{et} \quad \Delta_{CA} = \frac{F_1 L}{A_v E}$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation donnant la relation entre Δ_{BA} et Δ_{CA} ; on a :

$$\frac{F_2 L}{A_1 E \cos \theta} = \frac{F_1 L}{A_v E} \cos \theta \quad \text{ou} \quad F_2 = F_1 \frac{A_1}{A_v} \cos^2 \theta$$

En reportant dans l'équation statique, on trouve $F_1 + 2F_1(A_1/A_v) \cos^2 \theta = P$, ou

$$F_1 = \frac{P}{1 + 2(A_1/A_v) \cos^2 \theta} \quad \text{et} \quad F_2 = \frac{P \cos^2 \theta}{(A_v/A_1) + 2 \cos^2 \theta} \quad (1)$$

RESISTANCE LIMITE (CONCEPTION LIMITE)

Dans les problèmes qui suivent, le comportement élastico-plastique du matériau est supposé conforme à la courbe idéalisée contrainte — déformation de la Fig. 2-16.

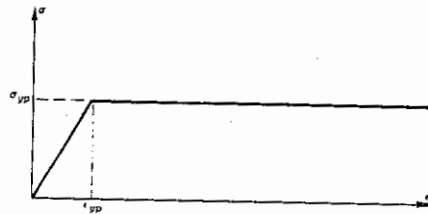


Fig. 2-16

La charge limite calculée dans tous les problèmes qui suivent est la charge maximale pouvant être appliquée aux structures à condition que la courbe contrainte-déformation soit du type représenté et que le matériau possède une ductilité infinie, c'est-à-dire que la partie plane de la courbe s'étende indéfiniment vers la droite.

- 2.11. Considérons le système composé de trois tiges verticales, représenté dans la Fig. 2-17(a). Les tiges extérieures de longueur L sont situées à distances égales de la tige centrale et une charge P est appliquée sur la membrure rigide horizontale. En utilisant la conception limite, calculer la charge maximale P . Les valeurs de A et de E sont les mêmes pour les trois tiges.

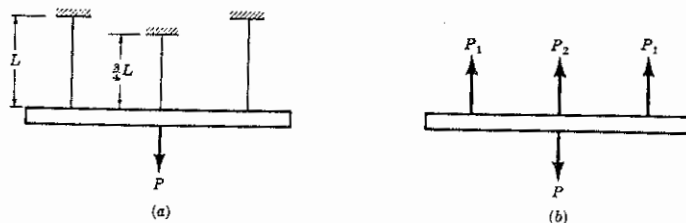


Fig. 2-17

Analysons l'effet produit lorsque la charge P croît à partir d'une valeur initiale nulle, c'est-à-dire lorsqu'elle est lentement appliquée. Pour l'équilibre, on a :

$$2P_1 + P_2 = P \quad (1)$$

où P_1 représente la force dans chacune des tiges extérieures et P_2 la force dans la tige centrale. (voir la Fig. 2-17(b)). Puisque la membrure horizontale est rigide, l'allongement vertical de chacune des tiges extérieures doit être égal à l'allongement de la tige centrale. Ainsi :

$$\frac{P_1 L}{A E} = \frac{P_2 (3L/4)}{A E} \quad (2)$$

$$\text{ou} \quad P_1 = \frac{3}{4} P_2 \quad (3)$$

En substituant cette valeur dans l'équation (1), on trouve :

$$P_2 = \frac{3}{5} P \quad P_1 = \frac{3}{10} P \quad (4)$$

Le système commence à céder quand $P_2 = \sigma_{yp} A$. Ainsi

$$P_{yp} = \frac{5}{2} \sigma_{yp} A$$

A partir du moment où la tige centrale commence à céder, le système se déforme, comme s'il était supporté seulement par les deux tiges extérieures (qui ont encore un comportement élastique), ainsi que par une force constante $\sigma_{yp} A$ fournie par la tige centrale. La valeur de P augmente jusqu'à ce que chacune des tiges extérieures commence à céder, c'est-à-dire lorsque $P_1 = \sigma_{yp} A$. La charge limite est donc :

$$P_u = 2P_1 + P_2 = 2\sigma_{yp} A + \sigma_{yp} A = 3\sigma_{yp} A$$

On notera que l'équation de déformation (2) n'est pas utilisée pour le calcul de la charge limite.

- 2.12. Reprenons le problème 2.10, mais dans le cas où les trois tiges ont même section. Calculer l'aptitude de la structure à supporter la charge limite.

Pour $A_1 = A_v = A$, la force dans la tige verticale est supérieure à celle indiquée par l'équation (1) du problème 2.10 pour chaque tige inclinée. Donc, lorsque P augmente, la tige verticale centrale est la première à entrer dans le domaine inélastique et sa rigidité (valeur effective de AE) diminue. Toute augmentation supplémentaire de la charge P ne produira aucun accroissement de F_1 qui restera à sa valeur limite $F_1^* = \sigma_{yp} A$. La tige centrale peut alors être remplacée par une force verticale constante F_1^* dirigée vers le haut et le système est maintenant réduit à un système statiquement déterminé composé de deux tiges extérieures soumises à une charge appliquée $P - F_1^*$. On peut alors augmenter la charge P jusqu'à ce que les tiges extérieures engendrent la contrainte de plasticité. Il n'est pas nécessaire de s'occuper des déformations de la structure : il suffit de s'en tenir à la relation d'équilibre :

$$P = F_1^* + 2F_2 \cos \theta \quad (1)$$

Lorsque la charge P augmente, les tiges extérieures atteignent également le seuil de plasticité et la force dans chacune devient :

$$F_2^* = \sigma_{yp} A \quad (2)$$

La charge limite correspond ainsi à une situation telle que $F_1^* = F_2^* = \sigma_{yp} A$ et sa valeur est obtenue à partir de l'équation (1). C'est :

$$P_u = \sigma_{yp} A (1 + 2 \cos \theta) \quad (3)$$

En divisant cette charge limite par un facteur de sécurité, on obtient la charge pratique.

- 2.13. Supposons que la structure à trois tiges du problème 2.10 ait à soutenir une charge $P = 25\,000$ kg. Comparer le poids des tiges nécessaire pour un projet basé sur a) la contrainte maximale atteint juste le seuil de plasticité et b) sur l'analyse de la résistance limite. Admettre que toutes les tiges ont une section identique, que $\theta = 45^\circ$ et prendre $2\,520$ kg/cm² pour le seuil de plasticité.

Problèmes supplémentaires

- a) Conformément à la théorie de l'élasticité, dans le problème 2.10, la force dans la tige verticale devient :

$$F_1 = \frac{2P}{2 + \sqrt{2}} = \frac{50\,000}{3,41} = 14\,660 \text{ kg}$$

Si la contrainte dans cette tige est égale au seuil de plasticité, la surface requise de la section est donnée par $F_1 = A_1 \cdot \sigma_{yp}$. De là :

$$14\,660 = A_1 \cdot 2\,520 \quad \text{ou} \quad A_1 = 5,81 \text{ cm}^2$$

- b) Si on utilise l'analyse de la charge limite du problème 2.12, les contraintes dans les trois tiges sont égales au seuil de plasticité et d'après l'équation (3) du problème 2.12, la surface de section est :

$$25\,000 = 2\,520 \cdot A_2 [1 + 2(0,707)] \quad \text{ou} \quad A_2 = 4,1 \text{ cm}^2$$

L'analyse de la charge limite indique donc un gain de 29 % de la section et du poids correspondant.

- 2.14. Une structure composée d'une membrure rigide horizontale AB supportée par quatre barreaux est représentée dans la Fig. 2-18(a). Les barreaux ont même section et sont en un même matériau. Calculer la charge limite P pouvant être appliquée à la structure.

Puisque la membrure AB est rigide, il est évident qu'après application d'une charge suffisamment grande P , elle peut pivoter rigide, soit autour du point A , soit autour du point B . (La charge limite implique une déformation plastique dans le barreau 2 ; de ce fait, il n'est pas nécessaire d'envisager un pivotement autour du point C). Il faut calculer les charges limites correspondant à ces deux possibilités et ensuite adopter la plus faible.

Supposons que les barreaux 1 et 2 cèdent les premiers, auquel cas, leur effet peut être représenté par deux forces constantes $\sigma_{yp} A$, comme le montre la Fig. 2-18(b). Les barreaux 3 et 4 travaillent toujours dans le domaine élastique et les forces intérieures sont inconnues. Il n'est toutefois pas nécessaire de déterminer ces forces, puisque la charge P_u peut être calculée en additionnant les moments autour du point B :

$$P_u \left(\frac{2a}{3} \right) - \sigma_{yp} A(a) - \sigma_{yp} A(2a) = 0$$

En résolvant :

$$P_u = 4,5 \sigma_{yp} A$$

Envisageons maintenant le cas où ce sont les barreaux 2, 3 et 4 qui cèdent les premiers, comme le montre la Fig. 2-18(c). Le barreau 1 travaille toujours dans le domaine élastique. En prenant les moments autour du point A :

$$(\sigma_{yp} A \cos \alpha) 4a + \sigma_{yp} A a - P_u'' \frac{4a}{3} = 0$$

En résolvant :

$$P_u'' = \frac{3}{4} \sigma_{yp} A (1 + 4 \cos \alpha)$$

L'examen de P_u' et de P_u'' montre avec évidence que, pour toutes valeurs de l'angle α , P_u' est la plus petite des deux et donc que P_u' représente la charge limite. Lorsque la charge appliquée atteint cette valeur, le système est essentiellement converti en un mécanisme et la membrure rigide pivote autour du point A . Même dans cet état, le barreau 1 ne travaille pas à sa pleine capacité.

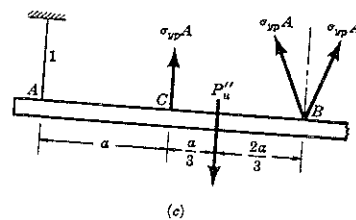
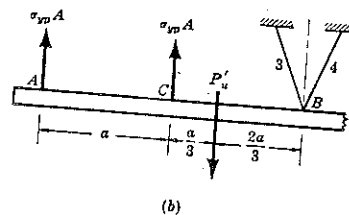
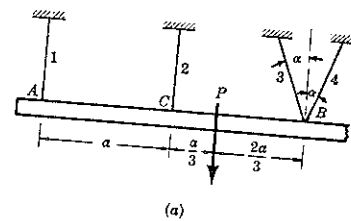


Fig. 2-18

- 2.15. Un barreau carré de 5 cm de côté est maintenu rigide entre des murs et il est chargé par une force axiale de 20 000 kg, comme le montre la Fig. 2-19. Calculer les réactions aux extrémités du barreau et l'allongement de la portion de droite. Prendre $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Rép. réaction à gauche 12 000 kg, réaction à droite 8 000 kg, allongement 0,0023 cm

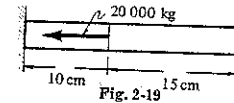


Fig. 2-19

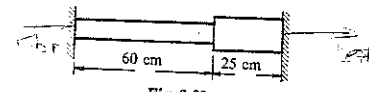


Fig. 2-20

- 2.16. Deux barreaux initialement rectilignes sont assemblés et attachés à des supports, comme le montre la Fig. 2-20. Le barreau de gauche est en bronze, pour lequel $E = 9,8 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ et $\alpha = 17,7 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ et le barreau de droite est en aluminium pour lequel $E = 7 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ et $\alpha = 22,2 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$. Le barreau de bronze a pour section 6 cm^2 et le barreau en aluminium 9 cm^2 . On suppose que le système n'est soumis à l'origine à aucune contrainte et que la température tombe de 22°C .

- a) Si les supports ne peuvent pas fléchir, calculer la contrainte normale dans chaque barreau.
b) Si le support de droite cède de 0,012 cm, calculer la contrainte normale dans chaque barreau. Le poids des barreaux est négligeable.

Rép. a) $\sigma_{br} = 420 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_{al} = 280 \text{ kg/cm}^2$, b) $\sigma_{br} = 280 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_{al} = 180 \text{ kg/cm}^2$.

- 2.17. Un tube d'acier de 5 cm de diamètre extérieur et de 4,4 cm de diamètre intérieur, enveloppe un cylindre plein de bronze de 3,75 cm de diamètre. Ils sont tous les deux liés à une plaque de couverture rigide à chaque extrémité. L'assemblage ne comporte aucune contrainte à la température de 25°C . Calculer les contraintes dans chaque métal lorsque la température est portée à 120°C . Pour le bronze $E = 9,8 \cdot 10^5$, $\alpha = 17,7 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$. Pour l'acier $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$.

Rép. $\sigma_{ac} = 720 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_{br} = 290 \text{ kg/cm}^2$.

- 2.18. Un barreau composite est constitué par une bande de cuivre tenue entre deux plaques d'acier laminé à froid. Les extrémités de l'assemblage sont couvertes par des plaques infiniment rigides et une charge axiale de tension P est appliquée sur le barreau par une force axiale agissant sur chacune des plaques rigides, Fig. 2-21. Les barreaux ont tous une longueur totale de 10 cm ; les plaques d'acier ont une épaisseur de 0,6 cm chacune et le cuivre une épaisseur de 1,8 cm. Calculer la charge maximale P pouvant être appliquée. La résistance limite de l'acier est $5\,600 \text{ kg/cm}^2$ et celle du cuivre $2\,100 \text{ kg/cm}^2$. Un facteur de sécurité de 3, basé sur la résistance limite de chaque métal est jugé satisfaisant. Pour l'acier $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et pour le cuivre $E = 9 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$.

Rép. $P = 32\,200 \text{ kg}$.

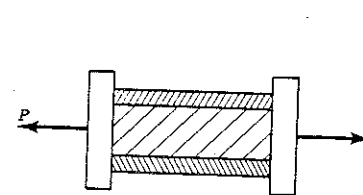


Fig. 2-21

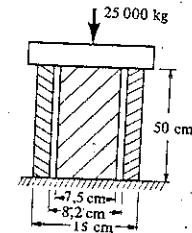


Fig. 2-22

- 2.19. Un tube cylindrique en aluminium entoure un cylindre en acier de la manière représentée par la Fig. 2-22. Une charge de compression de 25 000 kg est appliquée par l'intermédiaire de la plaque de couverture infiniment rigide représentée. En admettant qu'à l'origine, le cylindre en aluminium est plus long de 0,025 cm que celui en acier avant application de la charge, calculer la contrainte normale dans chaque cylindre lorsque la température tombe de 30°C et que la charge totale agit. Pour l'acier prendre $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et $\alpha = 11,10^{-6}/^\circ\text{C}$ et pour l'aluminium $E = 7 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ et $\alpha = 22,2 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$.

Rép. $\sigma_{ac} = 125 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_{al} = 155 \text{ kg/cm}^2$.

- 2.20. La barre horizontale rigide AB est supportée par trois fils verticaux, comme le montre la Fig. 2-23 et porte une charge de 12 000 kg. Le poids de la barre AB est négligeable et la structure n'est soumise à aucune contrainte avant l'application de la charge de 12 000 kg. Après application de la charge, la température des trois fils est augmentée de 14°C . Calculer la contrainte dans chaque fil, ainsi que l'emplacement de l'application de la charge pour que AB demeure horizontale. Pour le fil d'acier, prendre $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$. Pour le fil de bronze, prendre $E = 9,8 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ et $\alpha = 17,7 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$, et pour le cuivre, $E = 1,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et $\alpha = 16 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$. Négliger toute possibilité de flambement latéral des fils.

Rép. $\sigma_{ac} = 2500 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_{br} = 1950 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_{cu} = 1750 \text{ kg/cm}^2$, $x = 13,75 \text{ cm}$

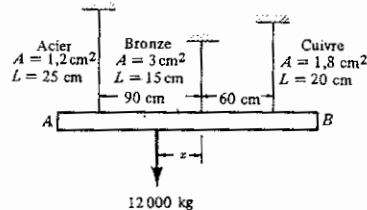


Fig. 2-23

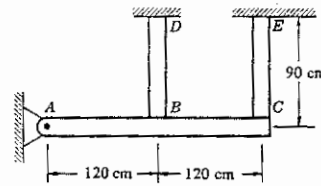


Fig. 2-24

- 2.21. La barre AC est absolument rigide et chevillée en A et fixée aux barres DB et CE , comme le montre la Fig. 2-24. Le poids de AC est de 5 000 kg et le poids des autres barres est négligeable. La température des deux barres DB et CE est élevée de 40°C . Calculer les contraintes normales résultant de cette élévation dans les deux barres. DB est en cuivre, pour lequel $E = 1,05 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et $\alpha = 17,7 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$, sa section est de 12 cm^2 . CE est en acier de section 6 cm^2 pour lequel $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$. Négliger toute possibilité de flambement latéral des barres.

Rép. $\sigma_{ac} = 743 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_{cu} = -327 \text{ kg/cm}^2$

- 2.22. Soit la barre rigide BD de la Fig. 2-25, supportée par deux fils. Les fils sont libres de contrainte à l'origine et on négligera le poids de toutes les membrures. Calculer la tension dans chaque fil après application de la charge P à l'extrémité de la barre. Les deux fils ont le même module d'élasticité.

Rép. force en $AD = \frac{2P}{(A_1 L_1^2 H / 2 A_2 L_2^3) + 2H/L_2}$, force en $AC = \frac{2P}{(4HA_2 L_1^2 / A_1 L_2^3) + H/L_1}$

- 2.23. Les trois tiges de la Fig. 2-26 supportent la charge verticale de 2 500 kg. Elles sont libres de contrainte et assemblées en A par une broche avant l'application de la charge. La charge est appliquée graduellement et, en même temps, la température des tiges est abaissée de 8°C . Calculer la contrainte dans chaque tige. Les tiges extérieures sont en bronze de section $2,4 \text{ cm}^2$. La tige centrale est en acier et de section $1,8 \text{ cm}^2$. Pour le bronze, $E = 9 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha = 17,7 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ pour l'acier, $E = 2,1 \cdot 10^6$ et $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$. Rép. $\sigma_{br} = 356 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_{ac} = 718 \text{ kg/cm}^2$

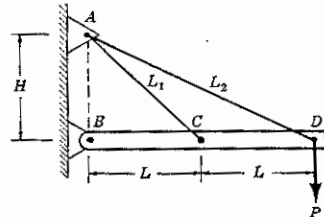


Fig. 2-25

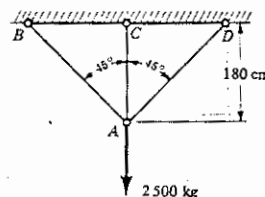


Fig. 2-26

- 2.24. L'assemblage à cinq tiges de la Fig. 2-27 a été trouvé légèrement défectueux, en ce que les points A et C , qui auraient dû coïncider, se sont trouvés à un intervalle Δ . Ces points ont été amenés par force en coïncidence et le joint en ce point a été chevillé. Calculer les forces existant dans chaque tige. Les tiges ont toutes même section.

Rép.: $F_1 = F_2 = F_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{3}}\right) \frac{\Delta AE}{L}$, $F_4 = F_5 = -\left(\frac{1}{2 + 3\sqrt{3}}\right) \frac{\Delta AE}{L}$

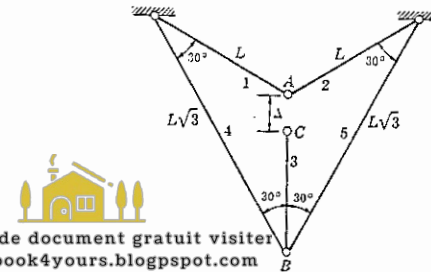


Fig. 2-27

Pour plus de document gratuit visiter
<https://book4yours.blogspot.com>

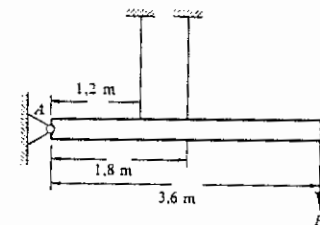


Fig. 2-28

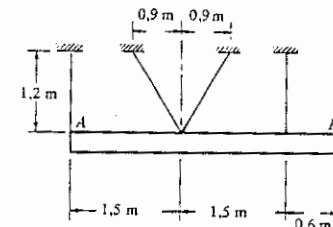


Fig. 2-29

- 2.25. La barre rigide AB de la Fig. 2-28 est supportée par deux tiges verticales et est chevillée en A . En prenant un seuil de plasticité de 2520 kg/cm^2 pour l'acier des tiges et une section de $1,3 \text{ cm}^2$ pour chaque tige, calculer la charge limite P pouvant être appliquée. Rép. 2 700 kg
- 2.26. La barre rigide de la Fig. 2-29 est supportée par quatre tiges cylindriques de 5 cm de diamètre. Elles ont un E égal à $2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ et un seuil de plasticité de 2800 kg/cm^2 . Calculer le poids maximal de la barre AB pour la conception limite des tiges. Admettre que le poids est uniformément réparti sur la longueur. Rép. 170 000 kg.

CHAPITRE 3

Récipients sous pression à paroi mince

Dans les chapitre 1 et 2, nous avons examiné divers cas comportant des contraintes normales uniformes agissant dans les barres. Une autre application des contraintes normales distribuées uniformément apparaît dans l'analyse approximative des récipients sous pression à paroi mince, tels que des récipients de forme cylindrique, sphérique, conique ou toroïdale soumis à une pression interne ou externe due à un gaz ou un liquide. Dans ce chapitre, nous traiterons seulement des récipients à paroi mince de révolution et nous nous limiterons aux déformations à symétrie axiale dans ces récipients.

NATURE DES CONTRAINTES

Le récipient de révolution de la Fig. 3-1 est engendré par la rotation d'une courbe plane (le méridien) autour d'un axe situé dans le plan de la courbe. On notera r_1 le rayon de courbure du méridien, rayon qui est variable le long de la courbe. Il est défini par deux lignes normales au récipient et passant par les points B et C de la Fig. 3-1. Un autre paramètre r_2 définit le rayon de courbure de la surface du récipient dans une direction normale au méridien. Il est défini par les normales au récipient aux points A et B de la Fig. 3-1. Le centre de courbure correspondant à r_2 se trouve sur l'axe de symétrie du récipient, tandis que celui correspondant à r_1 ne s'y trouve pas en général. Une pression interne p agissant normalement à la surface courbe du récipient donne naissance à une *contrainte méridienne* σ_ϕ et à une *contrainte circulaire* σ_θ , comme indiqué sur la figure. Ces contraintes sont normales entre elles et agissent dans le plan de la paroi du récipient.

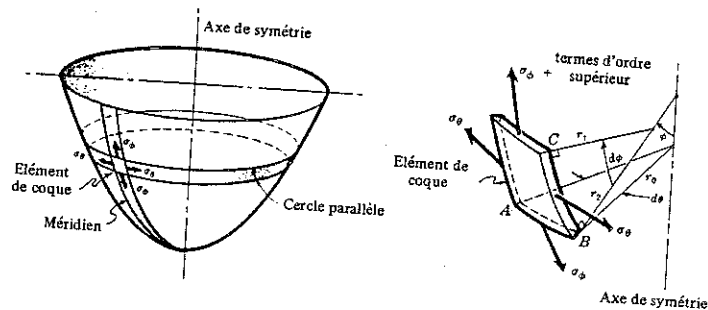


Fig. 3-1

Dans le problème 3.12, il est montré que :

$$\frac{\sigma_\phi}{r_1} + \frac{\sigma_\theta}{r_2} = \frac{p}{h}$$

où h est l'épaisseur du récipient. Une seconde équation peut s'obtenir en considérant l'équilibre vertical de l'ensemble du récipient au dessus d'un cercle parallèle approprié, comme indiqué dans le problème 3.12. L'établissement de l'équation ci-dessus montre que les contraintes σ_ϕ et σ_θ sont uniformément distribuées dans l'épaisseur de la paroi.

On trouvera des applications de cette analyse aux récipients cylindriques dans les problèmes 3.1 à 3.5, aux récipients sphériques dans les problèmes 3.6 à 3.8, aux récipients coniques dans le problème 3.11 et aux récipients toroïdaux dans le problème 3.13.

LIMITATIONS

Le rapport de l'épaisseur de la paroi à l'un quelconque des rayons de courbure ne doit pas dépasser approximativement 0,10. Il ne doit pas y avoir de discontinuité dans la structure. La solution simplifiée présentée ici ne permet pas de prendre en considération des anneaux de renforcement comme ceux montrés dans la Fig. 3-2 sur un récipient cylindrique. Elle ne peut non plus donner une indication précise sur les contraintes et déformations au voisinage des plaques de fermeture d'extrémité des récipients cylindriques sous pression. Cette analyse est cependant satisfaisante pour de nombreux problèmes de conception.

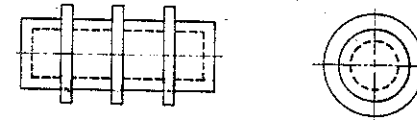


Fig. 3-2

Les problèmes qui suivent concernent les contraintes dues à une pression interne uniforme agissant dans un récipient de révolution à paroi mince. Les formules donnant les diverses contraintes restent valables lorsque le sens de la pression est inversé, c'est-à-dire lorsqu'une pression extérieure agit sur le conteneur. Pourtant, il doit être noté qu'une considération supplémentaire, qui dépasse le cadre de cet ouvrage, doit être prise en compte. Il faut non seulement chercher la distribution des contraintes, mais aussi procéder à une autre étude de nature entièrement différente pour déterminer la charge à laquelle le récipient *flambe* sous l'effet de la compression. Une rupture de flambement ou d'instabilité peut se produire, même si la contrainte la plus élevée est très inférieure à la contrainte pratique du matériau.

APPLICATIONS

Les réservoirs de stockage et les conteneurs de liquide, les canalisations d'eau, les chaudières, les coques de sous-marins et certaines pièces d'avion, sont des exemples courants de récipients sous pression à paroi mince.

Problèmes résolus

- 3.1. Soit un cylindre à paroi mince fermé aux deux extrémités par des fonds plats et soumis à une pression intérieure uniforme p . L'épaisseur de la paroi est h et le rayon intérieur r . En négligeant les effets d'astreinte des plaques d'extrémité, calculer les contraintes normales, longitudinale (méridienne) et circonférentielle (circulaire) existant dans la paroi dues à cette sollicitation.

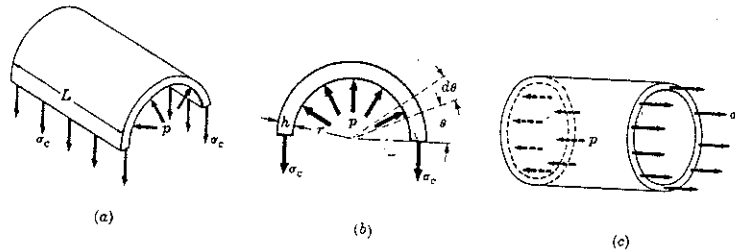


Fig. 3-3

Pour déterminer la contrainte circonférentielle σ_c , considérons dans le réceptacle un élément de longueur L isolé du reste du cylindre. Le schéma de corps libre de la moitié de cet élément est vu dans la Fig. 3-3(a). Le corps a été coupé de telle façon que l'effet interne σ_c à l'origine apparait maintenant comme une force extérieure à ce corps libre. La Fig. 3-3(b) montre les forces agissant sur une section droite.

Les composantes horizontales des pressions s'équilibrent deux à deux en raison de la symétrie par rapport à l'axe vertical central. Dans la direction verticale, l'équation d'équilibre est :

$$\sum F_v = -2\sigma_c h L + \int_0^\pi p r(d\theta)(\sin \theta)L = 0$$

En intégrant :

$$2\sigma_c h L = -prL \left[\cos \theta \right]_0^\pi \quad \text{ou} \quad \sigma_c = \frac{pr}{h}$$

Notons que la résultante verticale des forces dues à la pression p peut s'obtenir en multipliant la pression par la projection horizontale de la surface sur laquelle elle agit.

Pour trouver la contrainte longitudinale σ_l , considérons une section transversale du cylindre normale à l'axe géométrique. Le schéma de corps libre de la portion restante du cylindre est donné dans la Fig. 3-3(c). Pour l'équilibre :

$$\sum F_h = -p\pi r^2 + 2\pi r h \sigma_l = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma_l = \frac{pr}{2h}$$

En résumé, la contrainte circonférentielle est double de la contrainte longitudinale. Par conséquent, si l'eau d'une conduite fermée gèle, la conduite se rompra suivant une ligne courant longitudinalement le long du cylindre. Ces expressions simples des contraintes ne sont pas valables au voisinage immédiat des fonds plats.

- 3.2. Le réservoir d'un compresseur d'air est un cylindre fermé par des fonds hémisphériques. Le cylindre a un diamètre intérieur de 60 cm et est soumis à une pression interne de 35 kg/cm². Il est en acier dont le seuil de plasticité est 2 500 kg/cm² et un facteur de sécurité de 3,5 est utilisé. Calculer l'épaisseur requise de la paroi de ce cylindre. On négligera les effets localisés à la jonction du cylindre et des hémisphères.

Les extrémités du cylindre sont fermées. En accord avec le problème 3.1, il existe une contrainte circonférentielle donnée par $\sigma_c = pr/h$ et une contrainte longitudinale, $\sigma_l = pr/2h$.

La contrainte circonférentielle étant double de la contrainte longitudinale est donc la valeur critique pour la conception et elle ne doit pas excéder la valeur pratique de 2 500/3,5 kg/cm². Pour la contrainte circonférentielle, nous avons donc : $2500/3,5 = 35(30)/h$ ou $h = 1,47$ cm.

Une analyse plus complète devrait inclure une étude des contraintes dans les fonds hémisphériques.

- 3.3. Un réservoir vertical en acier, c'est-à-dire un conteneur cylindrique ouvert à la partie supérieure et d'axe vertical a 240 cm de diamètre intérieur et 25 m de hauteur. Il est rempli avec de l'eau dont le poids volumique est de 1 000 kg/m³. Le seuil de plasticité du matériau est de 2 500 kg/cm² et un coefficient de sécurité de 2 est utilisé. Quelle est l'épaisseur requise pour la tôle d'acier nécessaire pour le fond du réservoir, en admettant que le cordon de soudure longitudinal présente la même résistance que le métal massif ? quelle épaisseur est requise si le cordon présente seulement une résistance de 85 % de celle du métal massif ?

La pression p (dans toutes les directions) à la base du réservoir est donnée par la formule $p = \gamma h$ où γ représente le poids de liquide par unité de volume et h la hauteur de la colonne d'eau au-dessus de la base. Cette formule est évidente si l'on remarque que la pression par centimètre carré de base est numériquement égale au poids d'une colonne d'eau de un centimètre carré de section et de hauteur h . En conséquence, la pression à la base est :

$$p = 1.000(25) = 25.000 \text{ kg/m}^2 \quad \text{ou} \quad p = 2,5 \text{ kg/cm}^2$$

La pression étant hydrostatique, agit dans toutes les directions avec la même valeur et, en particulier, elle agit radialement sur l'intérieur de la paroi, comme le montre la Fig. 3-4. Comme l'indique l'équation $p = \gamma h$, la pression radiale décroît vers le sommet du réceptacle comme on le voit sur le schéma, mais la valeur maximale apparaît à la base et en conséquence, c'est cette région qu'il faut considérer dans le calcul.

Comme la partie supérieure du réservoir est ouverte, il n'y a pas de contrainte longitudinale et il est connu (problème 3.1) que la contrainte circonférentielle en tout point du réservoir est $\sigma_c = pr/h$. Considérant la région à la base cette équation devient :

$$\frac{2.500}{2} = \frac{2,5(120)}{h} \quad \text{ou} \quad h = 0,24 \text{ cm}$$

Ceci suppose que le cordon de soudure a la même résistance que le métal massif. En réalité, l'épaisseur doit être légèrement augmentée pour tenir compte des effets de la corrosion.

Si la résistance du cordon de soudure longitudinal n'est que de 85 % de celle du métal massif, l'épaisseur requise est : $h = 0,24/0,85 = 0,283$ cm.

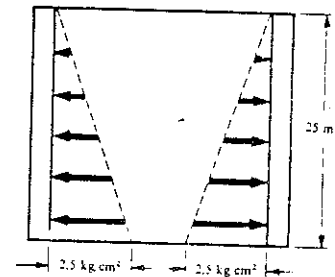


Fig. 3-4

- 3.4. Le simulateur d'espace du Jet Propulsion Laboratory à Pasadena en Californie, est un réceptacle cylindrique de 810 cm de diamètre et de 25,5 m de hauteur. Il est obtenu par roulage à froid d'un acier inoxydable dont la limite de proportionnalité est de 1 155 kg/cm². La pression minimale en opération dans la chambre est de 10⁻⁶ Tor où 1 Tor = 1/760 de l'atmosphère standard, qui est approximativement de 1,029 kg/cm². Calculer l'épaisseur de paroi requise pour que la contrainte pratique basée sur la limite de proportionnalité, avec un facteur de sécurité de 2,5 ne soit pas dépassée. On négligera la possibilité de flambement due à la pression extérieure et aussi les effets de zone de surcharge dans le simulateur aux attaches des éprouvettes d'essai.

D'après le problème 3.1, la contrainte significative est la contrainte circonférentielle donnée par $\sigma_c = pr/h$. La pression à utiliser dans le calcul est essentiellement la pression atmosphérique agissant à l'extérieur du récipient et qui est convenablement représentée par $1,029 \text{ kg/cm}^2$, puisque la pression intérieure de 10^{-6} Tor est négligeable comparée à 1 kg/cm^2 . Nous avons donc :

$$\frac{1155}{2,5} = 1,029 \cdot \frac{405}{h} \quad \text{ou} \quad h = 0,91 \text{ cm}$$

- 3.5. Calculer l'accroissement du rayon dû à la pression interne p pour le cylindre du problème 3.

Considérons séparément les charges longitudinale et circonférentielle. La contrainte circonférentielle due à la pression p radiale seule est donnée par $\sigma_c = pr/h$ et, puisque $\sigma = E\epsilon$, la déformation circonférentielle est $\epsilon_c = pr/Eh$, qui est une déformation unitaire.

La longueur sur laquelle elle agit est la circonférence du cylindre, soit $2\pi r$. Par suite l'allongement total de la circonférence est :

$$\Delta = \epsilon_c(2\pi r) = 2\pi pr^2/Eh$$

La longueur totale de la circonférence est alors $2\pi r + 2\pi pr^2/Eh$. En divisant par 2π , nous trouvons le rayon de la circonférence déformée, soit $r + pr^2/Eh$, de sorte que l'accroissement du rayon est pr^2/Eh .

Pour la pression axiale seule p , la contrainte longitudinale est $\sigma_1 = pr/2h$. Cette contrainte longitudinale produit une déformation longitudinale $\epsilon_1 = pr/2Eh$. Comme indiqué dans le chapitre 1, une extension dans la direction de la charge, qui est ici longitudinale, s'accompagne d'une contraction dans la direction perpendiculaire à la charge. En conséquence, la dimension circonférentielle diminue. Le rapport de la déformation dans la direction latérale à celle dans la direction de la charge a été défini dans le chapitre 1 comme étant le coefficient de Poisson, désigné par μ . Il en résulte que la déformation ϵ_1 induit une déformation circonférentielle égale à $-\mu\epsilon_1$, et si nous appelons ϵ_c cette déformation, on a $\epsilon_c = -\mu pr/2Eh$ qui tend à diminuer le rayon du cylindre, comme l'indiquent le signe moins.

Par un calcul tout à fait analogue à celui de l'accroissement du rayon dû à la charge radiale seule, la réduction du rayon correspondant à la déformation ϵ_c est donnée par $\mu pr^2/2Eh$. L'accroissement du rayon dû à la pression interne p est finalement :

$$\Delta r = \frac{pr^2}{Eh} - \frac{\mu pr^2}{2Eh} = \frac{pr^2}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

- 3.6. Soit un récipient sphérique à paroi mince soumis à une pression interne uniforme p . Le rayon intérieur du récipient est r et l'épaisseur de la paroi h . Etablir l'expression donnant la contrainte de tension existant dans la paroi.

Pour tracer un schéma de corps libre, considérons exactement la moitié de la sphère. Ce corps est sollicité par la pression interne uniforme p et par les forces que l'autre moitié de la sphère, qui a été enlevée, exerce sur la moitié considérée. A cause de la symétrie des charges et des déformations, ces forces peuvent être représentées par des contraintes de tension circonférentielle σ_c , comme le montre la Fig. 3-5.

Le schéma de corps libre représente les forces agissant sur l'hémisphère, mais montre seulement une projection de la demi-sphère sur un plan vertical. En réalité, la pression p agit sur toute la surface de l'hémisphère et dans une direction normale à la surface en chaque point. Pourtant, comme indiqué dans le problème 3.1, il est licite de considérer la force exercée par la pression p sur la projection de cette surface qui, dans ce cas est l'aire circulaire verticale notée $a-a$. Ceci est possible parce que l'hémisphère est symétrique autour de l'axe horizontal, de sorte que les composantes verticales de la pression s'annulent l'une l'autre. Les composantes horizontales seules produisent la contrainte de tension σ_c . Pour l'équilibre, on a donc :

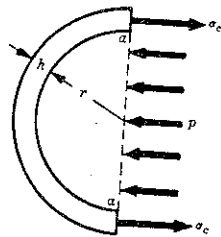


Fig. 3-5

$$\Sigma F_h = \sigma_c 2\pi r h - p\pi r^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma_c = pr/2h$$

Par symétrie, la contrainte circonférentielle est la même dans toutes les directions en tout point de la paroi de la sphère.

- 3.7. Un réservoir sphérique de 18 m de diamètre est utilisé pour stocker du gaz. La paroi a 12 mm d'épaisseur et la contrainte pratique du matériau est de 1250 kg/cm^2 . Quel est le maximum admissible pour la pression p du gaz ?

Le problème 3.6 montre que la contrainte de tension uniforme dans toutes les directions est donnée par $\sigma_c = pr/2h$. En substituant :

$$1250 = \frac{p(900)}{2(1,2)} \quad \text{et} \quad p = 3,33 \text{ kg/cm}^2$$

- 3.8. Le véhicule de recherches sous-marines *Alvin* a une coque de pression sphérique de 100 cm de rayon et une épaisseur de paroi de 3,38 cm. La coque est en acier HY 100 ayant un seuil de plasticité de 7000 kg/cm^2 . Calculer la profondeur de plongée à laquelle la contrainte du seuil de plasticité est atteinte dans la paroi sphérique. Pour le poids volumique de l'eau de mer, prendre $1,024 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$.

Le problème 3.6 montre que la contrainte de compression due à la pression hydrostatique externe est donnée par $\sigma_c = pr/2h$. La pression hydrostatique correspondant au seuil de plasticité est donc :

$$7000 = \frac{p(100)}{2(3,38)} \quad \text{ou} \quad p = 473,2 \text{ kg/cm}^2$$

Puisque $p = \gamma h$ où γ est le poids de l'eau par unité de volume, on a :

$$473,2 = 1,024 \cdot 10^{-3} h \quad \text{ou} \quad h = 461 \cdot 10^3 \text{ cm} = 4610 \text{ m}$$

Il faut noter que cette analyse néglige la possibilité de flambement de la sphère due à la pression hydrostatique, ainsi que les effets des portes d'entrée sur sa résistance. De ces facteurs qui dépassent le cadre de cette analyse, il résulte que la véritable profondeur en opération est de 1800 m.

- 3.9. Soit un récipient à pression fretté constitué par deux cylindres coaxiaux à paroi mince, comme le montre la Fig. 3-6. Dans l'état avant assemblage, il existe une légère interférence des deux coques, c'est-à-dire que la coque intérieure est trop grande pour entrer dans la coque extérieure. Le cylindre extérieur est chauffé, placé sur le cylindre intérieur et laissé refroidir, ce qui provoque une contraction. Si les deux cylindres sont en acier et si le diamètre moyen de l'assemblage est de 10 cm, calculer la contrainte tangentielle dans chaque coque provenant de la contraction si la différence initiale des diamètres est de 0,025 cm. L'épaisseur de la coque intérieure est de 0,25 cm et celle de la coque extérieure de 0,20 cm.



Fig. 3-6

Il existe évidemment une pression p interfaciale agissant entre les faces adjacentes des deux coques. Il faut noter que ce ne sont pas des charges appliquées de l'extérieur. La pression p peut être considérée comme accroissant le diamètre de la coque extérieure et diminuant le diamètre de la coque intérieure. L'expansion radiale d'un cylindre sous une pression radiale p a été trouvée dans le problème 3.5 égale à pr^2/Eh . Aucune force longitudinale n'intervient dans ce problème. L'accroissement du rayon de la coque extérieure dû à p plus la diminution de rayon de la coque intérieure due à p doit évaluer la différence initiale entre les rayons ou $0,025/2$. On a donc :

$$\frac{p(5)^2}{(2,1 \times 10^6)(0,25)} + \frac{p(5)^2}{(2,1 \times 10^6)(0,2)} = 0,0125 \quad \text{ou} \quad p = 117 \text{ kg/cm}^2$$

Cette pression, illustrée par les figures, agit entre les cylindres après que l'extérieur ait été fretté sur l'intérieur. Dans le cylindre intérieur, cette pression p provoque une contrainte :

$$\sigma_r = \frac{pr}{h} = -\frac{117(5)}{0,25} = -2.340 \text{ kg/cm}^2$$

Dans le cylindre extérieur, la contrainte circonférentielle due à la pression p est :

$$\sigma_r = \frac{pr}{h} = -\frac{117(5)}{0,20} = -2.925 \text{ kg/cm}^2$$

Si, par exemple, la coque frettée est soumise à une pression interne uniforme, ces contraintes de contraction doivent être simplement ajoutées algébriquement aux contraintes trouvées en utilisant les formules simples. données dans le problème 3.1.

- 3.10. Un cylindre d'acier à paroi mince est emboîté juste sur le cylindre intérieur en cuivre, comme le montre la Fig. 3-7. Trouver les contraintes tangentielles dans chaque coque si la température s'accroît de 35°C . On ne tiendra pas compte des effets provoqués par l'extension longitudinale concomitante. Cet arrangement est quelquefois utilisé pour le stockage de fluides corrosifs. On prendra :

$$E_a = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad \alpha = 11 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$$

$$E_m = 9 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, \quad \alpha = 17,7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$$

La plus simple approche est de considérer d'abord les deux coques comme séparées l'une de l'autre, de sorte qu'elles ne soient plus en contact.

Sous l'influence de l'accroissement de température de 35°C , la circonférence de la coque d'acier augmente de la quantité :

$$2\pi(50,9)(35)(11 \times 10^{-6}) = 0,123 \text{ cm}$$

De même, la circonférence de la coque de cuivre s'accroît de :

$$2\pi(50,3)(35)(17,7 \times 10^{-6}) = 0,196 \text{ cm}$$

Alors l'interférence entre les rayons, c'est-à-dire la différence des rayons des deux coques (due au chauffage) est de $\frac{0,196 - 0,123}{2\pi} = 0,0116 \text{ cm}$. Ici encore, il n'y a pas de charges extérieures agissant sur l'un ou l'autre des cylindres.

Pourtant, d'après l'énoncé du problème, les surfaces adjacentes des deux coques sont bien en contact après l'élévation de la température. Par conséquent, il doit exister une pression interfaciale p entre les deux surfaces, c'est-à-dire une pression tendant à accroître le rayon de la coque d'acier et à réduire le rayon de la coque de cuivre, de sorte que celle-ci puisse s'ajuster à l'intérieur de la coque en acier. Une telle pression est vue dans le schéma de corps libre de la Fig. 3-8.

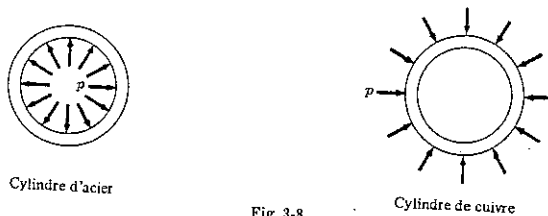


Fig. 3-8

D'après le problème 3.5, le changement de rayon d'un cylindre sous une pression radiale uniforme p (si aucune force longitudinale n'agit) a été trouvé de pr^2/Eh . En conséquence, l'accroissement de rayon de la coque d'acier dû à p , additionné avec la diminution de rayon du cuivre due à p doit être égal à l'interférence. Alors :

$$\frac{p(50,9)^2}{(2,1 \times 10^6)(0,6)} + \frac{p(50,3)^2}{(9 \times 10^5)(0,6)} = 0,0116 \quad \text{ou} \quad p = 1,72 \text{ kg/cm}^2$$

La pression interfaciale p crée la continuité requise à la surface commune des deux coques quand elles sont en contact. Utilisant la formule pour la contrainte tangentielle $\sigma_c = pr/h$, on trouve pour la contrainte tangentielle dans l'acier et le cuivre :

$$\sigma_a = \frac{1,72(50,9)}{(0,6)} = 146 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{et} \quad \sigma_m = -\frac{1,72(50,3)}{(0,6)} = -144 \text{ kg/cm}^2$$

- 3.11. Soit un récipient conique à paroi mince contenant un liquide de poids par unité de volume γ (Fig. 3-9(a)). Le récipient est supporté sur tout le pourtour de son rebord supérieur et rempli de liquide jusqu'à une hauteur H . Déterminer les contraintes dans la paroi dues à cette charge. L'axe géométrique du récipient est vertical.

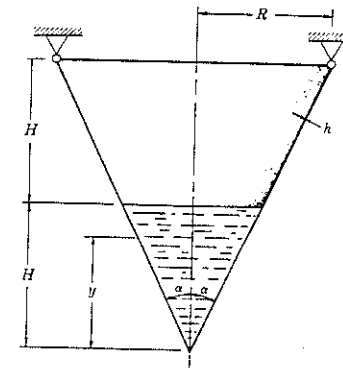


Fig. 3-9(a)

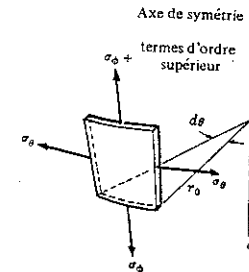


Fig. 3-9(b)

L'état des contraintes dans ce récipient est évidemment à symétrie axiale. On suppose que l'épaisseur h du récipient est petite comparée à H et R . Les contraintes peuvent être déterminées par la considération de l'équilibre d'un élément limité par deux cercles parallèles voisins dont les plans sont normaux à l'axe de symétrie du cône et par deux génératrices voisines du cône. Un tel élément, y compris les vecteurs représentant les contraintes σ_θ dans la direction horizontale et σ_θ_0 dans la direction de la génératrice est représenté dans la Fig. 3-9(b). La quantité σ_θ est appelée *contrainte circulaire* et σ_θ_0 la *contrainte méridienne*.

Dans le diagramme, θ représente la coordonnée angulaire mesurée dans un plan horizontal qui est normal à l'axe de symétrie vertical du récipient. Le rayon du cône en cet endroit est r_0 lequel est naturellement une fonction de la position de l'élément par rapport à sa situation le long de l'axe de symétrie. Une autre coordonnée utilisée pour définir la géométrie du cône est r_2 qui correspond au rayon de courbure de la surface du récipient dans la direction perpendiculaire à la génératrice. Ceci est mieux illustré en examinant une section du cône obtenue en faisant passer un plan vertical par l'axe du récipient comme le montre la Fig. 3-9(c). Il est évident que $r_0 = r_2 \cos \alpha$.

Par la géométrie, nous avons :

$$r_0 = y \tan \alpha \quad \text{et aussi} \quad r_2 = \frac{y \tan \alpha}{\cos \alpha}$$

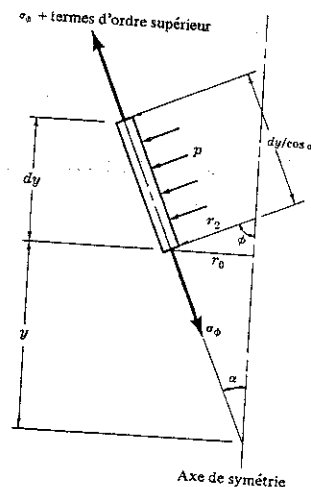


Fig. 3-9(c)

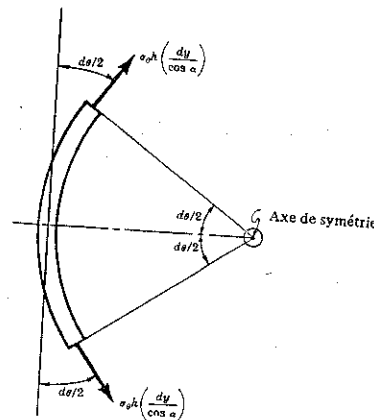


Fig. 3-9(d)

Les contraintes circulaires de la Fig. 3-9(b) peuvent être visualisées plus clairement en regardant le long de l'axe de symétrie comme vu dans la Fig. 3-9(d). Il est évident que chacun des vecteurs forces circulaires $\sigma_\theta (dy/\cos \alpha) h$ fait un angle $d\theta/2$ avec la tangente à l'élément. La résultante de ces forces circulaires est : $2 \sigma_\theta h (dy/\cos \alpha) \sin(d\theta/2)$, ou puisque $d\theta/2$ est petit $\sigma_\theta h (dy/\cos \alpha) d\theta$, agissant dans un plan horizontal et dirigée vers l'axe géométrique du récipient. Sur la Fig. 3-9(c), on voit que cette résultante doit être multipliée par $\cos \alpha$ pour déterminer la composante de cette force agissant dans la direction normale à la surface du récipient. Il est évident aussi que les forces méridiennes correspondant à la Fig. 3-9(c) se compensent mutuellement. Le liquide exerce une pression normale p indiquée dans la figure et agit sur une surface $(r_0 d\theta) (dy/\cos \alpha)$. Pour l'équilibre de l'élément dans la direction normale à la surface, on a alors :

$$\sigma_\theta h \left(\frac{dy}{\cos \alpha} \right) (d\theta) \cos \alpha - p r_0 (d\theta) \frac{dy}{\cos \alpha} = 0 \quad (1)$$

ou

$$\sigma_\theta = \frac{p r_0}{h \cos \alpha} = \frac{p y \tan \alpha}{h \cos \alpha} = \frac{p r_2}{h} \quad (2)$$

Ces expressions sont valables n'importe où dans le récipient conique. Dans la moitié inférieure $0 < y < H$, on a $p = \gamma(H - y)$ et ainsi :

$$\sigma_\theta = \frac{\gamma(H - y)y \tan \alpha}{h \cos \alpha} \quad (3)$$

Dans la moitié supérieure, $H < y < 2H$, $p = 0$, de sorte que $\sigma_\theta = 0$ dans cette région.

L'autre contrainte σ_ϕ peut être trouvée en considérant l'équilibre vertical du récipient conique. Pour $0 < y < H$, le poids du liquide dans la région conique abc plus celui de la région cylindrique $abcd$ est maintenu en équilibre par les forces correspondant à σ_ϕ la Fig. 3-9(e), on a :

$$\sigma_\phi h 2\pi y \tan \alpha \cos \alpha - \gamma \left[\frac{1}{3} \pi (y \tan \alpha)^2 y + (H - y) \pi (y \tan \alpha)^2 \right] = 0 \quad (4)$$

ou

$$\sigma_\phi = \frac{\gamma \tan \alpha}{h \cos \alpha} \left(\frac{Hy}{2} - \frac{y^2}{3} \right) \quad (5)$$

De même, pour $H < y < 2H$, le poids de tout le liquide est maintenu en équilibre par les forces correspondant à σ_ϕ de sorte que, d'après la Fig. 3-9(f) :

$$\sigma_\phi h (2\pi y) \tan \alpha \cos \alpha - \gamma \frac{1}{3} \pi r_0^2 H = 0 \quad (6)$$

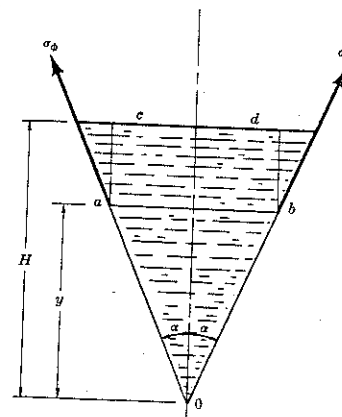


Fig. 3-9(e)

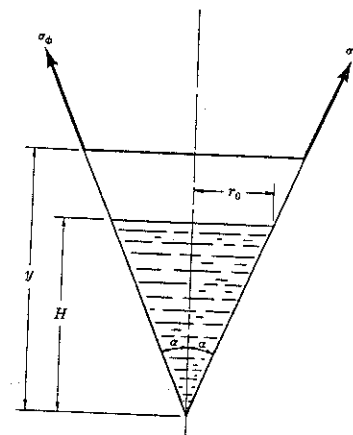


Fig. 3-9(f)

Comme $r_0 = H \tan \alpha$, nous trouvons :

$$\sigma_\phi = \frac{\gamma H^3 \tan \alpha}{6hy \cos \alpha} \quad \text{pour } H < y < 2H \quad (7)$$

Il faut observer que les contraintes associées avec ces déformations à symétrie axiales sont statiquement déterminées, c'est-à-dire qu'il n'est nécessaire d'utiliser aucune relation de déformation pour calculer les contraintes. En conséquence, ces relations sont valables dans le domaine plastique.

3.12. Calculer les contraintes circulaires et les contraintes méridiennes dans un récipient de révolution à paroi mince soumis à une pression interne p .

Ce problème est aisément résolu en le considérant comme généralisation du problème 3.11. Les contraintes peuvent être déterminées en examinant l'équilibre d'un élément limité par deux cercles parallèles voisins dont les plans sont normaux à l'axe vertical de symétrie et par deux génératrices voisines (ou méridiens) du récipient (voir la Fig. 3-1). Cet élément est semblable à celui de la Fig. 3-9(b), du problème 3.11, sauf que les côtés verticaux sont ici courbes et non pas droits.

Les contraintes circulaires σ_θ et les contraintes méridiennes apparaissent ainsi comme le montre la Fig. 3-10(a). Nous avons besoin maintenant de deux rayons de courbure pour décrire cet élément. Nous noterons r_1 le rayon de courbure du méridien et r_2 celui de la surface du récipient dans une direction perpendiculaire au méridien. Le centre de courbure correspondant à r_2 doit se trouver sur l'axe de symétrie, tandis que pour r_1 , le centre ne s'y trouve pas (en général). La Fig. 3-10(b) montre les forces circulaires vues en regardant le long de l'axe de symétrie et, par analogie avec le problème 3.11, elles ont une composante horizontale $2 \sigma_\theta h r_1 d\phi (d\theta/2)$ dirigée vers l'axe du récipient. En multipliant cette quantité par $\sin \theta$, on obtient la composante normale à l'élément. Les forces méridiennes apparaissent dans la Fig. 3-10(c) et elles ont une composante

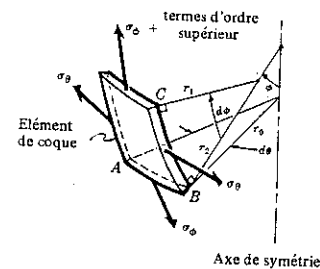


Fig. 3-10(a)

normale au récipient donnée par $\sigma_\phi h r_0 d\theta d\phi$. La pression p agit sur une surface $(r_0 d\theta)(r_1 d\phi)$, de sorte que l'équation d'équilibre dans la direction normale devient :

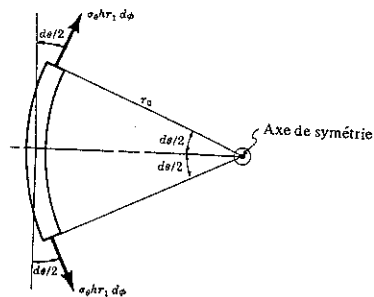


Fig. 3-10(b)

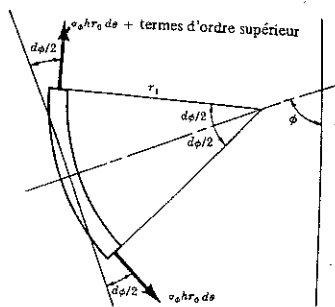


Fig. 3-10(c)

ou, puisque $r_0 = r_2 \sin \phi$, nous avons :

$$\frac{\sigma_\phi}{r_1} + \frac{\sigma_\theta}{r_2} = \frac{p}{h} \quad (1)$$

Cette équation fondamentale s'applique aux déformations à symétrie axiale de tous les récipients de révolution à paroi mince. Une seconde équation est obtenue, comme dans le problème 3.11 en considérant l'équilibre vertical du récipient entier au-dessus d'un cercle parallèle convenablement choisi. Ici aussi, ces équations sont valables dans le domaine plastique.

- 3.13. Des récipients toroïdaux à paroi mince sont souvent utilisés comme réservoirs de stockage de gaz dans les propulseurs pour véhicules spatiaux. Un projet en considération par la National Aeronautics and Space Administration (NASA) pour une utilisation future possible emploie un tore de diamètre moyen $2b = 2100$ cm avec un diamètre de section droite $2R = 150$ cm, comme indiqué dans la Fig. 3-11. La pression interne $p = 1,4$ kg/cm² et le matériau du récipient est un alliage d'aluminium 2219 T87, ayant un seuil de plasticité de 3500 kg/cm² à la température ambiante. Pour ce matériau, le seuil de plasticité croît à plus basse température, atteignant 120% de la valeur ci-dessus à -185°C . Si un facteur de sécurité de $1,5$ est utilisé, calculer l'épaisseur de paroi requise.

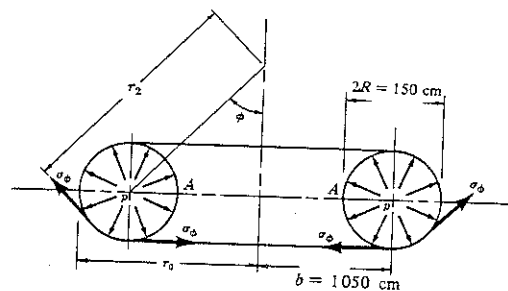


Fig. 3-11

Nous considérerons d'abord l'équilibre vertical d'une portion en forme d'anneau du récipient toroïdal au-dessus d'un plan arbitraire repéré par l'angle ϕ . La contrainte méridienne σ_ϕ est aisément trouvée en considérant la pression p agissant sur la projection horizontale de la surface courbe. Ainsi :

$$2\pi r_0 \sigma_\phi h \sin \phi = \pi p (r_0^2 - b^2)$$

ou, puisque $\sin \phi = (r_0 - b)/R$:

$$\sigma_\phi = \frac{pR(r_0 + b)}{2\pi r_0 h} \quad (1)$$

A partir de l'équation (1), il est évident que la valeur de pointe de σ_ϕ apparaît aux points les plus profonds A où :

$$(\sigma_\phi)_{\max} = \frac{pR}{2h} \left(\frac{2b - R}{b - R} \right) \quad (2)$$

Si $b = 0$, le tore se réduit à une sphère et l'équation (2) coïncide avec l'équation des contraintes dans une sphère trouvée dans le problème 3.6. Pour les dimensions données, nous avons : $R = 75$ cm, $b = 1050$ cm et $p = 1,4$ kg/cm². L'équation (2) donne :

$$\frac{3500}{1,5} = \frac{1,4 \cdot 75}{2h} \frac{2100 - 75}{1050 - 75} \quad \text{et} \quad h = 0,046 \text{ cm} \quad (3)$$

Si σ_ϕ donnée par l'équation (1) est substituée dans l'équation (1) du problème 3.12 (laquelle est valable pour la déformation à symétrie axiale d'un récipient de révolution à paroi mince quelconque), nous obtenons, pour $r_1 = R$ et $r_2 = (b + R \sin \phi)/\sin \phi$:

$$\sigma_\theta = \frac{pR}{2h} \quad (4)$$

en tout point du récipient toroïdal. Il est évident que la valeur maximale de σ_ϕ donnée par l'équation (2) est supérieure à la valeur de σ_θ . Par conséquent, c'est la valeur maximale de σ_ϕ qui doit être utilisée dans le projet. L'épaisseur requise est alors donnée par l'équation (3).

Problèmes supplémentaires

- 3.14. Une bouteille d'air comprimé à usage de laboratoire est à la livraison sous une pression approximative de 160 kg/cm². Le diamètre extérieur du cylindre est de 25 cm. L'acier a un seuil de plasticité de 2450 kg/cm² et on admet un facteur de sécurité de $2,5$. Calculer l'épaisseur requise de la paroi.
Rép. : $h = 2,04$ cm.
- 3.15. Le submersible pour recherches profondes *Aluminaut* a une coque cylindrique de diamètre extérieur de 240 cm et d'épaisseur 14 cm. Il est construit en alliage d'aluminium 7079-T6 de seuil de plasticité de 4200 kg/cm². Calculer la contrainte circonférentielle de la partie cylindrique de la coque lorsque le submersible est à sa profondeur opérationnelle de 4500 m en-dessous du niveau de la mer. Utiliser dans les calculs le diamètre moyen de la coque et prendre $1,024 \cdot 10^{-3}$ kg/cm³ pour poids volumique de l'eau de mer.
Rép. : 3712 kg/cm².
- 3.16. Un cylindre vertical de stockage d'essence a 25 m de diamètre et contient jusqu'à une hauteur de 12 m de l'essence de densité $0,74$. Le seuil de plasticité du matériau est 2450 kg/cm² et on admet un facteur de sécurité de $2,5$. Calculer l'épaisseur requise pour la paroi du fond du réservoir en négligeant l'effet des moments de flexion qui y sont localisés.
Rép. : $h = 1,13$ cm.
- 3.17. Un réservoir sphérique pour stockage de gaz sous pression a 25 m de diamètre et est en acier de construction de 16 mm d'épaisseur. Le seuil de plasticité du matériau est de 2450 kg/cm² et on admet un coefficient de sécurité de $2,5$. Calculer la pression interne maximale admissible en supposant que les cordons de soudure entre les divers éléments sont aussi résistants que le métal massif. Calculer aussi la pression admissible dans le cas où les cordons ont une résistance de 75% de celle du métal massif.
Rép. : $p = 2,5$ kg/cm² $p = 1,88$ kg/cm².

- 3.18. Le véhicule de secours en plongée profonde pour l'assistance aux sous-marins en détresse a une coque de pression consistant en trois récipients sphériques interconnectés comme le montre la Fig. 3-12. Ces coques sont faites en acier HY-130, ont un diamètre extérieur de 225 cm et une épaisseur de paroi de 2 cm. Le seuil de plasticité du matériau est $9\,100\text{ kg/cm}^2$. Calculer la contrainte circonferentielle dans les coques sphériques à la profondeur opérationnelle de 1050 m en-dessous du niveau de la mer. Négliger les concentrations de contrainte à la jonction des sphères et la possibilité volumique de l'eau de mer : $1,024 \cdot 10^{-3}\text{ kg/cm}^3$.

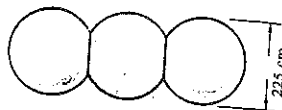


Fig. 3-12

- 3.19. Calculer l'accroissement de rayon, dû à la pression interne, de la coque sphérique mentionnée dans le problème 3.6. Rép. : $\Delta r = pr^2(1 - \mu)/2Eh$
- 3.20. Trouver une expression pour l'accroissement de volume par unité de volume d'un cylindre circulaire à paroi mince soumis à une pression interne uniforme p . Les extrémités du cylindre sont fermées par des plaques circulaires. On supposera que l'expansion radiale est constante sur toute la longueur. Rép. : $\frac{\Delta V}{V} = \frac{pr}{Eh} \left(\frac{5}{2} - 2\mu \right)$
- 3.21. Calculer l'accroissement de volume par unité de volume d'un cylindre circulaire à paroi mince en acier fermé aux deux extrémités et soumis à une pression interne uniforme de $5,5\text{ kg/cm}^2$. L'épaisseur de la paroi est 1,6 mm, le rayon 35 cm et $\mu = 1/3$. On prendra $E = 2,1 \cdot 10^6\text{ kg/cm}^2$. Rép. : $\Delta V/V = 1,05 \cdot 10^{-3}$.
- 3.22. On considère un cylindre constitué par une coque mince en acier fretée sur un cylindre en aluminium. Les cylindres ont chacun une épaisseur de 0,25 cm et le diamètre moyen de l'assemblage est de 10 cm, l'interférence initiale est de 0,01 cm en diamètre. Calculer les contraintes tangentielles dans chaque coque provoquées par le fretage. Pour l'aluminium, $E = 7 \cdot 10^5\text{ kg/cm}^2$ et pour l'acier : $E = 2,1 \cdot 10^6\text{ kg/cm}^2$. Rép. : $\sigma_{ac} = 525\text{ kg/cm}^2$; $\sigma_{al} = -525\text{ kg/cm}^2$
- 3.23. Soit un récipient hémisphérique de rayon R et d'épaisseur h rempli avec un liquide dont le poids par unité de volume est γ . Le récipient est supporté tout autour de son bord supérieur comme le montre la Fig. 3-13. Calculer les contraintes dans le récipient, dues à cette charge. Rép. :

$$\sigma_\phi = \frac{\gamma R^2}{3h} \left(\frac{1 - \cos^3 \phi}{\sin^2 \phi} \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\gamma R^2}{3h} \left[3 \cos \phi - \frac{1 - \cos^3 \phi}{\sin^2 \phi} \right]$$

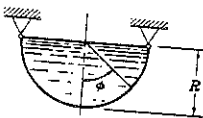


Fig. 3-13

- 3.24. On considère le récipient hémisphérique de rayon R et d'épaisseur h partiellement rempli avec un liquide de poids volumique γ . Le récipient est supporté tout autour de son bord supérieur comme le montre la Fig. 3-14. Calculer les contraintes dans le récipient. Rép. : Pour $\alpha < 45^\circ$:

$$\sigma_\phi = -\sigma_\theta = \frac{\gamma R^2 \cdot 0,0382}{h \cos^2 \alpha}$$

Pour $45^\circ < \alpha < 90^\circ$:

$$\sigma_\phi = \frac{\gamma R^2}{h} \left[\frac{1 + \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{3(1 + \sin \alpha)} - 0,355 \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{\gamma R^2}{h} (\sin \alpha - 0,707) - \sigma_\phi$$

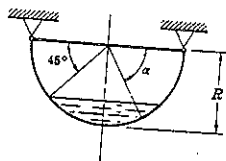


Fig. 3-14

- 3.25. Reprendre le problème 3.13 avec tous les paramètres indiqués, mais en considérant que le matériau est maintenant l'alliage de titane Ti-6Al-4V, ayant un seuil de plasticité de $8\,820\text{ kg/cm}^2$ à la température ambiante. Calculer l'épaisseur de paroi requise en admettant un coefficient de sécurité de 1,5. Rép. : 0,0185 cm

- 3.26. Le véhicule de secours en plongée profonde mentionné dans le problème 3.18 a un réservoir de stockage d'air comprimé en forme de coque toroïdale qui entoure deux des coques sphériques interconnectées comme montré par la Fig. 3-15. Le réservoir toroïdal est en acier ayant une résistance limite de $10\,500\text{ kg/cm}^2$. Un facteur de sécurité de 3 basé sur cette résistance est utilisé. Calculer l'épaisseur de paroi du tore requise pour résister à une pression interne de 315 kg/cm^2 . Rép. : 1,48 cm.

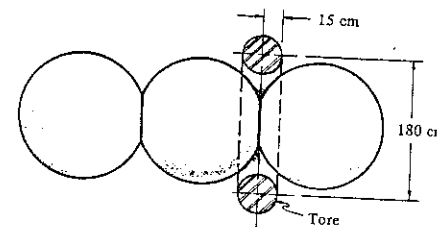


Fig. 3-15

Contraintes directes de cisaillement

DEFINITION DE LA FORCE DE CISAILLEMENT

Une force agissant le long d'un plan passant en travers d'un corps est appelée *force de cisaillement* ou *effort tranchant*. Elle est notée F_T .

DEFINITION DE LA CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

La force de cisaillement divisée par la surface sur laquelle elle agit est appelée *contrainte de cisaillement* ou *contrainte tranchante*. Dans ce livre, elle est notée τ . Ainsi :

$$\tau = \frac{F_T}{A}$$

COMPARAISON ENTRE LES CONTRAINTE NORMALE ET DE CISAILLEMENT

Considérons une barre coupée par un plan $a-a$ normal à son axe comme le montre la Fig. 4-1. La contrainte normale σ est perpendiculaire à ce plan. C'est le type de contrainte étudié dans les chapitres 1, 2 et 3.

La contrainte de cisaillement agit le long du plan comme le montre la flèche représentant τ . Par conséquent, c'est leur *direction* qui distingue les contraintes normales des contraintes de cisaillement.

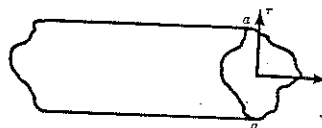


Fig. 4-1

HYPOTHESE

Il est nécessaire de faire une hypothèse sur la distribution des contraintes de cisaillement et, en l'absence d'une connaissance plus précise, elle est admise être uniforme dans tous les problèmes discutés dans ce chapitre. Ainsi l'expression $\tau = F_T/A$ donne la contrainte moyenne de cisaillement dans la surface.

APPLICATIONS

Les opérations de poinçonnage (problème 4.3), l'essai des éprouvettes de bois (problème 4.4), les joints rivés (problème 4.6), les joints soudés (problème 4.7) et les clavettes utilisées pour fixer les poulies sur les arbres (problème 4.8) sont des exemples courants de systèmes comportant des contraintes de cisaillement.

DEFORMATIONS DUES AUX CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

Considérons la déformation d'un élément plan rectangulaire découpé dans un solide dans lequel les forces agissant sur l'élément produisent des contraintes de cisaillement τ dans les directions indiquées dans la Fig. 4-2(a).

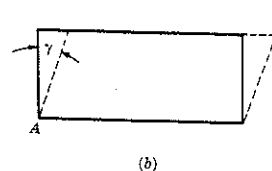
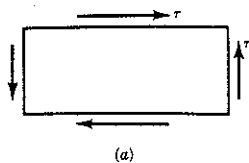


Fig. 4-2

On admet que les faces de l'élément parallèles au plan de la figure sont libres de charge. Il n'existe donc pas de contraintes normales agissant sur l'élément et, par conséquent, les longueurs des côtés de l'élément rectangulaire ne changent pas lorsque les contraintes de cisaillement prennent la valeur τ . Il se produit pourtant une distorsion des *angles* de l'élément (droits à l'origine). Après cette distorsion, due aux contraintes de cisaillement, l'élément prend la configuration montrée par les tirets dans la Fig. 4-2(b).

DEFORMATION DE CISAILLEMENT

Le changement de l'angle au sommet d'un élément initialement rectangulaire définit la *déformation de cisaillement*. Ce changement s'exprime en radians et est usuellement noté γ .

MODULE D'ELASTICITE EN CISAILLEMENT

Le rapport de la contrainte de cisaillement τ à la déformation de cisaillement γ est appelé *module d'élasticité en cisaillement* et est habituellement noté G . Par conséquent :

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

G est aussi connu sous le nom de *module de rigidité*.

Les unités de G sont les mêmes que celles utilisées pour les contraintes de cisaillement et il s'exprime en kg/cm^2 puisque la déformation de cisaillement est sans dimension. La détermination expérimentale de G , ainsi que le domaine de comportement linéaire de τ et γ seront étudiés dans le chapitre 5. Les diagrammes contrainte-déformation pour les matériaux peuvent être tracés pour les charges de cisaillement exactement comme ils l'ont été pour les charges normales au chapitre 1. Ils ont la même apparence générale que ceux tracés dans le chapitre 1, mais les valeurs numériques sont naturellement différentes.

Problèmes résolus

- 4.1. Considérons le joint boulonné de la Fig. 4-3. La force P a pour valeur 3 000 kg et le boulon a un diamètre de 1,2 cm. Calculer la valeur moyenne de la contrainte de cisaillement dans l'un et l'autre des deux plans $a-a$ et $b-b$.

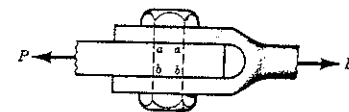


Fig. 4-3

En l'absence d'information plus précise, nous pouvons seulement supposer que la force P se répartit également entre les sections $a-a$ et $b-b$. Une force de $3\,000/2 = 1\,500$ kg agit donc sur chaque plan sur une surface de section droite de $\frac{\pi}{4}(1,2)^2 = 1,13 \text{ cm}^2$. Par conséquent, la contrainte de cisaillement sur chaque plan est $\tau = \frac{P/2}{A} = \frac{1\,500}{1,13} = 1\,330 \text{ kg/cm}^2$.

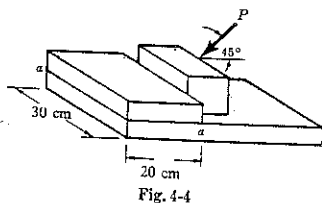


Fig. 4-4

- 4.2. Reportons-nous à la Fig. 4-4. La force P tend à cisailer la butée le long du plan $a-a$. Si $P = 4000$ kg, calculer la contrainte moyenne de cisaillement sur le plan $a-a$.

Seule la composante horizontale de P est efficace pour produire cette action de cisaillement. Elle est donnée par $4000 \cdot \cos 45^\circ = 2825$ kg. La contrainte moyenne est par conséquent :

$$\tau = \frac{P \cos 45^\circ}{A} = \frac{2825}{30(20)} = 4,7 \text{ kg/cm}^2.$$

- 4.3. Un acier de construction à bas carbone a une résistance maximale au cisaillement de 3100 kg/cm^2 approximativement. Calculer la force nécessaire pour poinçonner un trou de $2,5 \text{ cm}$ de diamètre dans une plaque de cet acier d'épaisseur 1 cm . Si le module d'élasticité en cisaillement de ce matériau est de $8,4 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, calculer la déformation de cisaillement au bord de ce trou lorsque la contrainte de cisaillement est de 1500 kg/cm^2 .

Admettons que le cisaillement est uniforme sur une surface cylindrique de $2,5 \text{ cm}$ de diamètre et 1 cm d'épaisseur, Fig. 4-5. Pour l'équilibre, la force P doit avoir pour valeur :

$$P = \tau A = \pi(2,5)(1)(3100) = 24.300 \text{ kg}$$

Pour calculer la déformation de cisaillement γ pour une contrainte de cisaillement $\tau = 1500 \text{ kg/cm}^2$, utilisons la définition $G = \tau/\gamma$. On obtient :

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{1500}{840.000} = 0,00178 \text{ radians}$$

- 4.4. Dans l'industrie du bois, on utilise des blocs inclinés pour déterminer la résistance compression-cisaillement des joints collés. Soit les deux blocs A et B collés ayant 4 cm de profondeur perpendiculairement au plan de la figure. Calculer la résistance maximale au cisaillement de la colle pour une force verticale de 4000 kg nécessaire pour provoquer la rupture du joint. Il faut noter qu'avec une bonne colle, la majorité des ruptures se produisent dans le bois.

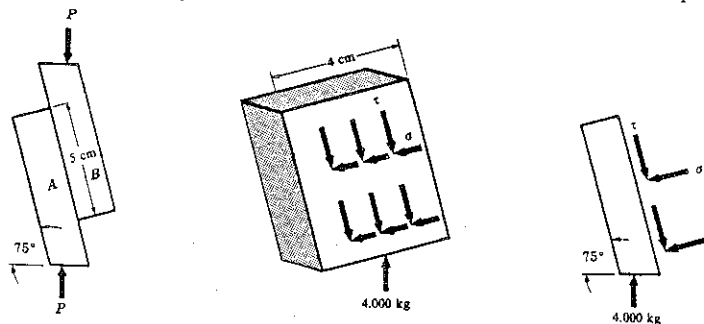


Fig. 4-6

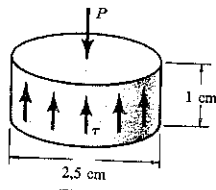


Fig. 4-5

Considérons la condition d'équilibre du bloc inférieur A . Les réactions du bloc supérieur B sur le bloc inférieur consistent en les deux forces normales et de cisaillement montrées par les vues perspectives et normale des Fig. 4-6(b) et (c).

D'après la Fig. 4-6(c), nous voyons que, pour l'équilibre dans la direction horizontale :

$$\Sigma F_x = \tau(5)(4) \cos 75^\circ - \sigma(5)(4) \cos 15^\circ = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma = 0,268\tau$$

Pour l'équilibre dans la direction verticale, nous avons :

$$\Sigma F_y = 4.000 - \tau(5)(4) \sin 75^\circ - \sigma(5)(4) \sin 15^\circ = 0$$

On en déduit que $\sigma = 0,269 \tau$ et en résolvant, on trouve $\tau = 193 \text{ kg/cm}^2$.

- 4.5. La contrainte de cisaillement dans une pièce en acier de construction est de 1050 kg/cm^2 . Si le module de rigidité $G = 840000 \text{ kg/cm}^2$, calculer la déformation de cisaillement γ .

Par définition, $G = \frac{\tau}{\gamma}$. En conséquence, la déformation de cisaillement est :

$$\gamma = \frac{1050}{840.000} = 0,00125 \text{ radians.}$$

- 4.6. Un unique rivet est utilisé pour réunir deux plaques comme le montre la Fig. 4-7. Le rivet a un diamètre de $1,9 \text{ cm}$ et la charge est de $P = 3400 \text{ kg}$. Quelle est la contrainte de cisaillement moyenne développée dans le rivet ?



Fig. 4-7

La contrainte moyenne de cisaillement dans le rivet est P/A où A est l'aire de la section droite du rivet. Cependant le trou pour le rivet a couramment un diamètre supérieur de $0,16 \text{ cm}$ à celui du rivet et il est habituel de supposer que le rivet remplit complètement le trou. En conséquence, la contrainte de cisaillement est donnée par :

$$\tau = \frac{3400}{\frac{\pi}{4}(1,9 + 0,16)^2} = 1010 \text{ kg/cm}^2$$

- 4.7. Pour réunir deux plaques, on utilise souvent des soudures d'angle. Un tel cordon de soudure subit du cisaillement ainsi que de la tension ou compression et fréquemment en outre de la flexion. Pour les deux plaques de la Fig. 4-8, calculer la force de tension P admissible pouvant être appliquée, en admettant une contrainte pratique de 790 kg/cm^2 pour le cisaillement conformément au Code pour la Soudure par Fusion de l'American Welding Society. La charge est appliquée au milieu de l'intervalle entre les deux soudures.

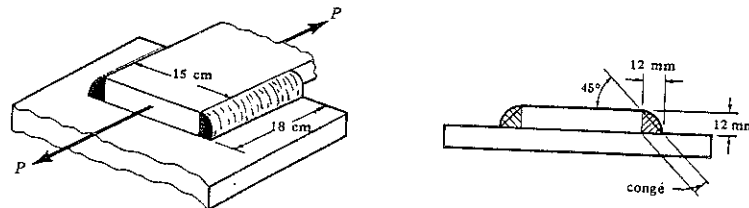


Fig. 4-8

Problèmes supplémentaires

La dimension minimale de la section droite de la soudure est appelée le *congé*, qui, dans ce cas, est de $1,2 \sin 45^\circ = 0,848$ cm. La surface effective de soudure qui résiste au cisaillement est égale à la longueur du cordon multipliée par le congé, c'est-à-dire : $18 \cdot 0,848 = 15,26$ cm² pour chacune des deux soudures. Par suite la charge de tension P admissible est le produit de la résistance pratique de la surface résistance ou : $P = 790 \cdot 2,15,26 = 24\ 100$ kg.

- 4.8. Les arbres et poulies sont couramment fixés ensemble au moyen d'une clavette, comme le montre la Fig. 4-9(a). Une poulie est soumise à un couple moteur T de 11 000 kg.cm transmis à l'arbre par l'intermédiaire d'une clavette de 1,2.1,2.7,5 cm. L'arbre a un diamètre de 5 cm. Calculer la contrainte de cisaillement dans un plan horizontal dans la clavette.

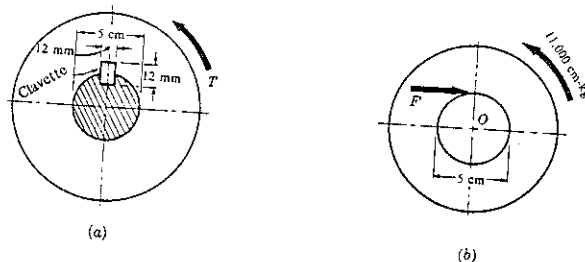


Fig. 4-9

Traçons un schéma de corps libre pour la poulie seule, Fig. 4-9(b). On voit que le couple moteur de 11 000 kg.cm doit être équilibré par une force tangentielle horizontale F exercée par la poulie sur la clavette. Pour l'équilibre des moments autour du centre de la poulie, on a :

$$\Sigma M_O = 11.000 - F(2,5) = 0 \quad \text{ou} \quad F = 4.400 \text{ kg}$$

Il faut noter que l'arbre exerce sur la poulie des forces supplémentaires non montrées sur le schéma. Ces forces agissent au centre O et n'entrent pas dans l'équation ci-dessus du moment. Les forces résultantes agissant sur la clavette sont représentées dans la Fig. 4-10(a). En réalité, la force F agissant vers la droite est la résultante des forces réparties agissant sur la moitié inférieure de la face gauche. Les autres forces F vues sur la figure représentent les résultantes des systèmes de forces réparties. La distribution exacte de ces forces n'est pas connue.

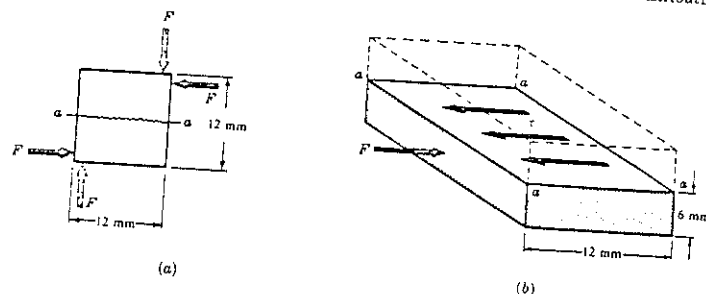


Fig. 4-10

Le schéma de corps libre de la portion de clavette en-dessous du plan horizontal $a-a$ passant par la section médiane est montré par la Fig. 4-10(b). Pour l'équilibre dans la direction horizontale, on a :

$$\Sigma F_x = 4.400 - \tau(1,2)(7,5) = 0 \quad \text{ou} \quad \tau = 490 \text{ kg/cm}^2$$

C'est la contrainte de cisaillement horizontale dans la clavette.

- 4.9. Dans le problème 4.1, si la contrainte de cisaillement maximale acceptable est de 1 000 kg/cm², calculer le diamètre nécessaire du rivet pour que cette valeur ne soit pas dépassée. Rép. : $d = 1,38$ cm.

- 4.10. Soit un boulon de 1 cm de diamètre sollicité par une charge axiale de 1 000 kg, comme le montre la Fig. 4.11. Calculer la contrainte moyenne de cisaillement dans la tête du boulon en supposant que le cisaillement agit sur une surface cylindrique de même diamètre que le boulon, comme le montrent les lignes pointillées. Rép. : $\tau = 400$ kg/cm².

- 4.11. Un poinçon circulaire de 2 cm de diamètre est utilisé pour poinçonner un trou dans une plaque d'acier de 12 mm d'épaisseur. Si la force nécessaire pour faire pénétrer le poinçon dans la plaque est 30 000 kg, calculer la contrainte de cisaillement maximale développée dans le matériau. Rép. : $\tau = 4\ 000$ kg/cm².

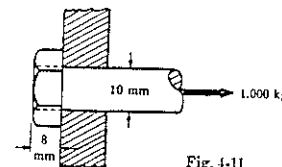


Fig. 4-11

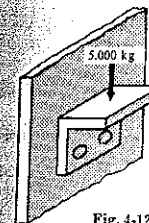


Fig. 4-12

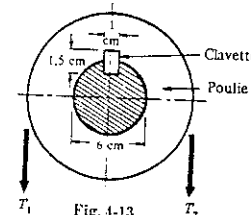


Fig. 4-13

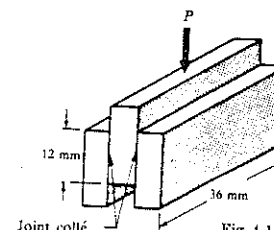


Fig. 4-14

- 4.12. Dans la pratique des structures, des étrésses en acier sont couramment utilisées pour transférer des charges de traverses horizontales à des colonnes verticales. Si la réaction de la traverse sur l'étrésses est une force vers le bas de 5 000 kg, comme le montre la Fig. 4-12, et si deux rivets de 2 cm de diamètre résistent à cette force, calculer la contrainte moyenne de cisaillement dans chacun des deux rivets. Comme dans le problème 4.6, on supposera que le rivet remplit le trou dont le diamètre est supérieur de 0,15 cm au diamètre du rivet. Rép. : 690 kg/cm².

- 4.13. Une poulie est clavetée (pour prévenir le mouvement relatif) sur un arbre de 6 cm de diamètre. Les courroies de tension inégale T_1 et T_2 des deux côtés de la poulie donnent un couple moteur net de 3 300 kg.cm. La clavette a une section droite de 1,1.5 cm et une longueur de 7,5 cm, comme le montre la Fig. 4-13. Calculer la contrainte moyenne de cisaillement agissant sur un plan horizontal passant dans la clavette. Rép. : $\tau = 60$ kg/cm².

- 4.14. L'assemblage représenté dans la Fig. 4-14 est souvent utilisé pour déterminer la résistance au cisaillement d'un joint collé. Pour une force P à la rupture de 1 200 kg, quelle est la contrainte moyenne dans le joint à cet instant ? Rép. : $\tau = 140$ kg/cm².

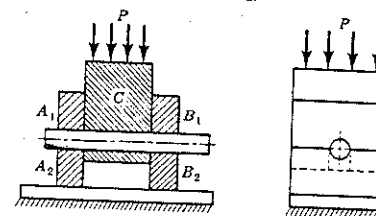


Fig. 4-15

- 4.15. La Fig. 4-15 montre un autre type d'appareil utilisé pour la détermination de la résistance au cisaillement d'éprouvettes cylindriques. L'éprouvette est fixée entre les blocs A_1 , A_2 et B_1 , B_2 et une force P dirigée vers le bas est appliquée au bloc C. Quelle force P doit-elle être appliquée pour provoquer la rupture d'un rondin d'acier laminé à chaud de 20 mm de diamètre et ayant une résistance maximale au cisaillement de 7 300 kg/cm². Rép. : 46 000 kg.

- 4.16 Soit la structure genre balcon montrée dans la Fig. 4-16. Le balcon horizontal est chargé par une force totale de 10 000 kg, distribuée symétriquement par rapport à l'axe. Le support central est un arbre de 50 cm de diamètre et le balcon est soudé sur ses faces supérieures et inférieures par des cordons de soudure sur un côté (ou aile), comme le montre la figure de droite. Calculer la contrainte moyenne de cisaillement existant entre l'arbre et le cordon de soudure. Rép. 29 kg/cm²

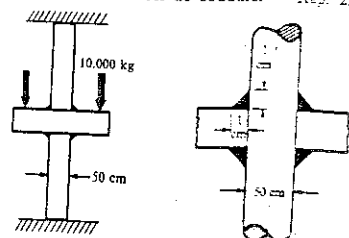


Fig. 4-16

- 4.17 Soient deux plaques d'égale épaisseur jointes par deux cordons de soudure, comme le montre la Fig. 4-17. Calculer la contrainte de cisaillement maximale dans les soudures. Rép. : $\tau = 0,707 P/ab$

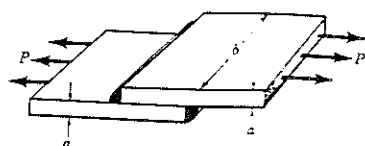


Fig. 4-17

- 4.18 Une coque cylindrique mince verticale de 38 m de diamètre est sollicitée par une charge distribuée uniformément sur son bord supérieur, mais elle est seulement partiellement supportée le long de son extrémité inférieure, comme le montre la Fig. 4-18. Si la charge totale sur la partie supérieure est de 450 000 kg et si une longueur de 24 m de l'extrémité inférieure n'est pas supportée, calculer la contrainte moyenne

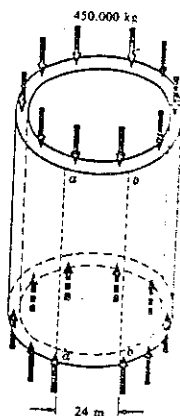


Fig. 4-18

de cisaillement sur chacune des sections $a-a$ et $b-b$. La coque est en béton d'épaisseur de 20 cm et de hauteur de 6,5 m. Rép. : $\tau = 3,5 \text{ kg/cm}^2$.

- 4.19. Un tube de cuivre de 5 cm de diamètre extérieur et de 2 mm d'épaisseur de paroi est ajusté librement sur un barreau plein circulaire en acier de 36 mm de diamètre. Les deux éléments sont assemblés par deux broches en métal de 8 mm de diamètre, chacune passant transversalement à travers les éléments, une broche étant au voisinage de chaque extrémité de l'ensemble. A la température ordinaire, l'ensemble est libre de contrainte quand les broches sont en position. La température de l'ensemble est alors accrue de 40°C. Calculer la contrainte moyenne de cisaillement dans les broches. Pour le cuivre, $E = 9,1 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha = 17,7 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ et pour l'acier $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$. Rép. : $\tau = 1330 \text{ kg/cm}^2$.

CHAPITRE 5
Pour plus de documents gratuits visiter
<https://book4uours.blogspot.com>

La torsion

DEFINITION DE LA TORSION

Considérons un barreau rigidement maintenu à une extrémité et sollicité sur l'autre extrémité par un couple $T (= Fd)$ appliqué dans un plan perpendiculaire à l'axe du barreau, comme le montre la Fig. 5-1. Le barreau est dit en torsion.



Fig. 5-1

EFFETS DE LA TORSION

Les effets d'un effort de torsion appliqué à un barreau sont : 1) de produire un déplacement angulaire d'une section droite d'extrémité par rapport à l'autre, et 2) de provoquer des contraintes de cisaillement dans toutes les sections perpendiculaires à l'axe du barreau.

MOMENT DE TORSION

Il peut arriver qu'un certain nombre de couples agissent le long d'un arbre. Il est alors commode d'introduire une nouvelle grandeur, le *moment de torsion*, qui peut être défini, pour une région du barreau, comme la somme algébrique des moments des couples appliqués existant sur un côté de la section considérée. Le choix du côté est naturellement toujours arbitraire.

MOMENT D'INERTIE POLAIRE

Pour un arbre cylindrique creux de diamètre extérieur D_e et de diamètre intérieur D_i , le *moment d'inertie polaire* de la section, habituellement exprimé par J est donné par :

$$J = \frac{\pi}{32} (D_e^4 - D_i^4)$$

Le moment d'inertie polaire d'un arbre plein s'obtient en posant $D_i = 0$. Voir le problème 5.1. Cette quantité J est une propriété mathématique de la géométrie de la section qui apparaît dans l'étude des contraintes provoquées dans un arbre cylindrique sollicité en torsion.

Il peut être commode d'écrire l'équation ci-dessus sous la forme :

$$J = \frac{\pi}{32} (D_e^2 + D_i^2) (D_e^2 - D_i^2)$$

$$= \frac{\pi}{32} (D_e^2 + D_i^2) (D_e + D_i) (D_e - D_i)$$

Cette dernière forme est utile pour le calcul numérique de J dans les cas où la différence $(D_e - D_i)$ est faible. Voir le problème 5.8.

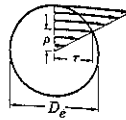


Fig. 5-2

CONTRAINTES DE CISAILEMENT EN TORSION

Dans un arbre cylindrique plein ou creux soumis à un moment de torsion T , la contrainte de cisaillement en torsion τ à une distance ρ de l'axe de l'arbre est donnée par :

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

Cette expression est établie dans le problème 5.2. Pour ses applications, se reporter aux problèmes 5.5, 5.6, 5.7, 5.10 et 5.13. La distribution des contraintes varie de zéro dans l'axe de l'arbre (s'il est plein) à un maximum dans les fibres extérieures, comme l'indique la Fig. 5-2. Il faut insister sur le fait qu'aucun point du barreau ne doit être contraint au-delà de la limite de proportionnalité.

HYPOTHESES

Dans l'établissement de la formule $\tau = \frac{T\rho}{J}$, on fait l'hypothèse que toute section plane de l'arbre normale à son axe reste plane après l'application des couples et, en outre, qu'un diamètre de section avant déformation reste un diamètre ou une droite après déformation. Ces hypothèses semblent raisonnables en raison de la symétrie polaire d'un arbre cylindrique. Mais elles cessent d'être vraies dans le cas des arbres de section non circulaire. Les résultats expérimentaux montrent que, lors de l'application de charges extérieures, les sections des arbres non circulaires se déforment hors du plan initial.

DEFORMATION DE CISAILEMENT

Une génératrice $a-b$, tracée à la surface d'un barreau non chargé se déplace en $a-b'$ après l'application du moment de torsion T , comme le montre la Fig. 5-3. L'angle γ , exprimé en radians, entre la position finale et la position initiale de la génératrice est défini comme la *déformation de cisaillement* de la surface du barreau. La même définition est applicable pour tout point de l'intérieur du barreau.

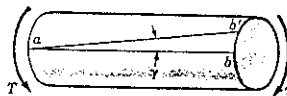


Fig. 5-3

MODULE D'ELASTICITE EN CISAILEMENT

Le rapport de la contrainte de cisaillement τ à la déformation de cisaillement γ est appelé le *module d'élasticité en cisaillement* et, comme dans le chapitre 4 est donné par :

$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$

Ici aussi, les unités de G sont les mêmes que celles de la contrainte de cisaillement, puisque la déformation de cisaillement est sans dimension.

ANGLE DE TORSION

Lorsqu'un arbre de longueur L est soumis à un moment de torsion T constant sur la longueur, l'angle θ de la torsion d'une extrémité du barreau par rapport à l'autre est donné par :

$$\theta = \frac{TL}{GJ}$$

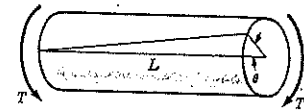


Fig. 5-4

où J est le moment d'inertie polaire de la section. Cette équation est établie dans le problème 5.3. Pour les applications, se référer aux problèmes 5.7, 5.9, 5.11, 5.12 et 5.13. Cette expression n'est valable que lorsque le barreau a un comportement purement élastique.

MODULE DE RUPTURE

Il est défini comme la contrainte de cisaillement fictive obtenue en introduisant dans l'équation $\tau = T\rho/J$, le couple maximal T supporté par un arbre dans un essai de rupture. Dans ce cas, on prend pour la variable ρ le rayon extérieur du barreau. L'utilisation de cette formule au point de rupture n'est en fait pas justifiée, car comme on peut le voir dans le problème 5.2, elle est établie seulement pour une déformation linéaire du matériau. La contrainte obtenue par l'emploi de cette formule, n'est donc pas une vraie contrainte, mais elle peut-être utile dans certains cas pour des comparaisons.

PROBLEMES STATIQUEMENT INDETERMINES

Des problèmes de ce genre se posent fréquemment dans le cas de charges de torsion. Comme exemples, citons celui d'un arbre constitué de deux matériaux, un tube d'un matériau enveloppant un autre tube ou un barreau d'un autre matériau et l'ensemble étant soumis à un moment de torsion. Comme toujours, les équations applicables doivent être complétées par des équations supplémentaires basées sur les déformations de la structure. Dans ce cas, les inconnues sont les moments de torsion qui sollicitent chaque matériau. L'équation basée sur les déformations devra dans ce cas, préciser que les angles de torsion des différents matériaux sont égaux, (voir les problèmes 5.12 et 5.13).

TORSION PLASTIQUE DE BARREAUX CYLINDRIQUES

Quand le moment de torsion agissant sur un barreau cylindrique plein ou creux augmente, il atteint finalement une valeur pour laquelle les fibres extrêmes du barreau sont contraintes au seuil de plasticité en cisaillement du matériau. Il s'agit du moment de torsion élastique maximal que peut supporter le barreau et il est exprimé par T_e . Une augmentation du moment de torsion au-delà de ce maximum fait que les fibres intérieures atteignent le seuil de plasticité et la déformation progresse de l'extérieur vers l'intérieur. Le cas limite se produit lorsque toutes les fibres sont contraintes au seuil de plasticité en cisaillement et on atteint alors le *moment de torsion totalement plastique*. Il est noté T_p . A condition de ne pas considérer des contraintes supérieures au seuil de plasticité en cisaillement, c'est le moment de torsion maximal possible que peut supporter le barreau. Dans le problème 5.14, il est montré que $T_p = 4 T_e/3$ pour un barreau plein cylindrique soumis à la torsion.

FLUX DE CISAILEMENT

Pour un tube à paroi mince de section de forme quelconque, la force de cisaillement par unité de longueur de la périphérie du tube est dénommée le *flux de cisaillement*. Il est désigné par le symbole q et s'exprime en unité de force par unité de longueur, par exemple en kg/cm. Cette notion est étudiée dans le problème 5.15.

TORSION ELASTIQUE DE TUBES FERMES A PAROI MINCE

Il est raisonnable d'admettre que dans un tube à paroi mince, la contrainte de cisaillement est constante dans l'épaisseur et aussi qu'elle est tangente à la ligne médiane entre les surfaces intérieures et extérieures. Les contraintes de cisaillement dans un tel tube on l'aspect représenté dans la Fig. 5-5.

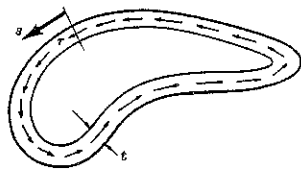


Fig. 5-5

Pour un tube à paroi mince d'épaisseur constante ou variable, le moment de torsion correspondant à un flux de cisaillement donné q est :

$$T = 2Aq$$

où A est la surface enclose par la ligne médiane du tube. Cette expression est établie dans le problème 5.16. L'angle de torsion par unité de longueur du tube est calculée dans le problème 5.17. Il est :

$$\theta = \frac{T}{4A^2G} \int \frac{ds}{t}$$

où s est la coordonnée traversant la périphérie du tube et t l'épaisseur. Pour les applications, voir les problèmes 5.18 et 5.19.

Problèmes résolus

- 5.1. Etablir l'expression du moment d'inertie polaire de la section d'un arbre cylindrique creux. Que devient cette expression dans le cas d'un arbre cylindrique plein ?

Soit D_e le diamètre extérieur de l'arbre et D_i son diamètre intérieur. En raison de la symétrie circulaire, il est très commode d'adopter le système de coordonnées polaires représenté dans la Fig. 5-6.

Par définition, le moment d'inertie polaire est donné par l'intégrale :

$$J = \int_A \rho^2 da$$

où A indique que l'intégrale doit être calculée sur la section entière.

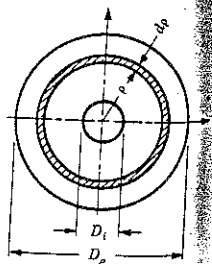


Fig. 5-6

Pour calculer cette intégrale, il est désirable de choisir un élément de surface da tel que ρ soit constant en tous les points de l'élément. L'élément annulaire de rayon ρ et d'épaisseur $d\rho$ en direction radiale représenté convient bien. On admet que l'épaisseur $d\rho$ de l'anneau est faible par rapport à ρ . La surface de l'élément annulaire est donnée par $da = 2\pi\rho(d\rho)$. Le moment d'inertie polaire est alors :

$$J = \int_{D_i/2}^{D_e/2} \rho^2 (2\pi\rho) d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{D_i/2}^{D_e/2} = \frac{\pi}{32} (D_e^4 - D_i^4)$$

Cette grandeur a pour dimension : (longueur)⁴ et elle s'exprime en cm^4 . Il n'est pas nécessaire d'essayer d'attacher une signification physique à la quantité J . Elle sera trouvée utile pour les problèmes comportant une torsion des arbres.

Dans le cas spécial d'un arbre cylindrique plein, l'expression ci-dessus devient $J = \pi D^4/32$ où D est le diamètre de l'arbre.

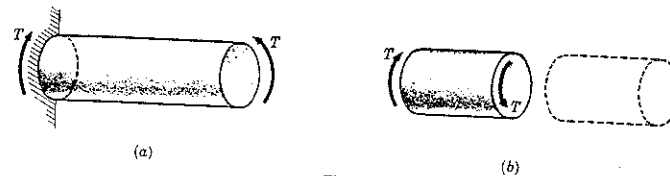


Fig. 5-7

- 5.2. Etablir une expression reliant le moment de torsion agissant sur un arbre de section circulaire à la contrainte de cisaillement en un point quelconque de l'arbre.

Dans la Fig. 5-7(a), l'arbre est représenté chargé par deux couples T et il est, par conséquent, en équilibre statique. Pour déterminer la distribution des contraintes de cisaillement dans l'arbre, coupons-le par un plan perpendiculaire à son axe. Faisons en outre l'hypothèse que ce plan n'est pas "trop voisin" de l'une ou l'autre extrémité de l'arbre où sont appliqués les moments T . L'utilisation d'un tel plan coupant est conforme à la méthode usuelle de la Résistance des Matériaux suivant laquelle le corps est coupé de manière telle que les forces en investigation deviennent extérieures au nouveau corps ainsi formé. Ces forces (ou ces contraintes) sont, bien entendu, des effets internes en regard au corps initial non coupé.

Le schéma de corps libre de la portion de l'arbre à gauche de ce plan est représenté sur la Fig. 5-7(b). Il est clair qu'un couple T doit agir sur la section découpée par le plan. En effet, puisque l'arbre entier est en équilibre, toute portion doit aussi l'être. Le couple T agissant sur la section découpée représente l'effet de la portion de droite de l'arbre sur la portion de gauche. Comme la portion de droite a été enlevée, elle doit être remplacée par son effet sur la portion de gauche. Cet effet est représenté par le couple T . Ce couple est, bien entendu, une résultante des contraintes de cisaillement réparties sur la section. Il est maintenant nécessaire de faire certaines hypothèses pour déterminer la nature de la variation de l'intensité de la contrainte de cisaillement sur la section.

Une hypothèse fondamentale est qu'une section plane de l'arbre normale à son axe avant l'application de la charge reste plane et normale à l'axe après cette application. Elle peut être vérifiée expérimentalement pour les arbres cylindriques, mais n'est pas valable pour les arbres de section non circulaire.

Une génératrice de la surface de l'arbre, marquée O_1A dans la Fig. 5-8 est déplacée en O_1B après torsion. On appelle α l'angle entre ces deux droites. Par définition, la déformation de cisaillement unitaire γ de la surface de l'arbre est :

$$\gamma = \tan \alpha \approx \alpha$$

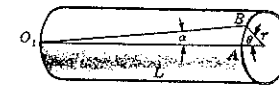


Fig. 5-8

où l'angle α est mesuré en radians. De la géométrie de la figure :

$$\alpha = \frac{AB}{L} = \frac{r\theta}{L}; \text{ d'où } \gamma = \frac{r\theta}{L}$$

Mais puisqu'il est admis qu'un diamètre de l'arbre avant application de la charge reste un diamètre après la déformation de cisaillement unitaire à une distance quelconque ρ du centre de l'arbre peut-être également exprimée par $\gamma_\rho = \rho\theta/L$. Donc les déformations de cisaillement des fibres longitudinales varient linéairement avec la distance au centre de l'arbre.

Si nous ne considérons que la région de comportement linéaire du matériau dans laquelle la contrainte de cisaillement est proportionnelle à la déformation, il est alors évident que les contraintes de cisaillement dans les fibres longitudinales varient linéairement avec la distance au centre de l'arbre. Il est clair que la distribution des contraintes de cisaillement est symétrique par rapport à l'axe géométrique de l'arbre. Elles ont l'aspect représenté dans la Fig. 5-9. Pour l'équilibre, la somme des moments de ces forces de cisaillement réparties sur la section circulaire entière est égale au moment de torsion appliqué. Donc la somme des moments de ces forces est égale exactement au couple T représenté dans la Fig. 5-7(b).

Nous avons donc :

$$T = \int_0^r \tau_\rho da$$

où da est la surface de l'élément annulaire hachuré représenté dans la Fig. 5-9. Mais les contraintes de cisaillement sont proportionnelles à la distance de l'axe, d'où :

$$\tau_\rho/\rho = \tau_r/r = \text{constante}$$

où l'indice de la contrainte de cisaillement se réfère à la distance de l'élément à l'axe de l'arbre. Nous pouvons donc écrire :

$$T = \int_0^r \frac{\tau_r}{r} \rho^2 da = \frac{\tau_r}{r} \int_0^r \rho^2 da$$

puisque le rapport $\frac{\tau_r}{r}$ est constant. Mais l'expression $\int_0^r \rho^2 da$ est, par définition, le moment d'inertie polaire de la section (voir le problème 5.1). Ses valeurs pour des arbres cylindriques pleins et creux sont données dans le problème 5.1. La valeur cherchée est donc :

$$T = \frac{\tau_r J}{r} \quad \text{ou} \quad \tau_r = \frac{T r}{J}$$

Il faut souligner que cette expression est valable *seulement* lorsqu'aucun point du barreau n'est contraint au-delà de la limite de proportionnalité du matériau.

- 5.3. Etablir l'expression de l'angle de torsion d'un arbre cylindrique en fonction du moment de torsion appliqué. Admettre que le comportement de l'arbre entier reste dans le domaine élastique.

Soit L la longueur de l'arbre, J le moment d'inertie polaire de la section, T le moment de torsion appliqué (supposé constant le long de l'arbre) et G le module d'élasticité en cisaillement. L'angle de torsion pour une longueur L est représenté par θ dans la Fig. 5-10.

D'après le problème 5.2, pour les fibres extérieures où $\rho = r$, nous avons :

$$\gamma_r = \frac{r\theta}{L} \quad \text{et} \quad \tau_r = \frac{T r}{J}$$



Fig. 5-10

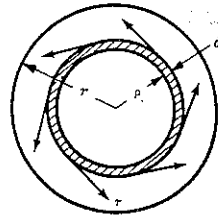


Fig. 5-9

Par définition, le module en cisaillement est donné par $G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{Tr/J}{r\theta/L} = \frac{TL}{J\theta}$ d'où $\theta = \frac{TL}{GJ}$

Noter que θ est exprimé en radians, donc est sans dimension. On aurait un système cohérent d'unités en prenant T en kg cm, L en cm, G en kg/cm² et J en cm⁴.

Il peut être utile de connaître l'angle de torsion par unité de longueur. Il est souvent appelé ϕ et est donné par $\phi = \theta/L = T/GJ$.

- 5.4. Etablir une relation entre le moment de torsion agissant sur un arbre en rotation, la puissance transmise et la vitesse angulaire supposée constante. Admettre que le comportement est totalement élastique.

Appelons T le moment de torsion agissant sur l'arbre, n la vitesse angulaire en tours/min et CH la puissance. Considérons ce qui se passe pendant une minute. Pendant cet intervalle de temps, le moment de torsion effectue un travail dont la quantité est donnée par le produit du moment par le déplacement angulaire en radians, soit : $T \cdot 2\pi n$. Si T est mesuré en kg.cm, le travail est exprimé dans les mêmes unités. Par définition, si le travail est fait au taux de 7 500 kg.cm par seconde = 60 . 7 500 = 450 000 kg.cm/min, il est équivalent à un cheval. La puissance transmise par l'arbre est donc :

$$CH = \frac{T \cdot 2\pi n}{450\,000} \quad \text{d'où} \quad T = \frac{71\,600 \cdot CH}{n}$$

où n est exprimé en tours/min et T en kg.cm.

- 5.5. Quelle est la contrainte de cisaillement maximale produite dans un arbre de 45 mm de diamètre par un moment de torsion de 10 000 kg.cm ? Quel est l'angle de torsion pour une longueur de l'arbre de 1,20 m ? Le matériau est l'acier pour lequel $G = 8,4 \cdot 10^5$ kg/cm². Le comportement est totalement élastique.

D'après le problème 5.1, le moment d'inertie polaire de la section est :

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D_c)^4 = \frac{\pi}{32} (4,5)^4 = 40,2 \text{ cm}^4$$

On a trouvé dans le problème 5.2 que la contrainte de cisaillement en torsion τ à une distance ρ du centre de l'arbre était donnée par $\tau_\rho = \frac{T \rho}{J}$. La contrainte maximale de cisaillement se produit dans les fibres extérieures, soit ici pour $\rho = 2,25$ cm :

$$(\tau)_{\max} = \frac{10\,000(2,25)}{40,2} = 560 \text{ kg/cm}^2$$

Donc, la contrainte de cisaillement varie linéairement depuis zéro au centre de l'arbre jusqu'à 560 kg/cm² dans les fibres extérieures, comme le montre la Fig. 5-11.

L'angle de torsion θ sur une longueur de 1,20 m de l'arbre est :

$$\theta = \frac{TL}{GJ} = \frac{10\,000(120)}{8,4 \times 10^5(40,2)} = 0,0355 \text{ radians}$$

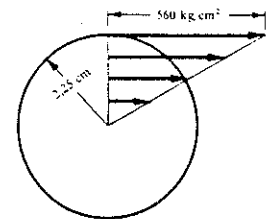


Fig. 5-11

- 5.6. Considérons un arbre cylindrique plein et un autre arbre cylindrique creux de diamètre intérieur égal aux 3/4 du diamètre extérieur. Comparer les poids de longueurs égales de ces deux arbres nécessaires pour transmettre une charge de torsion donnée, sous la condition que les contraintes maximales développées dans les deux arbres soient égales. Le comportement est totalement élastique.

Pour l'arbre plein de diamètre d la contrainte de cisaillement est donnée par $\tau_\rho = \frac{T \rho}{J}$ et la contrainte maximale de cisaillement se produit dans les fibres extérieures où $\rho = d/2$. De là :

$$\tau_{\max} = \frac{T(d/2)}{(\pi/32)d^4} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad \text{ou} \quad \frac{T}{\tau_{\max}} = \frac{\pi d^3}{16}$$

Pour l'arbre creux de diamètre extérieur D , la contrainte maximale de cisaillement se produit également dans les fibres extérieures où $\rho = D/2$. Donc :

$$\tau_{\max} = \frac{T(D/2)}{\frac{\pi}{32} [D^4 - (d^4)]} = \frac{16T}{\pi(0,684)D^3} \quad \text{ou} \quad \frac{T}{\tau_{\max}} = \frac{\pi(0,684)D^3}{16}$$

Mais le rapport $T/\tau_{\max}$ est le même pour les deux arbres, donc : $0,684 D^3 = d^3$ ou $D = 1,135 d$. Ainsi :

$$\text{rapport des poids} = \frac{D^2 - (3D/4)^2}{d^2} = \frac{0,4375D^2}{d^2} = \frac{0,4375(1,135d)^2}{d^2} = 0,563$$

Le poids de l'arbre creux ne représente que 56,3 % du poids de l'arbre plein, ce qui illustre l'intérêt du remplacement des arbres pleins par des arbres creux.

- 5.7. Un arbre creux en acier de 3 m de long doit transmettre un couple de 250 000 kg.cm. L'angle total de torsion sur cette longueur ne doit pas dépasser $2,5^\circ$ et la contrainte de cisaillement admissible est de 850 kg/cm². Calculer les diamètres intérieur et extérieur de l'arbre pour $G = 8,5 \cdot 10^5$ kg/cm². Le comportement est élastique.

Soit d_e le diamètre extérieur et d_i le diamètre intérieur de l'arbre. D'après le problème 5.3, l'angle de torsion θ est donné par $\theta = TL/GJ$ où θ est exprimé en radians. Par conséquent, sur une longueur de 3 m, on a

$$2,5 \text{ degrés} \times \frac{1 \text{ rad}}{57,3 \text{ degrés}} = \frac{250.000(300)}{8,5 \times 10^5 \times \frac{\pi}{32} (d_e^4 - d_i^4)} \quad \text{d'où} \quad d_e^4 - d_i^4 = 20.600$$

La contrainte maximale de cisaillement se produit dans les fibres extérieures où $\rho = d_e/2$. Alors :

$$(\tau)_{\max} = \frac{T(d_e/2)}{\frac{\pi}{32} (d_e^4 - d_i^4)} \quad 850 = \frac{250.000(d_e/2)}{\frac{\pi}{32} (d_e^4 - d_i^4)} \quad \text{et} \quad d_e^4 - d_i^4 = 1.498 d_e^4$$

Ainsi : $1.498 d_e = 20.600$ et $d_e = 13,75$ cm. En substituant : $d_i = 11,1$ cm

- 5.8. Considérons un tube à paroi mince sollicité en torsion. Etablir une expression approchée du moment admissible de torsion pour une contrainte pratique en cisaillement τ_w constante. Etablir également une expression approchée du rapport résistance-poids d'un tel tube. On admet que le tube ne flambe pas et que le matériau présente un comportement élastique.

Le moment d'inertie polaire d'un arbre cylindrique creux de diamètre extérieur D_e et le diamètre intérieur D_i est $J = \frac{\pi}{32} (D_e^4 - D_i^4)$. En appelant R le rayon extérieur du tube, $D_e = 2R$ et en notant t l'épaisseur de la paroi, $D_i = 2R - 2t$. Le moment d'inertie polaire peut donc être écrit sous la forme :

$$J = \frac{\pi}{32} [(2R)^4 - (2R - 2t)^4] = \frac{\pi}{2} [R^4 - (R - t)^4] = \frac{\pi}{2} (4R^3t - 6R^2t^2 + 4Rt^3 - t^4)$$

Puisque nous considérons qu'il s'agit d'un tube à paroi mince, nous pouvons négliger les carrés et les puissances supérieures du rapport t/R et l'expression devient approximativement $J = 2\pi R^3t$.

La formule ordinaire de la torsion est $T = \tau_w J/R$. Pour un tube à paroi mince, elle devient $T = 2\pi R^2t\tau_w$, ce qui est le moment de torsion admissible.

Le poids W du tube est $W = \gamma LA$, où γ est le poids volumique du matériau, L la longueur du tube et A sa section. La surface est donnée par :

$$A = \pi[R^2 - (R - t)^2] = \pi(2Rt - t^2) = \pi R^2[2t/R - (t/R)^2]$$

En négligeant de nouveau le carré du rapport t/R puisque le tube est mince, cette expression devient $A = 2\pi Rt$.

Le rapport résistance/poids est défini par T/W . Il vaut :

$$\frac{T}{W} = \frac{2\pi R^2t\tau_w}{2\pi RtLy} = \frac{R\tau_w}{Ly}$$

Ce rapport a une importance considérable dans les projets d'avion.

- 5.9. Un arbre cylindrique plein présente une légère conicité. Appelons a le diamètre de sa petite extrémité et b celui de sa grande base. Calculer l'erreur commise dans le calcul de l'angle de torsion sur une longueur donnée en utilisant le rayon moyen de l'arbre. Le rayon de la grande base est 1,2 fois celui de la petite base.

Notons x la distance comptée à partir de la petite base. Le rayon d'une section située à une distance x de la petite base est :

$$r = a + \frac{(b-a)x}{L}$$

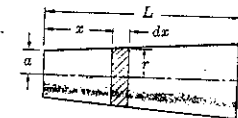


Fig. 5-12

où L est la longueur de l'arbre.

A condition que l'angle de conicité soit faible, il suffit

de considérer l'angle $d\theta$ de torsion de l'élément hachuré de longueur dx et de rayon $r = a + \frac{(b-a)x}{L}$. Pour un tel élément, le moment d'inertie polaire est :

$$J = \frac{\pi}{32} D^4 = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{2} \left[a + \frac{(b-a)x}{L} \right]^4$$

Ainsi

$$d\theta = \frac{T dx}{G \frac{\pi}{2} \left[a + \frac{(b-a)x}{L} \right]^4}$$

L'angle de torsion sur une longueur L s'obtient en intégrant la dernière équation. Ainsi :

$$\theta = \frac{2T}{G\pi} \int_0^L \frac{dx}{\left[a + \frac{(b-a)x}{L} \right]^4} = \frac{2T}{G\pi} \left(-\frac{1}{3} \right) \left(\frac{L}{b-a} \right) \left[\frac{1}{\left[a + \frac{(b-a)x}{L} \right]^3} \right]_0^L = \frac{2TL}{3G\pi(b-a)} \left(-\frac{1}{b^3} + \frac{1}{a^3} \right)$$

Si $b = 1,2a$, ceci devient : $\theta = 1,40433TL/G\pi a^4$. Pour un arbre plein de rayon $1,1a$:

$$\theta_1 = \frac{TL}{G \frac{\pi}{2} (1,1a)^4} = \frac{1,36602TL}{G\pi a^4}$$

En utilisant ces valeurs de θ et de θ_1 , on trouve :

$$\text{pourcentage d'erreur} = \frac{0,03831}{1,40433} \cdot 100 = 2,73 \%$$

- 5.10. Un arbre cylindrique plein a un diamètre constant de 5 cm et une longueur de 3 m. A l'aide d'une courroie passant sur une poulie fixée au milieu de l'arbre, on fournit une

Le schéma de corps libre de la région de gauche de longueur L_1 à l'aspect de la Fig. 5-16(a). En passant de la gauche à la droite de l'arbre, le moment de torsion dans la région centrale de longueur L_2 est donné par la somme algébrique des couples à gauche de cette section, c'est-à-dire $T_1 - T_L$; le schéma de corps libre de cette région est reproduit dans la Fig. 5-16(b). Enfin le schéma de corps libre de la région de droite de longueur L_3 à l'aspect de la Fig. 5-16(c).

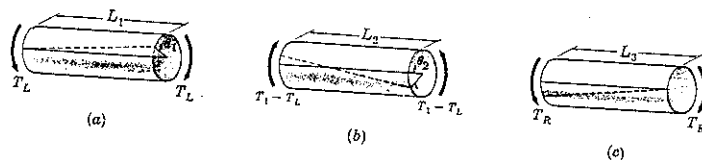


Fig. 5-16

Soit θ_1 l'angle de torsion au point d'application de T_1 et θ_2 l'angle pour T_2 . En considérant les régions de longueurs L_1 et L_3 , on a immédiatement :

$$\theta_1 = \frac{T_L L_1}{GJ} \quad (2)$$

$$\theta_2 = \frac{T_R L_3}{GJ} \quad (3)$$

La position initiale de la génératrice sur la surface de l'arbre est représentée par une ligne en trait plein dans la Fig. 5-16 et sa position après déformation par une ligne discontinue. En considérant la région centrale de longueur L_2 , on voit que l'angle de torsion de la partie droite par rapport à la partie gauche est $\theta_1 + \theta_2$. Puisque le couple produisant cette déformation a pour valeur $T_1 - T_L$, on a :

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{(T_1 - T_L)L_2}{GJ} \quad (4)$$

En résolvant l'équation (1) avec l'équation (4), on trouve :

$$T_L = T_1 \frac{L_2 + L_3}{L} - T_2 \frac{L_3}{L} \quad \text{et} \quad T_R = -T_1 \frac{L_1}{L} + T_2 \frac{L_1 + L_2}{L}$$

Il est intéressant d'examiner le comportement d'une génératrice de la surface de l'arbre. A l'origine, c'était naturellement une droite sur toute la longueur L , tandis qu'après l'application des couples T_1 et T_2 , elle a l'aspect représenté par la ligne brisée de la Fig. 5-17.

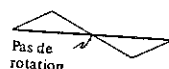


Fig. 5-17

- 5.13 Soit un arbre composite constitué par un barreau plein en alliage d'aluminium de 5 cm de diamètre de module $G = 2,8 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ placé à l'intérieur d'un arbre cylindrique creux en acier de 6,5 cm de diamètre extérieur et de 5 cm de diamètre intérieur de module $G = 8,4 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$. Les deux métaux sont rigidement liés en leur zone de contact. Cet arbre est chargé par un moment de torsion de 14000 kg.cm. Calculer la contrainte de cisaillement sur les fibres extérieures de l'acier et sur les fibres extérieures de l'aluminium. Le comportement est élastique.

Appelons T_1 le couple supporté par l'arbre en aluminium et T_2 le couple supporté par l'acier. L'équilibre statique des moments autour de l'axe géométrique donne :

$$T_1 + T_2 = T = 14000$$

où T est le moment de torsion appliqué extérieurement. C'est la seule équation à partir de la statique dont on dispose dans ce problème. Comme elle contient deux inconnues T_1 et T_2 , il est nécessaire de la compléter à l'aide d'une équation tirée des déformations de l'arbre. La structure est donc statiquement indéterminée.

Il est facile de poser une telle équation, puisque les deux matériaux sont liés rigidement ; leurs angles de torsion doivent être égaux. En partant de la formule $\theta = TL/GJ$, nous avons sur une longueur L de l'arbre :

$$\frac{T_1 L}{2,8 \times 10^5 \frac{\pi}{32} (5)^4} = \frac{T_2 L}{8,4 \times 10^5 \frac{\pi}{32} [(6,5)^4 - (5)^4]} \quad \text{ou} \quad T_1 = 0,18 T_2$$

En résolvant cette équation avec l'équation statique, on obtient :

$$T_1 = 2140 \text{ kg.cm (porté par l'aluminium)} \quad \text{et} \quad T_2 = 11860 \text{ kg.cm (porté par l'acier)}$$

La contrainte de cisaillement des fibres extrêmes de l'acier est :

$$(\tau)_2 = \frac{11860(3,25)}{\frac{\pi}{32} [(6,5)^4 - (5)^4]} = 340 \text{ kg/cm}^2.$$

et la contrainte de cisaillement portée par l'aluminium est :

$$(\tau)_1 = \frac{2140(2,5)}{\frac{\pi}{32} (5)^4} = 90 \text{ kg/cm}^2.$$

- 5.14. Soit un barreau cylindrique plein sollicité en torsion. Le matériau est considéré comme élastique-totalement plastique. Le diagramme de contrainte de cisaillement-déformation a donc l'aspect représenté dans la Fig. 5-18(a). Calculer la distance à partir du centre pour laquelle commence l'écoulement plastique dû au moment de torsion. Calculer aussi le moment de torsion avec un comportement totalement plastique de la section.

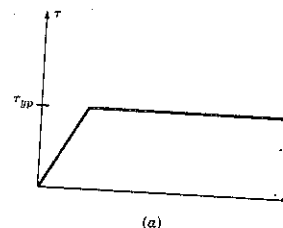
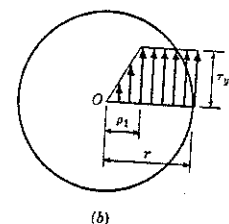


Fig. 5-18



Bien que la torsion du barreau ait fait céder la portion extérieure, on peut encore avec réalisme admettre que les sections planes du barreau normales à l'axe avant application de la charge restent planes après application des couples et, en outre, qu'un diamètre avant la déformation reste un diamètre ou une droite après la déformation. En conséquence, les déformations de cisaillement des fibres longitudinales varient linéairement en fonction de la distance à l'axe du barreau.

Supposons que le comportement plastique commence à une distance ρ_1 de l'axe du barreau, de sorte que la distribution des contraintes est celle représentée dans la Fig. 5-18(b). Ainsi, les contraintes de cisaillement varient linéairement depuis l'axe jusqu'au point ρ_1 en fonction de la distance de la fibre au centre. Après ce point, elles sont constantes et égales au seuil de plasticité en cisaillement.

De la Fig. 5-18(b), on a pour $\rho < \rho_1$:

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\tau_{yp}}{\rho_1} \quad \text{ou} \quad \tau = \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right) \tau_{yp}$$

et pour $\rho > \rho_1$: $\tau = \tau_{yp} = \text{constante}$. Le moment de torsion est donc :

$$T = \int_0^r \tau \rho \, dA$$

où dA se rapporte à l'élément annulaire de la Fig. 5-9 du problème 5.2. En utilisant les valeurs ci-dessus de contrainte de cisaillement dans la région intérieure élastique et dans la région extérieure plastique, on a :

puissance de 65 ch. Cette puissance est utilisée pour entraîner deux machines, l'une à l'extrémité de gauche de l'arbre qui consomme une puissance de 25 ch et l'autre à l'extrémité de droite qui consomme les 40 ch restant. Calculer la contrainte de cisaillement maximale dans l'arbre, ainsi que l'angle de torsion relatif entre les deux extrémités de l'arbre. La vitesse de rotation de l'arbre est de 200 tours/min et il est construit en acier pour lequel $G = 8,4 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$. Le comportement est élastique.

Dans la moitié de gauche de l'arbre nous avons 25 ch, ce qui correspond à un couple T_1 donné par :

$$T_1 = \frac{71.600 \times \text{CH}}{n} = \frac{71.600(25)}{200} = 8.950 \text{ kg-cm}$$

De même, dans la moitié de droite, nous avons 40 ch, ce qui correspond à un couple T_2 donné par :

$$T_2 = \frac{71.600(40)}{200} = 14.320 \text{ kg-cm}$$

La contrainte de cisaillement maximale se produit donc dans les fibres extérieures de la moitié de droite et est donnée par la formule ordinaire de la torsion :

$$\tau_c = \frac{T_2}{J} \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{14.320(2,5)}{\frac{\pi}{32}(5)^4} = 583 \text{ kg/cm}^2$$

Les angles de torsion des extrémités de gauche et de droite par rapport à l'axe sont respectivement

$$\theta_1 = \frac{8.950(150)}{8,4 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(5)^4} = 0,0260 \text{ rad.} \quad \theta_2 = \frac{14.320(150)}{8,4 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(5)^4} = 0,0417 \text{ rad.}$$

Puisque θ_1 et θ_2 sont dans le même sens, l'angle relatif de torsion entre les deux extrémités de l'arbre est :

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = 0,0417 - 0,0260 = 0,0157 \text{ rad}$$

- 5.11. Considérons deux arbres cylindriques pleins accouplés par des roues dentées de 5 cm et de 25 cm de diamètre primitif, Fig. 5-13(a). On admet que les arbres sont maintenus par des paliers de manière à ne subir aucune flexion. Calculer la rotation angulaire de D, extrémité de droite d'un des arbres par rapport à A, extrémité de gauche de l'autre arbre, lorsque un couple de 2500 kg.cm est appliqué en D. L'arbre de gauche est en acier pour lequel $G = 8,4 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ et celui de droite est en bronze, pour lequel $G = 3,5 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$. Les métaux ont un comportement élastique.

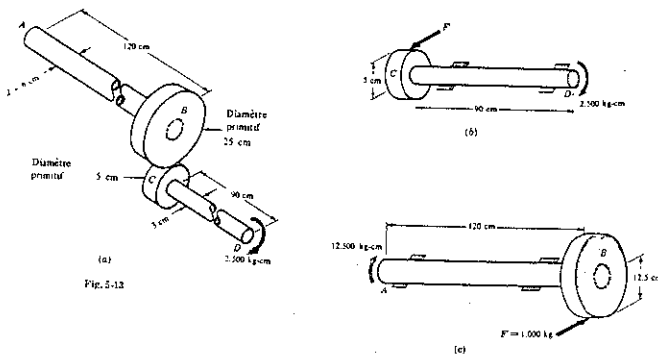


Fig. 5-13

Un schéma de corps libre de l'arbre de droite, Fig. 5-13(b) montre qu'une force tangentielle F doit agir sur le plus petit pignon. Pour l'équilibre, $F = 2500/2,5 = 1000 \text{ kg}$.

L'angle de torsion de l'arbre de droite est :

$$\theta_1 = \frac{TL}{GI_p} = \frac{2.500(90)}{3,5 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(3)^4} = 0,0808 \text{ rad.}$$

Un schéma de corps libre de l'arbre de gauche est représenté dans la Fig. 5-13(c). La force F est égale et en sens opposé à celle agissant sur le petit pignon en C. Cette force est appliquée à 12,5 cm de l'axe de l'arbre de gauche ; elle impose donc sur l'arbre AB un couple $12,5(1000) = 12.500 \text{ kg-cm}$. Ce couple produit une rotation de l'extrémité B par rapport à l'extrémité A égale à θ_2 :

$$\theta_2 = \frac{12.500(120)}{8,4 \times 10^5 \frac{\pi}{32}(6)^4} = 0,0140 \text{ rad.}$$

Il faut noter soigneusement que cet angle de rotation θ_2 produit une rotation d'ensemble de l'arbre entier CD du fait de la présence de l'engrenage. La rotation de CD par rapport à AB est dans le rapport des diamètres primitifs, soit 5:1. Une rotation d'ensemble de $5(0,0140) \text{ rad}$ est donc imposée à l'arbre CD. A ce mouvement d'ensemble de CD est superposé le déplacement angulaire de D par rapport à C noté précédemment θ_1 .

L'angle résultant de torsion de D par rapport à A est donc : $\theta = (5)(0,0140) + 0,0808 = 0,151 \text{ rad}$

- 5.12. Déterminer les couples de réaction aux extrémités fixées de l'arbre cylindrique soumis aux couples représentés dans la Fig. 5-14(a). L'arbre a une section constante sur toute sa longueur et présente un comportement élastique.

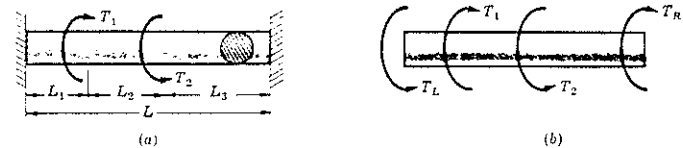


Fig. 5-14

Les couples de réaction T_L et T_R sont supposés positifs dans les directions représentées dans la Fig. 14(b). D'après la statique :

$$T_L - T_1 + T_2 - T_R = 0 \quad (1)$$

C'est la seule équation d'équilibre statique et elle contient deux inconnues. Le problème est donc statiquement indéterminé et il est nécessaire d'ajouter une autre équation basée sur les déformations du système.

La variation du couple avec la longueur de l'arbre peut être représentée par le tracé de la Fig. 5-15.

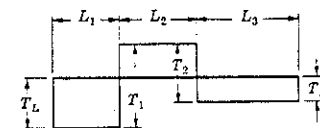


Fig. 5-15

$$T = \int_0^{\rho_1} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right) \tau_{yp} \rho d\rho + \int_{\rho_1}^r \tau_{yp} \rho d\rho = \frac{\tau_{yp}}{\rho_1} \int_0^{\rho_1} \rho^2 d\rho + \tau_{yp} \int_{\rho_1}^r \rho d\rho$$

$$= \frac{\tau_{yp}}{\rho_1} \int_0^{\rho_1} \rho^2 2\pi \rho d\rho + \tau_{yp} \int_{\rho_1}^r \rho 2\pi \rho d\rho = \tau_{yp} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) \rho_1^3 + \frac{2\pi}{3} \tau_{yp} r^3$$

En résolvant par rapport à ρ_1 :

$$\rho_1 = \left[4r^3 - \frac{6T}{\pi \tau_{yp}} \right]^{1/3} \quad (1)$$

qui est la distance à partir du centre pour laquelle commence l'écoulement plastique. Pour obtenir le comportement totalement plastique $\tau = \tau_{yp}$ en tous les points de la section, nous devons poser $\rho_1 = 0$ ce qui donne pour le moment de torsion totalement plastique T_p :

$$T_p = \frac{8}{3} \pi r^3 \tau_{yp} \quad (2)$$

Le moment de torsion élastique maximal possible T_e peut être obtenu à partir du problème 5.2, si les fibres extérieures du barreau sont contraintes au seuil de plasticité et si les fibres intérieures sont alors toutes dans le domaine élastique :

$$T_e = \frac{\tau_{yp}}{2} \pi r^3 \quad (3)$$

La comparaison des équations (2) et (3) montre que $T_p = 4 T_e/3$. Avec un comportement totalement plastique, on peut donc appliquer un moment de torsion supérieur de 33 1/3 % au moment de torsion qui produit un commencement de comportement plastique sur les fibres extérieures.

- 5.15. Considérons un tube fermé long à paroi mince de section de forme quelconque sollicité en torsion, comme le montre la Fig. 5-19(a). L'épaisseur de la paroi est variable dans la périphérie, mais constante le long des génératrices du tube. Déterminer la variation du flux de cisaillement dans ce tube.

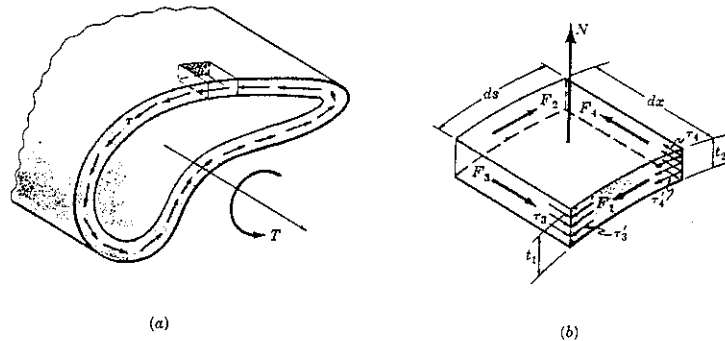


Fig. 5-19

Contrairement aux sections circulaires étudiées jusqu'ici, les sections de ce tube peuvent gauchir pendant la déformation, c'est-à-dire se déformer hors des plans initialement normaux à l'axe longitudinal du tube. Nous admettrons qu'il n'y a aucune entrave à ce gauchissement, de sorte qu'il n'apparaît pas de contraintes normales longitudinales. Comme le tube est à paroi mince, il est logique d'admettre que la contrainte de cisaillement est tangente à la ligne médiane entre les surfaces intérieure et extérieure et de plus qu'elle est constante dans l'épaisseur. La contrainte de cisaillement a alors l'aspect montré dans la Fig. 5-19(a).

Isolons un élément infiniment petit du tube, comme le montre la Fig. 5-19(b). Une force de torsion F_1 agit sur la face antérieure, comme indiqué et une force contraire F_2 sur la face postérieure. Il existe également des forces de cisaillement F_3 et F_4 , agissant le long des faces longitudinales, comme le montre la figure. Comme le gauchissement est libre, l'élément est en équilibre sous la seule action de ces forces. Pour l'équilibre tangentiel, on a $F_1 = F_2$ et pour l'équilibre longitudinale $F_3 = F_4$. En admettant que toutes les contraintes de cisaillement sont constantes dans l'épaisseur de la paroi mince et en posant τ_3 pour la contrainte de cisaillement correspondant à F_3 et τ_4 pour celle correspondant à F_4 , on a :

$$\tau_3 t_1 = \tau_4 t_2 \quad (1)$$

Les contraintes de cisaillement dans les coins de la face antérieure sont désignés par τ'_3 et τ'_4 , comme le montre la Fig. 5-19(b). Des contraintes opposées existent sur la face postérieure, mais ne sont pas représentées. Une équation d'équilibre des moments autour de l'axe N normal à la surface de l'élément montre que $\tau_3 = \tau'_3$ et que $\tau_4 = \tau'_4$, c'est-à-dire que les contraintes de cisaillement sur deux plans perpendiculaires passant par un point sont de grandeur égale. Ce fait est étudié avec plus de détail dans le problème 8.17. L'équation (1) devient :

$$\tau'_3 t_1 = \tau'_4 t_2 \quad (2)$$

Le produit de la contrainte de cisaillement par l'épaisseur est donc constant dans ce tube. Ce produit est appelé *flux de cisaillement* et est habituellement désigné par le symbole q , c'est-à-dire que $q = \tau t$. Ainsi le flux de cisaillement est constant pour un tube à paroi mince soumis à la torsion, bien que la paroi du tube ait une épaisseur variable.

Le flux de cisaillement est effectivement la force de cisaillement par unité de longueur d'arc le long de la périphérie du tube et a pour dimension une force par unité de longueur.

- 5.16. Calculer le moment de torsion agissant sur un tube fermé à paroi mince de section de forme quelconque en fonction du flux de cisaillement et des caractéristiques géométriques de la section.

Prenons également la section transversale définie dans le problème 5.15 et calculons le moment autour d'un point quelconque O de la force de cisaillement F_1 agissant sur l'élément infiniment petit représenté dans la Fig. 5-19(b). La force F_1 peut être exprimée par $F_1 = q ds$, où q est le flux de cisaillement, c'est-à-dire la force de cisaillement par unité de longueur de périphérie. La Fig. 5-20 donne une vue le long de l'axe géométrique.

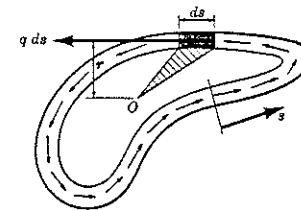


Fig. 5-20

Le moment de torsion autour du point O de la force de cisaillement $q ds$ sur l'élément est donné par $dT = r q ds$. Le moment résultant de toutes ces forces de cisaillement agissant sur la section est :

$$T = q \oint r ds \quad (1)$$

Dans cette équation, nous avons pu porter hors de l'intégrale le flux de cisaillement, puisque dans le problème 5.15, il a été démontré qu'il est constant dans le cas d'un tube à paroi mince sollicité en torsion.

Mais le produit rds est le double de la surface du triangle hachuré de base ds et de hauteur r . Donc l'intégrale de l'équation (1) est tout simplement le double de la surface enclose par la ligne médiane du tube. Cette expression appelée loi de Bredt s'écrit :

$$T = 2Aq \quad (2)$$

où A est la surface enclose par la ligne médiane du tube. Il faut souligner qu'il ne s'agit pas de la surface de la périphérie sur laquelle agissent les forces telles que qds . L'équation (2) s'applique seulement dans le cas où la périphérie est continue, c'est-à-dire qu'il ne faut pas que le tube présente des fentes longitudinales.

- 5.17 Calculer l'angle de torsion par unité de longueur d'un tube fermé à paroi mince de section de forme quelconque, en fonction du moment de torsion, du module de cisaillement et des caractéristiques géométriques de la section.

Contrairement au cas comportant une symétrie du problème 5.1, les déformations de cisaillement dans un tel tube ne varient pas linéairement en fonction de la distance de l'élément à l'axe géométrique. Il est préférable de traiter ce problème en partant du principe de la conservation de l'énergie. Examinons la distorsion de l'élément de la Fig. 5-19(b) du problème 5.15. La Fig. 5-21 représente une vue de l'élément déformé le long de l'axe N . La déformation par cisaillement est ici aussi notée γ . Dans le présent problème, il suffit de considérer l'épaisseur t de l'élément comme constante. La seule force dont le travail produit la configuration représentée est la force de cisaillement sur la face inférieure de l'élément. Cette force a une valeur initiale nulle et une valeur finale de τdx , puisque sa valeur moyenne est $(\tau/2)t dx \gamma ds$. Mais puisque $G = \tau/\gamma$, le travail effectué par l'ensemble de telles forces sur la périphérie du tube par unité de longueur est :

$$\oint \frac{\tau^2}{2G} t ds \quad \text{ou} \quad \oint \frac{(\tau t)^2}{2G} \frac{ds}{t}$$

Mais nous savons d'après le problème 5.15 que $q = \tau t$ est constant, il peut donc être pris constant dans l'intégrale, ce qui donne :

$$\frac{q^2}{2G} \oint \frac{ds}{t} \quad (1)$$

Le moment de torsion a une valeur initiale nulle et une valeur finale de T . Si θ représente l'angle de torsion par unité de longueur du tube, le travail fourni par le moment de flexion extérieur est simplement $T\theta/2$. En égalant au travail des forces internes donné par l'équation (1), on obtient :

$$\frac{T\theta}{2} = \frac{q^2}{2G} \oint \frac{ds}{t} \quad (2)$$

En substituant la valeur de q de la loi de Bredt du problème 5.16 et en résolvant pour θ , on obtient :

$$\theta = \frac{T}{4A^2G} \oint \frac{ds}{t} \quad (3)$$

où l'intégration est étendue à la périphérie du tube.

- 5.18 Calculer l'angle de torsion par unité de longueur du tube à paroi mince de section rectangulaire de la Fig. 5-22.

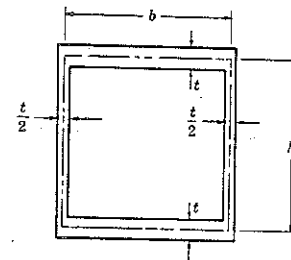


Fig. 5-22

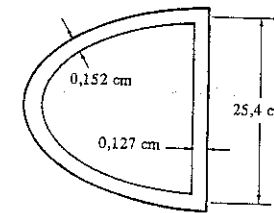


Fig. 5-23

L'angle cherché de torsion est donné par l'équation (3) du problème 5.17. La surface A est simplement bh , c'est-à-dire la surface enclose par la ligne médiane du tube. Dans toutes les parties droites, l'épaisseur de la paroi est constante et l'intégrale de l'équation (3) peut donc être remplacée par une addition. Nous avons donc :

$$\theta = \frac{T}{4A^2G} \oint \frac{ds}{t} = \frac{T}{4b^2h^2G} \left[\frac{2b}{t} + \frac{2h}{t/2} \right] = \frac{T(2b + 4h)}{4b^2h^2Gt}$$

- 5.19 Considérons la section à paroi mince de la Fig. 5-23, qui est le bord d'attaque d'une aile d'avion. La portion courbe a pour longueur 81 cm et la surface enclose est de 645 cm². Le matériau est un alliage d'aluminium 2024 T-4 pour lequel la contrainte de cisaillement admissible est de 700 kg/cm² et $G = 2,8 \cdot 10^5$ kg/cm². Calculer le moment de torsion admissible et aussi l'angle de torsion par unité de longueur correspondant au moment de torsion.

On a vu dans le problème 5.15 que le flux de cisaillement q a pour valeur $q = \tau t$. La contrainte de cisaillement admissible se trouve dans la région verticale et, en tenant compte de cette région, on voit que le flux de cisaillement a pour valeur :

$$q = \tau t = 700 \cdot 0,127 = 889 \text{ kg/cm}$$

La contrainte de cisaillement dans la partie courbe est également donnée par la même équation et est :

$$\tau_{\text{courbe}} = 889 / 0,152 = 5810 \text{ kg/cm}^2$$

Le moment de torsion admissible est donné par l'équation (2) du problème 5.16 et est :

$$T = 2Aq = 2(645)(889) = 114\,680 \text{ kg.cm}$$

L'angle de torsion par unité de longueur est obtenu à partir de l'équation (3) du problème 5.17. Il a pour valeur :

$$\theta = \frac{T}{4A^2G} \oint \frac{ds}{t} = \frac{114\,680}{4(645)^2 \cdot 2,8 \cdot 10^5} \left[\frac{81}{0,152} + \frac{25,4}{0,127} \right] = 0,00018 \text{ rad/cm}$$

Problèmes supplémentaires

- 5.20 Soit un arbre plein cylindrique de 30 mm de diamètre soumis à un couple T de 2500 kg.cm produisant un angle de torsion de 3,38 degrés sur une longueur de 1,5 m. Calculer le module de cisaillement du matériau. Rép. : $G = 8 \cdot 10^5$ kg/cm²
- 5.21 Soit un arbre cylindrique creux de 12,5 cm de diamètre extérieur et de 7,5 cm de diamètre intérieur. On a trouvé expérimentalement une contrainte de cisaillement des fibres intérieures de 600 kg/cm². Quelle est la valeur de la contrainte de cisaillement des fibres extérieures ? Rép. : 1000 kg/cm²

- 5.22 Calculer la contrainte de cisaillement maximale dans un arbre plein de 10 cm de diamètre soumis à un couple de 228000 kg.cm. Pour un acier avec $G = 8,4 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, quel est l'angle de torsion par unité de longueur ? *Rép.* : 1160 kg/cm², 0,000276 rad/cm
- 5.23 Calculer la puissance maximale en ch que peut transmettre un arbre plein en acier de 55 mm de diamètre à la vitesse de 250 tours/min, en admettant une contrainte pratique de 750 kg/cm² ? *Rép.* : 6,25 %
- 5.24 Un arbre d'hélice de navire a un diamètre de 35 cm. La contrainte pratique admissible en cisaillement est de 500 kg/cm² et l'angle de torsion admissible est de 1 degré sur 15 diamètres de longueur. Si $G = 8,4 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, calculer le couple maximal que peut transmettre l'arbre. *Rép.* : 4114000 kg.cm
- 5.25 Reprenons l'arbre du problème 5.24, mais alésé d'un trou de 17,5 cm sur toute sa longueur. Les données de contrainte pratique et d'angle de torsion restent les mêmes. De quel pourcentage est réduite la capacité de charge de torsion ? De quel pourcentage est réduit le poids de l'arbre ? *Rép.* : 6,25 %, 25 %
- 5.26 Calculer le diamètre d'un arbre plein en acier transmettant 200 ch à une vitesse de 250 tours/min en admettant une contrainte de cisaillement de 850 kg/cm². Déterminer également les dimensions d'un arbre creux en acier dont le diamètre intérieur est les trois quarts du diamètre extérieur pour les mêmes conditions. Quel est le rapport des angles de torsion par unité de longueur pour ces deux arbres ? *Rép.* : diamètre 7,00 cm diamètre extérieur 7,95 cm rapport 0,88.
- 5.27 Considérons un arbre plein cylindrique transmettant 1800 ch à 350 tours/min. Calculer le diamètre de l'arbre nécessaire pour que : (a) l'angle de torsion ne dépasse pas 1 degré sur une longueur de 20 diamètres et que (b) la contrainte de cisaillement ne soit pas supérieure à 650 kg/cm². L'arbre est en acier pour lequel $G = 8,4 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$. *Rép.* : 17,2 cm
- 5.28 Un arbre composite est constitué d'une barre pleine cylindrique de cuivre de 65 cm de longueur et de 10 cm de diamètre, assemblée à une barre cylindrique pleine d'acier de 80 cm de longueur et de 11,5 cm de diamètre. Un couple de 120000 kg.cm est appliqué à chaque extrémité de l'arbre. Calculer la contrainte de cisaillement maximale dans chaque matériau et l'angle total de torsion de l'arbre entier. Pour le cuivre $G = 4,2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, pour l'acier $G = 8,4 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$.
Rép. : dans le cuivre : 610 kg/cm², dans l'acier : 400 kg/cm², $\theta = 0,0256 \text{ rad}$
- 5.29 On peut considérer que l'arbre vertical de la Fig. 5-24 et les poulies qui sont clavetées dessus sont sans poids. L'arbre tourne avec une vitesse angulaire constante. Les efforts sur les poulies sont indiqués et les trois poulies sont clavetées rigidement sur l'arbre. En considérant que la contrainte pratique est égale à 530 kg/cm², calculer le diamètre nécessaire de l'arbre cylindrique plein. Négliger la flexion de l'arbre résultant de la proximité des poulies aux paliers. *Rép.* : 3,15 cm

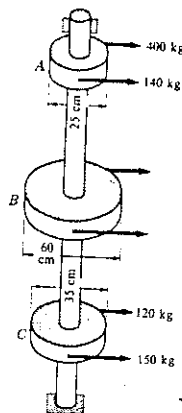


Fig. 5-24

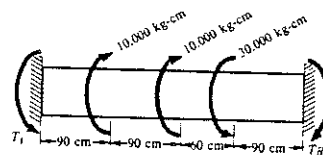


Fig. 5-25

- 5.30 Calculer les couples de réaction aux extrémités fixées de l'arbre cylindrique chargé par les trois couples représentés dans la Fig. 5-25. L'arbre a une section constante sur toute sa longueur.
Rép. : $T_1 = 3636 \text{ kg.cm}$, $T_D = 13636 \text{ kg.cm}$
- 5.31 Un arbre creux en acier a un diamètre extérieur de 10 cm et un diamètre intérieur de 8 cm. Calculer le couple maximal que l'arbre peut transmettre en comportement totalement plastique, en utilisant un matériau possédant un seuil de plasticité de 1540 kg/cm². *Rép.* : 197694 kg.cm
- 5.32 La section à paroi mince de la Fig. 5-26 est une portion d'aile d'avion. La contrainte de cisaillement admissible est de 630 kg/cm². Les quatre parties de cette section de boîte sont d'épaisseur uniforme et ont les valeurs indiquées. La section a une hauteur moyenne de 28,5 cm. Calculer le moment de torsion maximal pouvant être transmis ainsi que l'angle de torsion par cm de longueur de la section. Prendre $G = 2,8 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$.
Rép. : 482630 kg.cm, $0,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad/cm}$

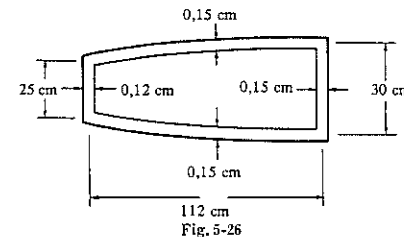


Fig. 5-26

CHAPITRE 6

Force de cisaillement et moment de flexion

DEFINITION D'UNE POUTRE

On appelle *poutre* une barre soumise à des forces ou à des couples situés dans un plan contenant l'axe longitudinal de la barre. Ces forces sont considérées comme agissant perpendiculairement à l'axe longitudinal.

POUTRES CANTILEVER

On appelle *poutre cantilever* une poutre maintenue à une extrémité seulement, mais de manière telle que son axe ne puisse pas pivoter en ce point. La Fig. 6.1 représente ce type de poutre. L'extrémité de gauche peut fléchir librement, tandis que l'extrémité de droite est maintenue rigidement. On dit habituellement que l'extrémité de droite est "encastrée". La réaction du mur qui encastre l'extrémité de droite de la poutre est une force verticale associée à un couple agissant dans le plan de la charge.

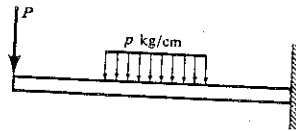


Fig. 6-1

POUTRES SIMPLES

Lorsqu'une poutre est supportée librement aux deux extrémités, on dit qu'il s'agit d'une *poutre sur appuis*. Le terme "supportée librement" implique que les appuis d'extrémités peuvent exercer seulement des forces sur la poutre à l'exclusion de moments. Il n'y a donc aucune restriction à la rotation des extrémités de la poutre sur les appuis pendant le fléchissement sous l'effet des charges. Les croquis de la Fig. 6-2. représentent deux poutres sur appuis.

Il faut observer que l'un des appuis au moins doit pouvoir se déplacer horizontalement pour qu'il n'existe aucune force en direction de l'axe de la poutre. Si aucune extrémité ne pouvait se déplacer horizontalement, il apparaîtrait dans la poutre une force axiale lors de la déformation sous charge. Les problèmes de cette nature ne font pas l'objet du présent ouvrage.

La poutre de la Fig. 6-2(a) est dite soumise à une force concentrée ; celle de la Fig. 6-2(b) soumise à une charge répartie uniformément ainsi qu'à un couple.

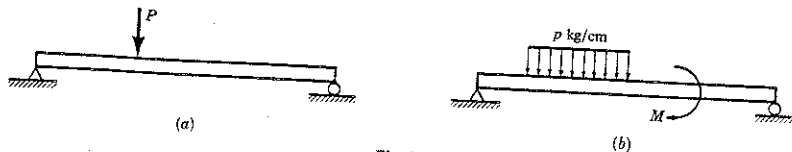


Fig. 6-2

POUTRES EN PORTE-A-FAUX

Une poutre supportée librement en deux points et dont une extrémité ou les deux s'étendent

au delà des appuis est dite *poutre en porte-à-faux* ; deux exemples sont donnés dans la Fig. 6-3.

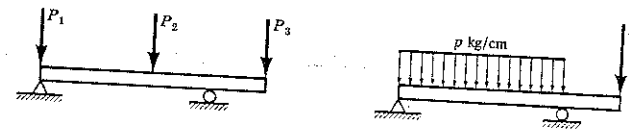


Fig. 6-3

POUTRES STATIQUEMENT DETERMINEES

Dans toutes les poutres définies ci-dessus, poutres cantilever, sur appuis ou en porte-à-faux, les réactions des supports peuvent être calculées à l'aide des équations de l'équilibre statique. La valeur de ces réactions est indépendante des déformations de la poutre. Ces types de poutre sont des poutres statiquement déterminées.

POUTRES STATIQUEMENT INDETERMINEES

Si le nombre de réactions exercées sur la poutre est supérieur à celui des équations de l'équilibre statique, il faut compléter ces équations par d'autres basées sur les déformations de la poutre. On dit dans ce cas que la poutre est statiquement indéterminée.

Une poutre cantilever sur appui à l'autre extrémité, Fig. 6-4 (a), une poutre rigidement fixée aux deux extrémités, Fig. 6-4 (b) ou une poutre reposant sur trois appuis ou davantage, Fig. 6-4 (c), sont toutes des exemples de poutres indéterminées. Ce type de poutre sera étudié dans le chapitre 12.

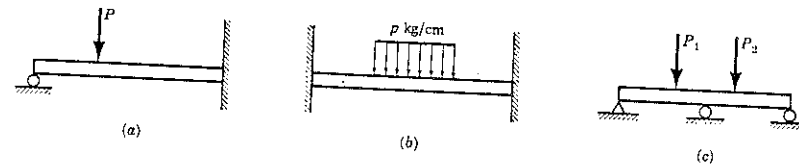


Fig. 6-4

TYPES DE CHARGES

Les charges habituellement appliquées sur une poutre peuvent consister en forces concentrées (appliquées en un point), en charges uniformément réparties, auquel cas leur grandeur est exprimée en un certain nombre de kg par cm de longueur de la poutre, ou encore en charges variant régulièrement. Un exemple de ce dernier type de poutre est représenté dans la Fig. 6-5.

Une poutre peut aussi être chargée par un couple. La grandeur de ce couple est habituellement exprimée en kg.m ou en kg.cm.

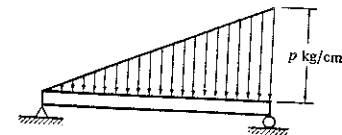


Fig. 6-5

Lorsqu'une poutre est sollicitée par des forces ou des couples, il apparaît des contraintes internes dans la poutre. Ce sont, en général des contraintes normales et des contraintes de cisaillement. Pour calculer la grandeur de ces contraintes en une section quelconque de la poutre, il est nécessaire de connaître la force résultante et le moment résultant agissant sur cette section. Ces grandeurs se calculent à l'aide des équations de l'équilibre statique.

Exemple 1.

Supposons que plusieurs forces concentrées agissent sur une poutre sur appuis comme le représente la Fig. 6-6.(a).

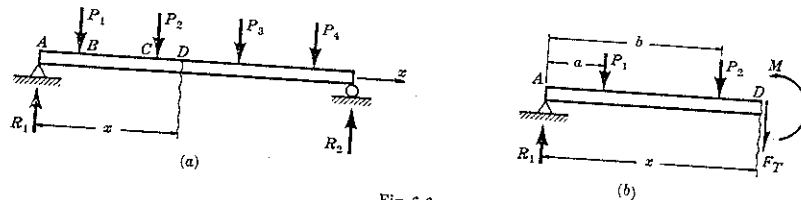


Fig. 6-6

On désire étudier les contraintes internes dans la section en D, située à une distance x de l'extrémité de gauche de la poutre. Pour le faire, imaginons que la poutre est coupée en D et que la partie de la poutre à droite de D est enlevée. Elle doit être remplacée par l'effet qu'elle exerce sur la partie à gauche de D. Cet effet consiste en une force verticale de cisaillement F_T et en un couple M représentés par des vecteurs dans le schéma de corps libre de la poutre, Fig. 6-6(b).

La force F_T et le couple M maintiennent en équilibre la portion de gauche de la poutre sur laquelle s'exercent les forces R_1 , P_1 et P_2 . Les quantités F_T et M sont considérées comme positives lorsqu'elles sont dans le sens indiqué sur la figure.

MOMENT RESISTANT

Le couple M représenté dans la Fig. 6-6(b) est appelé le *moment résistant* sur la section D. La grandeur de M peut se calculer à l'aide de l'équation statique qui pose que la somme des moments de toutes les forces autour d'un axe passant par D et perpendiculaires au plan de la figure est nulle. Ainsi :

$$\sum M_0 = M - R_1x + P_1(x-a) + P_2(x-b) = 0 \quad \text{ou} \quad M = R_1x - P_1(x-a) - P_2(x-b)$$

Le moment résistant M est donc le moment au point D engendré par les moments de la réaction en A et par les forces appliquées P_1 et P_2 . Le moment résistant M est le couple résistant dû aux contraintes réparties sur la section verticale en D. Ces contraintes agissent en direction horizontale et sont de tension en certaines parties de la section et de compression en d'autres. Leur nature sera étudiée en détail dans le chapitre 8.

CISAILLEMENT RESISTANT

La force verticale F_T représentée dans la Fig. 6.6(b) est appelée le *cisaillement résistant* dans la section D. Pour l'équilibre des forces en direction verticale, on a :

$$\sum F_v = R_1 - P_1 - P_2 - F_T = 0 \quad F_T = R_1 - P_1 - P_2$$

Cette force F_T est effectivement la résultante des contraintes de cisaillement distribuées sur la section verticale en D. La nature de ces contraintes sera étudiée dans le chapitre 8.

MOMENT DE FLEXION

La somme algébrique des moments des forces extérieures à un des côtés de la section D autour d'un axe passant par D est le *moment de flexion* en D. Il est représenté par :

$$R_1x - P_1(x-a) - P_2(x-b)$$

pour le mode de charge considéré ci-dessus. Cette quantité fait l'objet des problèmes 6.1 à 6.12. Ainsi le moment de flexion est en sens opposé du moment résistant, mais a même grandeur. On l'écrit habituellement aussi M . Dans les calculs, on emploie généralement de préférence le moment de flexion au moment résistant, car il peut être directement représenté en fonction des charges extérieures.

FORCE DE CISAILLEMENT

La somme algébrique de toutes les forces verticales sur un côté —le côté gauche par exemple— de la section est dit la *force de cisaillement* en cette section. La force de cisaillement est en sens opposé au cisaillement résistant, mais a même grandeur. Elle est habituellement notée F_T . Pour le type de charges ci-dessus, c'est : $R_1 - P_1 - P_2$. On s'en sert usuellement dans les calculs de préférence au cisaillement résistant. Cette grandeur fait l'objet des problèmes 6.1 à 6.12.

CONVENTIONS DE SIGNE

Les conventions de signe usuelles pour la force de cisaillement et le moment de flexion sont représentées dans la Fig. 6-7.

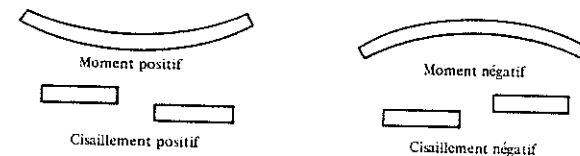


Fig. 6-7

Une force qui tend à fléchir la poutre en donnant une concavité vers le haut est dite produire un moment de flexion positif. Une force qui tend à donner du cisaillement dans la partie de gauche et la poutre vers le haut par rapport à la partie de droite est dite produire une force de cisaillement positive.

Une méthode plus simple pour déterminer le signe algébrique du moment sur une section donnée est de dire que les forces extérieures dirigées vers le haut produisent des moments de flexion positifs et les forces dirigées vers le bas donnent des moments négatifs.

EQUATIONS DE CISAILLEMENT ET DE MOMENT

Il est commode et habituel d'introduire un système de coordonnées dans la poutre ayant son origine à une extrémité de la poutre. Il est désirable de connaître la force de cisaillement et le moment de flexion en toutes les sections le long de la poutre et, dans ce but, on écrit deux équations, l'une exprimant la force de cisaillement F_T en fonction de la distance, x par exemple, à partir d'une extrémité de la poutre, l'autre donnant le moment de flexion M en fonction de x .

DIAGRAMMES DE LA FORCE DE CISAILLEMENT ET DU MOMENT DE FLEXION

Les courbes représentant ces équations de F_T et de M sont dites les diagrammes de la force de cisaillement et du moment de flexion. Dans ces courbes, l'abscisse (horizontale) donne la position de la section le long de la poutre et l'ordonnée (verticale) représente les valeurs de la force

de cisaillement et du moment de flexion. Ces diagrammes fournissent donc une représentation graphique de la variation de la force de cisaillement et du moment de flexion pour toute section le long de la poutre. Ils sont commodes pour la détermination de la valeur maximale de chacune de ces grandeurs.

RELATIONS ENTRE L'INTENSITE DE LA CHARGE, LA FORCE DE CISAILLEMENT ET LE MOMENT DE FLEXION

La Fig. 6-8 représente une poutre sur appuis portant une charge à distribution variable exprimée par $p(x)$. Prenons un système de coordonnées avec l'origine à l'extrémité de gauche A et notons par x les distances des sections de la poutre.

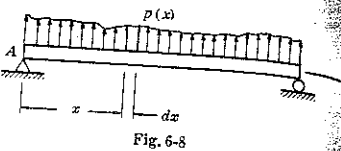


Fig. 6-8

Pour toute valeur de x , la relation entre la charge $p(x)$ et la force de cisaillement F_T est :

$$p = \frac{dF_T}{dx}$$

et la relation entre la force de cisaillement et le moment de flexion M est :

$$F_T = \frac{dM}{dx}$$

Ces relations sont établies dans le problème 6.1. Pour les applications, voir les problèmes 6.4 et 6.8 à 6.12.

FONCTIONS DE SINGULARITE

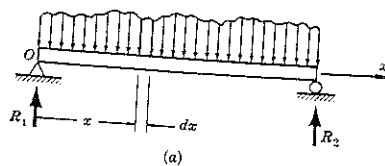
Pour faciliter la solution de problèmes comportant des forces concentrées et des moments, introduisons la fonction :

$$f_n(x) = (x-a)^n$$

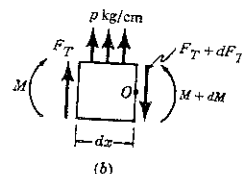
où la quantité entre parenthèses angulaires est nulle pour $x < a$ et a la valeur usuelle $(x-a)$ pour $x > a$, dans le cas où $n > 0$. C'est la *fonction de singularité* ou *fonction à domaine limité*. Donc si l'argument est positif, les parenthèses angulaires se comportent comme des parenthèses ordinaires. Le problème 6.7 illustre cette fonction pour certaines valeurs de n qui servent à représenter les types de charge de poutre les plus courants. Pour les applications, voir les problèmes 6.8 à 6.12.

Problèmes résolus

- 6.1 Etablir la relation entre l'intensité de la charge, la force de cisaillement et le moment de flexion en tout point d'une poutre.



(a)



(b)

Fig. 6-9

Considérons une poutre portant un type quelconque de charge transversale de la forme générale de la Fig. 6-9(a). Elle est représentée sur appuis, mais les considérations suivantes sont valables pour tous les types de poutre. Isolons de la poutre l'élément de longueur dx et traçons un schéma de corps libre. La force de cisaillement F_T agit sur le côté gauche de l'élément et, en traversant dx , la force de cisaillement change en général légèrement et devient $F_T + dF_T$. Le moment de flexion M s'exerce sur le côté gauche de l'élément et devient $M + dM$ sur le côté droit. Puisque l'élément dx est extrêmement petit, on peut admettre que la charge appliquée sur la poutre est uniforme et égale à p kg/cm. Le schéma de corps libre de cet élément a donc l'aspect de la Fig. 6-9(b). Pour l'équilibre des moments autour de O , on a :

$$\Sigma M_O = M - (M + dM) + F_T dx + p dx (dx/2) = 0 \quad \text{ou} \quad dM = F_T dx + \frac{1}{2} p (dx)^2$$

Comme le dernier terme est le produit de deux différentielles, il est négligeable par rapport aux autres qui n'en comportent qu'une. Donc :

$$dM = F_T dx \quad \text{ou} \quad F_T = dM/dx$$

La force de cisaillement est donc égale au taux de variation du moment de flexion par rapport à x .

Cette équation se montrera d'un intérêt considérable pour le tracé des diagrammes de la force de cisaillement et du moment de flexion dans les cas de charges plus compliquées. Il est évident, par exemple, que d'après cette équation lorsque la force de cisaillement est positive sur une certaine section de la poutre, la pente du diagramme du moment de flexion en ce point est également positive. Elle montre également qu'un changement brusque de cisaillement correspondant à une force concentrée, s'accompagne d'un changement brusque de la pente du diagramme du moment de flexion.

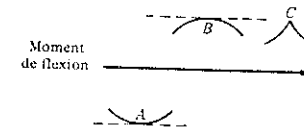


Fig. 6-10

En outre, aux points où le cisaillement est nul, la pente du diagramme du moment de flexion est nulle. En ces points où la tangente au diagramme du moment est horizontale, le moment peut prendre une valeur maximale ou minimale. Ceci résulte de la technique usuelle de calcul consistant à évaluer à zéro la dérivée première d'une fonction pour en obtenir le maximum ou le minimum. Ainsi, pour les parties de courbes de diagramme du moment de flexion représentées par la Fig. 6-10, il peut apparaître des valeurs critiques aux points A et B .

Pour obtenir la direction de la concavité en un point tel que A ou B , nous pouvons former la dérivée seconde de M par rapport à x , par exemple d^2M/dx^2 . Si cette dérivée seconde est positive, la courbe du moment est concave vers le haut et le moment présente un minimum. Si la dérivée seconde est négative, la courbe du moment est concave vers le bas, comme en B , et le moment présente un maximum.

Il faut cependant bien noter que la méthode de calcul consistant à déterminer les valeurs critiques à partir de la dérivée première ne donne pas les valeurs maximales possibles en un point de rebroussement de la courbe du moment, s'il en existe un tel que C . Lorsqu'un tel point existe, le moment doit être calculé numériquement et comparé ensuite aux autres valeurs qui sont peut-être critiques.

Enfin, pour l'équilibre vertical de l'élément, on a :

$$p dx + F_T - (F_T + dF_T) = 0 \quad \text{ou} \quad p = dF_T/dx$$

Cette relation sera utile pour le tracé des diagrammes de force de cisaillement.

- 6.2 Soit une poutre cantilever portant une charge uniformément répartie de p kg par mètre linéaire, Fig. 6-11(a). Ecrire les équations de la force de cisaillement et du moment de flexion en un point quelconque de la poutre. Tracer également les diagrammes de la force de cisaillement et du moment de flexion.

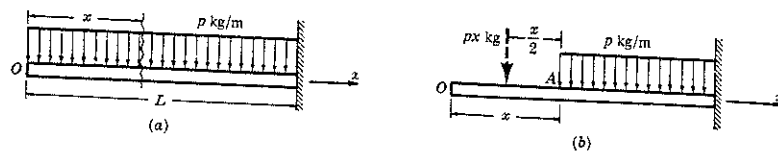


Fig. 6-11

Il n'est pas nécessaire de déterminer les réactions à l'encastrement. Nous prendrons l'axe de la poutre comme axe des x d'un système ayant son origine O à l'extrémité de gauche de la poutre. Pour calculer la force de cisaillement et le moment de flexion dans une section à la distance x de l'extrémité libre, on peut remplacer la charge répartie à la gauche de cette section par sa résultante. Comme le montre le vecteur en tirets de la Fig. 6-11(b), la résultante est une force dirigée vers le bas de $p \cdot x$ kg agissant au milieu de la distance de O à la section x . Noter qu'aucune charge à la droite de la section n'entre dans le calcul de cette résultante. Celle-ci tend à faire glisser vers le bas la portion de la poutre à gauche de la section, par rapport à la portion de droite. Suivant nos conventions de signe, il s'agit d'un cisaillement négatif.

La force de cisaillement dans cette section x est la somme des forces à gauche de la section. Dans ce cas, la somme est $p \cdot x$ kg vers le bas. Donc :

$$F_T = -p \cdot x \text{ kg}$$

Cette équation montre que le cisaillement est nul pour $x = 0$ et a pour valeur $-pL$ pour $x = L$. Puisque F_T est une fonction du premier degré en x , la courbe de la force de cisaillement est une droite inclinée est la force de cisaillement en ce point.

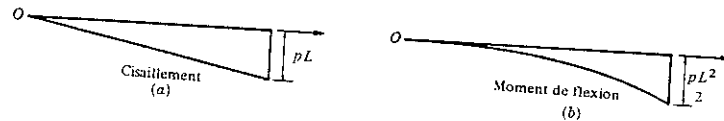


Fig. 6-12

Le moment de flexion en cette même section x est la somme des moments des forces à gauche de cette section autour d'un axe passant par le point A et perpendiculaire au plan de la figure. La somme des moments est donnée par le moment de la résultante $p \cdot x$ kg autour d'un axe passant par A . C'est :

$$M = -p \cdot x(x/2) \text{ kg.m}$$

Le signe moins est nécessaire, puisque les charges vers le bas donnent des moments de flexion négatifs. D'après cette équation, le moment de flexion est nul à l'extrémité de gauche de la poutre et a pour valeur $-pL^2/2$ à l'extrémité encastree où $x = L$. La courbe du moment de flexion est une parabole, Fig. 6-12(b). L'ordonnée en un point de cette parabole est le moment de flexion en ce point.

On notera que la charge uniforme vers le bas envisagée ici donne une courbe concave vers le bas du moment de flexion. Ceci pourrait se démontrer en prenant la dérivée seconde de M par rapport à x , qui dans ce cas particulier est $-p$. Puisque la dérivée seconde est négative, les règles du calcul indiquent que la courbe est concave vers le bas.

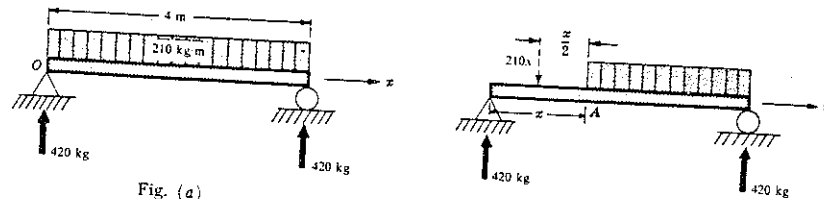


Fig. 6-13

Fig. 6-13

6.3

Soit une poutre sur appuis de 4 m de long portant une charge verticale uniformément répartie de 210 kg par mètre linéaire, Fig. 6-13(a). Tracer les diagrammes de la force de cisaillement et du moment de flexion.

La charge totale de la poutre est de 840 kg et, par symétrie, les réactions aux extrémités sont de 420 kg chacune. Considérons une section située à une distance x de l'extrémité de gauche. La force de cisaillement dans la section est la somme algébrique des forces à gauche de la section, qui sont la réaction de 420 kg et la charge répartie de 210 kg/m sur une longueur de x mètres. On peut remplacer cette charge par sa résultante de $210x$ kg agissant vers le bas, comme le montre le vecteur en tirets de la Fig. 6-13(b). Cette résultante ne contient aucune charge à la droite de x . La force de cisaillement est alors :

$$F_T = (420 - 210x) \text{ kg}$$

Puisqu'il n'existe aucune force concentrée agissant sur la poutre, cette équation est valable en tous points sur la longueur. Il est évident que la force de cisaillement varie linéairement depuis $F_T = 420$ kg pour $x = 0$ jusqu'à $F_T = 420 - 840 = -420$ kg pour $x = 4$ m. La variation de la force de cisaillement sur la longueur de la poutre est représentée par une droite reliant ces deux valeurs aux extrémités, Fig. 6-14(a). Le cisaillement est nul au centre de la poutre.

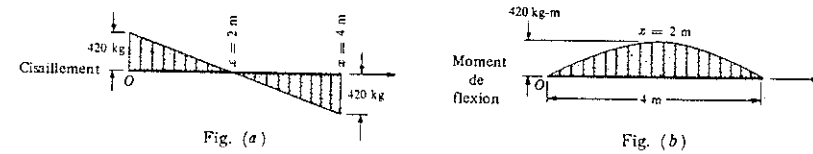


Fig. 6-14

Le moment de flexion dans la section x est la somme algébrique des moments de la réaction de 420 kg et de la charge répartie de 210 kg/m autour d'un axe passant par A et perpendiculaire au plan de la figure. Comme des forces vers le haut donnent des moments de flexion positifs, on a :

$$M = 420x - 210x(x/2) \text{ kg.m}$$

Cette équation est valable sur la longueur entière de la poutre. On notera que, puisque la charge est uniformément répartie, la résultante - représentée par le vecteur en tirets - agit à une distance $x/2$ de A , c'est-à-dire au milieu de la charge uniforme à la gauche de la section x pour laquelle est calculé le moment. L'équation ci-dessus montre que le moment de flexion est représenté par une parabole le long de la poutre. Comme la poutre est sur appuis, le moment est nul à chaque extrémité et, en raison de la symétrie de la charge, le moment de flexion présente un maximum au centre de la poutre où $x = 2$ m. Le moment de flexion en ce point est :

$$M_{x=2} = 420(2) - 105(2)^2 = 420 \text{ kg.m}$$

Les ordonnées de la courbe parabolique de la Fig. 6-14(b) représentent la variation du moment de flexion le long de la poutre.

6.4

La poutre sur appuis de la Fig. 6-15(a) porte une charge verticale croissant uniformément depuis zéro à l'extrémité de gauche jusqu'à 1 200 kg par mètre linéaire à l'extrémité de droite. Tracer les diagrammes de la force de cisaillement et du moment de flexion.

Pour déterminer les réactions R_1 et R_2 , la charge répartie entière peut-être remplacée par sa résultante appliquée au centre d'inertie du diagramme triangulaire de charge. Puisque la charge varie de zéro à l'extrémité de gauche

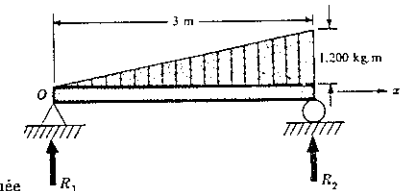


Fig. 6-15

Fig. 6-15

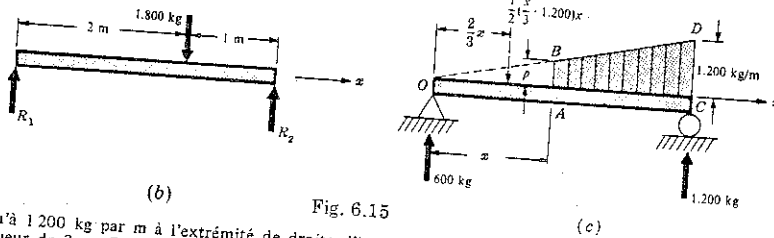


Fig. 6.15

jusqu'à 1 200 kg par m à l'extrémité de droite, l'intensité moyenne est de 600 kg/m agissant sur une longueur de 3 m. Donc la charge totale est de 1 800 kg appliquée à 2 m à droite de l'appui de gauche. Le schéma de corps libre à utiliser pour la détermination des réactions est représenté dans la Fig. 6-15(b). L'application des équations de l'équilibre statique à cette poutre donne $R_1 = 600$ kg et $R_2 = 1 200$ kg.

On ne peut cependant pas utiliser cette résultante pour le tracé du diagramme de cisaillement et du moment. On doit tenir compte de la charge répartie et calculer le cisaillement et le moment sur une section à une distance x de l'extrémité de gauche, Fig. 6-15(c). Pour cette section x , l'intensité de charge p est obtenue à partir des triangles semblables OAB et OCD comme suit :

$$p/x = 1 200/3 \quad \text{d'où} \quad p = (x/3) 1 200 \text{ kg/m}$$

Puisque la charge est nulle à l'extrémité de gauche, l'intensité moyenne de charge sur la longueur x est $\frac{1}{2} (x/3) 1 200$ kg/m. La charge totale agissant sur la longueur x est l'intensité moyenne de charge multipliée par la longueur, soit $\frac{1}{2} (x/3) 1 200 x$ kg. Elle s'exerce au centre d'inertie de la région triangulaire OAB représentée, c'est-à-dire sur un point situé à une distance $\frac{2}{3} x$ de O . La résultante de cette portion de charge répartie est indiquée par le vecteur en tirets, Fig. 6-15(c). Cette force résultante ne contient aucune portion de charge à la droite de x .

On trouve alors aisément la force de cisaillement en A :

$$F_T = 600 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{3} 1 200 \right) x = 600 - 200x^2$$

et pour le moment de flexion en A :

$$M = 600x - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{3} 1 200 \right) x \left(\frac{x}{3} \right) = 600x - \frac{200}{3} x^3$$

Ces équations sont valables sur toute la longueur de la poutre. La force de cisaillement présente donc une courbe parabolique et a une valeur de 600 kg pour $x = 0$ et de $-1 200$ kg pour $x = 3$ m. Le moment de flexion est représenté par un polynôme du troisième degré. Il s'évanouit aux extrémités et présente une valeur maximale là où le cisaillement est nul. Ceci résulte de ce que $F_T = dM/dx$, donc le point de cisaillement nul doit être le point où la tangente à la courbe du moment est horizontale. Ce point de cisaillement nul peut être trouvé en posant $F_T = 0$:

$$0 = 600 - 200x^2 \quad \text{ou} \quad x = 1,73 \text{ m}$$

Le moment de flexion en ce point se calcule en portant cette valeur dans l'équation générale donnée plus haut :

$$M_{x=1,73} = 600(1,73) - \frac{200}{3} (1,73)^3 = 690 \text{ kg.m}$$

Le tracé de ces équations du cisaillement et du moment est donné dans la Fig. 6-16.

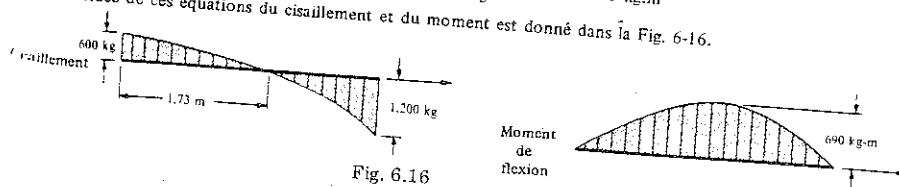


Fig. 6.16

6.5

La poutre horizontale AD porte une charge uniformément répartie de 800 kg par mètre linéaire et également une force concentrée de 1 500 kg appliquée comme le montre la Fig. 6-17. Tracer le diagramme de la force de cisaillement et celui du moment de flexion par parties.

D'après la statique, on peut écrire les équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 4R_C - 1 500(3) - 800(5,50)(2,75) = 0 \\ \Sigma F_v &= R_A + 4 150 - 1 500 - 800(5,50) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } R_C = 4 150 \text{ kg et } R_A = 1 750 \text{ kg}$$

Traçons un axe des x avec le point A comme origine. Pour écrire les équations de la force de cisaillement, il faut considérer trois régions, à savoir AB , BC et CD . Les équations de la force de cisaillement sont :

$$F_T = 1 750 - 800x \text{ kg} \quad \text{pour } 0 < x < 3 \text{ m} \quad (1)$$

$$F_T = 1 750 - 800x - 1 500 \text{ kg} \quad \text{pour } 3 < x < 4 \text{ m} \quad (2)$$

$$F_T = 1 750 - 800x - 1 500 + 4 150 \text{ kg} \quad \text{pour } 4 < x < 5,5 \text{ m} \quad (3)$$

D'après l'équation (1), le cisaillement pour $x = 0$ a pour valeur 1 700 kg. De même, on trouve le cisaillement immédiatement à la gauche de la charge de 1 500 kg en portant $x = 3$ m dans l'équation (1). Le résultat est : -650 kg. Le cisaillement immédiatement à la droite de la charge de 1 500 kg se calcule en portant $x = 3$ m dans l'équation (2), ce qui donne :

$$F_{Tx=3} = 1 750 - 800(3) - 1 500 = -2 150 \text{ kg}$$

Le cisaillement immédiatement à gauche du point C est trouvé en portant $x = 4$ m dans l'équation (2), ce qui donne :

$$F_{Tx=4} = 1 750 - 800(4) - 1 500 = -2 950 \text{ kg}$$

Le cisaillement immédiatement à la droite du point C se calcule en portant $x = 4$ m dans l'équation (3), ce qui donne :

$$F_{Tx=4} = 1 750 - 800(4) - 1 500 + 4 150 = 1 200 \text{ kg}$$

Les équations (1), (2) et (3) montrent clairement que les diagrammes de la force de cisaillement sont des droites dans les trois régions. Les valeurs de cette force viennent d'être calculées, de sorte qu'elles peuvent être représentées en les reliant par des droites, ce qui donne le diagramme de la Fig. 6-18.

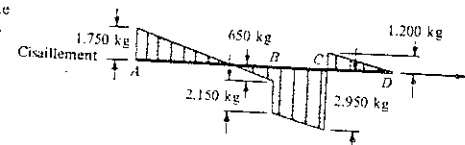


Fig. 6-18

Pour le diagramme du moment de flexion, on utilisera un mode de tracé différent du précédent. On considérera séparément chaque charge et on tracera le moment de flexion dû à chacune comme si d'autres forces n'agissaient pas sur la structure. On dit que le diagramme du moment est tracé *par parties*. Comme on le verra dans un chapitre ultérieur sur les déflexions des poutres, cette méthode est souvent très commode bien que le choix entre elle et entre les tracés de type classique présentés dans les prochains chapitres dépende du but recherché pour l'établissement du diagramme. Ce point sera développé plus loin.

Partons de la gauche de la poutre vers la droite. On peut considérer que le diagramme du moment se compose de quatre parties, une due à la réaction R_A , la seconde due à la charge uniformément répartie, la troisième à la force de 1 500 kg et la dernière résultant de la réaction R_C . Pour toute section à la distance x du point A , le moment de flexion dû à R_A seulement est simplement $1 750x$ kg.m. Cette valeur est positive, puisque R_A est dirigée vers le haut. Cette même expression vaut pour toutes les valeurs de x le long de la poutre. C'est une fonction du premier

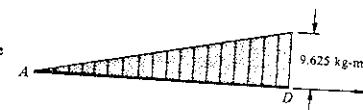
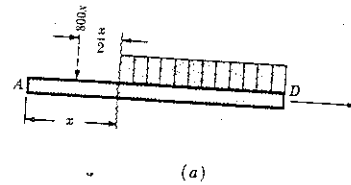


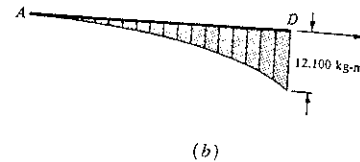
Fig. 6-19

degré de x , donc le moment de flexion dû à R_A seule donne une droite. Pour $x = 0$, le moment est nul et en substituant $x = 5,50$ m dans l'expression ci-dessus, on voit que le moment de flexion au point D a pour valeur : 9625 kg.m. Le moment de flexion pour toute section x , dû à cette force seule peut être représenté par les ordonnées du triangle de la Fig. 6-19.

Occupons-nous maintenant de la charge uniformément répartie. Ne tenons pas compte provisoirement de toutes les autres charges et calculons le moment de flexion dû à la charge uniforme sur une section x . Ceci se fait, comme précédemment, en remplaçant par sa résultante la partie de la charge à gauche de la section x . Elle est donnée par le vecteur en tirets de la Fig. 6-20(a).



(a)



(b)

Fig. 6-20

Le moment de flexion sur une section quelconque x le long de la poutre, dû à la seule charge distribuée est :

$$- 800x(x/2) \text{ kg.m}$$

Cette expression disparaît pour $x = 0$ et a pour valeur 12000 kg.m pour $x = 5,50$ m. Puisque cette expression est du second degré, la courbe est une parabole, Fig. 6-20(b).

En passant de la gauche à la droite de la poutre, l'influence de la charge de 1500 kg ne se manifeste qu'à droite du point B . Dès ce moment, pour toute section x , le moment de flexion dû à cette force seule, en ne tenant pas provisoirement des autres forces, est donné par :

$$- 1500(x - 3) \text{ kg.m} \quad \text{pour} \quad 3 < x < 5,50 \text{ m}$$

On notera que x est toujours mesuré à partir du point A . Pour $x = 3$ m, le moment de flexion dû à cette seule force disparaît et pour $x = 5,50$ m, il a pour valeur : $- 3750$ kg.m. L'expression étant du premier degré, le moment de flexion dû à cette seule force est donc représenté par une droite dans la région BD , Fig. 6-21.

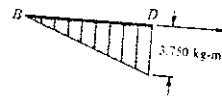


Fig. 6-21

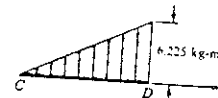


Fig. 6-22

On peut tracer de la même manière le diagramme du moment de flexion dû à R_C seule. Comme nous prenons des sections n'importe où dans la région CD , la force R_C produira un moment de flexion. Cette force seule produit un moment de flexion de $4150(x - 4)$ kg.m pour $4 < x < 5,50$ m. Cette valeur est nulle pour $x = 4$ et pour $x = 5,50$ m le moment de flexion dû à la force seule R_C est : $4150(5,50 - 4) = 6225$ kg.m. L'expression est du premier degré en x ; le diagramme du moment dû à R_C est également un triangle, Fig. 6-22.

Les diagrammes des moments dus aux diverses charges ont chacun été tracés comme si chaque charge agissait seule sur la poutre. En fait, toutes les charges agissent simultanément, de sorte que la valeur vraie du moment en tout point est la somme algébrique des quatre tracés ci-dessus. On trace habituellement ensemble ces diagrammes individuels comme le montre la Fig. 6-23.

Noter que les bases horizontales de deux petits triangles sont décalés pour éviter le chevauchement des figures. Ceci n'est pas obligatoire, mais facilite la lecture. La somme algébrique des

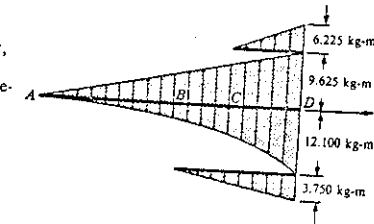


Fig. 6-23

quatre ordonnées en D est nulle, puisqu'il y a une extrémité libre. Le type de diagramme composé présenté dans les problèmes précédents s'obtient en additionnant les ordonnées en chaque point du diagramme ci-dessus. Entre A et B , la somme est composée de deux quantités seulement ; entre B et C , de trois quantités et entre C et D de quatre.

- 6.6. La poutre AE est sur appuis en B et en D et est en porte-à-faux aux deux extrémités. Elle est sollicitée par une charge uniformément répartie de 600 kg par mètre linéaire, ainsi que par un couple de 2500 kg.m appliqué en C . Tracer les diagrammes de la force de cisaillement et du moment de flexion.

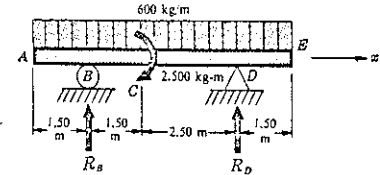


Fig. 6-24

Les réactions sont données par les équations suivantes d'équilibre statique :

$$\begin{aligned} \Sigma M_B &= 4R_D - 2500 - 600(7)(2) = 0, & R_D &= 2.725 \text{ kg} \\ \Sigma F_v &= R_B + 2.725 - 600(7) = 0, & R_B &= 1.475 \text{ kg} \end{aligned}$$

Introduisons un axe des x avec l'origine au point A . Dans la région AB , la force de cisaillement en toute section à une distance x du point A est donnée par la résultante de la charge distribuée à gauche de cette section. Cette résultante est évidemment une force de $600x$ kg agissant vers le bas. Nous avons :

$$F_T = -600x \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1,50 \text{ m} \quad (1)$$

En portant $x = 1,50$ m dans cette équation, on obtient la valeur de la force de cisaillement en ce point : -900 kg. Le cisaillement en $x = 0$ est nul, bien entendu.

Dès que nous passons à droite de B , la réaction R_B apparaît dans l'équation de la force de cisaillement. Pour toute section à une distance x de A la force de cisaillement dans la région BD s'obtient en additionnant les forces appliquées à la gauche de cette section. Cette somme est :

$$F_T = -600x + 1.475 \text{ kg} \quad \text{pour} \quad 1,50 < x < 5,50 \text{ m} \quad (2)$$

Notons que le couple appliqué en C n'entre pas dans les équations de la force de cisaillement, puisqu'il n'a aucun effet de force dans aucune direction. Il entre cependant indirectement dans l'équation, puisqu'il a une influence sur les valeurs des réactions R_B et R_D . En portant $x = 1,50$ m et $x = 5,50$ m dans l'équation (2), on a :

$$F_{Tx=1,5} = 575 \text{ kg} \quad \text{et} \quad F_{Tx=5,5} = -1.825 \text{ kg}$$

Pour les valeurs de x supérieures à $5,50$ m, la réaction R_D doit être comprise dans l'équation de la force de cisaillement. En additionnant les forces à gauche de la section x dans la région DE , on trouve :

$$F_T = -600x + 1.475 + 2.725 \text{ kg} \quad \text{pour} \quad 5,50 < x < 7 \text{ m} \quad (3)$$

En portant $x = 5,50$ m et $x = 7$ m dans l'équation (3), on trouve :

$$F_{Tx=5,5} = 900 \text{ kg} \quad \text{et} \quad F_{Tx=7} = 0 \text{ kg}$$

La force de cisaillement en tout point le long de la poutre est donnée par une des trois équations (1), (2) ou (3), selon la région dans laquelle se trouve le point x . Puisque F_T est une fonction du premier degré en x dans ces régions, dans chacune, le tracé de la force de cisaillement est une droite. Les valeurs des ordonnées aux extrémités de chaque région ont déjà été obtenues par substitution. En AB , ces points d'extrémité sont 0 et -900 kg. En BD , ce sont 575 et -1.825 kg. Enfin, pour DE , on a trouvé 900 kg et 0 . On peut porter ces valeurs aux

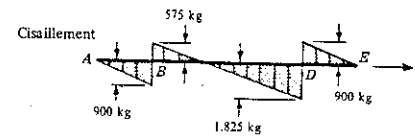


Fig. 6-25

points correspondants le long de la poutre et les ordonnées représentant ces valeurs sont reliées par une droite. C'est ainsi qu'est tracée la Fig. 6-25.

La valeur du *sur vertical* aux points *B* et *D* est naturellement égale à la valeur des réactions concentrées R_B et R_D en ces points.

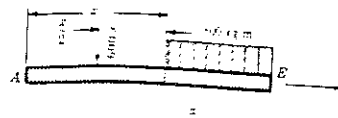
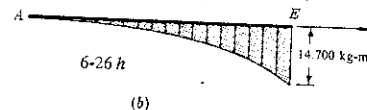


Fig. 6-26



En traçant le diagramme par parties du moment de flexion, chaque charge, y compris les réactions, est prise individuellement comme si aucune autre charge n'agissait sur la poutre. En commençant par *A* et en calculant le moment de flexion en cette section dû à une distance *x* de l'extrémité de gauche, les forces réparties à gauche de cette section sont indiquées par le vecteur en tirets de la Fig. 6-26(a). Le la figure est

$$M = -600x(x/2) = -300x^2 \text{ kg-m pour } 0 < x < 7 \text{ m}$$

Le diagramme du moment de flexion de la charge répartie seule est une parabole. Pour $x = 0$, le moment est nul et à l'extrémité de droite, $x = 7 \text{ m}$ et l'équation ci-dessus donne :

$$M_{x=7} = -300(7)^2 = -14700 \text{ kg-m}$$

Cette portion du diagramme du moment de flexion présente ainsi l'aspect de la Figure 6-26(b).

Puisque nous passons de la gauche à la droite de la poutre, le moment dû à la réaction R_B n'entre pas en considération jusqu'à ce que nous arrivions à des valeurs de x supérieures à 1,50 m. Alors, le moment dû à cette force de 1475 kg autour d'un axe passant par la section x est donné par :

$$M = 1475(x - 1,50) \text{ kg-m pour } 1,50 < x < 7 \text{ m}$$

Puisqu'il s'agit d'une équation du premier degré en x , le moment de flexion dû à R_B seule est représenté par une droite. Selon cette équation, le moment de flexion est nul pour $x = 1,50 \text{ m}$ et a pour valeur $1475(7 - 1,50) = 8110 \text{ kg-m}$ au point *E*. On obtient le diagramme du moment dû à R_B seule en reliant ces valeurs d'extrémité par une droite. Fig. 6-27.

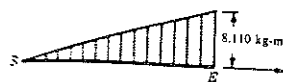


Fig. 6-27

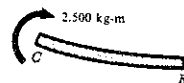


Fig. 6-28(a)

En progressant vers la droite de la poutre, considérons maintenant le couple appliqué de 2500 kg-m au point *C*. Pour les sections à une distance x du point *A*, où x se trouve à la droite du point *C*, ce couple apparaît sur le diagramme du moment de flexion. Bien qu'il soit exact que le moment de ce couple soit le même en tous points du plan, il n'apparaît dans le diagramme du moment de flexion que lorsque nous considérons les valeurs de x supérieures à 3 m. En effet, le moment de flexion ne prend en compte que les moments des forces et couples à gauche de la section x considérée. Ce couple appliqué produit la courbure représentée dans la Fig. 6-28(a). Conformément à nos conventions de signe, il s'agit d'une flexion positive. Pour le couple appliqué seul, nous avons :

$$M = 2500 \text{ kg-m pour } 3 < x < 7$$

Ces valeurs constantes donnent une droite horizontale, Fig. 6-28(b).

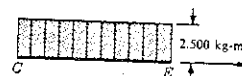


Fig. 6-28(b)

Enfin, la réaction R_D apparaît dans le calcul du moment de flexion des sections à la droite du point *D*. Pour une telle section à une distance x à droite du point *A*, le moment de flexion dû à R_D seule est :

$$M = 2725(x - 5,50) \text{ kg-m pour } 5,50 < x < 7 \text{ m}$$

Ce tracé est également une droite. Au point *D*, ce moment est nul et pour $x = 7 \text{ m}$ au point *E*, il a pour valeur 4085 kg-m. Le diagramme du moment dû à la réaction R_D seule s'obtient en reliant ces deux valeurs d'extrémité, Fig. 6-29.

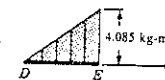


Fig. 6-29

Les quatre parties du diagramme du moment de flexion sont finalement tracées ensemble, Fig. 6-30. Les bases horizontales des parties ont été décalées verticalement pour éviter le chevauchement des diagrammes partiels.

L'analyse aurait pu être aussi effectuée de droite à gauche. Le diagramme par parties résultant aurait eu un aspect totalement différent.

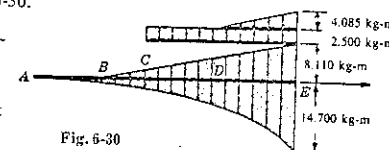


Fig. 6-30

6.7. Etudier une méthode de représentation des forces de cisaillement et des moments de flexion basées sur les fonctions de singularité.

Les techniques exposées dans les problèmes précédents conviennent bien lorsque les charges varient d'une manière continue le long de la poutre. Mais, s'il existe des forces concentrées ou des moments concentrés, il faut écrire deux équations distinctes de force de cisaillement et de moment de flexion pour chaque région entre ces forces concentrées ou ces moments concentrés. Bien que ceci ne présente pas de difficulté de principe, cela conduit à des résultats très incommodes. Comme nous le verrons dans un chapitre ultérieur, ces résultats sont particulièrement difficiles à manier dans le traitement de la déflexion des poutres.

Une représentation plus concise peut être obtenue en introduisant les fonctions dites de *singularité* ou à *domaine limité*. Ces fonctions ont été appliquées par Macaulay en 1919 à l'analyse des poutres et cette technique porte parfois le nom de méthode de Macaulay, bien que ces fonctions aient été déjà utilisées au 19^{ème} siècle par A. Clebsch. Introduisons par définition les parenthèses angulaires $\langle x - a \rangle$ et définissons cette quantité comme nulle si $(x - a) < 0$, c'est-à-dire si $x < a$ et devenant $(x - a)$ si $(x - a) > 0$ c'est-à-dire si $x > a$. Cela revient à définir une fonction à domaine limité comme ayant une valeur seulement dans le cas où l'argument est positif. Lorsque l'argument est positif, les parenthèses angulaires se comportent exactement comme des parenthèses ordinaires. La fonction de singularité :

$$f_n(x) = \langle x - a \rangle^n$$

obéit à la loi d'intégration :

$$\int_{-\infty}^x \langle y - a \rangle^n dy = \frac{\langle x - a \rangle^{n+1}}{n+1} \text{ pour } n \geq 0 \quad (1)$$

Il est également nécessaire de définir la loi d'intégration pour $n = -1$ et $n = -2$, ce qui se fait comme suit :

$$\int_{-\infty}^x \langle y - a \rangle^{-1} dy = \langle x - a \rangle^0 = \begin{cases} 0 & \text{quand } x < a \\ 1 & \text{quand } x > a \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^x \langle y - a \rangle^{-2} dy = \langle x - a \rangle^{-1} \quad (3)$$

Les fonctions $\langle x - a \rangle^{-1}$ et $\langle x - a \rangle^{-2}$ sont nulles partout sauf pour $x = a$ où elles sont infinies, de sorte que (2) et (3) sont valables.

Les cinq diagrammes de la Fig. 6-31 représentent les fonctions de singularité de différents degrés nécessaires pour la représentation des types courants de charge de poutre.

Type de charge	Fonction de singularité	Représentation graphique
moment concentré (fonction doublet)	$p(x) = M_0(x-a)^{-2}$	
force concentrée (fonction d'impulsion ou delta de Dirac)	$p(x) = F_0(x-a)^{-1}$	
charge uniformément répartie (fonction à gradins)	$p(x) = p_0(x-a)^0$	
charge variant linéairement	$p(x) = \frac{dp}{dx}(x-a)^1$	
charge à variation quadratique	$p(x) = \frac{C(x-a)^2}{2}$	

Fig. 6-31

Une fois les charges représentées par les fonctions de singularité ci-dessus, il est alors possible de calculer les forces de cisaillement et les moments de flexion en tous les points le long de la poutre en appliquant les règles d'intégration ci-dessus.

- 6.8. Soit une poutre sur appuis portant une force concentrée unique de 2000 kg, comme le montre la Fig. 6.32(a). En utilisant les fonctions de singularité, écrire les équations de la force de cisaillement et du moment de flexion en un point quelconque de la poutre et tracer les diagrammes du cisaillement et de moment.

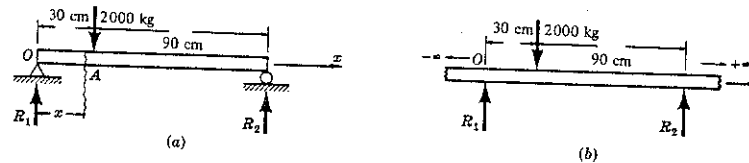


Fig. 6-32

La figure montre que les réactions R_1 et R_2 sont des forces concentrées. Imaginons que la poutre soit infinie dans les deux directions. La poutre en étude correspondra à une partie de cette poutre hypothétique, comme le montre la Fig. 6-32(b).

Sur la poutre infinie, il n'existe pas de forces à gauche de R_1 ni à droite de R_2 de sorte que la force de cisaillement et le moment de flexion doivent être nuls partout dans ces régions. En utilisant la Fig. 6-31 du problème 6.7, on peut écrire la fonction charge-intensité :

$$p(x) = R_1 \langle x \rangle^{-1} - 2000 \langle x - 30 \rangle^{-1} + R_2 \langle x - 120 \rangle^{-1} \quad (1)$$

Cette fonction contient toutes les valeurs de x à condition que les parenthèses angulaires soient interprétées conformément au problème 6.7. Du problème 6.1 :

$$p = dF_T/dx \quad \text{d'où} : F_T = \int_{-\infty}^x p dx$$

En utilisant les lois d'intégration du problème 6.7, on trouve pour le cisaillement F_T :

$$F_T(x) = R_1 \langle x \rangle^0 - 2000 \langle x - 30 \rangle^0 + R_2 \langle x - 120 \rangle^0 \quad (2)$$

Egalement d'après le problème 6.1 :

$$F_T = dM/dx \quad \text{d'où} : M = \int_{-\infty}^x F_T dx$$

et on tire de l'équation (2) :

$$M(x) = R_1 \langle x \rangle^1 - 2000 \langle x - 30 \rangle^1 + R_2 \langle x - 120 \rangle^1 \quad (3)$$

On peut calculer R_1 et R_2 à partir des équations (2) et (3) en remarquant que $F_T(x)$ disparaît pour les valeurs de x légèrement supérieures à 120, c'est-à-dire pour les points situés immédiatement à la droite de la réaction R_2 . Donc de l'équation (2) :

$$R_1 - 2000 + R_2 = 0$$

et, puisque le moment de flexion disparaît aussi en ce point, d'après l'équation (3) :

$$R_1(120) - 2000(120 - 30) = 0$$

Il s'en suit que : $R_1 = 1500$ kg et $R_2 = 500$ kg. Ces résultats auraient pu être trouvés en utilisant un raisonnement d'équilibre.

Les diagrammes de force de cisaillement et du moment de flexion peuvent alors être tracés à l'aide des équations (2) et (3). Ils sont représentés dans la Fig. 6-33.

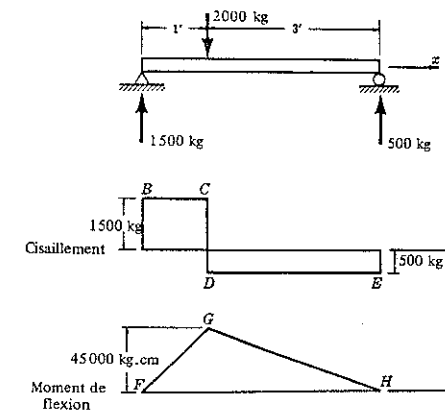


Fig. 6-33

- 6.9. Considérons une poutre cantilever sollicitée par un couple de 3000 kg.cm, comme le montre la Fig. 6-34(a). A l'aide des fonctions de singularité, écrire les équations de la force de cisaillement et du moment de flexion en un point quelconque de la poutre et tracer les diagrammes de cisaillement et de moment.

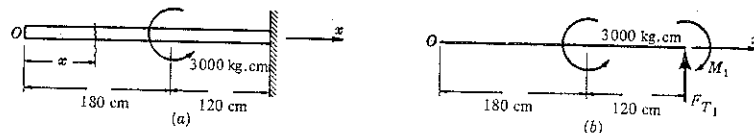


Fig. 6-34

La Fig. 6-34(b) représente un schéma de corps libre où F_{T1} et M_1 sont les réactions à l'encastrement. La fonction d'intensité de charge est :

$$p(x) = -3000 \langle x - 180 \rangle^{-2} + F_{T1} \langle x - 300 \rangle^{-1} + M_1 \langle x - 300 \rangle^{-2} \quad (1)$$

Puisque $F_T = \int_{-\infty}^x p dx$, on a :

$$F_T(x) = -3000 \langle x - 180 \rangle^{-1} + F_{T1} \langle x - 300 \rangle^0 + M_1 \langle x - 300 \rangle^{-1} \quad (2)$$

En prenant un point immédiatement à la droite de F_{T1} sur la poutre hypothétique de longueur infinie, on a $F_{T1} = 0$. Ainsi :

$$F_T(x) = -3000 \langle x - 180 \rangle^{-1} + M_1 \langle x - 300 \rangle^{-1}$$

qui s'évanouit, conformément à notre définition de la fonction $\langle x - a \rangle^{-1}$ dans le problème 6.7

Enfin, puisque $M = \int_{-\infty}^x F_T dx$, on a :

$$M(x) = -3000 \langle x - 180 \rangle^0 + M_1 \langle x - 300 \rangle^0$$

En prenant de nouveau le point situé immédiatement à la droite du mur, on trouve : $M_1 = 3000$ kg.cm.

La poutre chargée et les tracés des courbes des équations de cisaillement et de moment sont représentés dans la Fig. 6-35.

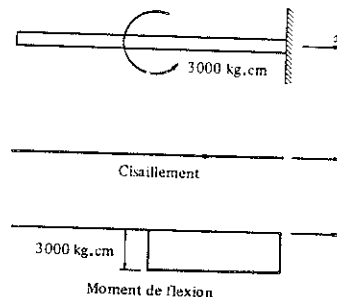


Fig. 6-35

- 6.10. Considérons une poutre cantilever chargée par une force concentrée et par une charge uniformément répartie sur la moitié droite de la poutre de la Fig. 6-36(a). A l'aide des fonctions de singularité, écrire les équations de la force de cisaillement et du moment de flexion en tout point de la poutre. Tracer les diagrammes de cisaillement et de moment.

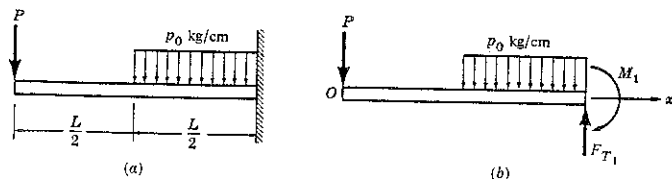


Fig. 6-36

La Fig. 6-36(b) représente le schéma de corps libre. Il n'est pas nécessaire de calculer les réactions F_{T1} et M_1 . La fonction d'intensité de charge est :

$$p(x) = -P(x)^{-1} - p_0 \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^0 + F_{T1} \langle x - L \rangle^{-1} + M_1 \langle x - L \rangle^{-2} \quad (1)$$

Puisque $F_T = \int_{-\infty}^x p dx$ nous avons :

$$F_T(x) = -P(x)^0 - p_0 \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^1 + F_{T1} \langle x - L \rangle^0 + M_1 \langle x - L \rangle^{-1} \quad (2)$$

En prenant un point immédiatement à la droite de F_{T1} sur la poutre hypothétique de longueur infinie, on a, d'après l'équation (2) :

$$F_{T1} = P + \frac{p_0 L}{2}$$

Enfin, puisque $M = \int_{-\infty}^x F_T dx$, on a :

$$M(x) = -P(x)^1 - \frac{p_0}{2} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^2 + \left(P + \frac{p_0 L}{2} \right) \langle x - L \rangle^1 + M_1 \langle x - L \rangle^0 \quad (3)$$

En prenant de nouveau le point immédiatement à la droite du mur, on a :

$$M_1 = PL + \frac{p_0 L^2}{2}$$

La poutre chargée et les tracés des équations de cisaillement et du moment sont représentés dans la Fig. 6-37.

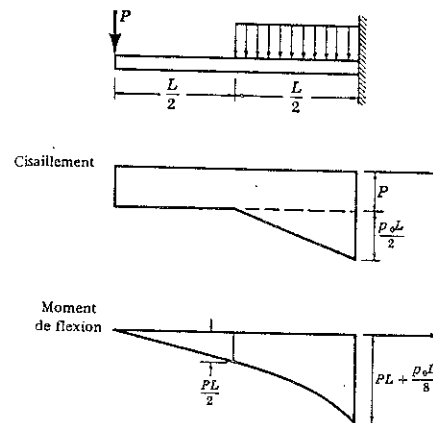


Fig. 6-37

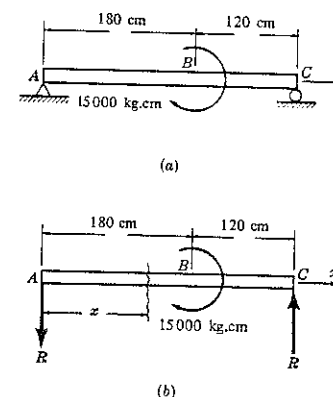


Fig. 6-38

- 6.11. Une poutre sur appuis est sollicitée par un couple de 15000 kg.cm ; Fig. 6-38(a). A l'aide des fonctions de singularité, écrire les équations de la force de cisaillement et du moment de flexion en tout point de la poutre et tracer les diagrammes du cisaillement et du moment.

La poutre est sollicitée par un seul couple et pour que l'équilibre soit réalisé, il faut que les réactions des appuis A et C forment un autre couple. Les réactions se présentent donc comme dans la Fig. 6-38(b). Pour l'équilibre :

$$\Sigma M_A = 300 R - 15000 \quad \text{d'où : } R = 50 \text{ kg}$$

Les deux forces R sont donc les réactions nécessaires pour l'équilibre.

$$p(x) = -50 \langle x \rangle^{-1} + 15000 \langle x - 180 \rangle^{-2} + 50 \langle x - 300 \rangle^{-1} \quad (1)$$

Puisque : $F_T = \int_{-\infty}^x p dx$, on obtient :

$$F_T(x) = -50 \langle x \rangle^0 + 15000 \langle x - 180 \rangle^{-1} + 50 \langle x - 300 \rangle^0 \quad (2)$$

De même, puisque $M = \int_{-\infty}^x F_T dx$, on obtient :

$$M(x) = -50 \langle x \rangle^1 + 15000 \langle x - 180 \rangle^0 + 50 \langle x - 300 \rangle^1 \quad (3)$$

La Fig. 6-39 représente les diagrammes de cisaillement et de moment ; on voit nettement que lorsqu'un couple agit sur une poutre, le diagramme du moment de flexion présente un saut brusque ou une discontinuité au point où le couple est appliqué.

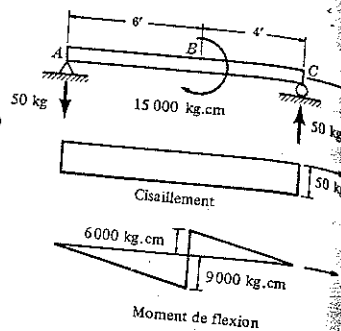


Fig. 6-39

- 6.12. Une poutre sur appuis porte une force concentrée de 2000 kg, ainsi qu'une charge répartie de 27 kg par cm de longueur appliquée comme le représente la Fig. 6-40. A l'aide des fonctions de singularité, écrire les équations de la force de cisaillement et du moment de flexion en tout point de la poutre et tracer les diagrammes du cisaillement et du moment.

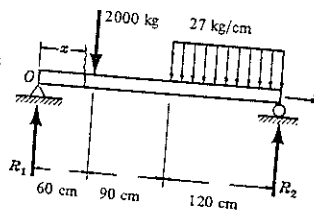


Fig. 6-40

Appliquons d'abord les principes de la statique pour déterminer les réactions R_1 et R_2 . On peut écrire :

$$\begin{aligned} \Sigma M_0 &= 270 R_2 - 2000(60) - 3240(210) = 0 & R_2 &= 2994 \text{ kg} \\ \Sigma F_v &= R_1 - 2000 - 3240 + 2994 = 0 & R_1 &= 2276 \text{ kg} \end{aligned}$$

En réalité, il n'est pas obligatoire de les établir au début ; on aurait pu les calculer plus tard en utilisant la méthode employée dans le problème 6.8.

La fonction intensité de charge est :

$$p(x) = 2276 \langle x \rangle^{-1} - 2000 \langle x - 60 \rangle^{-1} - 27 \langle x - 150 \rangle^0 + 2994 \langle x - 270 \rangle^{-1} \quad (1)$$

En utilisant la relation $F_T = \int_{-\infty}^x p dx$, on obtient :

$$F_T(x) = 2276 \langle x \rangle^0 - 2000 \langle x - 60 \rangle^0 - 27 \langle x - 150 \rangle^1 + 2994 \langle x - 270 \rangle^0 \quad (2)$$

De nouveau, en partant de la relation $M = \int_{-\infty}^x F_T dx$, on obtient :

$$M(x) = 2276 \langle x \rangle^1 - 2000 \langle x - 60 \rangle^1 - 13,5 \langle x - 150 \rangle^2 + 2994 \langle x - 270 \rangle^1 \quad (3)$$

Le diagramme de la force de cisaillement est alors facile à établir. Dans la région de gauche et la région centrale de la poutre, il est représenté par deux droites horizontales d'ordonnée respectivement 2276 kg et 276 kg. Dans la région de droite, il est représenté par une droite inclinée joignant les ordonnées de 276 pour $x = 150$ cm et de -2994 pour $x = 270$ cm. Il est tracé dans la Fig. 6-41.

Le point auquel le cisaillement est nul sous la charge répartie se détermine en posant $F_T = 0$ dans l'équation du cisaillement pour cette région. L'équation (2) donne :

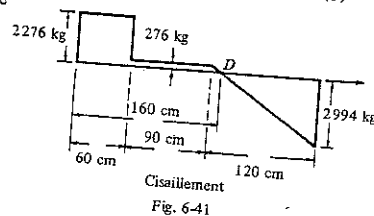


Fig. 6-41

$$2276 - 2000 - 27(x - 150) = 0 \quad \text{d'où} \quad x = 160 \text{ cm}$$

C'est le point D dans le diagramme de cisaillement représenté.

L'équation (3) montre que le moment est nul pour $x = 0$ et a pour valeur 136560 kg.cm pour $x = 60$. Le moment pour $x = 150$ cm est $M = 161400$ kg.cm. Il est intéressant de calculer le moment pour $x = 160$ cm, point où le cisaillement est nul. D'après l'équation (3) le moment en ce point a pour valeur :

$$M_{x=160} = 2276(160) - 2000(100) - 13,5(10^2) = 162810 \text{ kg.cm}$$

On peut alors tracer le diagramme du moment. Il se compose de deux droites dans la région de gauche et la région centrale et d'une parabole dans la région de droite. Cette parabole présente une tangente horizontale pour $x = 160$ et ce point représente évidemment le maximum du moment. Le diagramme du moment est représenté dans la Fig. 6-42.

On notera qu'il résulte du diagramme qu'il n'y a donc pas de saut du cisaillement pour $x = 150$. Puisque $F_T = dM/dx$ en tous les points de la poutre, il n'y a donc pas de saut dans la pente du diagramme du moment en ce point. Il en résulte que la droite et la parabole du diagramme ont une tangente commune pour $x = 150$ cm.

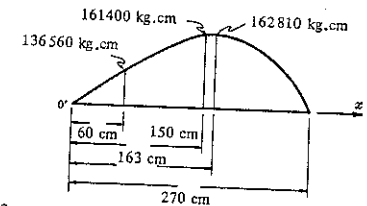


Fig. 6-42

Problèmes supplémentaires

Les poutres cantilever des problèmes 6.13 à 6.15 sont chargées comme le représentent les figures. Ecrire les équations de la force de cisaillement et du moment de flexion en tout point de la poutre. Tracer également les diagrammes de la force de cisaillement et du moment de flexion.

6.13

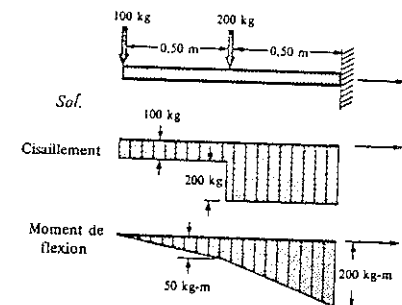


Fig. 6-43

Sol.

Cisaillement

Moment de flexion

$$\begin{aligned} F_T &= -100 \text{ kg pour } 0 < x < 0,50 \text{ m} \\ F_T &= -300 \text{ kg pour } 0,50 < x < 1 \text{ m} \\ M &= -100x \text{ kg.m pour } 0 < x < 0,50 \text{ m} \\ M &= -100x - 200(x - 0,50) \text{ kg.m} \\ &\quad \text{pour } 0,50 < x < 1 \text{ m} \end{aligned}$$

6.14.

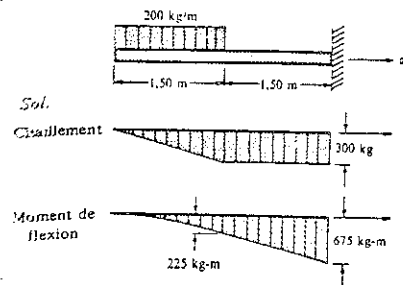


Fig. 6-44

$$F_T = -200x \text{ kg pour } 0 < x < 1,50 \text{ m}$$

$$F_T = -300 \text{ kg pour } 1,50 < x < 3 \text{ m}$$

$$M = -100x^2 \text{ kg.m pour } 0 < x < 1,50 \text{ m}$$

$$M = -300(x - 0,75) \text{ kg.m pour } 1,50 < x < 3 \text{ m}$$

6.15.

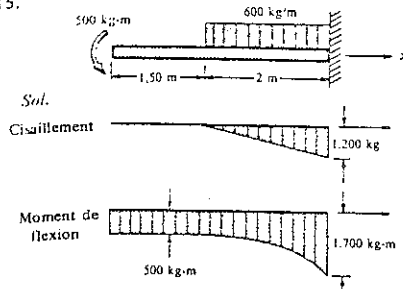


Fig. 6-45

$$F_T = 0 \text{ pour } 0 < x < 1,50 \text{ m}$$

$$F_T = -600(x - 1,50) \text{ kg pour } 1,50 < x < 3,5 \text{ m}$$

$$M = 500x \text{ kg.m pour } 0 < x < 1,50 \text{ m}$$

$$M = -500 - 300(x - 1,50)^2 \text{ kg.m pour } 1,50 < x < 3,50 \text{ m}$$

Les poutres sur appuis des problèmes 6.16 à 6.22 sont simplement supportées aux extrémités et sont chargées comme le montrent les figures. Ecrire les équations de la force de cisaillement et du moment de flexion en tout point de la poutre et tracer les diagrammes de la force de cisaillement et du moment de flexion.

6.16

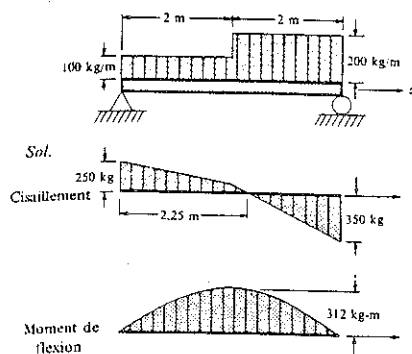


Fig. 6-46

$$F_T = 250 - 100x \text{ kg pour } 0 < x < 2 \text{ m}$$

$$F_T = 50 - 200(x - 2) \text{ kg pour } 2 < x < 4 \text{ m}$$

$$M = 250x - 50x^2 \text{ kg.m pour } 0 < x < 2 \text{ m}$$

$$M = 250x - 200(x - 1) - 100(x - 2)^2 \text{ kg.m pour } 2 < x < 4 \text{ m}$$

6.17.

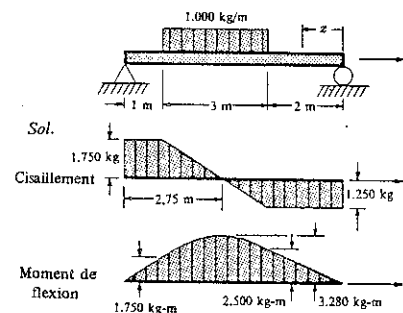


Fig. 6-47

$$F_T = 1750 \text{ kg pour } 0 < x < 1 \text{ m}$$

$$F_T = 1750 - 1000(x - 1) \text{ kg pour } 1 < x < 4 \text{ m}$$

$$F_T = -1250 \text{ kg pour } 4 < x < 6 \text{ m}$$

$$M = 1750x \text{ kg.m pour } 0 < x < 1 \text{ m}$$

$$M = 1750x - 500(x - 1)^2 \text{ kg.m pour } 1 < x < 4 \text{ m}$$

$$M = 1250x \text{ kg.m pour } 4 < x < 6 \text{ m}$$

6.18.

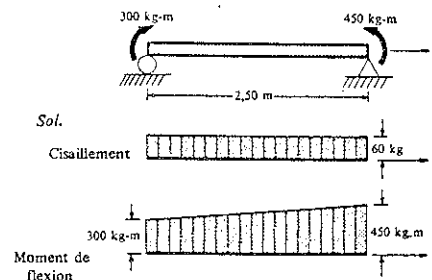


Fig. 6-48

$$F_T = 60 \text{ kg pour } 0 < x < 2,50 \text{ m}$$

$$M = 300 + 60x \text{ kg.m pour } 0 < x < 2,50 \text{ m}$$

6.19

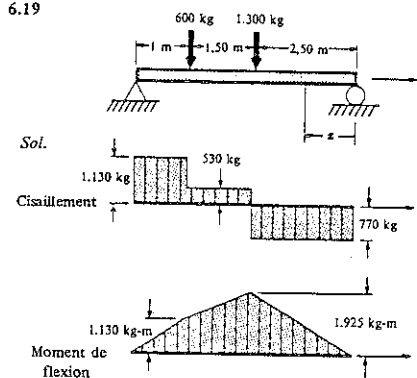


Fig. 6-49

$$F_T = 1130 \text{ kg pour } 0 < x < 1 \text{ m}$$

$$F_T = 530 \text{ kg pour } 1 < x < 2,50 \text{ m}$$

$$F_T = -770 \text{ kg pour } 2,50 < x < 5 \text{ m}$$

$$M = 1130x \text{ kg.m pour } 0 < x < 1 \text{ m}$$

$$M = 1130x - 600(x - 1) \text{ kg.m pour } 1 < x < 2,50 \text{ m}$$

$$M = 770x \text{ kg.m pour } 2,50 < x < 5 \text{ m}$$

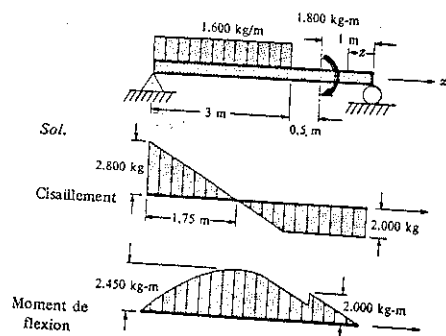


Fig. 6-50

$$F_T = 2800 - 1600x \text{ kg pour } 0 < x < 3 \text{ m}$$

$$F_T = -2000 \text{ kg pour } 3 < x < 4,50 \text{ m}$$

$$M = 2800x - 800x^2 \text{ kg.m pour } 0 < x < 3 \text{ m}$$

$$M = 2800x - 4800(x - 1,50) \text{ kg.m pour } 3 < x < 3,50 \text{ m}$$

$$M = 2000x \text{ kg.m pour } 0 < x < 1 \text{ m}$$

6.21.

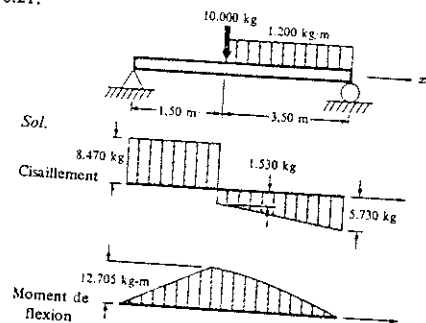


Fig. 6-51

$$F_T = 8470 \text{ kg pour } 0 < x < 1,50 \text{ m}$$

$$F_T = 8470 - 10000 - 1200(x - 1,50) \text{ kg pour } 1,50 < x < 5 \text{ m}$$

$$M = 8470x \text{ kg.m pour } 0 < x < 1,50 \text{ m}$$

$$M = 8470x - 10000(x - 1,50) - 600(x - 1,50)^2 \text{ kg.m pour } 1,50 < x < 5 \text{ m}$$

6.22.

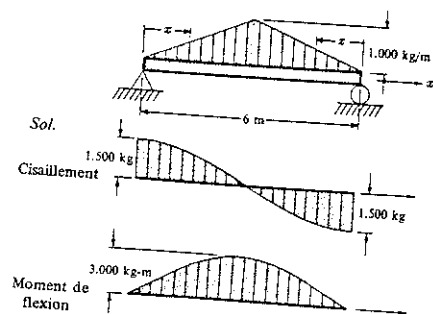


Fig. 6-52

$$F_T = 1500 - \frac{x^2}{6} (1000) \text{ kg pour } 0 < x < 3 \text{ m}$$

$$F_T = -1500 + \frac{z^2}{6} (1000) \text{ kg pour } 0 < z < 3 \text{ m}$$

$$M = 1500x - \frac{x^3}{18} (1000) \text{ kg.m pour } 0 < x < 3 \text{ m}$$

$$M = 1500z - \frac{z^3}{18} (1000) \text{ kg.m pour } 0 < z < 3 \text{ m}$$

Les poutres sur appuis des problèmes 6.23 et 6.24 sont en porte-à-faux aux extrémités et sont chargées comme le montrent les figures. Tracer le diagramme de la force de cisaillement et également le diagramme par

6.24

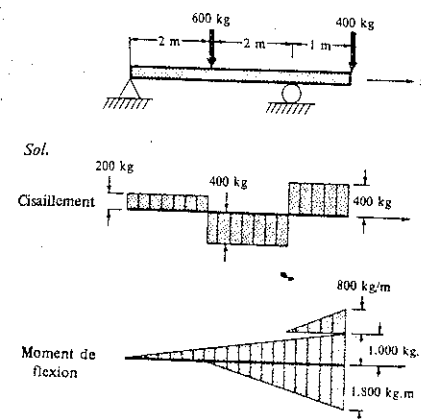


Fig. 6-53

6.24

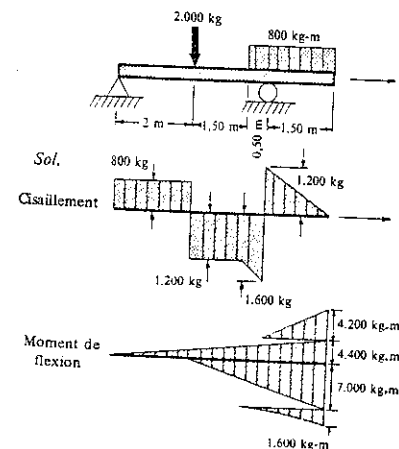
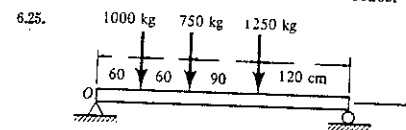


Fig. 6-54

Pour les problèmes 6.25 à 6.28, appliquer les fonctions de singularité pour écrire les équations de la force de cisaillement et du moment de flexion. Tracer les diagrammes correspondants.



Réponse

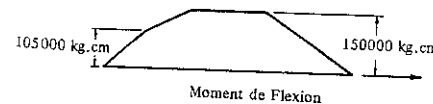
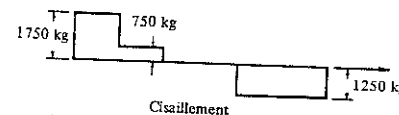


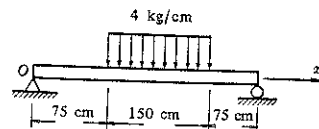
Fig. 6-55

$$p(x) = 1750\langle x \rangle^{-1} - 1000\langle x - 60 \rangle^{-1} - 750\langle x - 90 \rangle^{-1} - 1250\langle x - 120 \rangle^{-1}$$

$$F_T(x) = 1750\langle x \rangle^0 - 1000\langle x - 60 \rangle^0 - 750\langle x - 90 \rangle^0 - 1250\langle x - 120 \rangle^0$$

$$M(x) = 1750\langle x \rangle^1 - 1000\langle x - 60 \rangle^1 - 750\langle x - 90 \rangle^1 - 1250\langle x - 120 \rangle^1$$

5.26.



Réponse

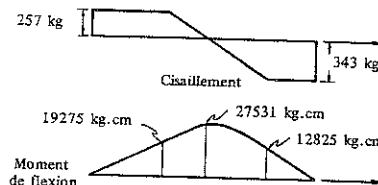


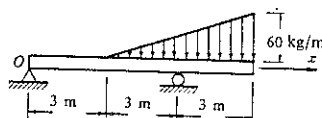
Fig. 6-56

$$p(x) = 257 \langle x \rangle^{-1} - 4 \langle x - 75 \rangle^0 + 4 \langle x - 225 \rangle^0 + 343 \langle x - 262,5 \rangle^{-1}$$

$$F_T(x) = 257 \langle x \rangle^0 - 4 \langle x - 75 \rangle^1 + 4 \langle x - 225 \rangle^1 + 343 \langle x - 262,5 \rangle^0$$

$$M(x) = 257 \langle x \rangle^1 - 2 \langle x - 75 \rangle^2 + 2 \langle x - 225 \rangle^2 + 343 \langle x - 262,5 \rangle^1$$

6.27.



Réponse

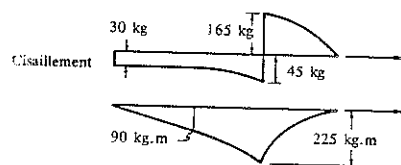


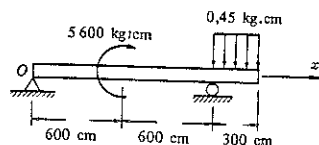
Fig. 6-57

$$p(x) = -30 \langle x \rangle^{-1} - 10 \langle x - 3 \rangle^1 + 210 \langle x - 6 \rangle^{-1}$$

$$F_T(x) = -30 \langle x \rangle^0 - 5 \langle x - 3 \rangle^2 + 210 \langle x - 6 \rangle^0$$

$$M(x) = -30 \langle x \rangle^1 - 5/3 \langle x - 3 \rangle^3 + 210 \langle x - 6 \rangle^1$$

5.28.



Réponse

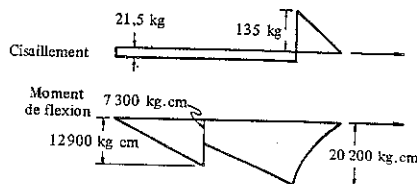


Fig. 6-58

$$p(x) = -21,5 \langle x \rangle^{-1} + 5600 \langle x - 600 \rangle^{-2} + 156,5 \langle x - 1200 \rangle^{-1}$$

$$F_T(x) = -21,5 \langle x \rangle^0 + 5600 \langle x - 600 \rangle^{-1} + 156,5 \langle x - 1200 \rangle^0$$

$$M(x) = -21,5 \langle x \rangle^1 + 5500 \langle x - 600 \rangle^0 + 156,5 \langle x - 1200 \rangle^1$$

CHAPITRE 7

Centres d'inertie, moments d'inertie et produits d'inertie des surfaces planes

MOMENT D'ORDRE UN D'UN ELEMENT DE SURFACE

Le moment d'ordre un d'un élément de surface autour de tout axe situé dans le plan de l'élément est donné par le produit de la surface de l'élément par sa distance à cet axe. Dans la Fig. 7-1, par exemple, le moment d'ordre un dQ_x de l'élément da , autour de l'axe des x , est donné par :

$$dQ_x = y da$$

Et autour de l'axe des y par :

$$dQ_y = x da$$

Pour les applications, voir le problème 7.1.

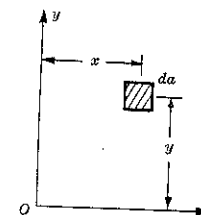


Fig. 7-1

MOMENT D'ORDRE UN D'UNE SURFACE FINIE

Le moment d'ordre un d'une surface finie autour de tout axe situé dans le plan de la surface est donné par la sommation des moments d'ordre un autour du même axe de tous les éléments de surface contenus dans la surface finie. Il est fréquemment calculé à l'aide d'une intégrale. En appelant Q_x le moment d'ordre un de la surface finie :

$$Q_x = \int dQ_x$$

Pour les applications, voir les problèmes 7.1, 7.2 et 7.3.

CENTRE D'INERTIE D'UNE SURFACE

Le centre d'inertie* d'une surface est défini par les équations :

$$\bar{x} = \frac{\int x da}{A} = \frac{Q_y}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\int y da}{A} = \frac{Q_x}{A}$$

dans lesquelles, A est la surface. Pour les applications, voir les problèmes 7.1, 7.2, 7.3, 7.10, 7.12, 7.13, 7.14 et 7.18.

Le centre d'inertie d'une surface est le point dans lequel toute la surface pourrait être considérée comme concentrée en laissant cependant inchangé le moment d'ordre un de la surface autour de tout axe. C'est ainsi, par exemple, qu'une plaque mince de métal resterait en équilibre sur un plan horizontal en la supportant en un point situé directement en dessous de son centre de gravité.

Pour quelques surfaces, la position du centre d'inertie est évidente. Dans une figure symétrique, tels un cercle ou un carré, le centre d'inertie coïncide avec le centre géométrique de la figure.

On désigne habituellement la position du centre d'inertie par une barre sur la coordonnée. C'est ainsi que la coordonnée sur l'axe des x du centre d'inertie est désignée par $\bar{x}$.

* N.d.T. Le centre d'inertie est très souvent appelé centre de gravité et ces deux dénominations sont synonymes. Nous utiliserons de préférence la première car, dans le domaine traité dans cet ouvrage, la gravitation ne joue aucun rôle dans la définition.

MOMENT D'ORDRE DEUX OU MOMENT D'INERTIE D'UN ELEMENT DE SURFACE

Le moment d'ordre deux ou moment d'inertie d'un élément de surface autour de tout axe dans le plan de la surface est donné par le produit de la surface de l'élément par le carré de sa distance à cet axe. Dans la figure précédente, le moment d'inertie dI_x de l'élément autour de l'axe des x est :

$$dI_x = y^2 da$$

Et le moment d'inertie autour de l'axe des y est :

$$dI_y = x^2 da$$

MOMENT D'ORDRE DEUX OU MOMENT D'INERTIE D'UNE SURFACE FINIE

Le moment d'ordre deux ou moment d'inertie d'une surface finie autour de tout axe dans le plan de la surface est donné par la sommation des moments d'inertie autour du même axe de tous les éléments de la surface contenus dans la surface finie. Il est fréquemment aussi obtenu à l'aide d'une intégrale. En désignant par I_x le moment d'inertie de la surface finie autour de l'axe des x , on obtient :

$$I_x = \int dI_x = \int y^2 da \quad I_y = \int dI_y = \int x^2 da$$

Pour les applications, voir les problèmes 7.4, 7.6, 7.7 et 7.9.

UNITES

Le moment d'inertie a pour dimension la quatrième puissance d'une longueur, et s'exprime en m^4 ou cm^4 .

THEOREME DES AXES PARALLELES POUR LE MOMENT D'INERTIE D'UNE SURFACE FINIE

Le théorème des axes parallèles pour le moment d'inertie d'une surface finie énonce que le moment d'inertie d'une surface autour d'un axe est égal au moment d'inertie autour d'un axe parallèle passant par le centre d'inertie de la surface, plus le produit de la surface par le carré de la distance perpendiculaire entre les deux axes. Pour la surface de la Fig. 7.2, les axes x_G et y_G passent au centre d'inertie de la surface plane. Les axes x et y sont des axes parallèles à ceux ci-dessus et situés à des distances x_1 et y_1 des axes du centre d'inertie. Soit A la surface de la figure, I_{x_G} et I_{y_G} les moments d'inertie autour des axes x et y . Nous avons alors :

$$I_x = I_{x_G} + A(y_1)^2$$

$$I_y = I_{y_G} + A(x_1)^2$$

Cette relation est établie dans le Problème 7.5. Pour les applications, voir les Problèmes 7.6, 7.8, 7.10, 7.11, 7.12, 7.13, 7.14 et 7.20.

SURFACES COMPOSEES

Le moment d'inertie d'une surface composée est la somme des moments d'inertie des surfaces

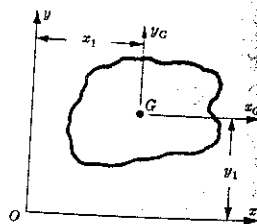


Fig. 7-2

composant l'ensemble. Aussi, il n'est pas nécessaire de procéder à une intégration dans le cas de surfaces pouvant être divisées en rectangles, triangles, cercles, etc., dont les moments individuels sont connus. Voir les problèmes 7.10 à 7.14.

RAYON DE GIRATION

En désignant par I_x le moment d'inertie d'une surface autour de l'axe des x , le rayon de giration r_x est défini par :

$$r_x = \sqrt{I_x/A}$$

De même, le rayon de giration par rapport à l'axe des y est :

$$r_y = \sqrt{I_y/A}$$

Puisque I a la dimension de la quatrième puissance d'une longueur et A la dimension de la deuxième puissance d'une longueur, le rayon de giration a la dimension d'une longueur et s'exprime en cm ou en m. Il est souvent utile pour les comparaisons, mais n'a aucune signification physique. Voir les Problèmes 7.12 et 7.13.

PRODUIT D'INERTIE D'UN ELEMENT DE SURFACE

Le produit d'inertie d'un élément de surface par rapport aux axes x et y dans le plan de la surface est donné par :

$$dI_{xy} = xy da$$

où x et y sont les coordonnées de l'élément de surface de la Fig. 7.1.

PRODUIT D'INERTIE D'UNE SURFACE FINIE

Le produit d'inertie d'une surface finie par rapport aux axes x , y dans le plan de la surface est donné par la sommation des produits d'inertie autour de ces mêmes axes de tous les éléments de surface contenus dans la surface finie. Ainsi :

$$I_{xy} = \int xy da$$

D'après cette formule, il est évident que I_{xy} peut être positif, négatif ou nul. Pour les applications, voir les Problèmes 7.15 et 7.17.

UNITES

Le produit d'inertie a la dimension de la quatrième puissance d'une longueur. Il s'exprime donc en m^4 ou en cm^4 .

THEOREME DES AXES PARALLELES POUR LE PRODUIT D'INERTIE D'UNE SURFACE FINIE

Le théorème des axes parallèles pour le produit d'inertie d'une surface finie énonce que le produit d'inertie d'une surface par rapport aux axes x , y est égal au produit d'inertie autour d'un système d'axes parallèles passant par le centre d'inertie de la surface, plus le produit de la surface par les deux distances perpendiculaires de ce centre aux axes x et y . Pour la surface de la Fig. 7-2, les axes x_G et y_G passent par le centre d'inertie de la surface plane. Les axes x et y sont des axes parallèles à ceux ci-dessus et situés à des distances x_1 et y_1 des axes du centre d'inertie. Soit A la surface de la figure et $I_{x_G y_G}$ le produit d'inertie autour des axes passant par le centre d'inertie, on a alors :

$$I_{xy} = I_{x_G y_G} + A x_G y_G$$

Cette relation est établie dans le Problème 7.16. Pour les applications, voir les Problèmes 7.17, 7.18 et 7.20.

SURFACES COMPOSEES

Le produit d'inertie d'une surface composée est la somme des produits d'inertie des surfaces composant l'ensemble. Ainsi, il n'est pas nécessaire de procéder à une intégration dans le cas de surfaces pouvant être divisées en rectangles, triangles, etc. . . Voir les Problèmes 7.17, 7.18 et 7.20.

MOMENTS PRINCIPAUX D'INERTIE

En tout point du plan d'une surface, il existe deux axes perpendiculaires autour desquels les moments d'inertie de la surface sont maximaux et minimaux en ce point. Ces valeurs maximales et minimales du moment d'inertie sont dénommées *moments principaux d'inertie* et sont donnés par :

$$(I_{x_1})_{\max} = \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + (I_{xy})^2}$$

$$(I_{x_1})_{\min} = \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + (I_{xy})^2}$$

Ces expressions sont établies dans le Problème 7.19. Pour les applications, voir le Problème 7.20.

AXES PRINCIPAUX

Les deux axes perpendiculaires passant par un point choisi et autour desquels les moments d'inertie d'une surface plane donnent un maximum et un minimum sont dénommés *axes principaux*. Pour les applications, voir le Problème 7.20.

Le produit d'inertie disparaît si les axes sont des axes principaux. D'après l'intégrale définissant le produit d'inertie d'une surface finie, il est évident que lorsque l'axe des x ou l'axe des y ou bien les deux sont axes de symétrie, le produit disparaît. Les axes de symétrie sont alors les axes principaux.

Problèmes résolus

7.1. Déterminer la position du centre d'inertie d'un triangle.

Introduisons le système de coordonnées représenté dans la Fig. 7-3.

L'ordonnée y du centre d'inertie est définie par la relation :

$$\bar{y} = \frac{\int y \, da}{A}$$

Le plus simple est de choisir un élément tel que y soit constant dans tous les points de cet élément. La zone horizontale hachurée satisfait cette condition et la surface da de l'élément est égale à $s \, dy$. Donc :

$$\bar{y} = \frac{\int y s \, dy}{A}$$

Le produit $y s \, dy$ représente le moment d'ordre un de l'élément autour de l'axe des x . D'après la règle des triangles semblables $s/b = (h-y)/h$.

En substituant cette valeur de s dans l'intégrale ci-dessus :

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h y \frac{b}{h} (h-y) \, dy}{\frac{1}{2}bh} = \frac{\frac{2}{h^2} \int_0^h (hy - y^2) \, dy}{\frac{1}{2}bh}$$

$$= \frac{\frac{2}{h^2} \left(h \{y^2/2\}_0^h - \{y^3/3\}_0^h \right)}{\frac{1}{2}bh} = \frac{\frac{2}{h^2} \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right)}{\frac{1}{2}bh} = \frac{1}{3}h$$

A partir de la distance du centre d'inertie à chaque côté du triangle, nous pouvons déterminer de façon univoque la position du centre d'inertie.

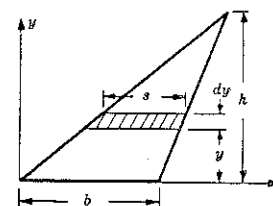


Fig. 7-3

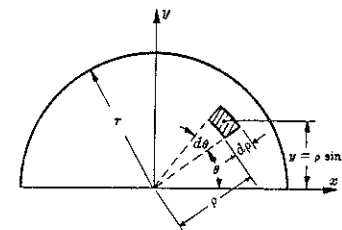


Fig. 7-4

7.2. Déterminer la position du centre d'inertie d'un demi-cercle.

Pour un tel contour, il est logique de choisir le système de coordonnées polaires représenté dans la Fig. 7-4. L'élément hachuré est approximativement un rectangle et sa surface a pour expression : $\rho \, d\theta \, d\rho$. L'ordonnée y du centre d'inertie est donnée par :

$$\bar{y} = \frac{\int y \, da}{\int da} = \frac{\int_0^\pi \int_0^r (\rho \sin \theta) (\rho \, d\theta \, d\rho)}{\int_0^\pi \int_0^r \rho \, d\theta \, d\rho} = \frac{\int_0^\pi [\rho^3/3]_0^r \sin \theta \, d\theta}{\int_0^\pi [\rho^2/2]_0^r \, d\theta} =$$

$$= \frac{r^3}{3} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = \frac{r^3}{3} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{4r}{3\pi}$$

Par symétrie, on a naturellement : $\bar{x} = 0$.

- 7.3. Déterminer la position du centre d'inertie de la partie hachurée de la Fig. 7-5. Il s'agit d'un rectangle dans lequel on a découpé un triangle et un demi-cercle.

La surface hachurée de la Fig. 7-5 se compose d'un rectangle (1) de dimensions 15 cm sur 30 cm, dont a été découpé (2) un triangle de 15 cm sur 7,5 cm et (3) une zone en demi-cercle. Puisque les centres d'inertie des zones (2) et (3) ont été déterminés dans les Problèmes 7.1 et 7.2, une intégration n'est pas nécessaire et une addition suffit.

L'ordonnée y du centre d'inertie est donnée par : $\bar{y} = \frac{\int y \, da}{A}$. Le numérateur représente le moment d'ordre un de la zone hachurée autour de l'axe des x . On peut le calculer en soustrayant du moment d'ordre un du rectangle, les moments d'ordre un du triangle et du demi-cercle. On obtient :

$$\bar{y} = \frac{(30)(15)(7,5) - \frac{1}{2}(7,5)(15)(10) - \frac{1}{2}\pi(5)^2[15 - \frac{4(5)}{3\pi}]}{(30)(15) - \frac{1}{2}(7,5)(15) - \frac{1}{2}\pi(5)^2} = 6,51 \text{ cm}$$

De même, l'abscisse $\bar{x}$ du centre d'inertie est donnée par $\bar{x} = \frac{\int x \, da}{A}$. Pour obtenir le numérateur, il suffit de soustraire du moment d'ordre un du rectangle, les moments d'ordre un du triangle et du demi-cercle. On obtient :

$$\bar{x} = \frac{(30)(15)(15) - \frac{1}{2}(7,5)(15)(2,5) - \frac{1}{2}\pi(5)^2(20)}{(30)(15) - \frac{1}{2}(7,5)(15) - \frac{1}{2}\pi(5)^2} = 16,43 \text{ cm}$$

- 7.4. Déterminer le moment d'inertie d'un rectangle autour d'un axe passant par le centre d'inertie et parallèle à la base.

Introduisons le système de coordonnées représenté dans la Fig. 7-6. Le moment d'inertie I_{x_G} autour de l'axe des x passant par le centre d'inertie est donné par : $I_{x_G} = \int y^2 \, da$. Par commodité, il est logique de considérer un élément tel que y soit constant dans tout l'élément. La surface hachurée représentée possède cette caractéristique.

$$I_{x_G} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b \, dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{1}{12} b h^3$$

Cette quantité a la dimension de la quatrième puissance d'une longueur et s'exprime en m^4 par exemple.

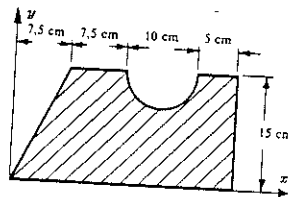


Fig. 7-5

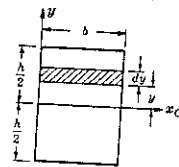


Fig. 7-6

- 7.5. Etablir le théorème des axes parallèles pour les moments d'inertie d'une surface plane.

Soit la surface plane A représentée dans la Fig. 7-7. Les axes x_G et y_G passent par son centre d'inertie, dont la position est supposée connue. Les axes x et y sont situés respectivement à des distances connues y_1 et x_1 des axes du centre d'inertie.

Le moment d'inertie autour de l'axe des x de l'élément de surface da est donné par :

$$dI_x = (y_1 + y)^2 da$$

Le moment d'inertie autour de l'axe des x de la surface entière A est :

$$I_x = \int dI_x = \int (y_1 + y)^2 da = \int (y_1)^2 da + 2 \int y_1 y \, da + \int (y)^2 da$$

La première intégrale de droite est égale à $y_1^2 \int da = y_1^2 A$, puisque y_1 est constant. La seconde intégrale de droite est égale à : $2y_1 \int y \, da = 2y_1(0) = 0$, puisque l'axe à partir duquel est mesuré y passe par le centre d'inertie de cette surface. La troisième intégrale de droite est égale à I_{x_G} , qui est le moment d'inertie de la surface autour de l'axe horizontal passant par le centre d'inertie. Donc :

$$I_x = I_{x_G} + A(y_1)^2$$

Un raisonnement analogue dans l'autre direction montrerait que :

$$I_y = I_{y_G} + A(x_1)^2$$

C'est le théorème des axes parallèles appliqué à des surfaces planes. On notera que l'un des axes contenus dans chaque équation doit passer par le centre d'inertie de la surface. Le théorème peut s'énoncer comme suit : Le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe ne passant pas par le centre d'inertie de la surface est égal à la somme du moment d'inertie autour d'un axe parallèle passant par le centre d'inertie de la surface et du produit de la même surface par le carré de la distance entre les deux axes.

Le moment d'inertie est toujours positif et présente un minimum pour les axes passant par le centre d'inertie de la surface considérée.

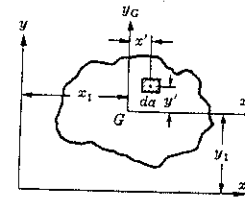


Fig. 7-7

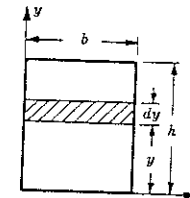


Fig. 7-8

- 7.6. Trouver le moment d'inertie d'un rectangle autour d'un axe coïncidant avec la base.

Le système de coordonnées représenté dans la Fig. 7-8 convient bien. Par définition, le moment d'inertie autour de l'axe des x est : $I_x = \int y^2 da$. L'ordonnée y est constante en tous les points de l'élément représenté. D'où :

$$I_x = \int_0^h y^2 b \, dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} b h^3$$

Cette solution aurait pu également être obtenue en appliquant le théorème des axes parallèles au résultat du Problème 7.4. Il indique que le moment d'inertie par rapport à la base est la somme du moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal passant par le centre d'inertie et du produit de la

surface par le carré de la distance entre ces deux axes. Donc :

$$I_x = I_{x_G} + A(y_1)^2 = \frac{1}{12}bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}bh^3$$

- 7.7. Trouver le moment d'inertie d'un triangle autour d'un axe coïncidant avec la base.

Introduisons le système de coordonnées de la Fig. 7-9. Le moment d'inertie autour de la base horizontale est :

$$I_x = \int y^2 da$$

L'ordonnée y est constante en tous les points de l'élément hachuré. Donc :

$$I_x = \int_0^h y^2 s dy$$

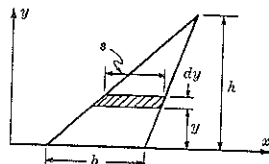


Fig. 7-9

Secon la règle des triangles semblables, $s/b = (h - y)/h$, donc :

$$I_x = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h - y) dy = \frac{b}{h} \left[h \int_0^h y^2 dy - \int_0^h y^3 dy \right] = \frac{1}{12}bh^3$$

- 7.8. Trouver le moment d'inertie d'un triangle autour d'un axe passant par le centre d'inertie et parallèle à la base.

Considérons l'axe x_G passant par le centre d'inertie et faisons coïncider l'axe des x avec la base, comme le montre la Fig. 7-10.

On sait, d'après le Problème 7.1, que l'axe x_G est situé à une distance de la base égale à $h/3$. Le théorème des axes parallèles nous dit également que :

$$I_x = I_{x_G} + A(y_1)^2$$

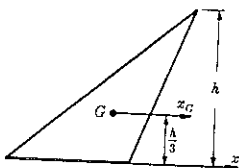


Fig. 7-10

Mais I_x a été déterminé dans le Problème 7.7 et A ainsi que $y_1 (= h/3)$ sont connus. Nous pouvons donc résoudre pour l'inconnue recherchée I_{x_G} . En substituant :

$$\frac{1}{12}bh^3 = I_{x_G} + \frac{1}{2}bh\left(\frac{h}{3}\right)^2 \quad \text{ou} \quad I_{x_G} = \frac{1}{36}bh^3$$

- 7.9. Trouver le moment d'inertie d'un cercle autour d'un diamètre.

Choisissons l'élément hachuré représenté dans la Fig. 7-11, et utilisons un système de coordonnées polaires. Le rayon du cercle est désigné par r .

Pour trouver I_x , nous avons la définition $I_x = \int y^2 da$.

Mais : $y = \rho \sin \theta$ et $da = \rho d\theta d\rho$. D'où :

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^2 \sin^2 \theta \rho d\theta d\rho = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \left[\frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^r \\ &= \frac{\pi^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi^4}{4} \end{aligned}$$

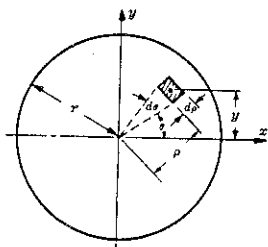


Fig. 7-11

En désignant par D le diamètre du cercle, alors $D = 2r$ et $I_x = \pi D^4/64$. Cette valeur est la moitié de celle du moment polaire d'inertie d'une surface circulaire pleine (voir le problème 5.1).

Le moment d'inertie d'une surface en demi-cercle autour d'un axe coïncidant avec sa base est donc :

$$I_x = \frac{1}{2} \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi D^4}{128}$$

- 7.10. Calculer le moment d'inertie d'un profilé en T autour d'un axe horizontal passant par le centre d'inertie, Fig. 7-12.

Il est d'abord nécessaire de déterminer la position du centre d'inertie de la surface. Pour cela, prenons le système de coordonnées représenté. Par définition, l'ordonnée y du centre d'inertie est :

$$\bar{y} = \frac{\int y da}{A}$$

Dans cette expression, le numérateur représente le moment d'ordre un autour de l'axe des x de la surface entière. On peut le calculer en multipliant la surface de chacun des trois rectangles 1, 2 et 3 composant le profilé en T par la distance à l'axe des x du centre d'inertie du rectangle particulier. Ainsi :

$$\bar{y} = \frac{(6)(4)(2) + (14)(4)(7) + (6)(4)(2)}{(6)(4) + (14)(4) + (6)(4)} = 4,7 \text{ cm}$$

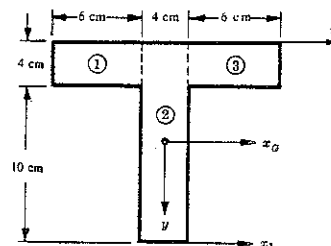


Fig. 7-12

Le centre d'inertie est donc situé à 4,7 cm en-dessous de l'axe des x . Dans la Fig. 7-12, l'axe horizontal passant en ce point est désigné par x_G .

Il existe plusieurs méthodes permettant de déterminer le moment d'inertie cherché. L'une de ces méthodes consiste à calculer le moment d'inertie autour de l'axe des x de la surface entière, puis à appliquer le théorème des axes parallèles pour transférer le résultat à l'axe x_G .

Le moment d'inertie autour de l'axe des x est la somme des moments d'inertie autour de ce même axe de chacun des trois rectangles composants. L'expression du moment d'inertie d'un rectangle autour d'un axe coïncidant avec sa base a été établie dans le Problème 7.6. Notons qu'il est plus commode de subdiviser comme nous l'avons fait le profilé en T en trois rectangles plutôt que de toute autre manière, parce que leurs moments d'inertie autour de l'axe des x a été calculé dans le Problème 7.6. Ainsi :

$$I_x = (1/3)(6)(4)^3 + (1/3)(4)(14)^3 + (1/3)(6)(4)^3 = 3.915 \text{ cm}^4$$

On peut maintenant appliquer le théorème des axes parallèles pour trouver le moment d'inertie autour de l'axe des x_G de la figure entière, ce qui donne :

$$I_x = I_{x_G} + A(y_1)^2, \quad 3.915 = I_{x_G} + 104(4,7)^2, \quad I_{x_G} = 1.617 \text{ cm}^4$$

- 7.11. Calculer le moment d'inertie du profilé en T du problème 7.10 autour d'un axe horizontal des x passant par son extrémité inférieure.

La position de l'axe est à : $(14 - 4,7) = 9,3$ cm en-dessous de l'axe horizontal passant par le centre d'inertie. Pour reporter le moment d'inertie connu depuis l'axe x_G jusqu'à l'axe x_1 , on peut appliquer le théorème des axes parallèles. On trouve :

$$I_{x_1} = I_{x_G} + A(y_1)^2 = 1.617 + 104(9,3)^2 = 10.612 \text{ cm}^4$$

Il faut bien noter que l'on ne peut appliquer le théorème des axes parallèles que si un des deux axes concernés passe par le centre d'inertie. Il n'est pas possible, par exemple, de transférer de l'axe

des x à l'axe des x_1 , en ajoutant simplement dans le deuxième membre le produit de la surface par le carré de la distance entre ces axes. La raison en est qu'aucun de ces axes ne passe par le centre d'inertie de la figure.

- 7.12. Calculer le moment d'inertie et le rayon de giration du profilé en U de la Fig. 7-13, par rapport à un axe horizontal passant par le centre d'inertie.

Le centre d'inertie se trouve sur l'axe des y et sa position est donnée par :

$$\bar{y} = \frac{\int y da}{A}$$

Le numérateur de cette expression représente le moment d'ordre un de la surface autour de l'axe des x . La surface entière se compose des trois rectangles représentés. Le moment d'ordre un de chacun de ces rectangles autour de l'axe des x est donné par le produit de sa surface par la distance de son centre d'inertie à l'axe des x . Donc :

$$\bar{y} = \frac{(2)(10)(5) + (20)(2)(1) + (2)(10)(5)}{(2)(10) + (20)(2) + (2)(10)} = 3 \text{ cm}$$

L'axe horizontal passant par le centre d'inertie est désigné par x_G dans la Fig. 7-13.

Il est commode de calculer d'abord le moment d'inertie par rapport à l'axe des x . Pour chacun des trois rectangles, le moment d'inertie autour d'un axe passant par sa base est donné dans le Problème 7.6 et est égal à $I_x = bh^3/3$. Pour le profilé entier, on a :

$$I_x = \frac{1}{3}(2)(10)^3 + \frac{1}{3}(20)(2)^3 + \frac{1}{3}(2)(10)^3 = 1.387 \text{ cm}^4$$

D'après le théorème des axes parallèles :

$$I_x = I_{xG} + A(y_1)^2, \quad 1.387 = I_{xG} + 80(3)^2 \quad \text{et} \quad I_{xG} = 667 \text{ cm}^4$$

Le rayon de giration par rapport à l'axe des x_G est : $r_{xG} = \sqrt{I_{xG}/A} = \sqrt{667/80} = 2,89 \text{ cm}$.

- 7.13. Calculer le moment d'inertie et le rayon de giration du profilé en I de la Fig. 7-14 autour d'un axe horizontal passant par le centre d'inertie.

Le centre d'inertie se trouve sur l'axe des y et sa position est donnée par :

$$\bar{y} = \frac{\int y da}{A}$$

La section entière peut être décomposée en cinq rectangles et il est possible d'obtenir le numérateur de la fraction ci-dessus par une simple addition :

$$\bar{y} = \frac{8(4)(2) + 22(4)(11) + 8(4)(2) + 6(4)(20) + 6(4)(20)}{(8)(4) + (22)(4) + (8)(4) + (6)(4) + (6)(4)} = 10,28 \text{ cm}$$

L'axe horizontal passant par le centre d'inertie est désigné dans la figure par x_G .

Calculons d'abord le moment d'inertie par rapport à l'axe des x . Le moment d'inertie de chacun des rectangles 1, 2 et 3 est égal à $I_x = bh^3/3$. Pour les rectangles 4 et 5, il est nécessaire

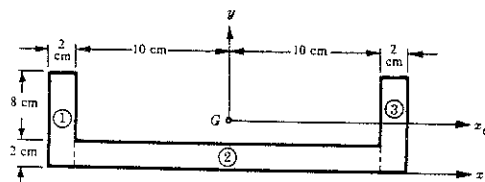


Fig. 7-13

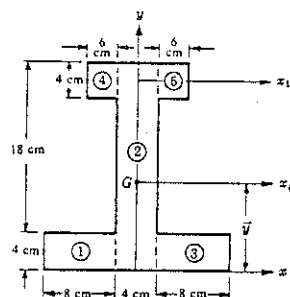


Fig. 7-14

de calculer d'abord le moment d'inertie autour d'un axe horizontal x_1 passant par le centre d'inertie de ces rectangles et ensuite d'appliquer le théorème des axes parallèles pour reporter le résultat sur l'axe des x .

Pour la surface entière, on trouve alors :

$$I = (1/3)(8)(4)^3 + (1/3)(4)(22)^3 + (1/3)(8)(4)^3 + [(1/12)(6)(4)^3 + (6)(4)(20)^2]2 = 33.800 \text{ cm}^4$$

L'application du théorème des axes parallèles donne :

$$I_x = I_{xG} + A(y_1)^2, \quad 33.800 = I_{xG} + 200(10,28)^2 \quad \text{et} \quad I_{xG} = 12.665 \text{ cm}^4$$

Le rayon de giration par rapport à l'axe des x_G est :

$$r_{xG} = \sqrt{I_{xG}/A} = \sqrt{12.665/200} = 7,96 \text{ cm}$$

- 7.14. Calculer le moment d'inertie autour d'un axe horizontal passant par le centre d'inertie de la surface rectangulaire creuse de la Fig. 7-15.

La position du centre d'inertie, qui se trouve sur l'axe des y est donnée par :

$$\bar{y} = \frac{\int y da}{A}$$

Pour calculer le numérateur, il suffit de soustraire du moment d'ordre un du rectangle entier de 16 cm par 20 cm autour de l'axe des x , le moment d'ordre un du petit rectangle de 4 cm sur 6 cm qui a été enlevé. Ainsi :

$$\bar{y} = \frac{(16)(20)(10) - (4)(6)(13)}{(16)(20) - (4)(6)} = 9,76 \text{ cm}$$

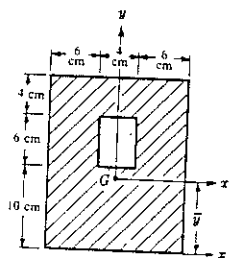


Fig. 7-15

L'axe horizontal passant par le centre d'inertie est désigné par x_G .

Nous allons d'abord calculer le moment d'inertie du rectangle entier de 16 cm sur 20 cm autour de l'axe x_G . Ceci s'effectue en déterminant le moment d'inertie autour d'un axe horizontal passant par le centre d'inertie de ce rectangle (en supposant que le trou de 4 cm sur 6 cm n'existe pas), puis en transférant le résultat sur l'axe des x_G . L'application du théorème des axes parallèles au rectangle entier de 16 cm sur 20 cm donne :

$$I_{xG} = (1/12)(16)(20)^3 + (16)(20)(10 - 9,76)^2 = 10.685 \text{ cm}^4$$

On obtient de la même manière le moment d'inertie du rectangle de 4 cm sur 6 cm qui a été enlevé par rapport à l'axe des x_G . On calcule d'abord le moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal passant par son centre d'inertie, puis on le transfère sur l'axe des x_G . Cela donne :

$$I_{xG}'' = (1/12)(4)(6)^3 + (4)(6)(13 - 9,76)^2 = 324 \text{ cm}^4$$

Le moment d'inertie de la surface creuse rectangulaire est alors :

$$I_x = 10.685 - 324 = 10.361 \text{ cm}^4$$

- 7.15. Déterminer le produit d'inertie d'un rectangle par rapport aux axes x - y , comme le montre la Fig. 7-16.

Utilisons la définition $I_{xy} = \int xy da$ et appliquons la à l'élément hachuré de la figure. En intégrant :

$$I_{xy} = \int_{y=0}^{y=h} \int_{x=0}^{x=b} xy dx dy = \int_{y=0}^{y=h} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b y dy = \frac{b^2}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{b^2 h^2}{4}$$

(1)

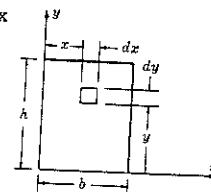


Fig. 7-16

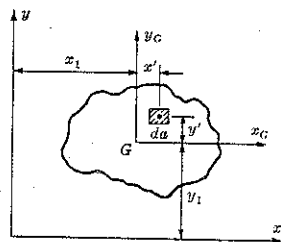


Fig. 7-17

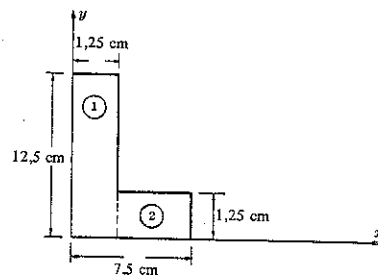


Fig. 7-18

- 7.16 Etablir le théorème des axes parallèles pour le produit d'inertie d'une surface plane.

Dans la Fig. 7-17, les axes x_G et y_G passent par le centre d'inertie de la surface A . Les axes x et y sont situés respectivement aux distances connues y_1 et x_1 des axes passant par le centre d'inertie.

Pour l'élément de surface da , le produit d'inertie par rapport aux axes x, y est donné par :

$$dI_{xy} = (x_1 + x')(y_1 + y') dx dy$$

Le produit d'inertie par rapport aux axes x, y de la surface entière est :

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int dI_{xy} = \iint (x_1 + x')(y_1 + y') dx dy \\ &= \iint x_1 y_1 dx dy + \iint x' y_1 dx dy + \iint x_1 y' dx dy + \iint x' y' dx dy \end{aligned}$$

La première intégrale du côté droit est égale à $x_1 y_1 A$, puisque x_1 et y_1 sont constants. La seconde et la troisième intégrales disparaissent, car x' et y' sont mesurés à partir d'axes passant par le centre d'inertie de la surface A . La quatrième intégrale est égale à $I_{x_G y_G}$, qui est le produit d'inertie de la surface par rapport aux axes passant par son centre d'inertie et parallèles aux axes x, y . On a ainsi :

$$I_{xy} = x_1 y_1 A + I_{x_G y_G} \quad (1)$$

Ce résultat est l'expression du théorème des axes parallèles pour le produit d'inertie d'une surface plane. On notera qu'il est nécessaire que les axes x_G, y_G passent par le centre d'inertie de la surface. De même, x_1 et y_1 ne sont positifs que si les coordonnées x, y ont par rapport au système x_G, y_G la position relative représentée dans la Fig. 7-17. Il faut donc faire attention au signe algébrique de x_1 et de y_1 .

- 7.17. Calculer I_{xy} pour la cornière de la Fig. 7-18.

La section de la cornière peut être décomposée en rectangles comme le montre la figure. D'après le Problème 7.15, on a pour le rectangle 1 :

$$(I_{xy})_1 = \frac{1}{4} (1,25)^2 (12,5)^2 = 61 \text{ cm}^4$$

Pour le rectangle 2, appliquons la formule (1) du Problème 7.16. Le produit d'inertie du rectangle 2 autour des axes passant par son centre d'inertie et parallèles aux axes x, y disparaît, parce que ce sont des axes de symétrie. Donc pour le rectangle 2, $I_{x_G y_G} = 0$. Le théorème des axes parallèles du Problème 7.16 donne donc :

$$(I_{xy})_2 = (4,365) (0,625) (1,25) (6,25) = 21,3 \text{ cm}^4$$

Pour la cornière entière, on a donc :

$$I_{xy} = 61 + 21,3 = 82,3 \text{ cm}^4$$

- 7.18. Calculer le produit d'inertie de la cornière du Problème 7.17 par rapport à des axes parallèles aux axes x, y et passant par le centre d'inertie de la cornière.

Il est d'abord nécessaire de trouver la position du centre d'inertie de la section, c'est à dire de trouver $\bar{x}$ et $\bar{y}$. On a :

$$\bar{x} = \frac{(12,5)(1,25)(0,625) + (6,25)(1,25)(4,375)}{(12,5)(1,25) + (6,25)(1,25)} = 1,87 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{(12,5)(1,25)(6,25) + (6,25)(1,25)(0,625)}{(12,5)(1,25) + (6,25)(1,25)} = 4,37 \text{ cm}$$

Appliquons maintenant le théorème des axes parallèles du Problème 7.16, c'est-à-dire :

$$I_{xy} = x_1 y_1 A + I_{x_G y_G}$$

Dans le Problème 7.17, on a trouvé : $I_{xy} = 82,3 \text{ cm}^4$. Donc :

$$82,3 = (1,87)(4,37)(23,42) + I_{x_G y_G} \quad \text{d'où : } I_{x_G y_G} = -109 \text{ cm}^4$$

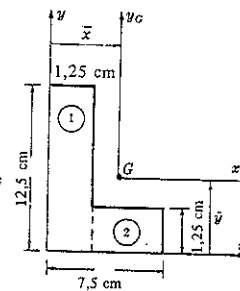


Fig. 7-19

- 7.19. Considérons une surface plane A , pour laquelle I_x, I_y et I_{xy} sont connus. Calculer les moments d'inertie I_{x_1} et I_{y_1} ainsi que le produit d'inertie $I_{x_1 y_1}$ pour le système de coordonnées x_1, y_1 orienté comme le montre la Fig. 7-20. Déterminer également le maximum et le minimum de I_{x_1} .

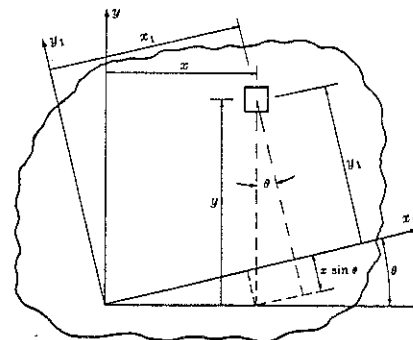


Fig. 7-20

Le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe x_1 est :

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int y_1^2 da = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 da \\ &= \cos^2 \theta \int y^2 da + \sin^2 \theta \int x^2 da - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy da \\ &= I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2 I_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ &= I_x \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) + I_y \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) - I_{xy} \sin 2\theta \end{aligned}$$

Ou

$$I_{x_1} = \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) + \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (1)$$

On peut de même obtenir I_{y_1} en remplaçant dans l'équation (1), θ par $\theta + \pi/2$, ce qui donne :

$$I_{y_1} = \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) - \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

On obtient la valeur de θ qui rend I_{x_1} maximal ou minimal en posant égale à zéro la dérivée de l'équation (1) par rapport à θ . Puisque I_x , I_y et I_{xy} sont constants, d'après l'équation (1), on a :

$$\frac{dI_{x_1}}{d\theta} = -(I_x - I_y) \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

En solvant :

$$\tan 2\theta = -\frac{I_{xy}}{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)} \quad (3)$$

La représentation graphique de l'équation (3) est donnée dans la Fig. 7-21.



Fig. 7-21

En portant dans l'équation (1) les valeurs de 2θ fournies par l'équation (3), on obtient :

$$(I_{x_1})_{\max} = \left(\frac{I_x + I_y}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2} \quad (4)$$

dans laquelle le signe plus se rapporte au Cas I et le signe moins au Cas II. Ce maximum et ce minimum du moment d'inertie correspondent aux axes définis par l'équation (3). On les appelle *moments principaux* d'inertie et les axes correspondant sont les axes principaux.

On peut alors déterminer $I_{x_1 y_1}$ à partir de :

$$\begin{aligned} I_{x_1 y_1} &= \int x_1 y_1 da \\ &= \int (x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta) da \\ &= \cos^2 \theta \int xy da - \sin^2 \theta \int xy da \\ &\quad + \sin \theta \cos \theta \int y^2 da - \sin \theta \cos \theta \int x^2 da \\ &= I_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta \\ &= \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (5)$$

L'équation (5) montre que $I_{x_1 y_1}$ disparaît pour :

$$\tan 2\theta = -\frac{I_{xy}}{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)}$$

qui est identique à la relation (3). Puisque l'équation (3) définit les axes principaux, il en résulte que le produit d'inertie disparaît pour les axes principaux.

7.20. Un profilé en Z en aluminium 6 Z 5.42 a les dimensions nominales données dans la Fig. 7-22. Calculer I_x , I_y et I_{xy} , ainsi que le maximum et le minimum du moment d'inertie par rapport aux axes passant par le point O.

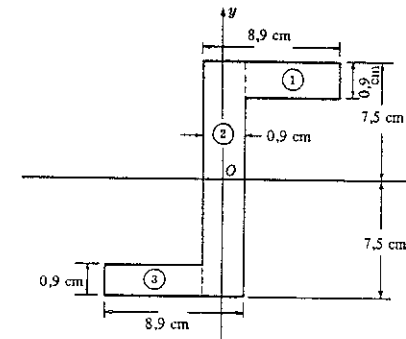


Fig. 7-22

La section peut être décomposée en rectangles 1, 2 et 3 comme le montre la figure. Pour calculer I_x et I_y , on peut utiliser les résultats obtenus dans le Problème 7-4, ainsi que le théorème des axes parallèles donné dans le Problème 7.5 :

$$I_x = \frac{1}{12} (0.9) (15)^3 + 2 \left[\frac{1}{12} (8) (0.9)^3 + (8) (0.9) (7.05)^2 \right] = 969 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} (15) (0.9)^3 + 2 \left[\frac{1}{12} (0.9) (8)^3 + (0.9) (8) (4.45)^2 \right] = 362 \text{ cm}^4$$

On peut calculer le produit d'inertie par rapport aux axes x, y en appliquant le théorème des axes parallèles pour le produit d'inertie donné dans le Problème 7.16. Il faut noter que le produit d'inertie de chacun des rectangles autour d'axes passant par leur centre d'inertie et parallèles aux axes x, y disparaît, puisque ce sont des axes de symétrie. D'après l'équation (1) du Problème 7.16, pour la section en Z entière, on a :

$$I_{xy} = 2 [(4.45) (7.05) (8) (0.9)] = 452 \text{ cm}^4$$

Le maximum et le minimum du moment d'inertie par rapport aux axes passant par le point O peuvent se calculer à l'aide de l'équation (4) du Problème 7.19. Elle donne :

$$(I_{x_1})_{\max} = \frac{969 + 362}{2} \pm \sqrt{\frac{(969)^2 - (362)^2}{2} + (452)^2}$$

$$(I_{x_1})_{\max} = 1445 \text{ cm}^4$$

$$(I_{x_1})_{\min} = 115 \text{ cm}^4$$

L'orientation de ces moments principaux d'inertie s'obtient à l'aide de l'équation (3) du Problème 7.19, ce qui donne :

$$\tan 2\theta = -\frac{452}{\left(\frac{969 - 362}{2}\right)} = -1,489$$

$$\theta = -28^\circ \quad -118^\circ$$

Les moments principaux d'inertie donnés dans les équations (1) et (2) correspondent aux axes principaux donnés par l'équation (3). Ces axes principaux sont représentés en traits discontinus dans la Fig. 7-23.

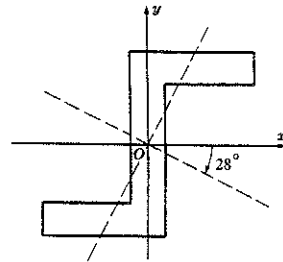


Fig. 7-23

Problèmes supplémentaires

- 7.21. Trouver la position du centre d'inertie de la surface hachurée représentée dans la Fig. 7-24. Il s'agit d'un demi-cercle dont on a enlevé une partie rectangulaire. *Rép.* : $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 5,60 \text{ cm}$

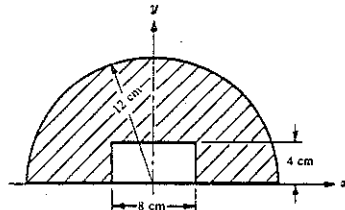


Fig. 7-24

- 7.22. Trouver la position du centre d'inertie de la surface hachurée de la Fig. 7-25. *Rép.* : $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 8,37 \text{ cm}$

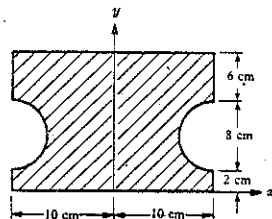


Fig. 7-25

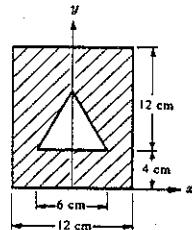


Fig. 7-26

- 7.23. Trouver la position du centre d'inertie de la surface hachurée du rectangle qui subsiste après l'enlèvement du triangle équilatéral de la Fig. 7-26. *Rép.* : $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 8,2 \text{ cm}$

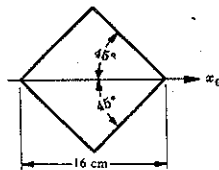


Fig. 7-27

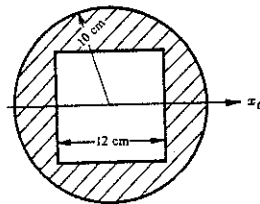


Fig. 7-28

- 7.24. Calculer le moment d'inertie d'un triangle équilatéral de 12 cm de côté autour d'un axe passant par le centre d'inertie et parallèle à la base. *Rép.* : $I_{x_G} = 374,1 \text{ cm}^4$
- 7.25. Calculer le moment d'inertie d'un quart de cercle de rayon 4 cm autour d'un diamètre coïncidant avec un côté du quart de cercle. *Rép.* : $I_{x_G} = 50,27 \text{ cm}^4$
- 7.26. Calculer le moment d'inertie de la figure en forme de diamant représentée dans la Fig. 7-27, par rapport à l'axe horizontal de symétrie. *Rép.* : $I_{x_G} = 1365 \text{ cm}^4$
- 7.27. Se reporter à la Fig. 7-28. Calculer le moment d'inertie autour de l'axe des x_G de la portion hachurée subsistant après l'enlèvement du cercle de la surface carrée. L'axe x_G est axe de symétrie. *Rép.* : $I_{x_G} = 6126 \text{ cm}^4$

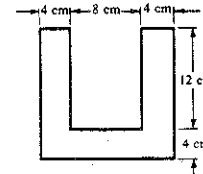


Fig. 7-29

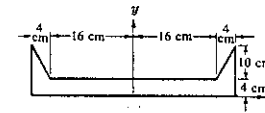


Fig. 7-30

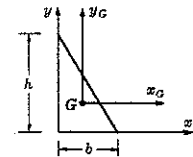


Fig. 7-31

- 7.28. Calculer le moment d'inertie d'un profilé en U autour d'un axe horizontal passant par le centre d'inertie. Se reporter à la Fig. 7-29. Quelle est la valeur du rayon de giration autour du même axe ? *Rép.* : $I_{x_G} = 3695 \text{ cm}^4$, $r_{x_G} = 4,80 \text{ cm}$
- 7.29. Trouver la position du centre d'inertie du profilé en U de la Fig. 7-30 et calculer le moment de la section autour d'un axe horizontal passant par le centre d'inertie. *Rép.* : $\bar{y} = 3,07 \text{ cm}$, $I_{x_G} = 1334 \text{ cm}^4$
- 7.30. Déterminer le produit d'inertie d'un triangle par rapport aux axes x, y représentés dans la Fig. 7-31. *Rép.* : $b^2 h^2 / 24$
- 7.31. Déterminer le produit d'inertie du triangle de la Fig. 7-31 par rapport aux axes x_G et y_G passant par le centre d'inertie. *Rép.* : $-b^2 h^2 / 72$
- 7.32. Soit la surface plane représentée dans la Fig. 7.32. Calculer les moments d'inertie et le produit d'inertie par rapport aux axes x_G et y_G passant par le centre d'inertie. Calculer également le moment principal d'inertie par rapport au centre d'inertie.

$$\text{Rép. : } I_{x_G} = 39\,819 \text{ cm}^4$$

$$I_{x_G y_G} = -5832 \text{ cm}^4$$

$$(I_{x_1})_{\max} = 41\,223 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_G} = 14\,508 \text{ cm}^4$$

$$(I_{x_1})_{\min} = 13\,104 \text{ cm}^4$$

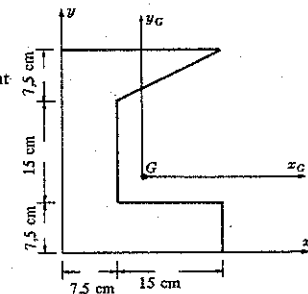


Fig. 7-32

CHAPITRE 8

Contraintes dans les poutres

TYPES DE CHARGES APPLIQUEES SUR LES POUTRES

Les forces ainsi que les couples se trouvant dans un plan contenant l'axe longitudinal de la poutre peuvent agir sur la structure. Les forces sont considérées agir perpendiculairement à l'axe longitudinal et, par hypothèse, le plan contenant les forces est un plan de symétrie de la poutre.

EFFETS DES CHARGES

Les effets de ces forces et couples agissant sur une poutre sont : (a) de produire des déflexions perpendiculaires à l'axe longitudinal de la poutre et (b) d'imposer des contraintes normales et de cisaillement sur toute section droite de la poutre perpendiculaire à l'axe. Les déflexions des poutres sont étudiées dans les Chapitres 9, 10 et 11.

TYPES DE FLEXION

Lorsque des couples sont appliqués aux extrémités de la poutre et qu'aucune force n'agit sur elle, on est en présence de *flexion pure*(*). Dans la Fig. 8-1, par exemple, la portion de la poutre entre les deux forces dirigées vers le bas est sollicitée en flexion pure. La flexion produite par des forces ne formant pas des couples est dite *flexion ordinaire*. Une poutre sollicitée en flexion pure n'est soumise qu'à des contraintes normales sans qu'il apparaisse des contraintes de cisaillement. Une poutre sollicitée en flexion ordinaire est soumise à des contraintes normales et à des contraintes de cisaillement.

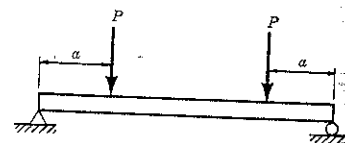


Fig. 8-1

COMPORTEMENT DES POUTRES

Il est commode de considérer une poutre comme composée d'un nombre infini de fibres minces longitudinales. Par hypothèse, chaque fibre agit indépendamment des autres fibres, c'est à dire qu'il n'existe ni pression latérale ni contraintes de cisaillement entre elles. La poutre de la Fig. 8-1, par exemple, fléchira vers le bas. Les fibres de la partie inférieure seront en extension et celles de la partie supérieure en contraction. Ces changements de longueur produisent des contraintes dans les fibres. Celles qui s'allongent subissent des contraintes de tension agissant en direction de l'axe longitudinal de la poutre, tandis que celles qui se contractent subissent des contraintes de compression.

SURFACE NEUTRE

Dans une poutre, il existe toujours une surface contenant des fibres qui ne sont soumises ni à une extension ni à une contraction, donc à aucune contrainte de tension ou de compression. Cette surface porte le nom de *surface neutre* de la poutre.

(*) N.d.T. Ce type de flexion est également appelé flexion circulaire.

SURFACE NEUTRE

L'intersection de la surface neutre avec toute section droite de la poutre perpendiculaire à l'axe longitudinal est appelé l'*axe neutre*. Les fibres situées d'un côté de l'axe neutre sont toutes dans un état de tension et celles du côté opposé sont toutes en compression.

MOMENT DE FLEXION

La somme algébrique des moments des forces extérieures à un côté de toute section droite de la poutre autour d'un axe passant par cette section est appelée le moment de flexion dans cette section. Cette notion est étudiée dans le Chapitre 6.

FLEXION ELASTIQUE DES POUTRES

Les remarques suivantes s'appliquent *seulement si* toutes les fibres de la poutre ont un comportement purement élastique.

CONTRAINTES NORMALES DANS LES POUTRES

Dans les poutres possédant un plan de symétrie longitudinal et qui sont sollicitées par un moment de flexion M agissant sur une certaine section droite, la contrainte normale agissant sur une fibre longitudinale à une distance y de l'axe neutre de la poutre, (voir la Fig. 8-2) est donnée par :

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

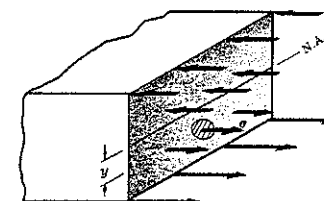


Fig. 8-2

où I représente le moment d'inertie de la surface de la section autour de l'axe neutre. Cette grandeur a été étudiée dans le Chapitre 7. L'établissement de cette équation est présenté en détail dans le Problème 8.1.

Pour les applications, voir les Problèmes 8.2 à 8.16. Comme le représente la figure, ces contraintes varient depuis zéro sur l'axe neutre jusqu'à un maximum sur les fibres extérieures. Les contraintes sont de tension d'un côté de l'axe neutre et de compression sur l'autre. On les appelle souvent contraintes de flexion ou contraintes de fibres.

POSITION DE L'AXE NEUTRE

Lorsque la poutre a un comportement purement élastique, l'axe neutre passe par le centre d'inertie de la section. De ce fait, le moment d'inertie I apparaissant dans l'équation ci-dessus de la contrainte normale est le moment d'inertie de la section autour d'un axe passant par son centre d'inertie.

MODULE DE SECTION

La valeur de l'ordonnée y des fibres extérieures est fréquemment désignée par c . Les contraintes normales maximales sont alors données par :

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{M}{I/c}$$

POSITION DE L'AXE NEUTRE

Lorsque le comportement de la poutre est purement élastique, l'axe neutre passe par le centre d'inertie de la section. Mais, le comportement plastique s'étendant des fibres extérieures vers l'intérieur, l'axe neutre passe de sa position initiale en une autre telle que la force nulle résultante sur une section quelconque disparaisse. Ceci est étudié dans le Problème 8.29. Dans le cas limite du comportement totalement plastique, l'axe neutre prend une position telle que la surface entière de la section est divisée en deux parties égales. Cette situation est étudiée dans le Problème 8.27.

MOMENT TOTALEMENT PLASTIQUE

Le moment de flexion correspondant au comportement totalement plastique est dénommé *moment totalement plastique* et il est désigné par M_p . D'après la courbe contrainte-déformation admise plus haut, il ne peut pas se développer de moment plus grand.

Le Problème 8.23 montre que, dans une poutre de section rectangulaire, le moment totalement plastique a pour expression $M_p = bh^2\sigma_p/4$, où b est la largeur de la poutre et h sa hauteur.

Problèmes résolus

- 8.1. Etablir la relation entre le moment de flexion en un point quelconque d'une poutre et la contrainte de flexion en un point quelconque de cette section. Admettre que la loi de Hooke s'applique.

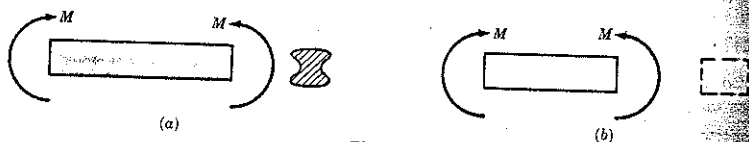


Fig. 8-7

La poutre représentée dans la Fig. 8-7(a) et sollicitée par les deux couples M est donc en équilibre statique. Puisque le moment de flexion a même valeur en tous les points de la poutre, elle est donc sollicitée en flexion pure. Pour déterminer la répartition des contraintes de flexion dans la poutre, coupons-la par un plan perpendiculaire à un axe longitudinal. Les forces recherchées deviennent alors extérieures par rapport au nouveau corps, bien que ce soient des effets internes par rapport à la poutre initiale non coupée.

Le schéma de corps libre de la portion de la poutre à gauche du plan coupant présente l'aspect de la Fig. 8-7(b). Il est évident que le moment M doit agir sur la section coupée par le plan de coupe, sorte que la portion de gauche de la poutre soit en équilibre statique. Le moment M agissant sur la section découpée représente l'effet de la portion de droite de la poutre sur la portion de gauche, bien que la portion de droite a été enlevée, elle doit être remplacée par son effet sur la portion de gauche, qui est représenté par le moment M . Ce moment est la résultante des moments des forces agissant perpendiculairement à la section découpée et dans le plan de la figure. Il est maintenant nécessaire de faire certaines hypothèses afin de connaître la nature de la variation de ces forces sur la section.

Il est commode d'admettre que la poutre est composée d'un nombre infini de fibres longitudinales minces. On admet que chaque fibre longitudinale agit indépendamment de toutes les autres et qu'entre les fibres adjacentes il n'y a ni pression latérale ni contrainte de cisaillement. Chaque fibre n'est donc

soumise qu'à une compression ou à une tension axiale. En outre, on fait l'hypothèse qu'une section plane normale à l'axe de la poutre avant application de la charge reste plane et normale à l'axe après cette application. Enfin, on admet que le matériau suit la loi de Hooke et que les modules d'élasticité en tension et en compression sont égaux.

Considérons maintenant deux sections adjacentes aa et bb marquées sur le côté de la poutre dans la Fig. 8-8. Avant charge, ces sections sont parallèles. Après application de la charge, elles sont encore planes, mais elles ont tourné l'une par rapport à l'autre dans les positions représentées où O est le centre de courbure de la poutre. Il est évident que les fibres de la face supérieure de la poutre sont en compression et que celles de la face inférieure se sont légèrement allongées et sont en tension. La ligne cd est la trace de la surface dans laquelle les fibres n'ont pas été déformées pendant la flexion. Cette surface est dite la surface neutre et son intersection avec les sections est dite l'axe neutre. Pour trouver l'allongement de la fibre longitudinale à une distance y (mesurée positivement vers le bas), on trace une ligne de parallèle à aa . En appelant ρ le rayon de courbure de la poutre fléchie, les triangles semblables cOd et edf permettent de calculer la déformation de cette fibre :

$$\epsilon = \frac{cf}{cd} = \frac{de}{cO} = \frac{y}{\rho} \quad (1)$$

Les déformations dans les fibres longitudinales sont donc proportionnelles à leur distance y de l'axe neutre.

Puisque la loi de Hooke est applicable, $E = \sigma/\epsilon$ ou $\sigma = E\epsilon$. Il en résulte immédiatement que les contraintes existant dans les fibres longitudinales sont proportionnelles à la distance y de l'axe neutre :

$$\sigma = \frac{E y}{\rho} \quad (2)$$

Considérons une poutre de section rectangulaire, bien que le raisonnement soit applicable à toute section possédant un plan longitudinal de symétrie. Dans ce cas, ces contraintes longitudinales ou de flexion ont l'aspect de la Fig. 8-9.

Soit un élément da de surface à une distance y de l'axe neutre. La contrainte agissant sur da est donnée par l'expression ci-dessus et, en conséquence, la force sur cet élément est le produit de la contrainte par la surface da , c'est-à-dire :

$$dF = \frac{E y}{\rho} da \quad (3)$$

Mais la force longitudinale résultante agissant sur la section est nulle (dans le cas de flexion pure). Cette condition s'exprime en intégrant toutes les forces dF sur la section :

$$\int \frac{E y}{\rho} da = \frac{E}{\rho} \int y da = 0 \quad (4)$$

Il est évident que $\int y da = 0$. Mais cette intégrale représente le moment d'ordre un de la section par rapport à l'axe neutre, puisque y est mesuré à partir de cet axe. D'après le Chapitre 7, nous pouvons écrire $\int y da = \bar{y} A$, où $\bar{y}$ est la distance au centre d'inertie de la section. Il en résulte que $\bar{y} A = 0$ et puisque A n'est pas nul alors $\bar{y} = 0$. Donc, à condition que la loi de Hooke soit applicable, l'axe neutre passe toujours par le centre d'inertie de la section.

Le moment de l'élément de force dF par rapport à l'axe neutre est donné par :

$$dM = y dF = y \left(\frac{E y}{\rho} da \right) \quad (5)$$

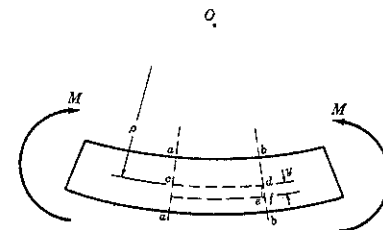


Fig. 8-8

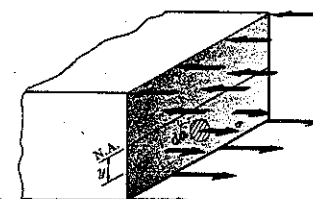


Fig. 8-9

On obtient la résultante des moments de toutes ces forces en intégrant sur la section entière. Elle doit être égale au moment de flexion M agissant sur cette section et on peut donc écrire :

$$M = \int \frac{E y^2}{\rho} da \quad (6)$$

Mais $I = \int y^2 da$, on a donc :

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad (7)$$

Il faut bien noter que ce moment d'inertie de la section est calculé par rapport à l'axe passant par le centre d'inertie de la section. Mais on a trouvé précédemment :

$$\sigma = \frac{E y}{\rho} \quad (8)$$

En éliminant ρ des deux dernières équations, on obtient :

$$\sigma = \frac{M y}{I} \quad (9)$$

Cette formule donne les contraintes de flexion dans la poutre. M est le moment de flexion autour d'un axe passant par son centre d'inertie et y la distance à l'axe neutre (qui passe par le centre d'inertie) de la fibre sur laquelle agit la contrainte σ .

La valeur de y pour les fibres extérieures de la poutre est fréquemment désigné par c . Sur ces fibres, les contraintes de flexion sont maximales et on peut écrire pour elles :

$$\sigma = \frac{M c}{I} \quad (10)$$

- 8.2. Une poutre est sollicitée par un couple de 8000 kg.cm à chaque extrémité, Fig. 8-10. La poutre est en acier de section rectangulaire de 2 cm de largeur et de 4 cm de hauteur. Calculer la contrainte de flexion maximale dans la poutre et indiquer la variation de la contrainte de flexion sur la hauteur de la poutre.

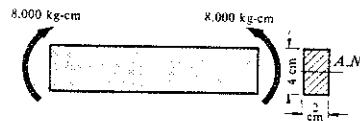


Fig. 8-10

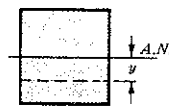


Fig. 8-11

D'après le Problème 8.1, la flexion se produit par rapport à l'axe neutre noté A.N., qui passe par le centre d'inertie de la section. Le moment d'inertie de la section rectangulaire ombrée autour de cet axe a été calculé dans le Problème 7.4 et il est :

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12}(2)(4)^3 = 10,67 \text{ cm}^4$$

D'après le Problème 8.1, la contrainte à une distance y de l'axe neutre est donné par la formule $\sigma = My/I$, Fig. 8-11. Donc toutes les fibres longitudinales de la poutre à la distance y de l'axe neutre sont soumises à la même contrainte de flexion donnée par la formule ci-dessus.

Puisque M et I sont constants sur toute la longueur de la poutre, il est évident que la contrainte de flexion maximale acquiert sa valeur la plus élevée sur les fibres pour lesquelles y est maximal. Ce sont les fibres de la face supérieure et de la face inférieure de la poutre et d'après la direction représentée de la charge, il est évident que les fibres supérieures sont en compression et les fibres inférieures en tension. Pour les fibres inférieures, $y = 2 \text{ cm}$ et la tension maximale est :

$$\sigma = \frac{8.000(2)}{10,67} = 1.500 \text{ kg/cm}^2$$

Pour les fibres supérieures, y peut-être considéré comme négatif et on a :

$$\sigma = \frac{8.000(-2)}{10,67} = -1.500 \text{ kg/cm}^2$$

Les contraintes de pointe sont donc de 1500 kg/cm² en tension pour toutes les fibres de la surface inférieure et de 1500 kg/cm² en compression pour toutes les fibres de la face supérieure. Conformément à la formule $\sigma = My/I$, la contrainte de flexion varie linéairement depuis zéro sur l'axe neutre jusqu'à un maximum sur les fibres extérieures. La variation sur la hauteur de la poutre peut être représentée par le tracé de la Fig. 8-12.

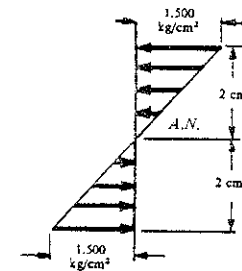


Fig. 8-12

- 8.3. Une poutre a une section circulaire de 18 cm de diamètre. Elle est sur appuis à chaque extrémité et porte deux charges concentrées de 10000 kg chacune, appliquées à 30 cm des extrémités de la poutre. Calculer la contrainte de flexion maximale dans la poutre.

Ici le moment n'est pas constant le long de la poutre, comme cela était le cas dans le Problème 8.2. La Fig. 8-13 représente le mode de charge ainsi que le diagramme du moment de flexion tracé selon les méthodes du Chapitre 6. On notera que la portion de la poutre entre les deux charges dirigées vers le bas de 10000 kg est dans l'état dit de flexion pure et que dans toute cette région, le moment de flexion est égal à : $(10000)(30) = 300000 \text{ kg.cm}$.

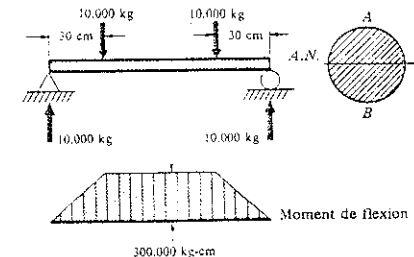


Fig. 8-13

D'après le Problème 7.9, le moment d'inertie de la section circulaire hachurée autour de l'axe neutre qui passe par le centre d'inertie du cercle est : $I = \pi D^4/64 = \pi(18)^4/64 = 5150 \text{ cm}^4$

La contrainte de flexion à une distance y de l'axe neutre horizontal représenté est $\sigma = My/I$. Il est évident que les contraintes de flexion maximales apparaissent sur les fibres des extrémités d'un diamètre vertical notées A et B. La contrainte maximale est la même sur tous les points analogues entre les charges appliquées. Au point B, $y = 9 \text{ cm}$ et la contrainte devient :

$$\sigma = \frac{300000(9)}{5150} = 524 \text{ kg/cm}^2 \text{ en tension}$$

Au point A, la contrainte de compression a pour valeur 524 kg/cm².

- 8.4. Une poutre cantilever en acier de 5 m de longueur porte une charge concentrée de 150 kg sur son extrémité libre. La poutre a une section rectangulaire de 5 cm de largeur sur 8 cm de hauteur. Déterminer la grandeur et la position des contraintes de flexion maximales de tension et de compression dans la poutre.

En appliquant les techniques du Chapitre 6, on trouve pour ce type de charge un diagramme de moment de flexion de forme triangulaire, avec un maximum au mur d'encastrement, comme le montre la Fig. 8-14(a). Le moment de flexion maximal est simplement le moment de la force de 150 kg par rapport à un axe passant par le point B et perpendiculaire au plan de la Figure. Il a pour valeur : $150(500) = 75000 \text{ kg.cm}$.

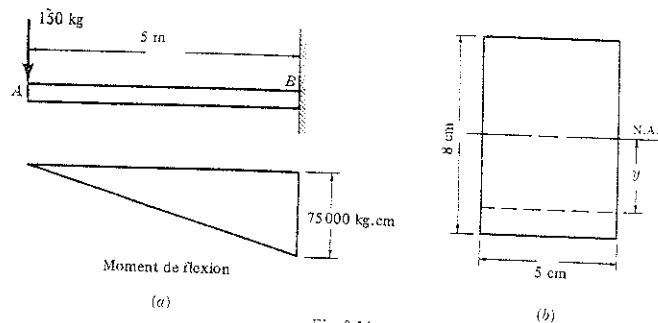


Fig. 8-14

La contrainte de flexion à une distance y de l'axe neutre qui passe par le centre d'inertie de la section est $\sigma = My/I$; la signification de y est donnée dans la Fig. 8-14(b). Dans cette expression, I est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre et il est :

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(5)(8)^3 = 213,3 \text{ cm}^4$$

Donc à l'encastrement, où le moment de flexion est maximal, la contrainte de tension est maximale dans les fibres supérieures de la poutre et est égale à :

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{75.000(4)}{213,3} = 1.405 \text{ kg/cm}^2$$

Puisque tous les points de la poutre sont fléchis vers le bas, il est évident qu'il s'agit d'une contrainte de tension. Sur les fibres inférieures adjacentes au mur, la contrainte maximale est de compression et a pour valeur : 1.405 kg/cm^2 .

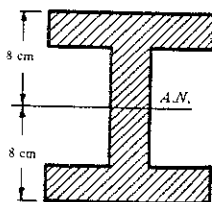
- 8.5. Reprenons le Problème 8.4 dans le cas où la poutre rectangulaire est remplacée par un profilé du commerce en acier désigné par H 160. Les tables de profilés indiquent qu'il s'agit d'un profilé en I à aile large de hauteur de 16 cm et qu'il a un poids de 45,8 kg par m. Calculer les contraintes de flexion maximales en tension et en compression.

La section de cette poutre est représentée dans la Fig. 8-15. La flexion se produit autour de l'axe neutre horizontal passant par le centre d'inertie. Les manuels contiennent des tables donnant les caractéristiques des profilés du commerce et une nomenclature abrégée est présentée en fin du présent chapitre. D'après cette table, le moment d'inertie autour de l'axe neutre est de 2630 cm^4 .

La contrainte de flexion à une distance y de l'axe neutre est donnée par $\sigma = My/I$. Sur les fibres extérieures $y = c$ et :

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{I/c}$$

Fig. 8-15



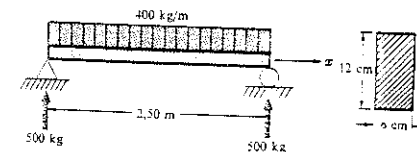
Le rapport I/c est dénommé le *module de section* et il est habituellement désigné par le symbole Z . Les unités sont évidemment cm^3 . Dans la table abrégée, on trouve que $Z = 329 \text{ cm}^3$. Si on s'intéresse seulement aux contraintes de flexion dans les fibres extérieures, ce qui est fréquemment le cas puisque ce sont les contraintes maximales qui sont les plus importantes, il est alors commode d'utiliser le module de section, particulièrement pour les profilés normalisés.

Les contraintes dans les fibres extérieures de la section adjacente au mur sont données par :

$$\sigma = \frac{M}{I/c} = \frac{M}{Z} = \frac{75.000}{329} = 228 \text{ kg/cm}^2$$

Ici aussi, puisque les fibres de la partie supérieure s'allongent, la contrainte est de tension. Les fibres de la partie inférieure se contractent et la contrainte est de compression.

- 8.6. Une poutre de 2,50 m de longueur sur appuis aux extrémités porte une charge uniformément répartie de 400 kg par mètre linéaire. La section est rectangulaire de dimensions 6 cm sur 12 cm. Déterminer la grandeur et la position de la contrainte de flexion maximale dans la poutre. Calculer également la contrainte de cisaillement en un point à 2 cm en-dessous de la face supérieure de la poutre, à mi-chemin entre les appuis.



Moment de flexion

Fig. 8-16

On a montré dans le Problème 6.3 que le diagramme du moment de flexion d'une poutre sur appuis portant une charge uniformément répartie était une parabole variant depuis zéro aux extrémités de la poutre jusqu'à un maximum au centre de la poutre. Le moment de flexion au centre de cette poutre a pour valeur :

$$M_{x=1,25} = 500(1,25) - 500(0,625) = 312,5 \text{ kg·m} = 31.250 \text{ kg·cm}$$

Le diagramme du moment de flexion est tracé dans la Fig. 8-16.

Puisque le moment maximal de flexion se produit au centre de la poutre, c'est également en ce point, pour $x = 1,25 \text{ m}$ que se trouve la contrainte de flexion maximale. Pour toute fibre située à une distance y de l'axe neutre de la section, la contrainte de flexion est :

$$\sigma = My/I = 31.250 y/I$$

D'après le Problème 7.4, le moment d'inertie est :

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(6)(12)^3 = 864 \text{ cm}^4$$

Donc, dans la section centrale :

$$\sigma = \frac{31.250 y}{864}$$

La contrainte de flexion maximale apparaît sur les fibres extrêmes supérieures ou inférieures. Pour les fibres inférieures, $y = 6 \text{ cm}$ et :

$$\sigma = 31.250(6)/864 = 217 \text{ kg/cm}^2$$

L'observation montre que les fibres de la face inférieure s'allongent; donc la contrainte est de tension dans ces fibres. Dans les fibres supérieures pour lesquelles $y = -6 \text{ cm}$, il apparaît une contrainte de compression de même valeur.

En un point situé à 2 cm en-dessous de la face supérieure de la poutre dans cette section centrale, la contrainte de flexion est :

$$\sigma = 31.250(-4)/864 = -145 \text{ kg/cm}^2$$

On notera que y a été pris comme négatif dans ce calcul, puisque le point considéré se trouve au-dessus de l'axe neutre. Il en résulte que la contrainte de flexion est de compression, comme le montre le signe moins final.

- 8.7. Reprendre la poutre uniformément chargée du Problème 8.6. Calculer la contrainte de flexion maximale dans la poutre en tenant compte maintenant de son poids s'ajoutant à une charge de 400 kg par mètre linéaire. La poutre est en acier et pèse $7,3 \text{ kg/dm}^3$.

La poutre a une section de 6 cm sur 12 cm ; le volume d'un mètre de longueur est donc de $(6)(12)(100) = 7200 \text{ cm}^3$ dont le poids est de $(7200)(0,0078) = 56,1 \text{ kg}$.

Dans le projet, le poids de la poutre est appelé le poids mort et symbolisé par P.M. On peut considérer que ce poids augmente la charge utile de 400 kg/m symbolisée C.U. La charge répartie est donc égale à $400 + 56,1 = 456,1 \text{ kg/m}$.

La charge totale sur la poutre est de $(456,1)(2,50) = 1140$ kg. Les réactions d'extrémité sont donc de 570 kg chacune et le moment de flexion au centre de la poutre est :

$$M_{x=2,5} = 570(1,25) - 570(0,625) = 356 \text{ kg}\cdot\text{m} = 35.600 \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

Le diagramme du moment de flexion a le même aspect que dans le Problème 8.6, mais avec une ordonnée au centre de 356 kg.m.

La contrainte de flexion maximale se produit dans les fibres extérieures à mi-chemin entre les appuis et est donnée par $\sigma = My/I$ avec $y = 6$ cm comme auparavant. En substituant :

$$\sigma = 35.600(6)/864 = 247 \text{ kg/cm}^2$$

La valeur précédente de 217 kg/cm^2 , dans laquelle le poids de la poutre était négligé était inférieure de $12,1\%$ au dernier chiffre. En pratique, il est donc toujours nécessaire de tenir compte du poids de la poutre.

- 8.8. Une poutre cantilever de 3 m de longueur porte une charge uniformément répartie de 2000 kg par mètre linéaire. La contrainte pratique admissible est de 1400 kg/cm^2 en tension comme en compression. La section est rectangulaire. Calculer les dimensions en tenant compte du fait que la hauteur doit être double de la largeur.

Le diagramme du moment de flexion pour une charge uniforme sur une poutre cantilever a été tracé dans le Problème 6.2. C'est une parabole variant depuis zéro à l'extrémité libre de la poutre jusqu'à un maximum à l'encastrement. La Fig. 8-17 représente la poutre chargée et son diagramme de moment de flexion. Le moment maximal à l'encastrement est donné par :

$$M_{x=3} = 6.000(1,50) = 9.000 \text{ kg}\cdot\text{m} = 900.000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

On notera que ce problème a pour objet la conception d'une poutre, tandis que tous les problèmes précédents de ce chapitre nécessitaient l'analyse de contraintes dans des poutres de dimensions connues et soumises à des types variés de charge. Pour la conception, il suffit de considérer la section dans laquelle le moment de flexion est maximal, donc celle à l'encastrement. Nous avons donc à concevoir une poutre rectangulaire capable de résister à un moment de flexion de $900.000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ avec un maximum de contrainte de flexion de 1400 kg/cm^2 .

Puisque la section doit être rectangulaire, elle aura l'aspect de la Fig. 8.18 où la largeur est désignée par b et la hauteur $h = 2b$, en accord avec la spécification. Le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre passant par le centre d'inertie de la section est :

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}b(2b)^3 = \frac{2}{3}b^4$$

Sur la section à l'encastrement de la poutre, la contrainte de flexion est $\sigma = My/I$. La contrainte de flexion maximale en tension apparaît à la face supérieure de la poutre, puisque ces fibres s'allongent légèrement et sur cette face, $y = b$ et $\sigma = 1400 \text{ kg/cm}^2$. Alors :

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad 1.400 = \frac{900.000b}{\frac{2}{3}b^4}$$

d'où $b = 9.88 \text{ cm}$ et $h = 2b = 19,76 \text{ cm}$.

- 8.9. Choisir un profilé en I à ailes larges capable de porter la charge de la poutre cantilever du Problème 8.8. La contrainte pratique en tension et en compression est fixée à 1400 kg/cm^2 .

Le diagramme du moment de flexion est donc le même que celui représenté dans la Fig. 8-17. Le moment de flexion maximal apparaît à l'encastrement et, comme précédemment a pour valeur $900.000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$.

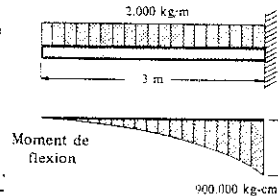


Fig. 8-17

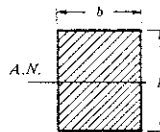


Fig. 8-18

Dans chaque section du profilé, la contrainte de flexion sur une fibre à une distance y de l'axe neutre de la section est donnée par $\sigma = My/I$. Supposons que la poutre soit orientée comme le montre la Fig. 8-19. Les contraintes de flexion maximales se produisent pour la valeur maximale de y sur les fibres extérieures. Désignons par c cette valeur maximale de y , et c est la moitié de la hauteur de la poutre. On peut alors écrire la contrainte de flexion maximale sous la forme :

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{I/c} = \frac{M}{Z}$$

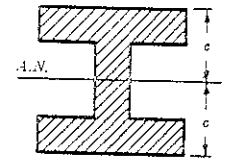


Fig. 8-19

où Z est le module de section de la poutre.

La dernière équation donne $Z = M/\sigma_{\max}$. Le module de section cherché s'obtient simplement en divisant le moment de flexion maximal par la contrainte pratique admissible. Pour la poutre cantilever considérée, on obtient :

$$Z = \frac{M}{\sigma} = \frac{900.000}{1.400} = 643 \text{ cm}^3$$

Donc une poutre répondant aux conditions posées aura un module de section de 643 cm^3 au minimum. Il est certes improbable qu'il existe un profilé normalisé présentant exactement ce module de section. Habituellement, on prend un profilé donnant cette valeur de Z ou une supérieure, la contrainte pratique ne dépassera pas ainsi la valeur admissible de 1400 kg/cm^2 .

En se reportant au tableau abrégé des caractéristiques des profilés en I à ailes larges de la fin du chapitre, on voit qu'un profilé convient. Il présente un module de section de 732 cm^3 . C'est le profilé de poids le plus bas ayant le module de section requis : H 220.

- 8.10. Un fil d'acier de 0,4 mm de diamètre est enroulé autour d'une poulie de 38 cm de diamètre. Calculer la contrainte maximale de flexion dans le fil. Prendre $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

Puisque le rayon de courbure du fil est constant et égal à 19 cm, l'équation (7) du Problème 3-1 montre que le moment $M = EI/\rho$ est constant en tous les points du fil. Le fil se comporte comme une poutre en flexion pure. La Fig. 8-20 représente un croquis agrandi d'une portion du fil. Pour toute fibre du fil à une distance y de l'axe neutre, l'équation (1) du Problème 8.1 donne pour la déformation normale ϵ :

$$\epsilon = \frac{y}{\rho}$$

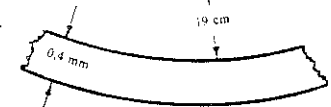


Fig. 8-20

où ρ désigne le rayon de courbure de la poutre en ce point.

Ce sont les fibres pour lesquelles y est maximal, donc à $(0,04)/2$ cm de l'axe neutre qui ont la plus forte déformation. Le rayon de courbure est d'environ 19 cm. Pour une plus grande précision, ce rayon devrait être mesuré dans l'axe neutre du fil, mais la différence ne serait que de $(0,04)/2$ cm sur 19 cm, ce qui peut raisonnablement être négligé.

La déformation maximale des fibres extérieures est : $\epsilon = \frac{(0,04)/2}{19} = 0,00105$

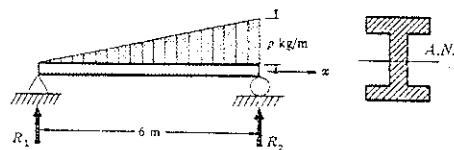
Les fibres longitudinales sont soumises à des contraintes de tension sur un des côtés du fil et de compression sur l'autre, sans qu'il apparaisse d'autres contraintes. Pour trouver la contrainte σ , on peut utiliser la loi de Hooke :

$$\sigma = E\epsilon = (2,1 \times 10^6)(0,00105) = 2.205 \text{ kg/cm}^2$$

C'est la valeur de la contrainte maximale dans le fil.

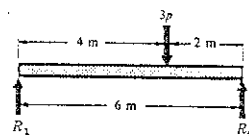
- 8.11. La poutre sur appuis de la Fig. 8-21(a) porte une charge uniformément variable de valeur maximale de p kg par mètre à son extrémité de droite. Pour un profilé en I à ailes larges du commerce H 200 pesant $64,9 \text{ kg}$ par mètre, calculer la charge maximale pouvant être

appliquée en tenant compte d'une contrainte pratique admissible de 1250 kg/cm^2 en tension et en compression. Négliger le poids de la poutre.



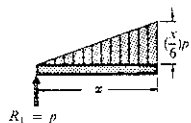
(a)

Fig. 8-21

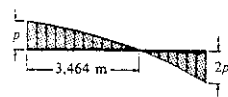


(b)

Les réactions sont facilement calculées à partir de p en remplaçant la charge répartie par sa résultante. Comme la moyenne de la charge répartie est $p/2 \text{ kg/m}$ agissant sur une longueur de 6 m, cette résultante est une force de $6(p/2) = 3p \text{ kg}$ appliquée au centre d'inertie du diagramme de charge triangulaire, c'est-à-dire à 4 m à droite de la réaction R_1 . Elle est indiquée dans la Fig. 8-21(b). La statique montre immédiatement que $R_1 = p \text{ kg}$ et $R_2 = 2p \text{ kg}$.



(a)



Cisaillement

(b)



Moment de flexion

(c)

Fig. 8-22

Les diagrammes de la force de cisaillement et du moment de flexion pour ce type de charge ont été tracés dans le Problème 6.4. Prenons un axe des x coïncidant avec la poutre et ayant son origine sur l'appui de gauche. La règle des triangles semblables montre qu'à une distance x à droite de la réaction de gauche, la charge a une intensité de $(x/6)p \text{ kg/m}$. Cette portion de la poutre chargée entre la réaction R_1 et la section x est représentée dans la Fig. 8-22(a). En appliquant la méthode du Problème 6.4, la force de cisaillement F_T sur la section à une distance x de l'appui de gauche est :

$$F_T = p - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{6} \right) p \cdot x = p - \frac{1}{12} p x^2$$

Cette équation est valable pour toutes les valeurs de x et peut servir à tracer aisément le diagramme de cisaillement de la Fig. 8-22(b).

Le point de cisaillement nul est trouvé en posant :

$$p - \frac{1}{12} p x^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt{12} = 3.464 \text{ m}$$

C'est également le point pour lequel le moment de flexion est maximal.

Le moment de flexion M sur la section à une distance x de l'appui de gauche est donné par :

$$M = px - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{6} \right) p x \cdot \frac{x}{3} = px - \frac{1}{36} p x^3$$

Cette équation est également valable pour toutes les valeurs de x et permet de tracer le diagramme du moment de flexion de la Fig. 8-22(c). Au point de cisaillement nul, $x = 3.464 \text{ m}$. En substituant cette valeur dans l'équation ci-dessus, on obtient le moment de flexion en ce point :

$$M_{x=3.47} = p(\sqrt{12}) - \frac{1}{36} p(\sqrt{12})^3 = \frac{2}{3} p\sqrt{12} = 2.31p \text{ kg-m} = 231p \text{ kg-cm}$$

C'est le moment de flexion maximal dans la poutre.

La contrainte de flexion sur toute fibre à une distance y de l'axe neutre est donnée par $\sigma = My/I$. D'après la table en fin du chapitre, le moment d'inertie de la poutre est égal à 5950 cm^4 . La contrainte de flexion maximale apparaît sur les fibres inférieures où $y = 10 \text{ cm}$ sur la section sur laquelle le moment de flexion est maximal. Cette contrainte est égale à 1250 kg/cm^2 et, par suite, $\sigma = My/I$ devient :

$$1250 = \frac{(231p)(10)}{5950} \quad \text{ou} \quad p = 3220 \text{ kg/m}$$

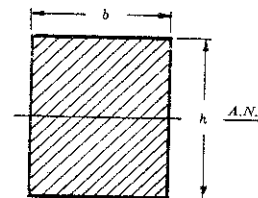


Fig. 8-23

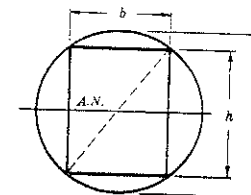


Fig. 8-24

8.12. Etablir le module de section d'une poutre rectangulaire.

Soit h la hauteur de la poutre et b sa largeur. On admet que la flexion se produise autour de l'axe neutre passant par le centre d'inertie de la section. Le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre est $I = bh^3/12$.

La distance des fibres extérieures à l'axe neutre est $h/2$, habituellement désignée par c . Sur ces fibres, les contraintes de flexion maximales sont données par :

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{I/c}$$

Le rapport I/c , dénommé module de section est habituellement symbolisé par Z . Alors : $\sigma_{\max} = M/Z$. Pour la poutre de section rectangulaire :

$$Z = \frac{I}{c} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

Le module de section Z a comme unités cm^3 .

8.13. Une poutre de section rectangulaire doit être découpée dans un rondin cylindrique de diamètre D . Quel doit être le rapport de la hauteur de la poutre à sa largeur pour obtenir une résistance maximale en flexion pure ?

La section de la poutre est représentée dans le croquis de la Fig. 8-24, où h est la hauteur de la poutre et b sa largeur.

On admet que la flexion se produit par rapport à l'axe neutre horizontal représenté. Les contraintes de flexion maximales se produisent sur les fibres extérieures de la section rectangulaire à une distance $h/2$ au-dessus ou en-dessous de l'axe neutre. Les fibres situées à une distance y de l'axe neutre sont soumises à une contrainte de flexion $\sigma = My/I$ où I est le moment d'inertie de la section rectangulaire autour de l'axe neutre et a donc pour valeur $bh^3/12$. Sur les fibres extérieures $y = h/2$ et en cet endroit, les contraintes maximales deviennent :

$$\sigma_{\max} = \frac{M(h/2)}{bh^3/12} = \frac{M}{bh^2/6} \quad (1)$$

Cette équation montre que le moment maximal M pouvant être appliqué sur la poutre pour une valeur donnée de la contrainte de flexion maximale est :

$$M = \sigma_{\max} bh^2/6 \quad (2)$$

Pour obtenir le maximum de résistance, donc le moment maximal M , il faut rendre maximal le produit bh^2 , puisque $\sigma_{\max}$ est constant pour un matériau donné.

Pour obtenir une valeur maximale de bh^2 il faut l'exprimer en fonction d'une variable indépendante, disons b , et ceci peut se faire en partant de la relation du triangle rectangle : $b^2 + h^2 = D^2$. Donc :

$$bh^2 = b(D^2 - b^2) = bD^2 - b^3$$

Le maximum de bh^2 s'obtient en égalant à zéro sa dérivée par rapport à b comme suit :

$$\frac{d(bh^2)}{db} = \frac{d}{db}(bD^2 - b^3) = D^2 - 3b^2 = (b^2 + h^2) - 3b^2 = h^2 - 2b^2 = 0$$

En résolvant, on trouve $h/b = \sqrt{2}$. C'est le rapport cherché pour que la poutre puisse supporter un moment maximal M .

Notons que l'expression dans le dénominateur de la partie de droite de l'équation (1), $bh^2/6$ est le module de section d'une poutre rectangulaire. Pour obtenir la résistance la plus élevée d'une poutre, c'est donc le module de section qui doit être la grandeur qu'il faut rendre maximale.

- 8.14. Une poutre est sollicitée par une couple de grandeur 50 000 kg.cm. La poutre est formée par un profilé en T dont les dimensions sont données dans la Fig. 8-25. Déterminer la valeur et la position de la contrainte de tension maximale, ainsi que de la contrainte de compression maximale.

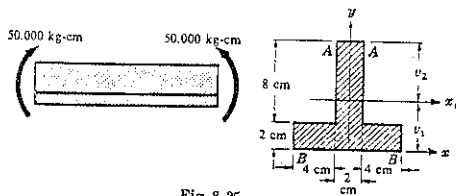


Fig. 8-25

Il est d'abord nécessaire de trouver la position du centre d'inertie de la section puisque l'on sait que l'axe neutre passe par ce centre. Pour faire cette opération, prenons le système de coordonnées x, y et procédons comme dans le Problème 7.18. L'ordonnée y du centre d'inertie est donnée par :

$$\bar{y} = \frac{\int y \, dA}{A}$$

où le numérateur du terme de droite représente le moment d'ordre un de la section entière autour de l'axe des x . Le profilé en T peut être considéré comme composé de trois rectangles indiqués par des traits interrompus et cette expression devient :

$$\bar{y} = \frac{10(2)(5) + [4(2)(1)]2}{10(2) + [4(2)]2} = 3,22 \text{ cm}$$

Le centre d'inertie est donc situé à 3,22 cm au-dessus de l'axe des x . L'axe horizontal passant par ce point est noté x_G , comme cela est porté sur la figure.

Le moment d'inertie autour de l'axe des x est la somme des moments d'inertie par rapport à ce même axe de chacun des trois rectangles composant la section. Ainsi :

$$I_x = \frac{1}{3}(4)(2)^3 + \frac{1}{3}(2)(10)^3 + \frac{1}{3}(4)(2)^3 = 688 \text{ cm}^4$$

Le moment d'inertie autour de l'axe des x_G se calcule en appliquant le théorème des axes parallèles. On obtient alors :

$$I_x = I_{xG} + A(\bar{y})^2, \quad 688 = I_{xG} + 36(3,22)^2 \quad \text{et} \quad I_{xG} = 315 \text{ cm}^4$$

Pour la charge représentée, il est clair que les fibres en-dessous de l'axe x_G sont en tension et que celles au-dessus de cet axe sont en compression. Soient c_1 et c_2 , les distances des fibres extrêmes à l'axe neutre x_G , comme représenté. Il est évident que $c_1 = 3,22$ cm et $c_2 = 6,78$ cm. La contrainte

de tension maximale apparaît dans les fibres situées sur BB et est donnée par $\sigma = Mc_1/I$ où I est le moment d'inertie de la section. La contrainte maximale de tension est :

$$\sigma = Mc_1/I = 50.000(3,22)/315 = 511 \text{ kg/cm}^2$$

La contrainte de compression maximale apparaît dans les fibres en AA et est donnée par Mc_2/I . Pour avoir un système cohérent de signes algébriques, il est nécessaire d'assigner une valeur négative à c_2 , puisqu'il se trouve sur le côté opposé de c_1 par rapport à l'axe x_G . D'où :

$$\sigma = Mc_2/I = 50.000(-6,78)/315 = -1.076 \text{ kg/cm}^2$$

Le signe négatif indique que la contrainte est de compression.

- 8.15. Une poutre sur appuis est sollicitée par un couple de 250 kg.m comme représenté dans la Fig. 8-26. La poutre est un profilé en U. Calculer les contraintes de tension et de compression maximales dans la poutre.

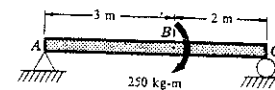


Fig. 8-26

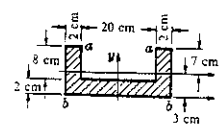


Fig. 8-27

Le diagramme du moment de flexion dans ce type particulier de charge a été tracé dans le Problème 6.11. Il a l'aspect représenté dans la Fig. 8-27.

Il est ensuite nécessaire de trouver la position du centre d'inertie de la section, puisque l'axe neutre passe par ce point. Elle a déjà été fixée pour ce type de profilé dans le Problème 7.12, qui a montré que ce centre est situé à 3 cm au-dessus de l'axe des x . Dans ce même problème, le moment d'inertie de la section entière autour de l'axe des x_G a été trouvé égal à 667 cm⁴.

Dans le présent problème, il faut soigneusement faire la distinction entre les moments de flexion positifs et négatifs. On peut aborder la question en prenant une section de la poutre légèrement à droite du point B où est appliqué le couple de 250 kg.m. Selon le diagramme du moment de flexion, le moment à cet endroit est égal à -150 kg.m et, comme il est négatif, la poutre est incurvée vers le bas dans cette section, conformément à la convention de signe du Chapitre 6, Fig. 8-28. Les fibres supérieures sont donc en tension et les inférieures en compression. Sur les fibres supérieures $a-a$, la contrainte de flexion est donnée par $\sigma = My/I$. Donc :

$$\sigma_a = 15.000(7)/667 = 157 \text{ kg/cm}^2$$

Sur les fibres inférieures $b-b$, la valeur de y doit être prise négative dans la formule de la contrainte de flexion, et on a :

$$\sigma_b = 15.000(-3)/667 = -67 \text{ kg/cm}^2$$

Il est maintenant nécessaire d'étudier les contraintes de flexion dans la section légèrement à droite du point B . Le moment de flexion est de 100 kg.m et, conformément à la convention de signe, la poutre est incurvée vers le haut en cette section, Fig. 8-29. Ici les fibres supérieures sont en compression et les fibres inférieures en tension ; sur les fibres supérieures $a-a$, la contrainte de flexion est :

$$\sigma'_a = 10.000(-7)/667 = -105 \text{ kg/cm}^2$$

sur les fibres inférieures $b-b$, on a :

$$\sigma'_b = 10.000(3)/667 = 45 \text{ kg/cm}^2$$

Fig. 8-29

Les quatre valeurs ci-dessus contiennent les contraintes de tension et de compression maximales. La tension maximale se produit dans les fibres supérieures immédiatement à la gauche du point B et vaut : 157 kg/cm^2 . La compression maximale se produit dans les fibres supérieures, mais immédiatement à la droite du point B et vaut 105 kg/cm^2 .

- 8.16. Considérons la poutre en porte-à-faux chargée par les trois forces concentrées représentées dans la Fig. 8-30. Elle est sur appuis et a la forme d'un profilé en T en fonte grise de contrainte pratique admissible de 350 kg/cm^2 en tension et de 1400 kg/cm^2 en compression. Calculer la valeur maximale admissible de P .

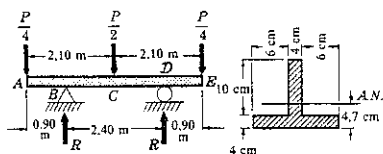


Fig. 8-30

Par symétrie, chaque réaction R est égale à $P/2$. Le diagramme du moment de flexion consiste en une série de droites reliant les ordonnées des moments de flexion aux points A , B , C , D et E . En B , le moment de flexion est donné par le moment de la force $P/4$ agissant en A autour d'un axe passant par B . Donc :

$$M_B = -(P/4)(0,90) = -0,90P/4 \text{ kg-m}$$

En C , le moment de flexion est donné par la somme des moments des forces $P/4$ et $R = P/2$ autour d'un axe passant par C :

$$M_C = -(P/4)(2,10) + (P/2)(1,20) = 0,30P/4 \text{ kg-m}$$

Le moment de flexion en D est égal à celui de B par symétrie et le moment aux extrémités A et E est nul. Le diagramme du moment de flexion a l'allure indiquée dans la Fig. 8-31.

Les caractéristiques de ce profilé en T ont déjà été déterminées dans le Problème 7.10. La distance des fibres extérieures de l'aile au centre d'inertie est de $4,7 \text{ cm}$ et le moment d'inertie autour de l'axe neutre passant par le centre d'inertie est de 1617 cm^4 .

Le plus simple est de calculer quatre valeurs de P basées sur les différentes contraintes de tension et de compression maximales aux points B et C , puis de prendre les valeurs minimales. Prenons d'abord le point B . Puisque le moment de flexion est négatif en ce point, la poutre est incurvée vers le bas, Fig. 8-32. Il est clair que les fibres supérieures sont en tension et les inférieures en compression. Calculons d'abord une valeur de P en supposant que la contrainte de tension admissible est de 350 kg/cm^2 . En appliquant la formule de la flexion $\sigma = My/I$ à ces fibres supérieures, on trouve :

$$350 = (0,90P/4)(100)(9,3)/1.617 \quad \text{et} \quad P = 2.700 \text{ kg}$$

Calculons ensuite une valeur de P en prenant une contrainte de compression admissible de 1400 kg/cm^2 dans les fibres inférieures. En appliquant de nouveau la formule de la flexion, on trouve :

$$1.400 = (0,90P/4)(100)(4,7)/1.617 \quad \text{et} \quad P = 21.400 \text{ kg}$$

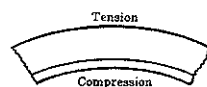


Fig. 8-32

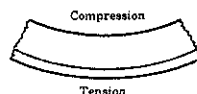


Fig. 8-33

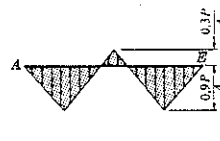


Fig. 8-31

Examinons maintenant le point C . Puisque le moment de flexion est positif, la poutre est incurvée vers le haut en ce point, Fig. 8-33. Les fibres supérieures sont en compression et les inférieures en tension. Calculons d'abord une valeur de P en admettant une tension admissible de 350 kg/cm^2 dans les fibres inférieures. La formule de la flexion donne :

$$350 = (0,30P/4)(100)(4,7)/1.617 \quad \text{et} \quad P = 16.050 \text{ kg}$$

Enfin, prenons une compression admissible de 1400 kg/cm^2 dans les fibres supérieures. En appliquant la formule de la flexion :

$$1.400 = (0,30P/4)(100)(9,3)/1.617 \quad \text{et} \quad P = 32.450 \text{ kg}$$

Le minimum de ces quatre valeurs est : $P = 2700 \text{ kg}$. C'est donc la contrainte de tension aux points B et D qui est le facteur déterminant pour le maximum de charge admissible.

- 8.17. Dans une poutre sollicitée par des forces transversales perpendiculaires à l'axe de la poutre, il y a apparition, non seulement de contraintes de flexion parallèles à l'axe de la poutre, mais aussi de contraintes de cisaillement sur les sections de la poutre perpendiculaires à son axe. Exprimer l'intensité de ces contraintes de cisaillement en fonction de la force de cisaillement sur la section et des caractéristiques de la section.

La théorie qui sera développée s'applique uniquement à une section rectangulaire. Les résultats de cette analyse sont cependant communément utilisés pour le calcul de valeurs approchées de la contrainte de cisaillement dans d'autres formes de section possédant un plan de symétrie.

Considérons un élément de longueur dx , découpé dans la poutre, Fig. 8-34. Appelons M le moment de flexion à gauche de l'élément et $M + dM$, celui à sa droite, puisqu'en général le moment de flexion change légèrement lorsque l'on se déplace d'une section à une section adjacente de la poutre. En mesurant y vers le haut à partir de l'axe neutre, la composante de flexion sur la section de gauche $a-a$ est donnée par :

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

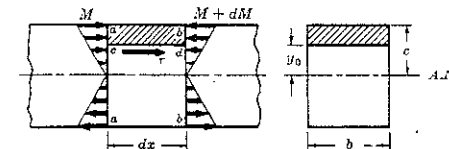


Fig. 8-34

où I est le moment d'inertie de la section entière autour de l'axe neutre. Cette répartition des contraintes est représentée dans la Fig. 8-34. De même, la contrainte de flexion sur la section de droite $b-b$ est :

$$\sigma' = \frac{(M + dM)y}{I}$$

Étudions maintenant l'équilibre de l'élément hachuré $acdb$. La force agissant sur une surface da de la face ac est simplement le produit de l'intensité de la force par la surface. Donc :

$$\sigma da = \frac{My}{I} da$$

La somme de toutes ces forces sur la face de gauche ac est obtenue par intégration et est :

$$\int_{y_0}^c \frac{My}{I} da$$

De même, la somme de toutes les forces normales sur la face de gauche bd est donnée par :

$$\int_{y_0}^c \frac{(M + dM)y}{I} da$$

Puisque ces deux forces ne sont pas égales, il est certain qu'il existe une force horizontale supplémentaire agissant sur l'élément hachuré pour maintenir l'équilibre. Comme on admet qu'aucune force horizontale

n'est appliquée sur la face supérieure ab , la seule possibilité est la présence d'une force horizontale de cisaillement sur la face inférieure cd . Cette force représente l'action de la portion inférieure de la poutre sur l'élément hachuré. Appelons τ la force de cisaillement sur cette face, comme cela est indiqué sur la figure. Soit b la largeur de la poutre à la position où τ agit. La force de cisaillement horizontale sur la face cd est alors $\tau b dx$. Pour l'équilibre de l'élément $acdb$, on a :

$$\Sigma F_h = \int_{y_0}^c \frac{M}{I} y da - \int_{y_0}^c \frac{(M + dM)}{I} y da + \tau b dx = 0$$

En résolvant :

$$\tau = \frac{1}{Ib} \frac{dM}{dx} \int_{y_0}^c y da$$

Mais d'après le Problème 6.1, on a : $F_T = dM/dx$, où F_T est la force de cisaillement (en kg) sur la section $a-a$. En substituant :

$$\tau = \frac{F_T}{Ib} \int_{y_0}^c y da$$

Dans cette dernière équation, l'intégrale représente le moment d'ordre un de la section hachurée autour de l'axe neutre de la poutre. Cette surface est toujours la portion de la section au-dessus du niveau auquel agit le cisaillement cherché. Le moment d'ordre un est parfois symbolisé par Q , auquel cas la formule ci-dessus devient :

$$\tau = \frac{F_T Q}{Ib}$$

Les unités de $y da$ ou de Q sont cm^3 .

La contrainte de cisaillement τ ci-dessus agit horizontalement comme le montre la Fig. 8-34. Considérons cependant l'équilibre de l'élément mince mnp d'épaisseur t découpé dans un corps et soumis à une contrainte de cisaillement τ_1 sur sa face inférieure, Fig. 8.35. Sur la face inférieure, la force totale horizontale est $\tau_1 t dx$. Pour l'équilibre des forces en direction horizontale, il doit exister sur la face supérieure une force égale mais de sens opposé, puisque l'intensité de la contrainte de cisaillement en cet endroit est aussi égale à τ_1 . Ces deux forces donnent naissance à un couple $\tau_1 t dx dy$. Pour maintenir l'équilibre de l'élément, une seule voie est possible, c'est qu'un autre couple agisse sur les faces latérales. Appelons τ_2 l'intensité de la contrainte de cisaillement sur ces faces. La force verticale sur l'une et l'autre face verticale est $\tau_2 t dy$. Pour l'équilibre des moments autour des centres de l'élément, on a :

$$\Sigma M_c = \tau_1 t dx dy - \tau_2 t dy dx = 0 \quad \text{ou} \quad \tau_1 = \tau_2$$

Nous arrivons ainsi à la conclusion intéressante que les contraintes de cisaillement sur deux plans perpendiculaires quelconques en un point du corps sont égales. Il existe donc, non seulement des contraintes de cisaillement τ agissant horizontalement en tout point de la poutre, mais également des contraintes de cisaillement d'égale intensité agissant verticalement en ces mêmes points.

En résumé, lorsqu'une poutre est sollicitée par des forces transversales, il apparaît dans la poutre des contraintes de cisaillement horizontales et verticales. Les contraintes de cisaillement verticales ont une grandeur telle que leur résultante est égale exactement à la force de cisaillement F_T sur cette section.

- 8.18. Déterminer la répartition de la contrainte de cisaillement dans une poutre de section rectangulaire en utilisant l'expression de la contrainte de cisaillement établie dans le Problème 8.17. Quelle est la contrainte de cisaillement maximale dans un barreau rectangulaire ?

Dans le Problème 8.17, la contrainte de cisaillement τ à une distance y_0 de l'axe neutre de la poutre a été trouvée égale à :

$$\tau = \frac{F_T}{Ib} \int_{y_0}^c y da$$

où F_T est la force de cisaillement sur la section et b la largeur de la poutre à l'endroit où agit τ .

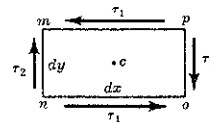


Fig. 8-35

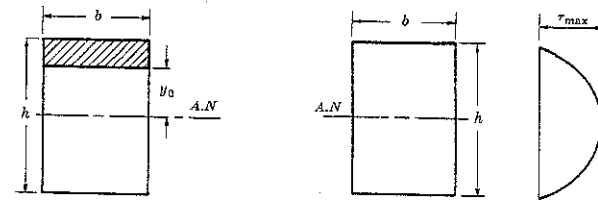


Fig. 8-36

Fig. 8-37

Il faut calculer l'intégrale ci-dessus pour une section rectangulaire. Soit h la hauteur de la section et b sa largeur, Fig. 8-36.

L'intégrale représente le moment d'ordre un de la surface hachurée autour de l'axe neutre. Noter que cette surface s'étend du niveau sur lequel agit la contrainte de cisaillement τ cherchée jusqu'aux fibres supérieures extrêmes de la poutre. De cette manière, nous trouvons la contrainte de cisaillement τ sur toutes les fibres à une distance y_0 de l'axe neutre. Dans un cas aussi simple, il n'est pas nécessaire d'intégrer. En effet, puisque nous savons que l'intégrale représente le moment d'ordre un de la zone hachurée autour de l'axe neutre, nous pouvons calculer ce moment en appliquant la définition donnée dans le Chapitre 7. Elle indique que le moment d'ordre un de la zone hachurée est simplement le produit de la surface par la distance perpendiculaire du centre d'inertie de la surface à l'axe neutre. Cette surface est donnée par : $b(h/2 - y_0)$ et la distance du centre d'inertie de la région ombrée à l'axe neutre est $\frac{1}{2}(\frac{h}{2} + y_0)$. Par suite, l'intégrale représentant le moment d'ordre un de la surface a pour valeur :

$$\int_{y_0}^c y da = \frac{1}{2} b \left(\frac{h}{2} + y_0 \right) \left(\frac{h}{2} - y_0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_0^2 \right) b$$

et la contrainte de cisaillement τ à une distance y_0 de l'axe neutre devient :

$$\tau = \frac{F_T}{Ib} \left[\frac{1}{2} b \left(\frac{h^2}{4} - y_0^2 \right) \right] = \frac{F_T}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_0^2 \right)$$

Cette équation montre que la contrainte de cisaillement sur la section varie paraboliquement depuis un maximum sur l'axe neutre ($y_0 = 0$) jusqu'à zéro sur les fibres extérieures de la poutre ($y_0 = h/2$). Cette courbe est tracée dans la Fig. 8-37.

Sur l'axe neutre, $y_0 = 0$, la contrainte de cisaillement maximale donnée par la formule ci-dessus est : $\tau_{\max} = F_T h^2 / 8I$. Mais pour une section rectangulaire, $I = bh^3 / 12$. En substituant :

$$\tau_{\max} = \frac{F_T h^2}{8bh^3/12} = \frac{3}{2} \frac{F_T}{bh}$$

Donc la contrainte de cisaillement maximale d'une section rectangulaire est supérieure de 50 pour cent à la contrainte de cisaillement moyenne obtenue en divisant la force de cisaillement F_T par la surface bh de la section.

- 8.19. Une poutre de section rectangulaire sur appuis à ses extrémités porte une force concentrée unique, Fig. 8-38(a). Calculer la contrainte de cisaillement maximale dans la poutre. Calculer également la contrainte de cisaillement en un point situé à 2,50 cm en-dessous de la face supérieure de la poutre en une section à 50 cm à droite de la réaction de gauche.

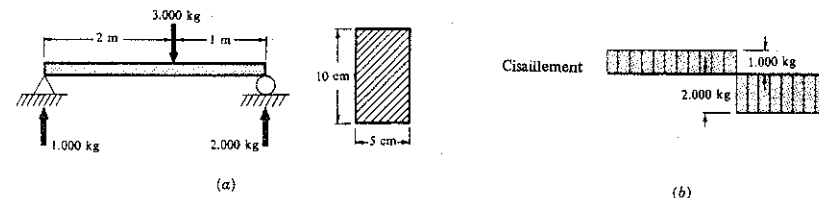


Fig. 8-38

La statique montre aisément que les réactions ont pour valeur 1000 kg et 2000 kg, comme indiqué sur la figure. Le diagramme de la force de cisaillement pour ce type de charge est tracé dans la Fig. 8-38(b).

L'examen du diagramme révèle que la force de cisaillement a une valeur maximale de 2000 kg pour toutes les sections situées à droite de la charge de 3000 kg. La contrainte de cisaillement moyenne sur toute section dans cette région est obtenue simplement en divisant la contrainte de cisaillement par la section, c'est-à-dire :

$$(\tau)_m = 2.000/5(10) = 40 \text{ kg/cm}^2$$

D'après le Problème 8.18, la contrainte de cisaillement maximale est supérieure de 50 % à la valeur moyenne. D'où :

$$(\tau)_{\max} = (3/2)(40) = 60 \text{ kg/cm}^2$$

La contrainte de cisaillement maximal apparaît en tous les points de l'axe neutre de la poutre à droite de la charge de 3000 kg.

D'après le diagramme de cisaillement, la force de cisaillement agissant sur une section à 50 cm à droite de la réaction de gauche est de 1000 kg. Le Problème 8.18 a montré que la force de cisaillement τ en tout point dans cette section à une distance y_0 de l'axe neutre est :

$$\tau = \frac{F_T}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_0^2 \right)$$

En un point situé à 2,5 cm en-dessous des fibres de la face supérieure de la poutre, $y_0 = 2,5$ cm. Nous avons également $h = 10$ cm et $I = bh^3/12 = 416,7 \text{ cm}^4$. En substituant :

$$\tau = \frac{1.000}{2(416,7)} \left(\frac{100}{4} - 6,25 \right) = 22,5 \text{ kg/cm}^2$$

- 8.20. Soit la poutre en T portant la charge concentrée de la Fig. 8-39. Calculer la contrainte de cisaillement maximale dans la poutre et également la contrainte de cisaillement à 2 cm de la face supérieure de la poutre en une section à l'encastrement.

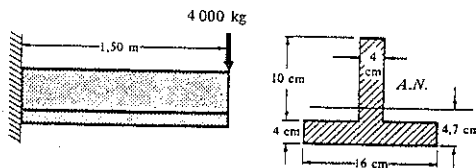


Fig. 8-39

La force de cisaillement a une valeur constante de 4000 kg en tous les points de la poutre. De ce fait, il n'est pas nécessaire de tracer le diagramme de cisaillement.

De plus, la position du centre d'inertie et le moment d'inertie autour de l'axe d'inertie de cette section particulière ont été déterminés dans le Problème 7.10. On a trouvé que le centre d'inertie était situé à 4,7 cm au-dessus de la face intérieure de la poutre et que le moment d'inertie autour d'un axe horizontal passant par le centre d'inertie avait pour valeur 1617 cm^4 .

La contrainte de cisaillement à une distance y_0 de l'axe neutre passant par le centre d'inertie a été trouvée dans le Problème 8.17 :

$$\tau = \frac{F_T}{Ib} \int_{y_0}^u y dA$$

L'examen de cette équation révèle que la contrainte de cisaillement présente un maximum sur l'axe neutre, puisqu'en ce point $y_0 = 0$ et que par conséquent, l'intégrale prend la plus grande valeur possible. Il n'est cependant pas nécessaire d'intégrer, car nous savons que dans ce cas, l'intégrale représente le moment d'ordre un de la surface entière entre l'axe neutre et les fibres extérieures de la poutre

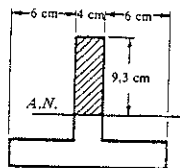


Fig. 8-40

par rapport à l'axe neutre. Cette surface est la zone hachurée de la Fig. 8-40. On pourrait aussi trouver la valeur de l'intégrale en prenant le moment d'ordre un de la zone non hachurée en-dessous de l'axe neutre par rapport à la ligne, mais ce calcul serait un peu plus difficile.

Le moment d'ordre un de la zone hachurée par rapport à l'axe neutre est :

$$4(9,3)(4,65) = 173 \text{ cm}^3$$

et la contrainte de cisaillement sur l'axe neutre où $b = 4$ cm est obtenu par substitution dans la formule générale ; elle est :

$$\tau = \frac{4.000}{1.617(4)} (173) = 107 \text{ kg/cm}^2$$

Dans cette formule, on a pris b égal à 4 cm, puisque c'est la largeur de la poutre au point pour lequel est calculée la contrainte de cisaillement. La contrainte de cisaillement maximale a donc pour valeur 107 kg/cm^2 et elle apparaît en tous les points de l'axe neutre sur toute la longueur de la poutre, puisque la force de cisaillement est constante sur toute la longueur de la poutre.

La contrainte de cisaillement à 2 cm de la face supérieure de la poutre est également donnée par la formule :

$$\tau = \frac{F_T}{Ib} \int_{y_0}^u y dA$$

L'intégrale représente le moment d'ordre un de la nouvelle région hachurée de la Fig. 8-41, autour de l'axe neutre. Il n'est pas non plus nécessaire d'intégrer, puisque l'on connaît la coordonnée du centre d'inertie de la région hachurée. Il est situé à 8,3 cm au-dessus de l'axe neutre. Donc, le moment d'ordre un autour de l'axe neutre est : $4(2)(8,3) = 66,4 \text{ cm}^3$ et la contrainte de cisaillement à 2 cm en-dessous des fibres supérieures est :

$$\tau = \frac{4.000}{1.617(4)} (66,4) = 41 \text{ kg/cm}^2$$

On a de nouveau pris b égal à 4 cm, puisque c'est la largeur de la poutre au point où est évaluée la contrainte de cisaillement. Puisque la force de cisaillement est égale à 4000 kg sur toute la longueur de la poutre, la contrainte de cisaillement à 2 cm en-dessous des fibres supérieures a pour valeur 41 kg/cm^2 tout le long de la poutre.

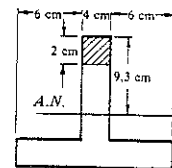


Fig. 8-41

- 8.21. Soit la poutre en I de la Fig. 8-42 soumise à une force de cisaillement de 14000 kg. Calculer la contrainte de cisaillement maximale et minimale dans l'âme de la poutre.

La contrainte de cisaillement en tout point de la poutre est :

$$\tau = \frac{F_T}{Ib} \int_{y_0}^u y dA$$

d'après le Problème 8.17. Ici y_0 représente la position de la section sur laquelle agit τ et il est mesuré à partir de l'axe neutre. Dans cette expression, I est le moment d'inertie de toute la section autour de l'axe neutre passant par le centre d'inertie de la section. On trouve facilement I en décomposant la section et rectangles indiqués par des hachures et on a :

$$I = \frac{1}{12}(1)(32)^3 + 2\left[\frac{1}{12}(16)(2)^3 + (16)(2)(15)^2\right] = 17.152 \text{ cm}^4$$

L'examen de la formule générale de la contrainte de cisaillement révèle qu'elle est maximale pour $y_0 = 0$, donc à l'axe neutre. Il n'est pas nécessaire d'intégrer pour obtenir la valeur de $\int_{y_0}^u y dA$, puisque cette intégrale représente le moment d'ordre un de la surface entre $y_0 = 0$ (axe neutre) et les fibres

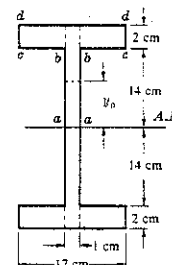


Fig. 8-42

extérieures de la poutre. Cette surface est hachurée dans la Fig. 8-43. En prenant le moment d'ordre un autour de l'axe neutre, nous avons pour cette surface :

$$\int_0^{16} y dA = 14(1)(7) + 17(2)(15) = 608 \text{ cm}^3$$

Par conséquent, la contrainte maximale de cisaillement dans l'âme apparaît dans la section *a-a* le long de l'axe neutre et en substituant dans la formule générale de la contrainte de cisaillement, on a :

$$(\tau)_{\max} = \frac{14.000}{(17.152)(1)} (608) = 496 \text{ kg/cm}^2$$

La contrainte de cisaillement minimale dans l'âme apparaît en un point de l'âme le plus éloigné de l'axe neutre, sur la section *b-b*. Pour la calculer, il n'est pas nécessaire d'évaluer l'intégrale $\int_{y_0}^c y da$ pour la surface entre *b-b* et les fibres extérieures de la poutre. C'est la surface hachurée de la Fig. 8-44. Il n'est pas nécessaire d'intégrer, puisque l'intégrale représente simplement le moment d'ordre un de cette zone hachurée par rapport à l'axe neutre. C'est :

$$\int_{14}^{16} y dA = (17)(2)(15) = 510 \text{ cm}^3$$

La valeur de *b* est encore 1 cm puisque c'est la largeur de la poutre à la position où est calculée la contrainte de cisaillement. En substituant dans la formule générale :

$$(\tau)_{\max} = \frac{14.000}{(17.152)(1)} (510) = 416 \text{ kg/cm}^2$$

On notera qu'il n'y a pas une grande différence entre le maximum et le minimum de la contrainte de cisaillement dans l'âme de la poutre. En fait, on calcule seulement une valeur approchée de la contrainte de cisaillement dans l'âme des poutres en *I* de ce type. Cette valeur est obtenue en divisant la force totale de cisaillement F_T par la section de l'âme. Cette valeur approchée devient :

$$(\tau)_{\max} = \frac{14.000}{32(1)} = 437 \text{ kg/cm}^2$$

Une analyse plus approfondie des contraintes de cisaillement dans une poutre en *I* montre que l'âme verticale résiste à la majeure partie de la force de cisaillement F_T , alors que les ailes horizontales n'en supportent qu'une faible partie. Les différents codes ne spécifient que des valeurs relativement basses pour la contrainte de cisaillement des poutres en *I*. C'est ainsi que certains codes indiquent 700 kg/cm² et d'autre 900 kg/cm².

FLEXION PLASTIQUE DES POUTRES

- 8.22. Considérons une poutre de section de forme quelconque à double symétrie Fig. 8-45(a) sollicitée en flexion pure. Le matériau a un comportement élastique-parfaitement plastique et sa courbe contrainte-déformation a donc l'allure de la Fig. 8-45(b) et les caractéristiques de contrainte déformation en tension et en compression sont identiques. Déterminer le moment agissant sur la poutre quand toutes les fibres à une distance y_1 de l'axe neutre ont atteint le seuil de plasticité.

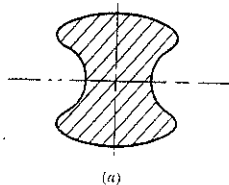
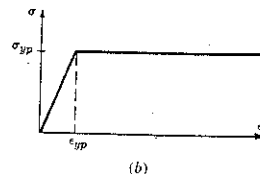


Fig. 8-45



Bien que la flexion de la poutre ait fait céder les fibres extérieures il est encore naturel d'admettre que les sections planes de la poutre normales à l'axe avant application de la charge le restent après. Donc les déformations normales des fibres longitudinales de la poutre varient encore linéairement avec la distance de la fibre à l'axe neutre.

Lorsque le moment appliqué augmente, les fibres extrêmes de la poutre sont les premières à atteindre le seuil de plasticité et les contraintes normales de toutes les fibres intérieures varient linéairement en fonction de la distance de la fibre à l'axe neutre, comme le montre la Fig. 8-46(a). Toute augmentation supplémentaire du moment porte les fibres intérieures au seuil de plasticité, la plasticité progressant depuis les fibres extérieures vers les fibres intérieures, comme le montre la Fig. 8-46(b). Au cas limite, quand toutes les fibres (sauf celles sur l'axe neutre) sont contraintes au seuil de plasticité, la distribution de la contrainte normale est représentée dans la Fig. 8-46(c). Le moment correspondant au cas de cette figure est appelé le *moment totalement plastique*. Il ne peut pas exister de moment plus élevé dans le cas du type de courbe contrainte - déformation de la Fig. 8-45(b).

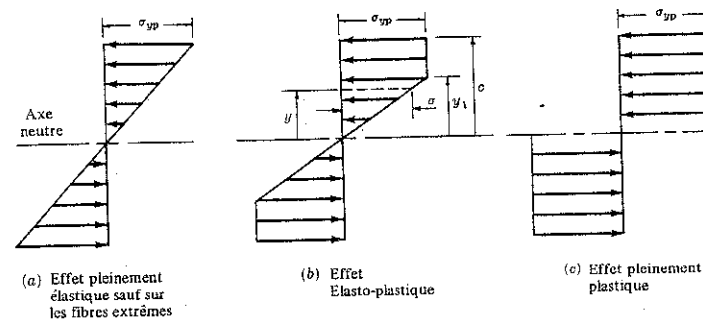


Fig. 8-46

Dans une poutre en flexion pure, la somme des forces normales sur la section doit disparaître. Pour la section à double symétrie considérée, l'examen de la Fig. 8-46(b) révèle que l'axe neutre doit passer par le centre d'inertie de ce genre de section. La surface au-dessus de l'axe neutre doit donc être égale à la surface en-dessous de cet axe. Toutefois, on verra dans le Problème 8.27 que, dans le cas plus général d'une section non-symétrique lorsque certaines fibres ont dépassé le seuil de plasticité, la position de l'axe neutre n'est plus la même que celle observée pour un comportement purement élastique, dans lequel l'axe neutre passe toujours par le centre d'inertie de la section.

A partir de la Fig. 8-46(b), on a pour $y < y_1$:

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{\sigma_{yp}}{y_1} \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{y}{y_1} \sigma_{yp}$$

et pour $y > y_1$, $\sigma = \sigma_{yp}$ = constante. Ainsi le moment de flexion est :

$$\begin{aligned} M &= \int \sigma y da = 2 \int_0^{y_1} \frac{y}{y_1} \sigma_{yp} y da + 2 \int_{y_1}^c \sigma_{yp} y da \\ &= \frac{2\sigma_{yp}}{y_1} \int_0^{y_1} y^2 da + 2\sigma_{yp} \int_{y_1}^c y da \end{aligned}$$

- 8.23. Déterminer le moment agissant sur une poutre de section rectangulaire quand toutes les fibres à une distance y_1 de l'axe neutre ont atteint le seuil de plasticité.

D'après le résultat du Problème 8.22, pour la forme géométrique de la Fig. 8-47, 8-47, on a :

$$M = \frac{2\sigma_{yp}}{y_1} \left(\frac{1}{3} b y_1^3 \right) + 2\sigma_{yp} b (c - y_1) \left(\frac{c + y_1}{2} \right)$$

$$= \left(b c^2 - \frac{b}{3} y_1^3 \right) \sigma_{yp}$$

Dans le cas limite où $y_1 = 0$, indiqué dans la Fig. 8-46(c) du Problème 8.22, le moment totalement plastique de cette poutre rectangulaire est :

$$M_p = b c^2 \sigma_{yp} = \frac{b h^2}{4} \sigma_{yp} \quad (1)$$

Il faut noter que le moment élastique maximal possible, à savoir quand les fibres extrêmes ont juste atteint le seuil de plasticité, toutes les fibres intérieures conservant un comportement élastique (Fig. 8-46(a)) est :

$$M_e = \frac{b h^2}{6} \sigma_{yp} \quad (2)$$

Ainsi, pour une section rectangulaire, le moment totalement plastique est plus élevé de 50 % que le moment élastique maximal possible.

- 8.24. Calculer le moment totalement plastique pour une poutre rectangulaire de section 2,5 cm sur 5 cm en acier dont le seuil de plasticité est 2660 kg/cm². Comparer cette valeur avec le moment élastique maximal possible que la même section peut supporter.

D'après l'équation (1) du Problème 8.23, le moment totalement plastique a pour valeur :

$$M_p = \frac{2,5(5)^2}{4} \cdot 2660 = 41\,560 \text{ kg.cm}$$

D'après l'équation (2) du même problème, le moment élastique maximal possible est :

$$M_e = \frac{2,5(5)^2}{6} \cdot 2660 = 27\,706 \text{ kg.cm}$$

Il est évident que M_p est supérieur à M_e de 50 pour cent.

- 8.25. Soit une poutre de section rectangulaire. Etablir la relation entre le moment de flexion et le rayon de courbure lorsque toutes les fibres situées à une distance y_1 de l'axe neutre ont atteint le seuil de plasticité.

Comme dans le Problème 8.22, nous admettrons que les sections planes avant application de la charge restent planes et normales à l'axe de la poutre après cette application. Pour cette raison, les déformations normales des fibres longitudinales varient linéairement en fonction de la distance des fibres à l'axe neutre. Donc en désignant par σ_{yp} la contrainte des fibres à une distance y_1 de l'axe neutre et par ϵ_c la déformation de la fibre extrême, on a :

$$\frac{\epsilon_c}{c} = \frac{\sigma_{yp}}{y_1} \quad (1)$$

Un élément initialement rectangulaire de longueur dx le long de l'axe, Fig. 8-49(a) prend, après flexion la forme de la Fig. 8-49(b). A partir de ce croquis, on a :

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\epsilon_c}{c} \quad (2)$$

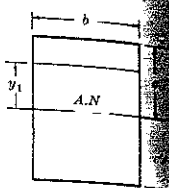
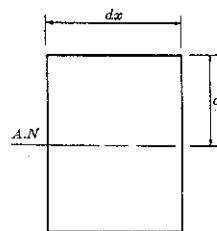
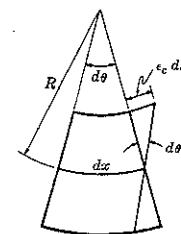


Fig. 8-47



(a)



(b)

Fig. 8-49

Donc :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\epsilon_{yp}}{y_1} = \frac{\sigma_{yp}}{E y_1} \quad (3)$$

puisque les fibres situées à une distance y_1 de l'axe neutre obéissent à la loi de Hooke : $\sigma_{yp} = E \epsilon_{yp}$. Selon le Problème 8.23, le moment correspondant à ces déformations est :

$$M = \left(b c^2 y_1 - \frac{b}{3} y_1^3 \right) \frac{\sigma_{yp}}{y_1} \quad (4)$$

Donc, d'après les équations (3) et (4) on a :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{E b y_1 (c^2 - \frac{1}{3} y_1^2)} \quad (5)$$

Finalement d'après les équations (2) et (5), on a :

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{E I \left(\frac{M}{M_e} \right) \sqrt{3 - \frac{2M}{M_e}}} \quad (6)$$

dans laquelle, comme dans le Problème 8.23 $M_e = b h^2 \sigma_{yp} / 6$. C'est la relation cherchée entre le moment de flexion M et le rayon de courbure R . La courbe de l'équation (6) est donnée dans la Fig. 8-50.

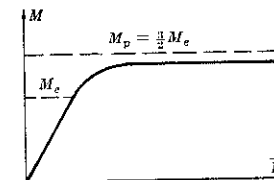


Fig. 8-50

- 8.26. Soit une poutre de section rectangulaire où $b = 2,5$ cm et $h = 1,25$ cm. Elle est en acier pour lequel $\sigma_{yp} = 2100$ kg/cm² et $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm². Calculer le rayon de courbure correspondant au moment élastique maximal possible et également le rayon de courbure pour un moment de 2020 kg.cm.

L'équation (2) du Problème 8.23 a montré que le moment élastique maximal possible était de :

$$M_e = \frac{2,5(1,25)^2}{6} \cdot 2100 = 1365 \text{ kg.cm}$$

La courbure correspondant à ce moment se calcule d'après l'équation (6) du Problème 8.25 et est :

$$\frac{1}{R} = \frac{1365}{2,1(10)^6 \frac{2,5(1,25)^3}{12} \sqrt{3 - 2}} = 0,0016 \quad \text{ou} \quad R = 625 \text{ cm}$$

La valeur de y_1 correspondant à un moment de 2020 kg.cm d'après le Problème 8.23 est $y_1 = 0,125$ cm. La courbure correspondante se calcule par l'équation (6) du Problème 8.25 et est :

$$\frac{1}{R} = \frac{2020}{2,1(10)^6 \frac{2,5(1,25)^3}{12} \sqrt{3 - \frac{4040}{1365}}} = 0,0071 \quad \text{ou} \quad R = 141 \text{ cm}$$

- 8.27. Etudions le cas le plus général d'une poutre dont la section est symétrique par rapport à l'axe vertical seulement, Fig. 8-51(a). Déterminer la position de l'axe neutre pour une flexion totalement plastique, Fig. 8-51.

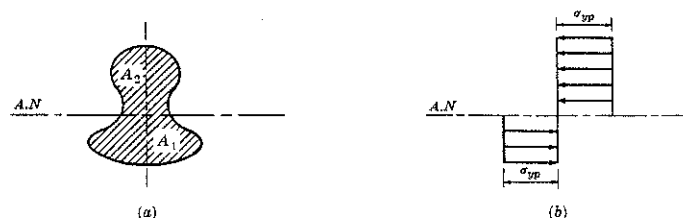


Fig. 8-51

Bien que la position de l'axe neutre soit inconnue, appelons A_1 la surface de la portion de la section en-dessous de cet axe et A_2 , la portion au-dessus. Comme le montre la Fig. 8-51(b), toutes les fibres dans A_1 sont soumises à une contrainte de tension égale au seuil de plasticité et toutes les fibres de A_2 sont soumises à une contrainte de compression de valeur égale. L'équilibre horizontal de ces forces conduit à :

$$\sigma_{yp} A_1 - \sigma_{yp} A_2 = 0 \quad (1)$$

d'où :

$$A_1 = A_2 = A/2 \quad (2)$$

où A est la surface totale de la section. Donc, dans un comportement totalement plastique, l'axe neutre divise la section en deux parties égales. Ce résultat est très différent de celui d'une poutre en comportement totalement élastique, puisque le Problème 8.1 montre que dans ce cas, l'axe neutre passe par le centre d'inertie de la section.

De même, la somme des moments des contraintes de tension et de compression doit être égale au moment appliqué M_p , moment totalement plastique. En désignant par y_1 et y_2 les distances de l'axe neutre aux centres d'inertie des surfaces A_1 et A_2 , la statique donne :

$$\sigma_{yp} A_1 \bar{y}_1 + \sigma_{yp} A_2 \bar{y}_2 = M_p \quad (3)$$

Qui, d'après l'équation (2) devient :

$$\sigma_{yp} \frac{A}{2} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) = M_p \quad (4)$$

$$\sigma_{yp} = \frac{M_p}{\frac{A}{2} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)} \quad (5)$$

Cette relation est fréquemment mise sous la forme :

$$\sigma_{yp} = \frac{M_p}{Z_p} \quad (6)$$

dans laquelle $Z_p = \frac{A}{2} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)$ est dénommé *module de section plastique*.

- 8.28 Calculer le moment totalement plastique d'un profilé en T 8 WF 40 en acier de seuil de plasticité de 2660 kg/cm². Le comparer avec le moment élastique maximal possible que peut supporter le même profilé.

D'après le Problème 8.27, le moment totalement plastique est donné par :

$$M_p = \sigma_{yp} Z_p$$

où Z_p est le module de section plastique. Les valeurs de Z_p sont rassemblées dans la table des profilés américains en fin de chapitre. Pour ce profilé particulier, il est de $Z_p = 0,65 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$. Donc :

$$M_p = 2660 (0,65) (10)^3 = 1729 \cdot 10^3 \text{ kg.cm}$$

Le moment élastique maximal possible est $M_e = \sigma_{yp} Z$ où Z est le module usuel de section. Donc :

$$M_e = 2660 (0,58) (10)^3 = 1543 \cdot 10^3 \text{ kg.cm}$$

Pour cette section particulière, le moment plastique est supérieur de 12,6 % seulement au moment élastique maximal. En fait, le moment totalement plastique de la plupart des profilés à aile large dépasse d'environ 12 à 15 % le moment élastique maximal possible.

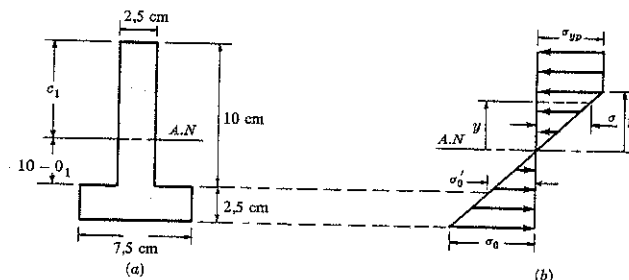


Fig. 8-52

- 8.29. Considérons un profilé en T dont les fibres de l'âme verticale, toutes à une distance y_1 de l'axe neutre ont atteint le seuil de plasticité, tandis que les autres fibres sont encore en comportement élastique. Déterminer la position de l'axe neutre et calculer le moment correspondant à cette répartition de contrainte.

On peut situer l'axe neutre (désigné par l'inconnue c_1) en étudiant les forces normales sur la section, comme le montre la Fig. 8-52(b). La géométrie de la figure donne :

$$\frac{\sigma_0}{12,5 - c_1} = \frac{\sigma_{yp}}{y_1} \quad \text{ou} \quad \sigma_0 = \frac{12,5 - c_1}{y_1} \sigma_{yp}$$

$$\frac{\sigma'_0}{10 - c_1} = \frac{\sigma_{yp}}{y_1} \quad \text{ou} \quad \sigma'_0 = \frac{10 - c_1}{y_1} \sigma_{yp}$$

Pour la force résultante qui disparaît, on a :

$$\Sigma F_N = (c_1 - y_1) (2,5) \sigma_{yp} + y_1 (2,5) \frac{\sigma_{yp}}{2} - \left\{ \left[\frac{12,5 - c_1}{2y_1} (12,5 - c_1) (7,5) \sigma_{yp} \right] - \left[\frac{10 - c_1}{2y_1} (10 - c_1) 5 \sigma_{yp} \right] \right\} = 0$$

qui permet d'obtenir l'équation quadratique :

$$2,5 c_1^2 - (5y_1 + 87,5) c_1 + 2,5 y_1^2 + 672 = 0 \quad (1)$$

qui donne c_1 pour toute valeur spécifiée de y_1 . On a ainsi la position de l'axe neutre. Notons que puisque y_1 se trouve dans le dénominateur du calcul ci-dessus, l'équation ne doit pas être utilisée pour trouver la position de l'axe neutre si $y_1 = 0$. Ainsi quand le comportement est totalement élastique, l'axe neutre passe toujours par le centre d'inertie de la section. Lorsque la plasticité augmente, l'axe neutre se déplace vers la position indiquée par l'équation (1).

Le moment correspondant aux contraintes de la Fig. 8.52(b) est donné par :

$$M = \int \sigma_y da = \int_0^{y_1} \frac{y}{y_1} \sigma_{yp}(y) (2,5) dy + \int_{y_1}^{c_1} \sigma_{yp}(y) (2,5) dy + \int_0^{12,5-c_1} \frac{y}{12,5-c_1} \frac{12,5-c_1}{y_1} \sigma_{yp}(y) 7,5 dy - \int_0^{10-c_1} \frac{y}{10-c_1} \frac{10-c_1}{y_1} \sigma_{yp}(y) 5 dy$$

ou :

$$M = \frac{\sigma_{yp}}{y_1} \left[2,5 \frac{y_1^3}{3} + 1,25 y_1 (c_1^2 - y_1^2) + 2,5 (12,5 - c_1)^3 - \frac{5}{3} (10 - c_1)^3 \right] \quad (2)$$

- 8.30. Déterminer la position de l'axe neutre du profilé en T du Problème 8.29 lorsque le comportement est totalement plastique sur la section entière. Calculer la capacité de supporter un moment en comportement totalement plastique et comparer avec le moment élastique maximal possible.

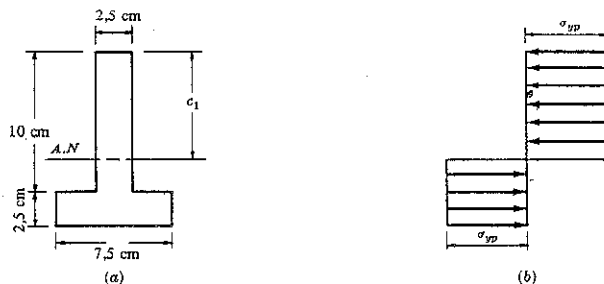


Fig. 8-53

Dans ce cas, les forces normales ont l'aspect de la Fig. 8.53(b). Pour l'équilibre des forces normales sur la section, on a :

$$-\sigma_{yp} 2,5 c_1 + [\sigma_{yp} (12,5 - c_1) 7,5 - \sigma_{yp} (10 - c_1) 5] = 0$$

d'où on tire $c_1 = 8,75$ cm. Donc, comme cela a été mentionné dans le Problème 8.27, avec un comportement plastique, l'axe neutre divise la section en deux parties égales.

Le moment correspondant à ce comportement totalement plastique est :

$$M_p = \int \sigma_y da = \int_0^{c_1} \sigma_{yp}(y) (2,5) dy + \int_0^{12,5-c_1} \sigma_{yp}(y) (7,5) dy - \int_0^{10-c_1} \sigma_{yp}(y) (5) dy$$

Pour $c_1 = 8,75$ ceci devient :

$$M_p = 144,5 \sigma_{yp}$$

La position de l'axe neutre dans le cas du moment élastique maximal possible s'obtient en posant $y_1 = c_1$ dans l'équation (1) du Problème 8.29. Cette position est $c_1 = 7,67$ cm (l'axe neutre passe par le centre d'inertie de la section). Le moment élastique maximal possible est donné que l'équation (2) du Problème 8.29. Il a pour valeur :

$$M_e = 83,12 \sigma_{yp}$$

Le moment totalement plastique dépasse cette valeur de 74 pour cent.

Problèmes supplémentaires

31. Une poutre en titane, type Ti-6Al-4V a un seuil de plasticité de 8400 kg/cm². Sa section est rectangulaire de 2,5 cm sur 5 cm. La poutre fléchit autour d'un axe parallèle à la face de 2,5 cm. Calculer le moment de flexion correspondant à la contrainte maximale de flexion qui est de 6300 kg/cm².
Rép. : 65.520 Kg.cm.
32. Une poutre cantilever de 2,70 m de longueur porte une force concentrée de 4000 kg à son extrémité libre. La poutre est en acier de construction et la contrainte de flexion ne doit pas être supérieure à 1250 kg/cm². Calculer le diamètre requis dans le cas où la poutre est une barre cylindrique.
Rép. : 20,7 cm.
33. Un profilé 10 WF 29 (pour les caractéristiques, voir le tableau des profilés américains en fin du chapitre) est utilisé comme cantilever. La poutre a 150 cm de longueur et la contrainte de flexion admissible est de 1260 kg/cm². Calculer l'intensité maximale admissible de charge uniforme pouvant être portée par la poutre sur toute sa longueur. Rép. : 59 kg par cm.
34. Une poutre en acier sur appuis aux extrémités a une longueur de 1,50 m. Elle porte une charge concentrée de 10000 kg à 60 cm d'un des appuis. La poutre est de section rectangulaire de 10 cm de large et de 15 cm de hauteur. Calculer la contrainte de flexion maximale apparaissant dans la poutre.
Rép. : 960 kg/cm².
35. Soit une poutre constituée par un profilé H 180. Calculer les contraintes de flexion maximales pour la charge du problème précédent. Rép. 845 kg/cm².
36. Une bande d'acier de 1 mm d'épaisseur est courbée en un arc de cercle de 70 cm de rayon. Calculer la contrainte de flexion maximale. Prendre $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm². Rép. : 1500 kg/cm².
37. Une poutre en acier doit résister à un moment de flexion maximal de 550000 kg.cm. Déterminer le type de profilé à aile large le plus économique pour résister à ce moment. La contrainte pratique en tension comme en compression est de 1400 kg/cm². Rép. : H 180.
38. La poutre de la Fig. 8.54 sur appuis à ses extrémités porte deux charges symétriques de 6000 kg chacune. Pour une contrainte pratique en tension et en compression de 1250 kg/cm², choisir le profilé à aile large le plus économique capable de supporter ces charges. Rép. H 160.

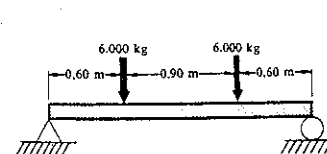


Fig. 8-54

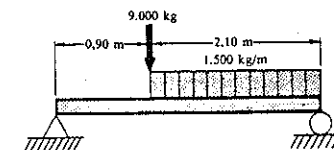


Fig. 8-55

- 8.39. Considérons la poutre sur appuis portant la charge concentrée et la charge uniforme représentée dans la Fig. 8.55. En prenant comme contrainte pratique en tension et en compression le chiffre de 1400 kg/cm², choisir le profilé à aile large capable de porter ces charges. Rép. H 200.



Pour plus de document gratuit visiter
<https://book4yours.blogspot.com>