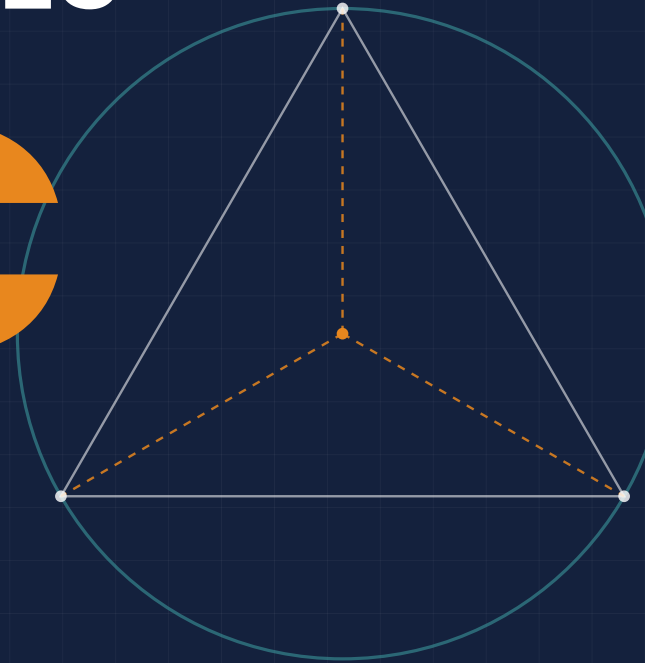


$$-3 < 2$$

MATHÉMATIQUES

1A PIC

Cours essentiel · Méthodes & astuces
Exercices gradués · Défis olympiades
Corrigés détaillés



16 chapitres

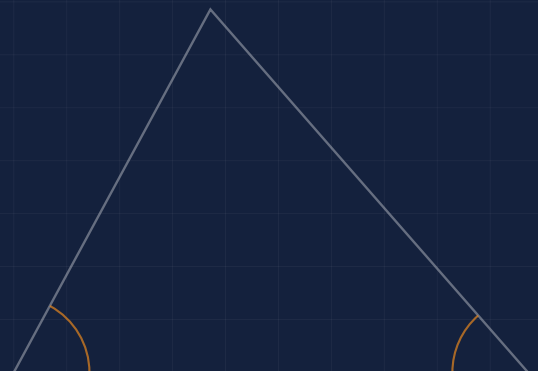
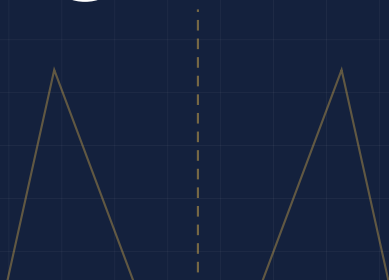
127 exercices corrigés

$$x + 5 = 12$$

32 défis olympiades

2 sujets : contrôle type et épreuve olympiade

$$k(a + b)$$



Auteur



Maths Olympiad

Réussir ses contrôles
et préparer les olympiades de mathématiques

Comment utiliser ce livret ?

Bienvenue au collège ! Ce livret couvre **tout le programme de mathématiques de la 1^{APIC}** en 16 chapitres. Il est conçu pour **comprendre, s'entraîner et réussir ses contrôles**, tout en donnant aux plus curieux le goût des **olympiades**. Chaque chapitre suit toujours le même parcours en quatre étapes :

- | | |
|--|--|
| 1 L'essentiel du cours : définitions, propriétés et exemples, sans bavardage. | 2 Méthodes & astuces : les savoir-faire pas à pas, les raccourcis et les pièges. |
| 3 Exercices : du plus simple au plus exigeant, dont des exercices type contrôle. | 4 Défis olympiades : des problèmes astucieux pour aller plus loin. |

► Les encadrés

DÉFINITION	Le vocabulaire à connaître par cœur.	MÉTHODE	La démarche à suivre, étape par étape.
PROPRIÉTÉ	Une règle de calcul ou de raisonnement.	★ ASTUCE DU PROF	Le raccourci qui fait gagner du temps.
THÉORÈME	Un résultat important et sa condition d'emploi.	✗ PIÈGE À ÉVITER	L'erreur la plus fréquente sur les copies.
EXEMPLE	Une application commentée du cours.	LE SAVAIS-TU ?	Un peu d'histoire et de culture mathématique.

► Les niveaux de difficulté

- ☆☆☆ Application directe du cours : à réussir sans hésiter.
☆☆☆ Approfondissement : plusieurs étapes ou une petite idée.
☆☆☆ Niveau contrôle exigeant ou exercice de réflexion.
DÉFI OLYMPIADE Problème de concours : il faut chercher, essayer, se tromper... et trouver l'astuce !

► Bien travailler avec ce livret

- 1. Lis le cours, puis refais les exemples seul**, sans regarder la solution.
- 2. Cherche chaque exercice au moins 10 à 15 minutes** avant d'ouvrir les corrigés (à partir de la page 69). Un exercice cherché, même raté, s'apprend beaucoup mieux qu'un exercice lu.
- 3. Note tes erreurs** dans un petit carnet : relis-le avant chaque contrôle.
- 4. Avant un contrôle**, révise avec le formulaire (page 64). En fin d'année, traite le contrôle type et l'épreuve type olympiade en conditions réelles, sans corrigé.

► Une progression conseillée

- 1^{er} semestre** Chapitres 1 à 5 (décimaux, fractions, relatifs) et chapitres 9 à 12 (droites, angles, symétries).
2^e semestre Chapitres 6 à 8 (calcul littéral, équations, proportionnalité) et chapitres 13 à 16 (triangle, cercle, quadrilatères, solides).
Mai – juin Formulaire, contrôle type et épreuve type olympiade, puis les défis pour le plaisir !

La progression exacte peut varier selon l'établissement : suis l'ordre de ton professeur, chaque chapitre se lit de façon indépendante.

► Pour les parents et les enseignants

Les exercices sont classés par difficulté et leurs corrigés sont séparés des énoncés : le livret se prête aussi bien au travail autonome qu'aux séances de soutien, aux devoirs à la maison ou à la préparation des contrôles. Le contrôle type (sur 20 points) reprend tout le programme de l'année et l'épreuve type olympiade permet de repérer et d'encourager les élèves passionnés.

Sommaire

Partie A — Nombres et calcul	4
1 Nombres entiers et décimaux : opérations et priorités	4
2 Les fractions : écriture, égalité, simplification et comparaison	8
3 Opérations sur les fractions	12
4 Les nombres décimaux relatifs : repérage et comparaison	16
5 Addition et soustraction des nombres relatifs	19
6 Calcul littéral : développement et factorisation	22
7 Les équations	26
8 La proportionnalité	30
Partie B — Géométrie	34
9 Droites parallèles et droites perpendiculaires	34
10 Les angles	37
11 Médiatrice et symétrie axiale	41
12 La symétrie centrale	45
13 Le triangle	49
14 Le cercle	53
15 Les quadrilatères particuliers	56
16 Prisme droit et cylindre : patrons, aires et volumes	60
Partie C — Se tester	64
F Formulaire : l'essentiel à retenir	64
S1 Contrôle type — fin d'année	65
S2 Épreuve type olympiade	67
Corrigés détaillés	69

Rappel des repères. Les corrigés de tous les exercices, des défis et des sujets types sont regroupés à la fin du livret, chapitre par chapitre : chaque exercice porte un numéro (par exemple **Exercice 7.3** = chapitre 7, exercice 3) qui permet de retrouver immédiatement sa solution.

Nombres entiers et décimaux : opérations et priorités

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Lire, écrire, comparer et ranger des nombres décimaux.
- ✓ Maîtriser les quatre opérations, la division euclidienne et la multiplication par 10, 100, 0,1...
- ✓ Calculer une expression en respectant les priorités, calculer mentalement et estimer un ordre de grandeur.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Nombre décimal

Un **nombre décimal** s'écrit avec une virgule : à gauche, la **partie entière** ; à droite, la **partie décimale**. Chaque chiffre a une **valeur** qui dépend de sa **position**.

milliers	centaines	dizaines	unités	,	dixièmes	centièmes	millièmes
4	0	7	8		5	2	6
partie entière : 4 078					partie décimale : 0,526		

$4\,078,526 = 4\,000 + 70 + 8 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{6}{1\,000}$: le chiffre 2 est le chiffre des **centièmes**, il vaut 0,02.

PROPRIÉTÉ — Comparer deux nombres décimaux

1. On compare d'abord les **parties entières** : $12,9 < 13,01$ car $12 < 13$.
2. Si elles sont égales, on compare les chiffres des dixièmes, puis des centièmes, etc. Au besoin, on ajoute des zéros inutiles : $3,5 = 3,50$ et $3,45 < 3,50$.

DÉFINITION — Le vocabulaire des quatre opérations

Opération	Exemple	Résultat	Les nombres utilisés
addition	$12 + 3 = 15$	une somme	des termes
soustraction	$12 - 3 = 9$	une différence	des termes
multiplication	$12 \times 3 = 36$	un produit	des facteurs
division	$12 \div 3 = 4$	un quotient	le dividende 12 et le diviseur 3

DÉFINITION — Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne d'un entier a (le **dividende**) par un entier $b \neq 0$ (le **diviseur**), c'est trouver deux entiers q (le **quotient**) et r (le **reste**) tels que :

$$a = b \times q + r \quad \text{avec} \quad r < b$$

Exemple : $250 = 12 \times 20 + 10$ et $10 < 12$: le quotient est 20, le reste est 10.

$$\begin{array}{r|l} 250 & 12 \\ -24 & \text{quotient} \\ \hline \text{reste } 10 & \end{array}$$

PROPRIÉTÉ — Multiplier ou diviser par 10, 100, 1 000 ou par 0,1; 0,01

- $\times 10, \times 100, \times 1\,000$: la virgule se déplace de 1, 2, 3 rangs vers la **droite**.
- $\div 10, \div 100, \div 1\,000$: la virgule se déplace de 1, 2, 3 rangs vers la **gauche**.
- Multiplier par 0,1 revient à **diviser** par 10 ; multiplier par 0,01 revient à diviser par 100.
- Diviser par 0,1 revient à **multiplier** par 10.

Exemples : $47,5 \times 10 = 475$ $3,75 \div 100 = 0,0375$ $58 \times 0,1 = 5,8$ $0,45 \div 0,01 = 45$.

PROPRIÉTÉ — Priorités opératoires

Dans une expression, on effectue dans cet ordre :

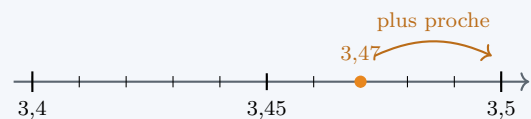
1. les calculs entre **parenthèses** (en commençant par les plus intérieures, puis les crochets []) ;
2. les **multiplications et divisions** ;
3. les **additions et soustractions**, de gauche à droite.

EXEMPLE $A = 50 - [6 + 2 \times (9 - 4)] = 50 - [6 + 2 \times 5] = 50 - [6 + 10] = 50 - 16 = 34$.

DÉFINITION — Arrondi et ordre de grandeur

Arrondir un nombre au dixième, c'est choisir le nombre à un chiffre après la virgule **le plus proche**. 3,47 est entre 3,4 et 3,5, plus proche de 3,5 : l'arrondi au dixième de 3,47 est 3,5.

Un **ordre de grandeur** est un résultat approché obtenu avec des nombres « ronds » : $198,7 \times 5,1 \approx 200 \times 5 = 1\,000$.



2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Calculer une expression pas à pas

1. Repérer les parenthèses (les plus intérieures d'abord) et calculer ce qu'elles contiennent.
2. Souligner les multiplications et divisions, les effectuer.
3. Terminer par les additions et soustractions **de gauche à droite**. Écrire une ligne par étape !

$B = 18 - 3 \times 4 + 6 = 18 - 12 + 6 = 6 + 6 = 12$ mais $C = (18 - 3) \times (4 + 6) = 15 \times 10 = 150$.

MÉTHODE — Calcul mental : les bons réflexes

Les couples magiques : $2 \times 5 = 10$; $4 \times 25 = 100$; $8 \times 125 = 1\,000$.

$4 \times 17 \times 25 = 17 \times (4 \times 25) = 17 \times 100 = 1\,700$.

Regrouper les termes :

$12,7 + 5,8 + 7,3 + 4,2 = (12,7 + 7,3) + (5,8 + 4,2)$
 $= 20 + 10 = 30$.

Distributivité « cachée » :

$46 \times 99 = 46 \times 100 - 46 \times 1 = 4\,600 - 46 = 4\,554$.

Facteur commun :

$3,6 \times 15 + 6,4 \times 15 = (3,6 + 6,4) \times 15$
 $= 10 \times 15 = 150$.

★ ASTUCE DU PROF — Toujours estimer avant de calculer

Un ordre de grandeur détecte les erreurs de virgule : si la calculatrice affiche 101,337 pour $198,7 \times 5,1$, l'estimation $200 \times 5 = 1\,000$ montre qu'il y a une erreur (le bon résultat est 1 013,37).

✗ PIÈGE À ÉVITER

- 3,45 a plus de chiffres que 3,5, mais $3,45 < 3,5$! On compare chiffre par chiffre, pas la « longueur ».
- $18 - 3 \times 4 \neq 15 \times 4$: la multiplication passe **avant** la soustraction.
- Multiplier par 0,1 ne rend pas plus grand : $58 \times 0,1 = 5,8$. Diviser par 0,1 rend plus grand : $6 \div 0,1 = 60$.
- Dans une division euclidienne, le reste est toujours **strictement plus petit** que le diviseur.

LE SAVAIS-TU ?

Au XV^e siècle, le savant **Al-Kâshî**, à Samarcande, expliquait déjà comment calculer avec les fractions décimales, et calculait le nombre π avec 16 décimales exactes ! La virgule décimale ne s'est imposée en Europe qu'au XVII^e siècle.

3 Exercices

EXERCICE 1.1 ★☆☆

On considère le nombre $N = 4\,078,526$.

1. Donner le chiffre des dixièmes, le chiffre des dizaines et le chiffre des millièmes de N .
2. Écrire en chiffres : « trois unités, sept dixièmes et cinq millièmes ».
3. Écrire sous forme d'un nombre décimal : $5 + \frac{4}{10} + \frac{9}{1\,000}$ et $\frac{2\,375}{100}$.

EXERCICE 1.2 ★☆☆

1. Ranger dans l'ordre croissant : 3,5 ; 3,05 ; 3,45 ; 3,405 ; 3,054.
2. Intercaler un nombre décimal entre 2,7 et 2,8, puis entre 5,19 et 5,2.

EXERCICE 1.3 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| a) $12 - 2 \times 5 = 50$. | c) $7,3 \div 0,01 = 730$. |
| b) $0,8 \times 0,1 = 8$. | d) $15,2 > 15,19$. |

EXERCICE 1.4 ★☆☆

Type contrôle. Calculer en détaillant les étapes :

- | | |
|---|--|
| a) $D = 25 - 4 \times 3 + 8 \div 2$ | c) $F = 3 \times [20 - 4 \times (7 - 3)] \div 2$ |
| b) $E = (25 - 4) \times (3 + 8 \div 2)$ | d) $G = 7,5 + 2,5 \times 4 - 1,2 \div 0,4$ |

EXERCICE 1.5 ★★☆☆

Calculer **mentalement** en choisissant la bonne astuce :

a) $25 \times 13 \times 4$
b) $8 \times 2,7 \times 125$

c) 37×99
d) 102×35

e) $2,5 \times 3,7 \times 40$
f) $4,8 \times 7 + 5,2 \times 7$

EXERCICE 1.6 ★★☆☆

1. Effectuer la division euclidienne de 1 000 par 37 et écrire l'égalité correspondante.
2. Une usine de Fès range 1 000 verres à thé dans des boîtes de 37. Combien de boîtes pleines obtient-on ? Combien de verres restent hors des boîtes ?
3. Sans refaire de division, donner le quotient et le reste de la division euclidienne de 1 001 par 37.

EXERCICE 1.7 ★★☆☆

Au souk de Marrakech. Yasmine a 400 DH. Elle achète 2,5 kg d'amandes à 48 DH le kg, deux tajines à 85,5 DH l'un et 1,2 kg de dattes à 22,5 DH le kg.

1. Donner un ordre de grandeur de la dépense.
2. Écrire **une seule expression** donnant la somme dépensée, puis la calculer.
3. Combien d'argent lui reste-t-il ?

EXERCICE 1.8 ★★☆☆

1. Dans une division euclidienne, le diviseur est 9, le quotient est 15 et le reste est 7. Quel est le dividende ?
2. Le dividende est 100 et le reste est 4. Trouver toutes les valeurs possibles du diviseur.

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 1.1 — Le compte est bon

Sans changer l'ordre des nombres ni les signes, on place des parenthèses dans $2 + 3 \times 4 + 5 \times 6$.

1. Sans parenthèses, que vaut cette expression ?
2. Placer des parenthèses pour obtenir 50, puis 104, puis 170.
3. Quel est le plus grand résultat possible ? Justifier.

○ DÉFI OLYMPIADE 1.2 — Le calendrier et les restes

1. Aujourd'hui, c'est jeudi. Quel jour serons-nous dans 100 jours ? dans 1 000 jours ?
2. Le 1^{er} janvier 2026 était un jeudi. Quel jour sera le 1^{er} janvier 2027 ? (L'année 2026 compte 365 jours.)
3. Trouver tous les entiers dont le quotient et le reste dans la division euclidienne par 7 sont égaux (et non nuls).

Les fractions : écriture, égalité, simplification et comparaison

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Comprendre une fraction comme partage, comme quotient et comme nombre placé sur une droite graduée.
- ✓ Reconnaître des fractions égales, simplifier une fraction jusqu'à la rendre irréductible.
- ✓ Comparer et ranger des fractions avec la méthode la plus rapide.

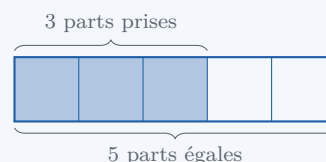
1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Fraction

a et b sont deux entiers, avec $b \neq 0$. La **fraction** $\frac{a}{b}$ se lit « a sur b ».

- b est le **dénominateur** : en combien de parts égales on partage l'unité ;
- a est le **numérateur** : combien de parts on prend.

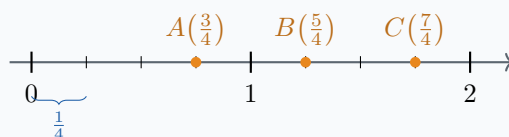
Ci-contre : on a colorié $\frac{3}{5}$ (« trois cinquièmes ») du rectangle.



PROPRIÉTÉ — Fraction d'une quantité ; la fraction est un quotient

- Prendre $\frac{a}{b}$ d'une quantité, c'est la **diviser par b** , puis **multiplier par a** . Les $\frac{3}{4}$ de 60 DH : $60 \div 4 = 15$, puis $15 \times 3 = 45$ DH.
- $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b , donne a : $\frac{a}{b} = a \div b$. $\frac{7}{4} = 7 \div 4 = 1,75$; mais $\frac{1}{3} = 0,333 \dots$ n'a **pas** d'écriture décimale exacte.

EXEMPLE — placer des fractions sur une droite graduée Pour placer des quarts, on partage chaque unité en 4 parts égales ; $\frac{7}{4}$, c'est 7 « pas » de $\frac{1}{4}$.

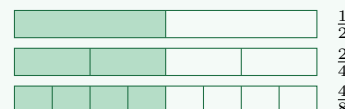


PROPRIÉTÉ — Fractions égales

On obtient une fraction égale en **multipliant** (ou en **divisant**) le numérateur **et** le dénominateur par un même nombre non nul :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Exemple : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$
(même longueur de barre !)



DÉFINITION — Simplifier, fraction irréductible

Simplifier une fraction, c'est diviser son numérateur et son dénominateur par un même diviseur commun. Une fraction est **irréductible** quand on ne peut plus la simplifier : $\frac{18}{24} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6} = \frac{3}{4}$.

PROPRIÉTÉ — Comparer des fractions

- Même dénominateur** : la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur. $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$
- Même numérateur** : la plus grande est celle qui a le plus **petit** dénominateur (les cinquièmes sont plus gros que les huitièmes). $\frac{3}{5} > \frac{3}{8}$
- Comparaison à 1** : si $a < b$, alors $\frac{a}{b} < 1$; si $a > b$, alors $\frac{a}{b} > 1$. $\frac{9}{10} < 1 < \frac{11}{10}$
- Sinon** : on réduit au **même dénominateur**, puis on compare les numérateurs.

2 Méthodes & astuces
MÉTHODE — Comparer $\frac{5}{6}$ et $\frac{7}{9}$: réduire au même dénominateur

- Chercher un multiple commun aux dénominateurs, le plus petit possible : 6 et 9 divisent 18.
- Transformer les deux fractions : $\frac{5}{6} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{15}{18}$ et $\frac{7}{9} = \frac{7 \times 2}{9 \times 2} = \frac{14}{18}$.
- Comparer les numérateurs et conclure : $15 > 14$, donc $\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$.

MÉTHODE — Rendre une fraction irréductible, étape par étape

On divise par des diviseurs communs (2, 3, 5, 7...) tant que c'est possible :

$$\frac{84}{126} = \frac{84 \div 2}{126 \div 2} = \frac{42}{63} = \frac{42 \div 3}{63 \div 3} = \frac{14}{21} = \frac{14 \div 7}{21 \div 7} = \frac{2}{3}.$$

On s'arrête quand le seul diviseur commun est 1 : 2 et 3 n'ont plus de diviseur commun, donc $\frac{2}{3}$ est irréductible.

★ ASTUCE DU PROF — Les critères de divisibilité, pour simplifier vite

- par **2** : chiffre des unités pair (0,2,4,6,8) ;
- par **3** : somme des chiffres divisible par 3 ;
- par **5** : chiffre des unités 0 ou 5 ;
- par **9** : somme des chiffres divisible par 9.
- par **10** : chiffre des unités 0 ;

$\frac{126}{315}$: $1 + 2 + 6 = 9$ et $3 + 1 + 5 = 9$, donc on divise par 9 : $\frac{126}{315} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$ (puis par 7).

✗ PIÈGE À ÉVITER

- On ne simplifie **jamais** en ajoutant ou en retranchant : $\frac{3+5}{4+5} = \frac{8}{9}$, ce n'est pas $\frac{3}{4}$!

- $\frac{1}{8} < \frac{1}{5}$: plus on partage en beaucoup de parts, plus chaque part est petite.
- $\frac{1}{3} \neq 0,3$: $\frac{1}{3} = 0,333\dots$; en revanche $\frac{3}{10} = 0,3$.

LE SAVAIS-TU ?

La barre de fraction horizontale a été popularisée au XII^e siècle par des mathématiciens du Maghreb comme **Al-Hassâr** et **Ibn al-Yâsamîn** (qui enseignait à Marrakech), avant que Fibonacci ne la fasse connaître en Europe.

3 Exercices

EXERCICE 2.1 ★☆☆

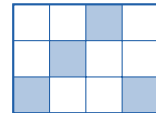
Pour chaque figure, quelle fraction de la figure est coloriée ? Donner la réponse sous forme irréductible.



a)



b)



c)

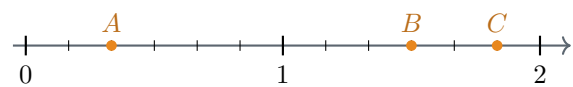
EXERCICE 2.2 ★☆☆

Calculer :

- | | |
|---|--|
| a) les $\frac{2}{3}$ de 45 DH ; | c) les $\frac{5}{8}$ de 2 kg de farine (en g) ; |
| b) les $\frac{3}{4}$ d'une heure (en minutes) ; | d) les $\frac{7}{10}$ d'une classe de 30 élèves. |

EXERCICE 2.3 ★☆☆

1. Lire les abscisses des points A , B et C (fractions irréductibles).
2. Reproduire la droite et placer $D(\frac{4}{3})$ et $E(\frac{1}{2})$.



EXERCICE 2.4 ★☆☆

Type contrôle.

1. Donner l'écriture décimale de : $\frac{7}{4}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{12}{5}$.
2. Écrire sous forme de fraction irréductible : 0,35 ; 1,25 ; 0,36.
3. Rendre irréductibles : $\frac{84}{126}$; $\frac{120}{360}$; $\frac{75}{105}$; $\frac{132}{154}$.

EXERCICE 2.5 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|
| a) $\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$. | b) $\frac{1}{8} > \frac{1}{5}$. | c) $\frac{15}{14} > 1$. | d) $\frac{3+5}{4+5} = \frac{3}{4}$. |
|------------------------------------|----------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|

EXERCICE 2.6 ★★☆☆

Ranger dans l'ordre croissant :

- a) $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{12}$ (indice : tout écrire en douzièmes) ;
 b) $\frac{7}{5}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{11}{10}$; $\frac{4}{3}$ (indice : commencer par comparer à 1).

EXERCICE 2.7 ★★☆☆

Les pastillas de Fès. Trois cousins ont chacun une pastilla de même taille. Adam en mange les $\frac{5}{8}$, Rania les $\frac{7}{12}$ et Ilyas les $\frac{2}{3}$.

1. Écrire ces trois fractions avec le dénominateur 24.
2. Qui a mangé le plus ? le moins ? Ranger les trois cousins.

EXERCICE 2.8 ★★☆☆

1. Trouver la fraction égale à $\frac{3}{5}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur vaut 64.
2. Comparer $\frac{2025}{2026}$ et $\frac{2026}{2027}$ sans calcul. (Que manque-t-il à chacune pour faire 1 ?)

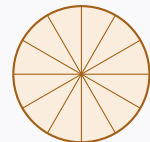
4 Défis olympiades**○ DÉFI OLYMPIADE 2.1 — Toujours de la place entre deux fractions**

1. Trouver une fraction comprise entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. (Écrire ces fractions en sixièmes : y a-t-il de la place ? Et en douzièmes ?)
2. Trouver trois fractions comprises entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.
3. « Méthode magique » : on ajoute numérateurs et dénominateurs. Vérifier que $\frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$ est bien entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$, puis trouver ainsi une fraction entre $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{7}$ et vérifier.

○ DÉFI OLYMPIADE 2.2 — Le gâteau d'anniversaire

Maman partage un gâteau rond. Ali en reçoit $\frac{1}{3}$, Badr $\frac{1}{4}$, Chama $\frac{1}{6}$ et Dina reçoit tout le reste.

1. Pourquoi est-il pratique de découper le gâteau en 12 parts égales ? Combien de ces parts chaque enfant reçoit-il ?
2. Dina affirme : « J'ai autant que Badr ! » A-t-elle raison ?
3. Ranger les enfants de la plus petite à la plus grosse part.



Opérations sur les fractions

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Additionner et soustraire des fractions, en réduisant au même dénominateur.
- ✓ Multiplier des fractions en simplifiant d'abord, calculer « une fraction d'une fraction ».
- ✓ Résoudre des problèmes de partage et calculer des expressions avec priorités.

1 L'essentiel du cours

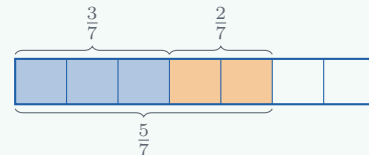
PROPRIÉTÉ — Addition et soustraction : même dénominateur

Quand les dénominateurs sont **égaux**, on ajoute (ou on soustrait) les numérateurs et on **garde** le dénominateur :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Exemple : $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ (3 septièmes + 2 septièmes).

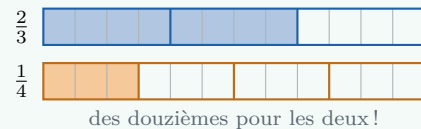


PROPRIÉTÉ — Dénominateurs différents

On **réduit d'abord au même dénominateur**, de préférence le plus petit multiple commun des dénominateurs, puis on applique la règle précédente.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} - \frac{3 \times 3}{8 \times 3} = \frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \frac{11}{24}$$



Entier et fraction : on écrit l'entier comme une fraction de même dénominateur, $n = \frac{n \times b}{b}$:

$$2 + \frac{3}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = \frac{13}{5} ; \quad 3 - \frac{4}{7} = \frac{21}{7} - \frac{4}{7} = \frac{17}{7}.$$

PROPRIÉTÉ — Multiplication de deux fractions

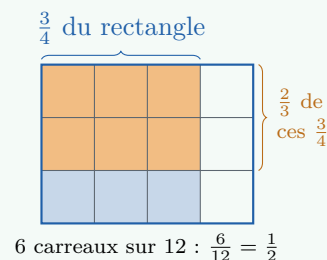
On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux (**pas besoin** de même dénominateur !) :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

$$n \times \frac{a}{b} = \frac{n \times a}{b}$$

Fraction d'une fraction : « les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ » se calcule par

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}. \text{ Le mot « de » se traduit par « } \times \text{ »}.$$



PROPRIÉTÉ — Priorités opératoires

Mêmes règles qu'avec les décimaux : d'abord les parenthèses, puis les multiplications, enfin les additions et soustractions.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10} \quad \text{mais} \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.$$

2 Méthodes & astuces
MÉTHODE — Trouver le plus petit dénominateur commun

On écrit les multiples du **plus grand** dénominateur jusqu'à en trouver un qui est divisible par l'autre.

Pour $\frac{7}{10} + \frac{4}{15}$: multiples de 15 : 15 ; **30** ✓ (car $30 = 10 \times 3$). Donc $\frac{7}{10} + \frac{4}{15} = \frac{21}{30} + \frac{8}{30} = \frac{29}{30}$.

Cas particulier : si un dénominateur est multiple de l'autre, c'est lui ! $\frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{9}{12} - \frac{5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

MÉTHODE — Simplifier AVANT de multiplier

On décompose les nombres et on barre les facteurs communs à un numérateur et à un dénominateur : les calculs restent petits et le résultat est directement irréductible.

$$\frac{15}{8} \times \frac{4}{25} = \frac{3 \times \cancel{5} \times \cancel{4}}{2 \times \cancel{4} \times \cancel{5} \times 5} = \frac{3}{10} \quad \frac{12}{35} \times \frac{14}{9} = \frac{4 \times \cancel{3} \times 2 \times \cancel{7}}{5 \times \cancel{7} \times 3 \times \cancel{3}} = \frac{8}{15}.$$

✗ PIÈGE À ÉVITER

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$! On n'ajoute **jamais** les dénominateurs : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.
- $2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$ et non $\frac{6}{10}$: l'entier multiplie seulement le numérateur.

★ ASTUCE DU PROF — Contrôler un résultat d'un coup d'œil

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ dépasse forcément $\frac{1}{2}$: le résultat $\frac{2}{5}$ (plus petit que $\frac{1}{2}$) est donc faux ! Et prendre une fraction inférieure à 1 d'un nombre le diminue : $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} < \frac{3}{4}$.

3 Exercices
EXERCICE 3.1 ☆☆☆

Calculer et donner le résultat sous forme irréductible :

a) $\frac{4}{9} + \frac{2}{9}$

c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$

e) $\frac{7}{10} - \frac{1}{4}$

g) $1 - \frac{5}{8}$

b) $\frac{11}{12} - \frac{5}{12}$

d) $\frac{5}{6} + \frac{2}{9}$

f) $4 + \frac{2}{3}$

h) $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} + \frac{5}{12}$

EXERCICE 3.2 ★☆☆

Calculer en simplifiant avant de multiplier :

a) $\frac{2}{3} \times \frac{9}{14}$

b) $\frac{10}{21} \times \frac{7}{15}$

c) $5 \times \frac{3}{10}$

d) $\frac{7}{4} \times 12$

e) $\frac{6}{25} \times \frac{35}{18}$

EXERCICE 3.3 ★☆☆

QCM. Pour chaque ligne, choisir la bonne réponse.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{5}{6}$

c) $\frac{1}{6}$

2. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} =$

a) $\frac{5}{8}$

b) $\frac{9}{10}$

c) $\frac{2}{5}$

3. Les $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ valent

a) $\frac{3}{8}$

b) $\frac{5}{4}$

c) $\frac{4}{6}$

4. $1 - \frac{3}{8} =$

a) $\frac{2}{8}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{1}{2}$

EXERCICE 3.4 ★☆☆

Type contrôle. Calculer en respectant les priorités (résultats irréductibles) :

a) $A = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{8}$

c) $C = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \times \frac{12}{5}$

b) $B = \frac{7}{9} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3}$

d) $D = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{10}{9}$

EXERCICE 3.5 ★☆☆

Le verger de Sefrou. Un terrain de 6 000 m² est planté ainsi : les $\frac{2}{5}$ en oliviers, $\frac{1}{4}$ du reste en amandiers, et tout le reste en cerisiers.

1. Quelle fraction du terrain reste-t-il après les oliviers ?
2. Montrer que les amandiers occupent les $\frac{3}{20}$ du terrain.
3. Quelle fraction du terrain est plantée en cerisiers ? Calculer l'aire de chaque partie.

EXERCICE 3.6 ★☆☆

La harira de Lalla Fatima. Pour 6 personnes, il faut $\frac{3}{4}$ kg de tomates, $\frac{3}{2}$ verre de lentilles et $\frac{1}{2}$ botte de coriandre.

1. Pour 4 personnes, on prend les $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ de chaque quantité. Calculer ces quantités.
2. Quelle masse de tomates faut-il pour 10 personnes ? Donner le résultat en fraction, puis en kg décimal.

EXERCICE 3.7 ★★☆☆

Au collège Ibn Battouta de Tanger, il y a 600 élèves. Les $\frac{3}{4}$ déjeunent à la cantine et, parmi eux, les $\frac{2}{5}$ sont des élèves de 1APIC.

1. Quelle fraction de l'ensemble des élèves représentent les élèves de 1APIC qui déjeunent à la cantine ?
2. Combien sont-ils ? Vérifier en calculant d'abord le nombre d'élèves qui déjeunent à la cantine.

EXERCICE 3.8 ★★☆☆

Karim dépense $\frac{1}{3}$ de son argent de poche pour un livre, puis $\frac{1}{4}$ **de ce qui lui reste** pour un goûter. Il lui reste alors 60 DH.

1. Quelle fraction de son argent a-t-il dépensée pour le goûter ? au total ?
2. Combien d'argent avait-il au départ ?

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 3.1 — La somme qui s'effondre

1. Vérifier que $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \times 3}$, que $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \times 4}$ et que $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4 \times 5}$.
2. En utilisant ce phénomène (toujours vrai : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n \times (n+1)}$), calculer **sans réduire au même dénominateur** :

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10}.$$

3. Et si la somme allait jusqu'à $\frac{1}{99 \times 100}$?

○ DÉFI OLYMPIADE 3.2 — L'héritage des 17 chameaux

Un vieux marchand de Zagora laisse 17 chameaux à ses trois fils : l'aîné doit en recevoir $\frac{1}{2}$, le deuxième $\frac{1}{3}$ et le cadet $\frac{1}{9}$. Impossible de couper des chameaux ! Un sage arrive et prête **son** chameau : il y en a 18. L'aîné prend $\frac{1}{2}$ de 18, le deuxième $\frac{1}{3}$ de 18, le cadet $\frac{1}{9}$ de 18... et le sage repart avec son chameau !

1. Combien chaque fils reçoit-il ? Combien de chameaux ont-ils au total ?
2. Calculer $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ et expliquer pourquoi le sage récupère son chameau.
3. Il y a 3 600 ans, les scribes égyptiens n'utilisaient que des fractions de numérateur 1 (ils écrivaient $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$). Écrire comme eux chaque fraction comme somme de deux fractions **différentes** de numérateur 1 : $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{2}{5}$.

Les nombres décimaux relatifs : repérage et comparaison

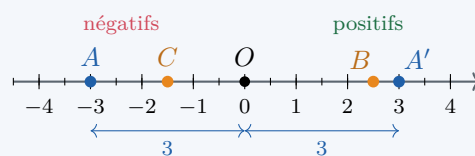
OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Connaître le vocabulaire : signe, distance à zéro, nombres opposés.
- ✓ Repérer un point sur une droite graduée et dans un quadrillage.
- ✓ Comparer et ranger des nombres relatifs, les utiliser dans la vie courante.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Nombres relatifs, distance à zéro, opposés

- **Positif** : supérieur ou égal à 0 : $+3,5$ (ou $3,5$).
- **Négatif** : inférieur ou égal à 0 ; il s'écrit avec le signe « - » : -7 . (0 est les deux.)
- **Distance à zéro** : le nombre sans son signe. Celle de -7 est 7.
- **Opposés** : même distance à zéro et signes contraires : -3 et 3 .



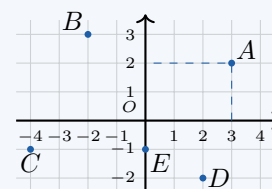
$$A(-3), A'(3), B(2,5), C(-1,5)$$

Sur une **droite graduée**, chaque point a une **abscisse** ; l'**origine** O a pour abscisse 0. A et A' sont **symétriques** par rapport à O .

DÉFINITION — Repérage dans un quadrillage

On trace deux droites graduées perpendiculaires de même origine O : l'axe horizontal des **abscisses** et l'axe vertical des **ordonnées**. Chaque point est repéré par ses deux **coordonnées**, dans cet ordre : (abscisse ; ordonnée).

Sur la figure : $A(3; 2)$, $B(-2; 3)$, $C(-4; -1)$, $D(2; -2)$, $E(0; -1)$.



PROPRIÉTÉ — Comparer deux nombres relatifs

Sur une droite graduée, le plus grand de deux nombres est le plus **à droite**. Donc :

1. un nombre **négatif** est toujours plus petit qu'un nombre **positif** : $-15 < 2$
2. de deux nombres **positifs**, le plus grand a la plus grande distance à zéro : $4,5 > 3$
3. de deux nombres **négatifs**, le plus grand a la plus **petite** distance à zéro : $-3 > -4,5$

2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Ranger une liste de relatifs dans l'ordre croissant

On écrit d'abord les **négatifs**, du plus « loin » de zéro au plus proche, puis 0, puis les **positifs**.

Exemple : $2; -3,5; 0; -0,5; 1,2; -12; -3,05$ donne $-12 < -3,5 < -3,05 < -0,5 < 0 < 1,2 < 2$.

MÉTHODE — Placer le point $P(-3; 2)$ dans un quadrillage

Depuis O , on avance **horizontalement** selon l'abscisse (3 carreaux à **gauche**, car $-3 < 0$), puis **verticalement** selon l'ordonnée (2 carreaux vers le **haut**, car $2 > 0$).

★ ASTUCE DU PROF — L'effet miroir

Pour comparer deux négatifs, compare leurs distances à zéro... puis **retourne** le symbole : $2,07 < 2,7$ donc $-2,07 > -2,7$; $0,45 < 0,5$ donc $-0,45 > -0,5$.

✗ PIÈGE À ÉVITER

- $7 > 2$ mais $-7 < -2$: pour les négatifs, l'ordre est **inversé**. Pense au thermomètre : -7°C est plus froid que -2°C .
- Dans un couple de coordonnées, l'ordre compte : $(2; -1)$ et $(-1; 2)$ sont deux points différents.

LE SAVAIS-TU ?

Le record de froid de toute l'Afrique a été mesuré au Maroc : $-23,9^\circ\text{C}$ à **Ifrane**, le 11 février 1935 ! L'été, il fait souvent plus de 45°C à Merzouga.

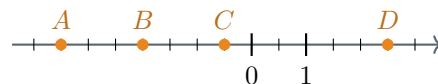
3 Exercices

EXERCICE 4.1 ★☆☆

Pour chacun des nombres -6 ; $+4,2$; $-0,7$; 0 ; $-15,3$; 9 , dire s'il est positif ou négatif, puis donner sa distance à zéro et son opposé.

EXERCICE 4.2 ★☆☆

1. Lire les abscisses des points A , B , C , D .
2. Reproduire la droite, puis placer $E(-1,5)$, $F(2)$ et le point G , symétrique de C par rapport à O .


EXERCICE 4.3 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

- | | |
|-------------------|--|
| a) $-8 > -3$ | d) $-1 > 0,5$ |
| b) $-0,1 < 0$ | e) L'opposé de -4 est 4 . |
| c) $-5,2 < -5,19$ | f) -3 est plus près de 0 que 2 . |

EXERCICE 4.4 ★★☆☆

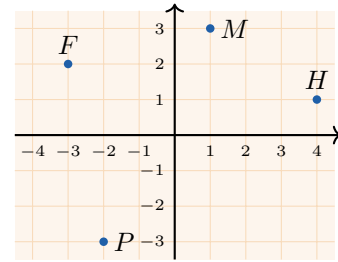
Type contrôle.

1. Ranger dans l'ordre croissant : $-2,7$; $-2,07$; $1,5$; $-2,77$; $-0,27$; -2 .
2. Ranger dans l'ordre décroissant : 5 ; $-5,5$; $-0,05$; $0,5$; $-5,05$; -50 .
3. Citer tous les nombres entiers relatifs compris entre $-3,2$ et $2,7$.

EXERCICE 4.5 ★★☆☆

Carte au trésor dans la médina. Sur le plan ci-contre, chaque carreau représente 100 m.

1. Lire les coordonnées de la fontaine F , du hammam H , de la mosquée M et de la porte P .
2. Le trésor T a une abscisse opposée à celle de H et la même ordonnée que P . Donner ses coordonnées.
3. Sur une copie, placer $R(-3; -2)$, $S(2; -2)$, $U(2; 1)$, $V(-3; 1)$. Quelle figure obtient-on ? Combien de carreaux contient-elle ?

**EXERCICE 4.6** ★★☆☆

Le Maroc en relatifs.

1. Un matin de janvier : Ifrane -6°C ; Merzouga 3°C ; Midelt -2°C ; Agadir 11°C ; Azilal $-0,5^{\circ}\text{C}$. Ranger ces villes de la plus froide à la plus chaude.
2. Dans un immeuble de Casablanca, le rez-de-chaussée est le niveau 0 et il y a 3 sous-sols. Amine part du niveau -3 et monte de 7 étages : à quel niveau arrive-t-il ? Puis il descend de 5 étages : où est-il ?
3. Le sommet du Toubkal est à l'altitude 4 167 m ; la Sebkha Tah, point le plus bas du Maroc, à -55 m. Lequel de ces deux lieux est le plus proche du niveau de la mer ?

EXERCICE 4.7 ★★★

Frise chronologique. Les années après J.-C. sont positives, celles avant J.-C. négatives.

1. Associer à chaque événement un nombre relatif, puis les ranger du plus ancien au plus récent : Archimède naît en 287 av. J.-C. ; fondation de la Quaraouiyyine à Fès en 859 ; Pythagore naît vers 570 av. J.-C. ; Juba II devient roi de Maurétanie en 25 av. J.-C.
2. Lequel de ces événements est le plus proche de l'an 1 ?

4 Défis olympiades**○ DÉFI OLYMPIADE 4.1 — Cinq villes, cinq températures**

Une nuit d'hiver, les températures de cinq villes sont -5 , -3 , -1 , 3 et 6 degrés, dans le désordre. (1) Ifrane est la ville la plus froide. (2) Les températures de Midelt et de Merzouga sont opposées. (3) Ouarzazate est la ville la plus proche de 0°C . (4) Il fait plus froid à Midelt qu'à Ouarzazate. Retrouver la température de chacune des cinq villes (la cinquième est Agadir).

○ DÉFI OLYMPIADE 4.2 — La grenouille sauteuse

Partant de l'origine d'une droite graduée, une grenouille saute de 1 vers la droite, de 2 vers la gauche, de 3 vers la droite, de 4 vers la gauche, etc.

1. Donner ses 6 premières positions. Que remarque-t-on ?
2. Où est-elle après 10 sauts ? Après combien de sauts atteint-elle -10 ? et 50 ?

Addition et soustraction des nombres relatifs

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Additionner deux nombres relatifs de même signe ou de signes contraires.
- ✓ Transformer une soustraction en addition de l'opposé ; calculer une suite d'additions et de soustractions.
- ✓ Supprimer des parenthèses, calculer une distance sur une droite graduée et résoudre des problèmes concrets.

1 L'essentiel du cours

PROPRIÉTÉ — Somme de deux nombres relatifs

Même signe : on garde le signe commun et on **additionne** les distances à zéro.

$$(+3) + (+5) = +8$$

$$(-4) + (-7) = -11 \quad (-2,5) + (-1,5) = -4$$

Signes contraires : on prend le signe du nombre qui a la **plus grande distance à zéro** et on **soustrait** les distances à zéro.

$$(-9) + (+4) = -5 \quad (\text{car } 9 > 4 \text{ et } 9 - 4 = 5)$$

$$(+7) + (-2) = +5 \quad (+1,5) + (-6) = -4,5$$

EXEMPLE — deux façons de voir que $(+5) + (-8) = -3$



Droite graduée : je pars de 0, j'avance de 5, puis je recule de 8 : j'arrive en -3.



Gains et pertes : je gagne 5 DH et je perds 8 DH ; chaque paire $(+1; -1)$ s'annule : j'ai perdu 3 DH.

PROPRIÉTÉ — Opposés, soustraction

La somme de deux nombres **opposés** est nulle : $(+6) + (-6) = 0$; $(-2,7) + (+2,7) = 0$.

Soustraire un nombre relatif, c'est **ajouter son opposé** : $a - b = a + (\text{opposé de } b)$

$$(+3) - (+8) = (+3) + (-8) = -5 ; \quad (-2) - (-7) = (-2) + (+7) = +5.$$

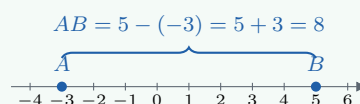
PROPRIÉTÉ — Supprimer les parenthèses

On n'écrit pas le + placé en tête, et : $+(+a) = +a$ $-(-a) = +a$ $+(-a) = -a$ $-(+a) = -a$.

Chaque nombre garde le **signe qui le précède** : $(+5) - (-3) + (-7) - (+2) = 5 + 3 - 7 - 2 = -1$.

PROPRIÉTÉ — Distance entre deux points

Sur une droite graduée, la distance entre deux points est égale à la **plus grande abscisse moins la plus petite**.



2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Calculer une suite d'additions et de soustractions

1. Supprimer les parenthèses. 2. **Regrouper** les positifs d'un côté, les négatifs de l'autre (ou éliminer les opposés). 3. Finir par une seule addition :

$$B = (-4) - (+6) + (-9) - (-15) = -4 - 6 - 9 + 15 = -19 + 15 = -4.$$

★ ASTUCE DU PROF — Chasser les opposés et faire des paquets ronds

$$37 - 58 + 63 - 37 + 58 = \mathbf{63} \quad (37 \text{ et } -37 \text{ s'annulent, } -58 \text{ et } 58 \text{ aussi}).$$

$$-2,7 + 5,4 - 7,3 + 4,6 = (-2,7 - 7,3) + (5,4 + 4,6) = -10 + 10 = \mathbf{0}.$$

✗ PIÈGE À ÉVITER — Pas de « règle des signes » pour l'addition !

« Moins et moins donne plus » est **faux** ici : $-3 - 5 = -8$ (perdre 3 DH puis encore 5 DH, c'est perdre 8 DH), et non +8. De même, $(-2) - (-7) = -2 + 7 = +5$, et non -9.

LE SAVAIS-TU ?

Vers le II^e siècle av. J.-C., les calculateurs chinois utilisaient des baguettes **rouges** pour les nombres positifs et **noires** pour les négatifs. Au VII^e siècle, l'Indien **Brahmagupta** parlait de « fortunes » et de « dettes » : « une dette retranchée de zéro devient une fortune », c'est-à-dire $0 - (-a) = +a$!

3 Exercices

EXERCICE 5.1 ★☆☆

Calculer. Pour les calculs i) à l), transformer d'abord la soustraction en addition.

a) $(+6) + (+9)$

d) $(-15) + (+6)$

g) $(-0,8) + (-1,7)$

j) $(-6) - (+3)$

b) $(-7) + (-5)$

e) $(-3,5) + (+3,5)$

h) $(-25) + (+40)$

k) $(+5) - (-8)$

c) $(+12) + (-4)$

f) $(+2,4) + (-7,1)$

i) $(+4) - (+9)$

l) $(-2,5) - (-6)$

EXERCICE 5.2 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

a) La somme de deux négatifs est négative.

c) $-4 - (-6) = -10$.

b) $(-8) + (+3) = +5$.

d) Soustraire un nombre négatif fait *augmenter* le résultat.

EXERCICE 5.3 ★★☆☆

Calculer en regroupant astucieusement.

a) $A = (+7) + (-12) + (+5) + (-3)$

c) $C = 15 - 23 + 8 - 17 + 4$

b) $B = (-9) - (+5) - (-12) + (-6)$

d) $D = -3,2 + 4,5 - 1,8 - 6,5 + 7$

EXERCICE 5.4 ★★☆☆

À Ifrane, on a relevé les températures (en °C) suivantes pendant une semaine de janvier.

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
Minimum	-4	-7	-2,5	-9	+1
Maximum	+8	+3	+6,5	+2	+11

- Calculer l'écart (maximum - minimum) de chaque jour. Quel jour l'écart est-il le plus grand ?
- Le jeudi soir, il fait +2 °C ; la température baisse de 7 °C pendant la nuit. Quelle température fait-il au matin ?

EXERCICE 5.5 ★★☆☆

Le 1^{er} mars, le compte bancaire de M. Alami est « à découvert » : -350 DH. Ce mois-ci : il reçoit son salaire de 6 200 DH, paie son loyer (2 500 DH), ses courses au souk (1 180 DH) et l'électricité (320 DH), puis un ami lui rembourse 450 DH.

- Écrire le calcul du solde final avec des nombres relatifs, puis l'effectuer.
- Il achète ensuite un vélo à 2 700 DH. Quel est alors son solde ?

EXERCICE 5.6 ★★☆☆

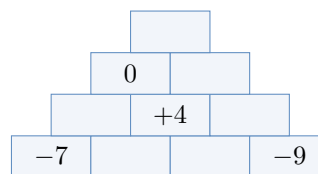
- Sur une droite graduée : $A(-4,5)$, $B(+2)$, $C(-1)$, $D(+6,5)$. Calculer AB , AC , CD et BD .
- Dans une tour de Casablanca, l'ascenseur part du parking -3, monte de 11 étages, puis descend de 6 étages. À quel étage arrive-t-il ? Combien d'étages le séparent du parking -3 ?
- Le sommet du Toubkal est à l'altitude 4 167 m ; la sebkha Tah, point le plus bas du Maroc, est à -55 m. Calculer leur différence d'altitude.

EXERCICE 5.7 ★★★

(Type contrôle) Dans cette pyramide, chaque brique contient la **somme** des deux briques sur lesquelles elle repose.

Compléter la pyramide.

Aide : commencer par la brique à gauche de +4.


4 Défis olympiades
○ DÉFI OLYMPIADE 5.1 — Le carré magique des relatifs

On veut placer les neuf nombres -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 (chacun une fois) dans une grille 3×3 pour que les sommes des 3 lignes, des 3 colonnes et des 2 diagonales soient toutes égales.

- Calculer la somme des neuf nombres. En déduire la somme de chaque ligne.
- Compléter la grille ci-contre.

-3	2	
		-4

○ DÉFI OLYMPIADE 5.2 — Des sommes très longues

Calculer sans calculatrice :

- $S = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \dots - 99 + 100$
- $T = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \dots + 97 - 99.$

Calcul littéral : développement et factorisation

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Écrire une expression littérale avec les conventions d'écriture et la calculer pour une valeur de la lettre.
- ✓ Développer et factoriser avec la distributivité ; réduire une somme.
- ✓ Utiliser le calcul littéral pour calculer mentalement, exprimer une aire et prouver un programme de calcul.

1 L'essentiel du cours

► Expressions littérales

DÉFINITION

Une **expression littérale** est une expression dans laquelle des **lettres** remplacent des nombres.
Exemples : périmètre d'un carré de côté c : $P = 4 \times c$; aire d'un rectangle : $\mathcal{A} = L \times \ell$.

PROPRIÉTÉ — Conventions d'écriture

On peut **supprimer le signe $\times$** devant une lettre ou une parenthèse, en écrivant le nombre en premier :

- $3 \times a = 3a$; $a \times b = ab$; $x \times 5 = 5x$;
- $4 \times (x + 2) = 4(x + 2)$; $1 \times a = a$.

Produits d'une lettre par elle-même :

- $a \times a = a^2$ (« a au carré ») ;
- $a \times a \times a = a^3$ (« a au cube »).

Entre deux nombres, on garde le $\times$:

$3 \times 4 = 12$, pas 34 !

EXEMPLE — calculer une expression pour une valeur de la lettre Pour $x = 3$: $A = 2x^2 + 5x - 4 = 2 \times 3^2 + 5 \times 3 - 4 = 2 \times 9 + 15 - 4 = 29$. On remplace *chaque* x par 3, on remet les signes $\times$, et on respecte les priorités : d'abord la puissance, puis les multiplications.

► La distributivité

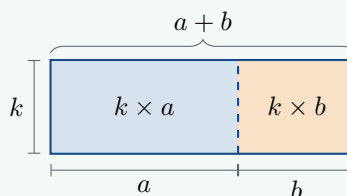
PROPRIÉTÉ — Distributivité de la multiplication

Pour tous nombres k , a et b :

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$k(a - b) = ka - kb$$

(pour la seconde, avec $a \geq b$)



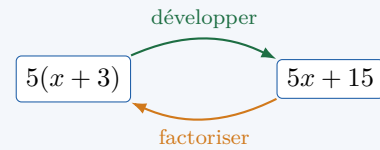
L'aire du grand rectangle s'écrit $k(a + b)$ ou $ka + kb$.

Exemples : $5(x + 3) = 5x + 15$; $6(y - 2) = 6y - 12$; $a(b + 4) = ab + 4a$; $7 \times 98 = 7 \times (100 - 2) = 700 - 14 = 686$.

DÉFINITION — Développer, factoriser

Développer, c'est transformer un **produit** en **somme** (ou différence).

Factoriser, c'est l'inverse : transformer une somme en produit.

**► Réduire une somme****PROPRIÉTÉ — Termes semblables**

Des termes **semblables** ont la même partie littérale ($3x$ et $5x$; $2a^2$ et a^2). On les regroupe grâce à la distributivité : $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$; $7a - 2a = 5a$; $2a^2 + a^2 = 3a^2$.

Réduire une somme, c'est regrouper ses termes semblables : $4x + 7 + 2x - 3 = 6x + 4$.

2 Méthodes & astuces**MÉTHODE — Développer pas à pas**

On multiplie le facteur k par **chaque** terme de la parenthèse (comme un facteur qui « distribue » des cartes), puis on simplifie.

$$3(2x + 5) = 3 \times 2x + 3 \times 5 = 6x + 15$$

MÉTHODE — Factoriser : chercher le facteur commun

1. Écrire chaque terme comme un produit qui fait apparaître un facteur commun. **2.** Mettre ce facteur devant la parenthèse. **3.** Vérifier en développant.

$$6x + 15 = \underline{3} \times 2x + \underline{3} \times 5 \\ = 3(2x + 5)$$

$$x^2 + 7x = \underline{x} \times x + \underline{x} \times 7 \\ = x(x + 7)$$

$$4a + 4 = \underline{4} \times a + \underline{4} \times 1 \\ = 4(a + 1) \text{ (sans oublier le 1 !)}$$

★ ASTUCE DU PROF — Le calcul mental des champions

$$37 \times 101 = 37 \times 100 + 37 \times 1 = 3\,700 + 37 = \mathbf{3\,737} \quad 99 \times 12 = 100 \times 12 - 1 \times 12 = 1\,200 - 12 = \mathbf{1\,188}$$

$$47 \times 13 + 47 \times 87 = 47 \times (13 + 87) = 47 \times 100 = \mathbf{4\,700} \quad (\text{ici on a factorisé!})$$

✗ PIÈGE À ÉVITER — Les erreurs les plus fréquentes

- $2a + 3b \neq 5ab$: termes non semblables, on ne peut pas réduire.
- $a^2 \neq 2a$: pour $a = 5$, $a^2 = 25$ mais $2a = 10$.
- $3 + 2x \neq 5x$: pour $x = 10$, $3 + 20 = 23$ et non 50.
- $4(x + 3) \neq 4x + 3$: le 4 multiplie **aussi** le 3.

LE SAVAIS-TU ?

C'est le Français **François Viète** (1540–1603) qui eut l'idée d'utiliser des lettres pour tous les nombres d'un problème. Avant lui, on écrivait tout en phrases ! L'habitude de noter l'inconnue x vient de **René Descartes** (1637).

3 Exercices

EXERCICE 6.1 ★☆☆

Écrire chaque expression le plus simplement possible (supprimer les signes $\times$ quand c'est permis).

- a) $5 \times x$ c) $x \times x$ e) $1 \times t$ g) $2 \times (x + 5)$
 b) $a \times 7 \times b$ d) $y \times y \times y$ f) $3 \times 4 \times a$ h) $x \times 3 \times x$

EXERCICE 6.2 ★☆☆

On donne les expressions

$$A = 4x + 3, \quad B = x^2 + 2x, \quad C = 3(x + 2).$$

Recopier et compléter le tableau. Que remarque-t-on pour $x = 3$?

x	0	1	2,5	3
A				
B				
C				

EXERCICE 6.3 ★☆☆

QCM. Pour chaque ligne, une seule réponse est exacte. Laquelle ?

	A	B	C
1. $2a + 3a$ est égal à	$5a^2$	$5a$	$6a$
2. $6(x + 4)$ est égal à	$6x + 4$	$6x + 24$	$10x$
3. Pour $x = 4$, $2x^2$ vaut	64	16	32
4. Une factorisation de $9y + 12$ est	$3(3y + 4)$	$9(y + 3)$	$21y$

EXERCICE 6.4 ★☆☆

Développer puis réduire si possible.

- a) $A = 4(x + 3)$ c) $C = x(x + 6)$ e) $E = 5(2x + y - 3)$
 b) $B = 7(2a - 5)$ d) $D = 2a(3a + 4)$ f) $F = 3(x + 2) + 4(2x + 1)$

EXERCICE 6.5 ★☆☆

Factoriser.

- a) $6x + 6y$ b) $5a - 15$ c) $7x + 7$ d) $x^2 + 4x$ e) $12a + 18b$ f) $3y^2 - y$

EXERCICE 6.6 ★☆☆

Réduire chaque somme.

- a) $A = 3x + 5 + 2x + 4$ c) $C = 2x^2 + 3x + x^2 + 5x$
 b) $B = 7a - 2 - 3a + 8$ d) $D = 6y + 4 - y + y^2 - 1$

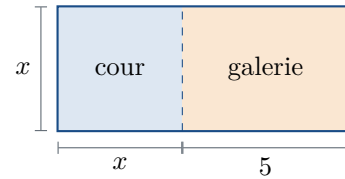
EXERCICE 6.7 ★☆☆

Calculer mentalement en utilisant la distributivité (écrire l'étape intermédiaire).

- a) 23×101 c) 12×98 e) $6,5 \times 13 - 6,5 \times 3$
 b) 45×99 d) $17 \times 23 + 17 \times 77$ f) 36×11

EXERCICE 6.8 ★★☆☆

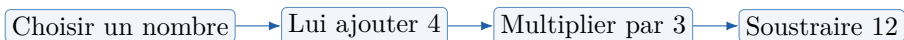
Dans un riad de Marrakech, une cour carrée de côté x m est prolongée par une galerie rectangulaire de 5 m de long (voir figure).



1. Exprimer l'aire totale de deux façons différentes.
2. Exprimer le périmètre total en fonction de x , puis le réduire.
3. Calculer l'aire et le périmètre pour $x = 4$.
4. Pour quelle valeur de x la cour et la galerie ont-elles la même aire ?

EXERCICE 6.9 ★★☆☆

(Type contrôle) Voici un programme de calcul :

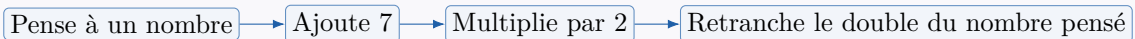


1. Appliquer ce programme au nombre 5, puis au nombre 2,5.
2. On choisit un nombre x . Montrer que le résultat est $3(x+4) - 12$, puis le développer et le réduire.
3. Quel nombre faut-il choisir pour obtenir 39 ? Que remarque-t-on sur ce programme ?
4. Peut-on obtenir 100 en choisissant un nombre *entier* ? Justifier.

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 6.1 — Le nombre magique

Nadia propose à ses amis ce tour de magie :

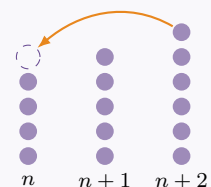


« Je devine ton résultat sans le connaître : c'est 14 ! »

1. Tester le tour avec deux nombres de ton choix.
2. Prouver que le résultat est *toujours* 14.
3. Modifier le tour pour que le résultat soit toujours 2026.

○ DÉFI OLYMPIADE 6.2 — Nombres consécutifs

1. On note n un nombre entier. Écrire les deux entiers qui le suivent, puis montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. (La figure ci-contre donne une idée : que fait la flèche ?)
2. Trouver trois entiers consécutifs dont la somme est 2025.
3. Peut-on trouver **quatre** entiers consécutifs dont la somme est 2025 ? Et 2026 ?



Les équations

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Reconnaître une équation, tester si un nombre est solution.
- ✓ Résoudre les équations $x + a = b$, $x - a = b$, $ax = b$, $\frac{x}{a} = b$, puis $ax + b = c$.
- ✓ Mettre un problème en équation en 4 étapes, le résoudre et conclure.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Équation, inconnue, solution

Une **équation** est une égalité dans laquelle figure un nombre inconnu, désigné par une lettre : l'**inconnue**.

Une **solution** de l'équation est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité **vraie**. **Résoudre** l'équation, c'est trouver sa (ou ses) solution(s).

EXEMPLE — tester si un nombre est solution Le nombre 4 est-il solution de $3x + 2 = 5x - 6$?

Membre de gauche : $3 \times 4 + 2 = 14$.

Et 2 ? $3 \times 2 + 2 = 8$ et $5 \times 2 - 6 = 4$.

Membre de droite : $5 \times 4 - 6 = 14$.

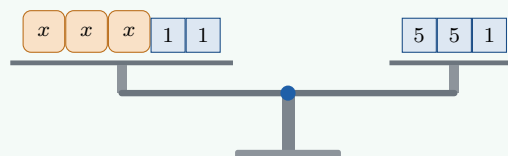
$8 \neq 4$: 2 **n'est pas solution**.

Les deux membres sont égaux : 4 **est solution**.

PROPRIÉTÉ — La règle de la balance

Une équation est comme une **balance en équilibre**. Elle reste en équilibre si l'on fait la **même opération des deux côtés** :

- ajouter ou soustraire un même nombre ;
- multiplier ou diviser par un même nombre **non nul**.



$3x + 2 = 11$: on retire 2 kg de chaque côté, puis on partage en 3 : chaque sac pèse $x = 3$ kg.

PROPRIÉTÉ — Les quatre équations de base

On isole x en faisant l'**opération inverse** des deux côtés.

$x + a = b$	$x - a = b$	$a \times x = b \ (a \neq 0)$	$\frac{x}{a} = b \ (a \neq 0)$
on soustrait a	on ajoute a	on divise par a	on multiplie par a
$x = b - a$	$x = b + a$	$x = \frac{b}{a}$	$x = b \times a$
$x + 7 = 19 \Rightarrow x = 12$	$x - 4,5 = 6 \Rightarrow x = 10,5$	$5x = 32 \Rightarrow x = 6,4$	$\frac{x}{3} = 8 \Rightarrow x = 24$

2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Résoudre une équation du type $ax + b = c$

1. On « défait » d'abord l'addition (ou la soustraction).
 2. Puis on « défait » la multiplication.
 3. On **vérifie** en remplaçant x dans l'équation de départ.
- Vérification : $4 \times 6,5 - 7 = 26 - 7 = 19 \checkmark$
 La solution est **6,5**.

$$\begin{aligned} 4x - 7 &= 19 \\ 4x - 7 + 7 &= 19 + 7 \\ 4x &= 26 \\ \frac{4x}{4} &= \frac{26}{4} \\ x &= 6,5 \end{aligned}$$

MÉTHODE — Mettre un problème en équation : les 4 étapes

Au souk de Fès, Yassine achète 3 kg de dattes et un sac de noix à 25 DH. Il paie 115 DH en tout. Quel est le prix d'un kilogramme de dattes ?

1. **Choix de l'inconnue** : soit x le prix d'un kilogramme de dattes (en DH).
2. **Mise en équation** : $3x + 25 = 115$.
3. **Résolution** : $3x = 115 - 25 = 90$, donc $x = 90 \div 3 = 30$.
4. **Vérification et conclusion** : $3 \times 30 + 25 = 115 \checkmark$. Un kilogramme de dattes coûte **30 DH**.

★ ASTUCE DU PROF — Penser « à l'envers » comme un programme de calcul

$4x - 7 = 19$ se lit : « je pense à un nombre, je le multiplie par 4, j'enlève 7, je trouve 19 ». En remontant : $19 + 7 = 26$, puis $26 \div 4 = 6,5$. On fait les opérations inverses **dans l'ordre inverse** !

✗ PIÈGE À ÉVITER — Opérer sur les DEUX membres

Faux : $x + 5 = 12$, donc $x = 12 + 5 = 17$. **Faux** : $3x = 12$, donc $x = 12 - 3 = 9$.
 On a ajouté au lieu de soustraire ! Vérifions : $17 + 5 = 22 \neq 12$. $3x$ veut dire $3 \times x$: on **divise** par 3, $x = 4$.

LE SAVAIS-TU ?

Le mot « **algèbre** » vient du livre *al-Jabr wa-l-Muqābala* d'al-Khwārizmī (Bagdad, vers 820). *Al-jabr* signifie « remettre en place » : faire passer un terme d'un côté à l'autre de l'équation. Son nom a aussi donné le mot « algorithme » !

3 Exercices

EXERCICE 7.1 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier par un calcul.

- | | |
|--|--------------------------------------|
| a) 5 est solution de $2x + 3 = 13$. | c) 0,5 est solution de $6x = 3$. |
| b) 3 est solution de $4x - 1 = 2x + 7$. | d) 2 est solution de $x^2 + x = 6$. |

EXERCICE 7.2 ★☆☆

Résoudre les équations suivantes.

a) $x + 15 = 42$

c) $7x = 63$

e) $12 + x = 30,5$

g) $4x = 10$

b) $x - 8 = 27$

d) $\frac{x}{5} = 12$

f) $x - 2,7 = 4,3$

h) $\frac{x}{0,5} = 7$

EXERCICE 7.3 ★☆☆

Résoudre, puis vérifier.

a) $3x + 5 = 26$

c) $2x + 7,5 = 16,5$

e) $\frac{x}{4} + 6 = 10$

b) $5x - 12 = 33$

d) $8x - 3 = 3$

f) $10x + 15 = 18$

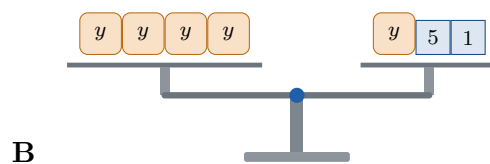
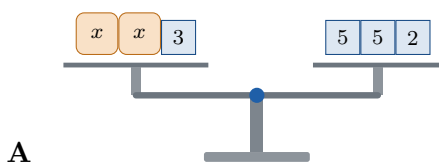
EXERCICE 7.4 ★☆☆

Trouver l'erreur. Voici la copie de Mehdi. Pour chaque ligne, expliquer son erreur et corriger.

a) $x - 6 = 15$, donc $x = 15 - 6 = 9$. b) $4x + 2 = 18$, donc $4x = 20$, donc $x = 5$. c) $\frac{x}{2} = 10$, donc $x = 10 \div 2 = 5$.

EXERCICE 7.5 ★☆☆

Les deux balances sont en équilibre ; les sacs d'une même balance ont la même masse et les cubes indiquent des kg. **1.** Écrire une équation pour chaque balance. **2.** Trouver la masse d'un sac dans chaque cas.

**EXERCICE 7.6** ★☆☆

Pour chaque problème, appliquer les 4 étapes.

- À Chefchaouen, Salma achète 4 tapis identiques et paie 60 DH de livraison. Elle paie 1 260 DH en tout. Quel est le prix d'un tapis ?
- Un rectangle a une largeur de 7 cm et un périmètre de 38 cm. Quelle est sa longueur ?
- Je pense à un nombre. Je le divise par 3, puis j'ajoute 8. Je trouve 20. Quel est ce nombre ?

EXERCICE 7.7 ★☆☆

1. QCM. Le triangle ci-contre a un périmètre de 31 cm (longueurs en cm). Quelle équation permet de trouver x ? La résoudre.

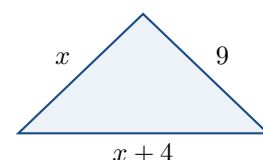
A : $x + 4 + 9 = 31$

B : $3x + 4 = 31$

C : $2x + 9 + 4 = 31$

D : $x \times 2 + 9 = 31$

2. Dans un triangle ABC , l'angle $\hat{B}$ mesure le double de $\hat{A}$, et $\hat{C}$ mesure 20° de plus que $\hat{A}$. Sachant que la somme des angles d'un triangle vaut 180° , calculer les trois angles.



EXERCICE 7.8 ★★★

(Type contrôle) Karim a 3 fois l'âge de son fils Adam. Dans 12 ans, la somme de leurs âges sera 72 ans.

1. On note x l'âge actuel d'Adam. Exprimer en fonction de x l'âge de Karim aujourd'hui, puis les âges de chacun dans 12 ans.
2. Montrer que le problème se traduit par l'équation $4x + 24 = 72$.
3. Résoudre l'équation et conclure. Vérifier.

EXERCICE 7.9 ★★★

Un abonnement de salle de sport à Agadir coûte 150 DH à l'inscription, puis 80 DH par mois. Rania a dépensé en tout 1 110 DH.

1. Combien de mois a-t-elle payés ?
2. Son frère Omar a choisi une formule sans inscription, à 130 DH par mois. Calculer ce que paient Rania et Omar pour 3 mois. Que remarque-t-on ? Pour 12 mois, quelle formule est la plus avantageuse ?
3. Avec 1 110 DH, combien de mois complets Omar peut-il payer ?

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 7.1 — Les âges de la famille Bennani

La famille Bennani compte quatre personnes : le père, la mère, Lina et son petit frère Ilyas. Aujourd'hui, la somme de leurs quatre âges est 105 ans. Il y a 5 ans, la somme des âges des membres de la famille était seulement de 86 ans.

1. Si les quatre membres étaient déjà nés il y a 5 ans, quelle aurait été la somme de leurs âges ? Que peut-on en déduire pour Ilyas ?
2. En déduire l'âge d'Ilyas aujourd'hui.
3. Lina a 4 ans de plus qu'Ilyas, et le père a 3 ans de plus que la mère. Trouver l'âge de chacun.

○ DÉFI OLYMPIADE 7.2 — Pièces de monnaie

Imane a dans sa tirelire uniquement des pièces de 2 DH et de 5 DH : 23 pièces en tout, pour une valeur totale de 79 DH.

1. Si toutes les pièces étaient des pièces de 2 DH, quelle serait la valeur totale ? Combien manque-t-il ?
2. Remplacer une pièce de 2 DH par une pièce de 5 DH augmente le total de combien ? En déduire le nombre de pièces de 5 DH.
3. Retrouver ce résultat avec une équation (inconnue x : nombre de pièces de 5 DH).
4. Sa sœur affirme avoir, elle aussi, 23 pièces de 2 DH et de 5 DH, pour un total de 80 DH. Est-ce possible ?

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Reconnaître une situation de proportionnalité (tableau, graphique) et calculer une quatrième proportionnelle.
- ✓ Appliquer et calculer un pourcentage ; utiliser une échelle.
- ✓ Calculer une vitesse moyenne, une distance ou une durée.

1 L'essentiel du cours

► Tableau de proportionnalité

DÉFINITION

Deux grandeurs sont **proportionnelles** si l'on obtient les valeurs de l'une en **multipliant** celles de l'autre par un même nombre, appelé **coefficient de proportionnalité**.

EXEMPLE — olives à 24 DH le kg au souk

Masse (kg)	1	2	0,5	3,5
Prix (DH)	24	48	12	84

× 24

On passe de la 1^{re} ligne à la 2^e en multipliant par 24 : le prix est

proportionnel à la masse.

Les quotients $\frac{24}{1} = \frac{48}{2} = \frac{12}{0,5} = \frac{84}{3,5}$ sont **tous égaux**.

REMARQUE — Pas toujours proportionnel !

Âge et taille d'un enfant, prix d'un taxi avec prise en charge (7 DH + 3 DH par km)... ne sont **pas** des situations de proportionnalité : pour le taxi, 1 km coûte 10 DH mais 2 km coûtent 13 DH, et non 20 DH.

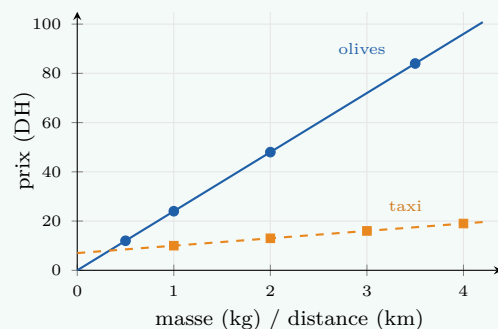
► Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

Une situation de proportionnalité est représentée par des **points alignés avec l'origine** du repère.

Réciproquement, si les points sont alignés **avec l'origine**, la situation est proportionnelle.

Le taxi (en orange) : points alignés, mais la droite **ne passe pas par l'origine** ⇒ pas proportionnel.



► Pourcentages, échelles, vitesse

PROPRIÉTÉ — Trois situations de proportionnalité à connaître

Pourcentage

Prendre $t\%$ d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$.

15 % de 240 DH :

$$240 \times \frac{15}{100} = 36 \text{ DH.}$$

Échelle

Les distances sur la carte sont proportionnelles aux distances réelles :

$$e = \frac{\text{distance carte}}{\text{distance réelle}}$$

(même unité)

Vitesse moyenne

À vitesse constante, la distance parcourue est proportionnelle à la durée :

$$d = v \times t$$

$$v = \frac{d}{t} \quad \text{et} \quad t = \frac{d}{v}.$$

2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Calculer une quatrième proportionnelle : 3 façons

4 baghrirs coûtent 10 DH. Combien coûtent 10 baghrirs ?

Retour à l'unité

1 baghrir : $10 \div 4 = 2,5$ DH.

10 baghrirs : $10 \times 2,5 = 25$

DH.

Linéarité

2 baghrirs (moitié de 4) : 5 DH.

$10 = 4 + 4 + 2 :$

$10 + 10 + 5 = 25$ DH.

Produit en croix

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 10 \\ \hline 10 & x \\ \hline \end{array} \quad x = \frac{10 \times 10}{4} = 25$$

MÉTHODE — Convertir une durée pour calculer une vitesse

Les minutes ne sont pas des « dixièmes d'heure » : 1 h = 60 min. Donc :

$$30 \text{ min} = 0,5 \text{ h}$$

$$15 \text{ min} = 0,25 \text{ h}$$

$$45 \text{ min} = 0,75 \text{ h}$$

$$6 \text{ min} = 0,1 \text{ h}$$

$$20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ h}$$

Exemple : un car met 1 h 30 min pour faire Rabat-Casablanca (90 km) : $v = \frac{90}{1,5} = 60 \text{ km/h.}$

★ ASTUCE DU PROF — Pourcentages de tête

10 % : on divise par 10 ; 50 % : la moitié ; 25 % : le quart ; 5 % : la moitié de 10 %.

15 % de 80 DH = 10 % + 5 % = 8 + 4 = 12 DH. Et 8 % de 50 = 50 % de 8 = 4 !

✗ PIÈGE À ÉVITER — Les pièges classiques

- 1 h 20 min $\neq$ 1,20 h ! En effet, 20 min = $\frac{20}{60}$ h = $\frac{1}{3}$ h.
- Une réduction de 20 % puis une autre de 30 % ne font **pas** une réduction de 50 % (voir défi 1).
- Une vitesse moyenne n'est pas la moyenne des vitesses (voir défi 2).

3 Exercices

EXERCICE 8.1 ★☆☆

Ces tableaux sont-ils des tableaux de proportionnalité ? Si oui, donner le coefficient.

a)

2	5	7	10
7	17,5	24,5	35

b)

3	4	6	9
12	16	24	30

c)

4	10	1	0,5
3	7,5	0,75	0,375

EXERCICE 8.2 ★☆☆

Compléter ce tableau de proportionnalité (prix de l'essence à Rabat), puis représenter les points dans un repère.

Volume (L)	1	5	20	...	...
Prix (DH)	14	...	...	350	105

EXERCICE 8.3 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier.

- Le périmètre d'un carré est proportionnel à la longueur de son côté.
- L'aire d'un carré est proportionnelle à la longueur de son côté.
- Si 4 crayons coûtent 10 DH, alors 12 crayons coûtent 30 DH.

EXERCICE 8.4 ★☆☆

Pour préparer une *harira* pour 6 personnes, il faut 300 g de pois chiches, 450 g de tomates et 150 g de lentilles.

- Quelles quantités faut-il pour 10 personnes ? (Utiliser deux méthodes différentes.)
- Avec 1 050 g de tomates, pour combien de personnes peut-on cuisiner ?

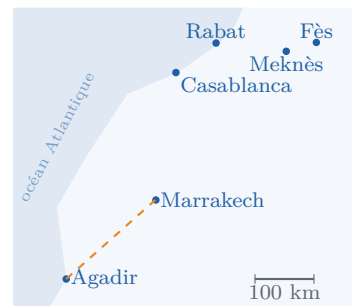
EXERCICE 8.5 ★☆☆

- Pendant les soldes, un magasin de Tanger affiche « -30% ». Calculer le nouveau prix d'une veste à 450 DH et d'un jean à 280 DH.
- Dans un collège de 640 élèves, 45% sont des filles. Combien y a-t-il de filles ?
- Dans une classe de 32 élèves, 8 font de la natation. Quel pourcentage des élèves cela représente-t-il ?

EXERCICE 8.6 ★☆☆

Sur une carte routière du Maroc à l'échelle $\frac{1}{4\,000\,000}$ (1 cm sur la carte représente 4 000 000 cm, soit 40 km) :

- Marrakech et Agadir sont à 5,2 cm sur la carte. Quelle est la distance réelle à vol d'oiseau ?
- Fès et Meknès sont à 52 km à vol d'oiseau. Quelle distance les sépare sur la carte ?
- Sur un plan de riad, 12 m sont représentés par 6 cm. Quelle est l'échelle du plan ?



(croquis)

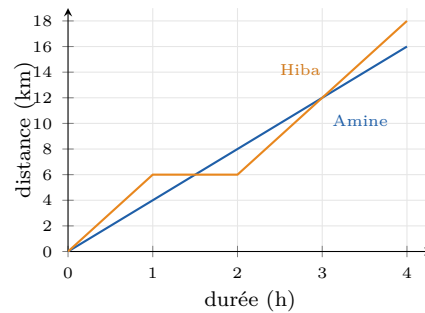
EXERCICE 8.7 ★☆☆

- Le train Al Boraq relie Tanger à Kénitra (environ 200 km) en 50 min. Calculer sa vitesse moyenne en km/min, puis en km/h.
- Un cycliste roule à 24 km/h de moyenne. Quelle distance parcourt-il en 2 h 15 min ?
- Un car roule à 80 km/h. Combien de temps met-il pour parcourir 260 km ? (Réponse en h et min.)

EXERCICE 8.8 ★★★

(Type contrôle) Le graphique représente la distance parcourue par deux randonneurs, Amine et Hiba, dans l'Atlas.

1. Lequel des deux marche à vitesse constante ? Justifier.
2. Quelle est la vitesse d'Amine ?
3. Quelle distance Hiba a-t-elle parcourue en 3 h ? Que s'est-il passé entre 1 h et 2 h ?
4. Quand Hiba rattrape-t-elle Amine ? Quelle est sa vitesse après la pause ?

**EXERCICE 8.9** ★★★

1. **Mélange.** Au souk, un épicier mélange 300 g de thé vert à 80 DH le kg et 200 g de thé à 120 DH le kg. Calculer le prix de ce mélange, puis le prix d'un kilogramme de mélange. Est-ce $\frac{80+120}{2} = 100$ DH ?
2. **Robinets.** Un robinet remplit un bassin en 6 h ; un second robinet remplit le même bassin en 3 h. Combien de bassins remplissent-ils ensemble en 6 h ? En déduire le temps qu'ils mettent, ensemble, pour remplir un seul bassin.

4 Défis olympiades**○ DÉFI OLYMPIADE 8.1 — Deux réductions valent-elles une grande ?**

Un caftan coûte 1 000 DH. Le magasin A propose une réduction de 20 % puis, sur le nouveau prix, une seconde réduction de 30 %. Le magasin B propose directement 50 % de réduction.

1. Calculer le prix final dans chaque magasin. Quel est le pourcentage total de réduction dans le magasin A ?
2. Le résultat change-t-il si l'on applique d'abord les 30 % puis les 20 % ? Et si le caftan coûte 1 500 DH ?
3. Après la première réduction de 20 %, quel pourcentage de réduction le magasin A aurait-il dû appliquer pour arriver au même prix que B ?

○ DÉFI OLYMPIADE 8.2 — L'aller-retour piège

Saïd va d'Azrou à Ifrane (18 km) à vélo à 12 km/h de moyenne, car la route monte. Il revient par la même route, en descente, à 36 km/h.

1. Sa sœur affirme : « Ta vitesse moyenne sur l'aller-retour est $\frac{12+36}{2} = 24$ km/h. » Calculer la durée de l'aller, celle du retour, puis la vraie vitesse moyenne.
2. À quelle vitesse aurait-il dû revenir pour obtenir une moyenne de 24 km/h sur l'aller-retour ? Est-ce possible ?

Droites parallèles et droites perpendiculaires

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Utiliser les notations (AB) , $[AB)$, $[AB]$ et reconnaître des points alignés.
- ✓ Reconnaître, coder et tracer à l'équerre des droites perpendiculaires et des droites parallèles.
- ✓ Utiliser les propriétés du cours pour rédiger une démonstration courte : « On sait que ... Or ... Donc ... ».

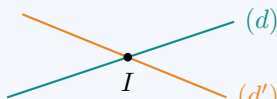
1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Droite, demi-droite, segment ; position de deux droites

Par deux points distincts A et B passe **une seule droite**. Des points sont **alignés** s'ils sont sur une même droite. $C \in (AB)$ se lit « C **appartient** à (AB) » ; sinon on écrit $C \notin (AB)$.

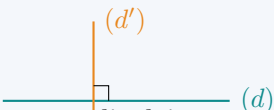
la droite (AB)

 illimitée des deux côtés


sécantes : un seul point commun I

la demi-droite $[AB)$

 origine A , illimitée du côté de B

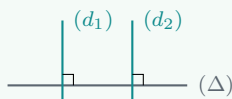

perpendiculaires :
 sécantes en formant un angle droit ; on note $(d) \perp (d')$

le segment $[AB]$

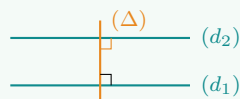
 limité par A et B ; longueur AB


parallèles : aucun point commun (ou confondues) ;
 on note $(d) \parallel (d')$

PROPRIÉTÉ — Les trois propriétés à connaître par cœur



P1. Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.



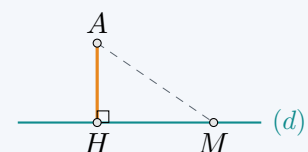
P2. Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.



P3. Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

DÉFINITION — Unicité ; distance d'un point à une droite

Par un point A passent **une seule** parallèle et **une seule** perpendiculaire à (d) . Cette perpendiculaire coupe (d) en H , le **pied de la perpendiculaire**. La **distance de A à la droite (d)** est la longueur AH : c'est le **plus court chemin** de A à (d) . Pour tout autre point M de (d) : $AM > AH$.

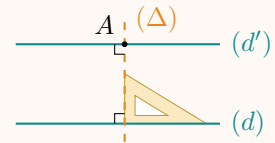


2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Tracer une perpendiculaire, puis une parallèle, à l'équerre

Perpendiculaire à (d) par A : poser un côté de l'angle droit de l'équerre sur (d) , glisser jusqu'à ce que l'autre côté passe par A .

Parallèle à (d) par A : ① tracer la perpendiculaire (Δ) à (d) passant par A ; ② tracer la perpendiculaire (d') à (Δ) passant par A . *Pourquoi ça marche ?* (d) et (d') sont perpendiculaires à (Δ) , donc parallèles (P1).



MÉTHODE — Rédiger une démonstration en trois temps : données, propriété, conclusion

Énoncé : $(d_1) \perp (\Delta)$ et $(d_2) \perp (\Delta)$. Montrer que $(d_1) \parallel (d_2)$.

On sait que $(d_1) \perp (\Delta)$ et $(d_2) \perp (\Delta)$.

Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.

Donc $(d_1) \parallel (d_2)$.

★ ASTUCE DU PROF — compter les symboles $\perp$

$\perp$ et $\perp$ donnent $\parallel$ (P1); $\parallel$ et $\perp$ donnent $\perp$ (P2); $\parallel$ et $\parallel$ donnent $\parallel$ (P3). Dans une chaîne de droites : nombre **pair** de $\perp \Rightarrow$ parallèles; nombre **impair** $\Rightarrow$ perpendiculaires.

✗ PIÈGE À ÉVITER

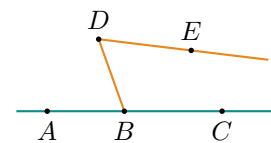
Deux droites qui ne se coupent pas *sur la feuille* peuvent se couper plus loin : on ne conclut jamais « parallèles » à l'œil ! Et AB (sans parenthèses ni crochets) est un **nombre** : la longueur de $[AB]$.

3 Exercices

EXERCICE 9.1 ★☆☆

Sur la figure, les points A, B, C sont alignés.

- Nommer la droite bleue de trois façons différentes.
- Compléter par $\in$ ou $\notin$: $C \dots [AB]$; $C \dots [AB]$; $A \dots [BC]$; $D \dots (AC)$.
- Nommer le segment et la demi-droite tracés en orange.



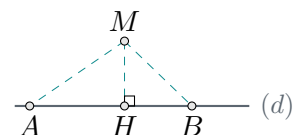
EXERCICE 9.2 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

- Deux droites perpendiculaires sont sécantes.
- Deux droites sécantes sont perpendiculaires.
- $(d_1) \perp (d_2)$ et $(d_2) \perp (d_3)$ donc $(d_1) \perp (d_3)$.
- Par un point passent deux parallèles à (d) .

EXERCICE 9.3 ★☆☆

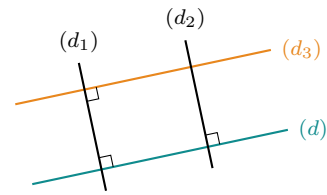
Rejoindre la route. La maison de Hamza, près d'Ifrane, est en M et la route est la droite (d) : $MA = 650$ m, $MH = 400$ m, $MB = 520$ m. 1. Par quel chemin Hamza rejoint-il la route le plus vite ? Pourquoi ? 2. Quelle est la distance du point M à la droite (d) ?



EXERCICE 9.4 ★★☆☆

Observer la figure codée ci-contre. Rédiger chaque réponse avec « On sait que ... Or ... Donc ... ».

1. Montrer que $(d_1) \parallel (d_2)$.
2. Montrer que $(d_3) \parallel (d)$.
3. Que peut-on dire des droites (d_2) et (d_3) ? Justifier.



EXERCICE 9.5 ★★☆☆

À Agadir, les rues Ibn Battouta et des Orangers sont perpendiculaires au boulevard Hassan II ; l'avenue Mohammed V est perpendiculaire à la rue Ibn Battouta.

1. La rue des Orangers et la rue Ibn Battouta peuvent-elles se croiser ? Justifier.
2. Montrer que l'avenue Mohammed V est parallèle au boulevard Hassan II.
3. Lina passe de l'avenue Mohammed V à la rue des Orangers. Tourne-t-elle à angle droit ?

EXERCICE 9.6 ★★☆☆

Type contrôle. Tracer un segment $[AB]$ de 6 cm et les droites (d_1) et (d_2) perpendiculaires à (AB) passant par A et par B .

1. Montrer que $(d_1) \parallel (d_2)$.
2. Placer $C \in (d_2)$ tel que $BC = 4$ cm. La perpendiculaire (d_3) à (d_2) passant par C coupe (d_1) en D . Montrer que $(d_3) \parallel (AB)$, puis que $(d_3) \perp (d_1)$.
3. Quelle est la nature de $ABCD$? Donner son périmètre et la distance du point C à la droite (d_1) .

EXERCICE 9.7 ★★☆☆

Une longue chaîne. On sait que $(d_1) \perp (d_2)$, $(d_2) \parallel (d_3)$, $(d_3) \perp (d_4)$, $(d_4) \perp (d_5)$ et $(d_5) \parallel (d_6)$. Démontrer étape par étape la position de (d_1) et (d_6) , puis vérifier avec l'astuce.

4 Défis olympiades

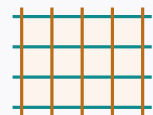
○ DÉFI OLYMPIADE 9.1 — combien de croisements ?

On trace des droites deux à deux sécantes, sans que trois d'entre elles passent par un même point.

1. Combien de points d'intersection avec 3 droites ? 4 ? 5 ? 10 ? (*Ajouter une droite à la fois.*)
2. Sans ces conditions, dessiner 4 droites ayant exactement 3 points d'intersection, puis 5.

○ DÉFI OLYMPIADE 9.2 — la grille du moucharabieh

Une grille de fenêtre a 4 barres horizontales parallèles et 5 barres verticales qui leur sont perpendiculaires. 1. Combien de points de croisement ? 2. Combien de rectangles (petits et grands) voit-on ? *Piste : un rectangle est déterminé par deux barres horizontales et deux barres verticales.*



OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Nommer, mesurer au rapporteur et classer un angle (nul, aigu, droit, obtus, plat).
- ✓ Reconnaître des angles adjacents, complémentaires, supplémentaires, opposés par le sommet ; construire une bissectrice au compas.
- ✓ Utiliser les angles alternes-internes et correspondants pour calculer un angle ou prouver un parallélisme.

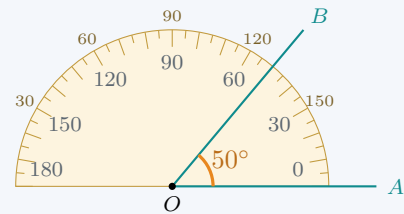
1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Angle, sommet, côtés, mesure

Deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ de même origine O forment un **angle**, noté $\widehat{AOB}$ (ou $\widehat{BOA}$) : O est le **sommet**, $[OA)$ et $[OB)$ sont les **côtés**.

Le sommet s'écrit toujours au milieu !

On mesure un angle en **degrés** ($^\circ$) avec un **rapporteur** : ici $\widehat{AOB} = 50^\circ$. La mesure ne dépend pas de la longueur des côtés tracés.



DÉFINITION — Nature d'un angle

nul
 0°

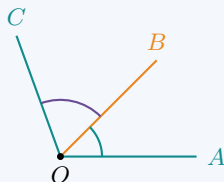
aigu
entre 0° et 90°

droit
 90°

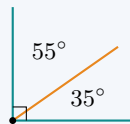
obtus
entre 90° et 180°

plat
 180°

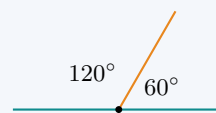
DÉFINITION — Couples d'angles



adjacents : même sommet, un côté commun, de part et d'autre



complémentaires : leur somme vaut 90°



supplémentaires : leur somme vaut 180°



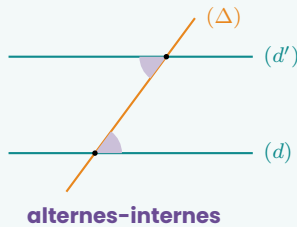
opposés par le sommet : côtés dans le prolongement

PROPRIÉTÉ — Angles opposés par le sommet

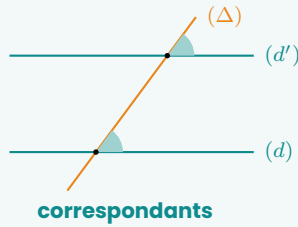
Deux angles opposés par le sommet ont la **même mesure**. Deux droites sécantes forment donc deux paires d'angles égaux ; deux angles voisins sont supplémentaires.

DÉFINITION — Bissectrice d'un angle

La **bissectrice** de $\widehat{xOy}$ est la demi-droite $[Oz)$ qui partage cet angle en **deux angles adjacents de même mesure** : $\widehat{xOz} = \widehat{zOy} = \widehat{xOy} \div 2$.

THÉORÈME — Deux droites parallèles coupées par une sécante

alternes-internes



correspondants

Alternes-internes : de part et d'autre de la sécante, **entre** les deux droites.

Correspondants : du même côté de la sécante, « à la même place » sur chaque droite.

Si deux droites **parallèles** sont coupées par une sécante, **alors** elles forment des angles alternes-internes **égaux** et des angles correspondants **égaux**.

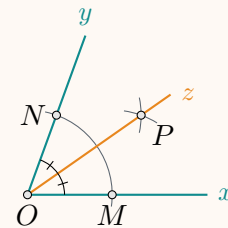
Réciproque : si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes (ou correspondants) **égaux**, **alors** ces deux droites sont **parallèles**.

2 Méthodes & astuces**MÉTHODE — Mesurer un angle au rapporteur**

① Placer le **centre** du rapporteur sur le sommet. ② Aligner le trait « 0 » sur un côté. ③ Lire la mesure sur l'autre côté en partant du 0 de la **même graduation** (intérieure ou extérieure). *Contrôle* : un angle visiblement aigu mesure moins de 90° ; si on lit 130° , on s'est trompé de graduation !

MÉTHODE — Construire la bissectrice d'un angle au compas

1. Pointe en O : tracer un arc qui coupe $[Ox)$ en M et $[Oy)$ en N ($OM = ON$).
2. Pointe en M , puis en N , **même écartement** : tracer deux arcs qui se coupent en P .
3. Tracer la demi-droite $[OP)$: c'est la bissectrice de $\widehat{xOy}$.

**★ ASTUCE DU PROF — les lettres Z et F**

Les angles **alternes-internes** se cachent dans un **Z** (ou un Σ), les angles **correspondants** dans un **F**. Repasser la figure en couleur pour faire apparaître la lettre !

✗ PIÈGE À ÉVITER

Des angles alternes-internes ne sont égaux **que si les droites sont parallèles** ! Et un angle se nomme avec **trois** lettres dès que plusieurs angles ont le même sommet : « l'angle $\hat{O}$ » est ambigu.

LE SAVAIS-TU ?

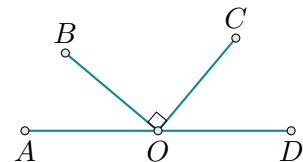
Le degré vient des astronomes de Babylone : ils partageaient le tour complet en 360 parts, à peu près le nombre de jours d'une année. Un tour mesure 360° , un demi-tour 180° , un quart de tour 90° .

3 Exercices

EXERCICE 10.1 ★☆☆

Sur la figure, les points A, O, D sont alignés.

1. Nommer le sommet et les côtés de l'angle $\widehat{BOC}$.
2. Donner la nature de chacun des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ et $\widehat{AOD}$.
3. Citer deux angles adjacents supplémentaires.



EXERCICE 10.2 ★☆☆

1. Calculer le complémentaire de 35° , puis le supplémentaire de 35° et celui de 128° .
2. Un angle est égal à son complémentaire. Combien mesure-t-il ? Même question avec son supplémentaire.
3. Un angle mesure 40° de plus que son supplémentaire. Combien mesure-t-il ?

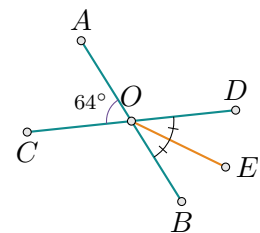
EXERCICE 10.3 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier (par un calcul ou un contre-exemple).

- | | |
|---|--|
| a) Deux angles adjacents sont supplémentaires. | b) Deux angles complémentaires sont aigus. |
| c) Le supplémentaire d'un angle obtus est aigu. | d) Deux angles égaux sont opposés par le sommet. |

EXERCICE 10.4 ★☆☆

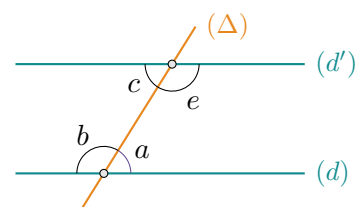
Les droites (AB) et (CD) se coupent en O , et $[OE)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOD}$. On sait que $\widehat{AOC} = 64^\circ$. Calculer $\widehat{BOD}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{AOD}$ puis $\widehat{EOD}$ et $\widehat{AOE}$. Justifier chaque étape.



EXERCICE 10.5 ★☆☆

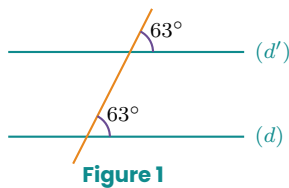
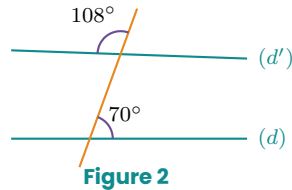
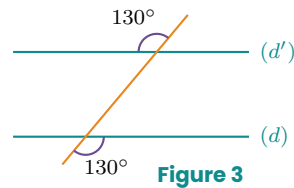
Le portail de Fès. Sur ce portail en fer forgé, les barreaux (d) et (d') sont parallèles et la barre (Δ) les traverse. On a mesuré l'angle $a = 58^\circ$.

1. Calculer les angles b, c et e en citant la propriété utilisée à chaque fois.
2. Quelle est la somme $a + e$? Était-ce prévisible ?



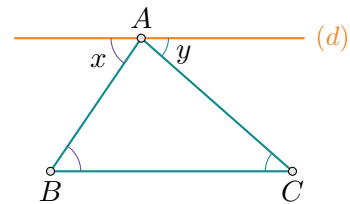
EXERCICE 10.6 ★★☆☆

Type contrôle. Pour chaque figure, les droites (d) et (d') sont-elles parallèles ? Justifier.


Figure 1

Figure 2

Figure 3
EXERCICE 10.7 ★★☆☆

La somme des angles d'un triangle. ABC est un triangle. On trace la droite (d) parallèle à (BC) passant par A ; elle forme en A les angles x et y .

- Expliquer pourquoi $x = \widehat{ABC}$ et $y = \widehat{ACB}$.
- En déduire que $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$.
- Application : si $\widehat{ABC} = 48^\circ$ et $\widehat{ACB} = 67^\circ$, calculer $\widehat{BAC}$.


EXERCICE 10.8 ★★☆☆

Les points A, O, C sont alignés et B n'est pas sur (AC) . $[OM)$ est la bissectrice de $\widehat{AOB}$ et $[ON)$ celle de $\widehat{BOC}$.

- Faire une figure avec $\widehat{AOB} = 50^\circ$, puis calculer $\widehat{MON}$.
- Recommencer avec $\widehat{AOB} = 110^\circ$. Que remarque-t-on ?
- Démontrer que ce résultat est vrai quelle que soit la mesure de $\widehat{AOB}$.

4 Défis olympiades
○ DÉFI OLYMPIADE 10.1 — l'horloge de la place Jemaa el-Fna

En une heure, la grande aiguille fait un tour complet ; la petite avance d'un douzième de tour.

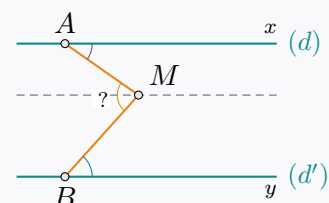
- De combien de degrés tourne la grande aiguille en 1 minute ? Et la petite ?
- Quel angle forment les deux aiguilles à 3 h 40 ?
- Et à 9 h 30 ?

Piste : repérer chaque aiguille par son angle avec la direction de « midi ».


○ DÉFI OLYMPIADE 10.2 — la ligne brisée entre deux parallèles

Les droites (d) et (d') sont parallèles, $A \in (d)$, $B \in (d')$ et le point M est entre les deux droites. On sait que $\widehat{xAM} = 35^\circ$ et $\widehat{MB y} = 48^\circ$.

Calculer $\widehat{AMB}$ (*piste : tracer la parallèle à (d) passant par M*), puis généraliser : que vaut $\widehat{AMB}$ si $\widehat{xAM} = a$ et $\widehat{MB y} = b$?



Médiatrice et symétrie axiale

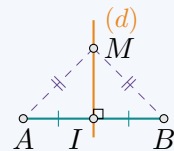
OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Connaître la médiatrice d'un segment, sa propriété d'équidistance, et la construire au compas.
- ✓ Construire le symétrique d'un point, d'une figure par rapport à une droite (au compas, sur quadrillage).
- ✓ Utiliser les propriétés de conservation et trouver les axes de symétrie d'une figure.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Médiatrice d'un segment

La **médiatrice** d'un segment $[AB]$ est la droite **perpendiculaire** à $[AB]$ qui passe par son **milieu** I .



PROPRIÉTÉ — Équidistance — et sa réciproque

Si un point M est sur la médiatrice de $[AB]$, alors $MA = MB$. **Réciproque** : si $MA = MB$, alors M est sur la médiatrice de $[AB]$.

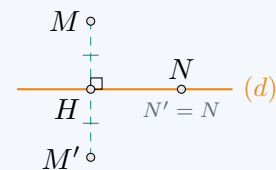
La médiatrice de $[AB]$ est donc l'ensemble de **tous** les points situés à égale distance de A et de B .

DÉFINITION — Symétrique d'un point par rapport à une droite

Le point M' est le **symétrique** du point M par rapport à la droite (d) si (d) est la **médiatrice** de $[MM']$: $(MM') \perp (d)$ en H et $HM = HM'$.

Si N est **sur** l'axe (d) , son symétrique est **lui-même** : $N' = N$.

Image concrète : si on plie la feuille le long de (d) , M vient se poser exactement sur M' .

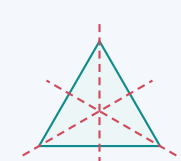


DÉFINITION — Axe de symétrie d'une figure

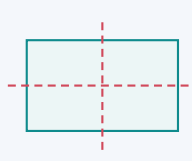
Une droite (Δ) est un **axe de symétrie** d'une figure si le symétrique de cette figure par rapport à (Δ) est **la figure elle-même** : en pliant selon (Δ) , les deux moitiés se superposent.



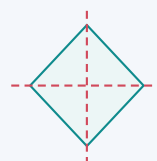
triangle isocèle
1 axe



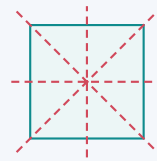
triangle équilatéral
3 axes



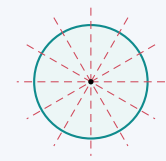
rectangle
2 axes



losange
2 axes



carré
4 axes



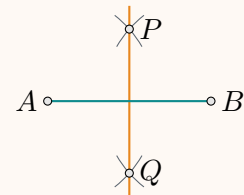
cercle
une infinité

PROPRIÉTÉ — La symétrie axiale conserve tout !

Le symétrique d'une figure est une figure **superposable** (on l'obtient par pliage). La symétrie axiale conserve les **longueurs**, les **angles**, l'**alignement**, les **périmètres** et les **aires** : le symétrique d'un segment est un segment de même longueur, celui d'une droite est une droite, celui d'un cercle est un cercle de même rayon.

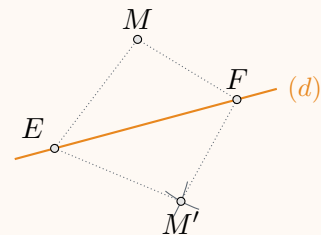
2 Méthodes & astuces**MÉTHODE — Construire la médiatrice de $[AB]$ au compas**

1. Ouvrir le compas **plus que la moitié** de AB .
2. Pointe en A , puis en B (même écartement) : tracer deux arcs de part et d'autre de $[AB]$; ils se coupent en P et Q .
3. Tracer la droite (PQ) : c'est la médiatrice de $[AB]$, car $PA = PB$ et $QA = QB$ (réciproque).

**MÉTHODE — Construire le symétrique d'un point M au compas**

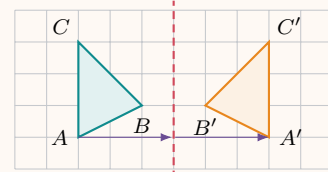
1. Choisir deux points E et F sur l'axe (d) .
2. Pointe en E , écartement EM : tracer un arc de l'autre côté de (d) .
3. Pointe en F , écartement FM : tracer un second arc. Les arcs se coupent en M' .

Pourquoi ? $EM = EM'$ et $FM = FM'$: E et F sont sur la médiatrice de $[MM']$, donc $(d) = (EF)$ est cette médiatrice.

**MÉTHODE — Construire le symétrique d'une figure sur un quadrillage**

Pour chaque sommet : compter les carreaux qui le séparent de l'axe, **perpendiculairement à l'axe**, puis reporter le **même nombre** de carreaux de l'autre côté. Relier ensuite les points images dans le même ordre.

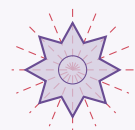
Exemple : A est à 3 carreaux à gauche de l'axe, donc A' est à 3 carreaux à droite.

**❌ PIÈGE À ÉVITER**

Si l'axe est oblique, on ne compte pas les carreaux horizontalement : on se déplace **perpendiculairement à l'axe** ! Et la symétrie « retourne » la figure (comme un miroir) : elle inverse le sens de rotation.

LE SAVAIS-TU ?

Les artisans du **zellige** de Fès et de Meknès tracent leurs étoiles à la règle et au compas depuis des siècles. L'étoile à 8 branches ci-contre possède 8 **axes de symétrie** : 4 passent par les pointes et 4 par les creux entre deux pointes.

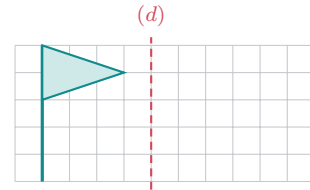


3 Exercices

EXERCICE 11.1 ★☆☆

Reproduire la figure sur un quadrillage, puis construire le symétrique du drapeau par rapport à l'axe (d) .

- De combien de carreaux le mât symétrique est-il éloigné de l'axe ?
- Le drapeau symétrique flotte-t-il vers la droite ou vers la gauche ?



EXERCICE 11.2 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

- Si $MA = MB$, alors M est le milieu de $[AB]$.
- Le milieu de $[AB]$ est sur sa médiatrice.
- Un rectangle non carré a 4 axes de symétrie.
- Le symétrique d'un angle droit est droit.

EXERCICE 11.3 ★☆☆

L'alphabet au miroir. A B E H K M N O S T X Z

Classer ces lettres en trois groupes : aucun axe de symétrie, un seul axe (vertical ou horizontal ?), deux axes.

EXERCICE 11.4 ★☆☆

L'école des deux douars. On veut construire une école au bord de la route (r) , à **égale distance** des douars A et B .

- Où faut-il la construire ? Expliquer la construction.
- L'école est à 3,5 km du douar A . À quelle distance est-elle de B ?

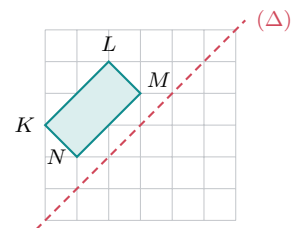


EXERCICE 11.5 ★☆☆

Axe oblique. Sur le quadrillage ci-contre, l'axe (Δ) suit une diagonale des carreaux.

- Reproduire la figure et construire le symétrique du quadrilatère $KLMN$ par rapport à (Δ) .
- Le segment $[KK']$ est formé de combien de diagonales de carreaux ? Vérifier que son milieu est sur (Δ) .

Aide : K et K' sont sur une diagonale perpendiculaire à (Δ) .



EXERCICE 11.6 ★☆☆

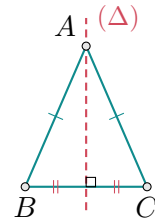
Type contrôle. Tracer un triangle ABC tel que $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm et $\widehat{ABC} = 50^\circ$, puis la médiatrice (d) de $[BC]$.

- Quels sont les symétriques de B et de C par rapport à (d) ? Construire A' , symétrique de A .
- Sans mesurer, donner la longueur $A'C$ et la mesure de $\widehat{A'CB}$. Justifier.
- On mesure $AC = 3,9$ cm. Calculer $A'B$ puis le périmètre du triangle $A'BC$.
- Montrer que les droites (AA') et (BC) sont parallèles.

EXERCICE 11.7 ★★★

Le triangle isocèle. ABC est un triangle isocèle en A ($AB = AC$) et (Δ) est la médiatrice de $[BC]$.

1. Montrer que A appartient à (Δ) .
2. Quels sont les symétriques de A , B et C par rapport à (Δ) ? En déduire que (Δ) est un axe de symétrie du triangle et que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.
3. Application : $\widehat{BAC} = 40^\circ$. Calculer $\widehat{ABC}$ (la somme des angles d'un triangle vaut 180°).



EXERCICE 11.8 ★★★

ABC est un triangle. Les médiatrices de $[AB]$ et de $[AC]$ se coupent en un point O .

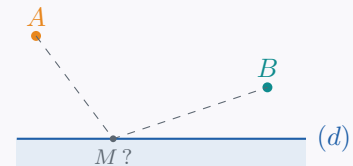
1. Montrer que $OA = OB$ et $OA = OC$.
2. En déduire que O est aussi sur la médiatrice de $[BC]$. Que peut-on dire des trois médiatrices d'un triangle?
3. Expliquer pourquoi il existe un cercle de centre O qui passe par A , B et C .

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 11.1 — le berger et la rivière

Un berger part de sa tente A , fait boire ses moutons en un point M de la rivière (d) , puis rejoint sa maison B . Il veut que le trajet $AM + MB$ soit le **plus court possible**.

1. B' est le symétrique de B par rapport à (d) . Pourquoi a-t-on $MB = MB'$?
2. En déduire où placer M pour que $AM + MB$ soit minimal.
3. Montrer qu'alors $[MA]$ et $[MB]$ font des angles égaux avec la rivière (comme un rayon de lumière sur un miroir!).

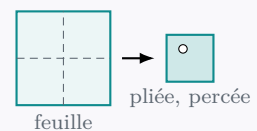


○ DÉFI OLYMPIADE 11.2 — pliage et perforatrice

On plie une feuille carrée en deux suivant son axe vertical, puis encore en deux suivant son axe horizontal : on obtient un petit carré de 4 épaisseurs, dans lequel on perce un trou (voir figure).

1. Combien de trous verra-t-on sur la feuille dépliée? Où seront-ils?
2. Même question si, avant de percer, on plie encore le petit carré suivant sa diagonale issue du centre de la feuille.

Piste : chaque pli est un axe de symétrie de la feuille percée.



OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Construire le symétrique d'un point, d'un segment, d'une droite, d'un cercle par rapport à un point (règle, compas, quadrillage).
- ✓ Utiliser les propriétés de conservation de la symétrie centrale.
- ✓ Reconnaître le centre de symétrie d'une figure et distinguer symétrie axiale et symétrie centrale.

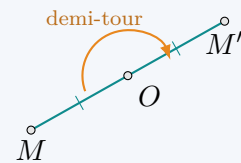
1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Symétrique d'un point par rapport à un point

Le point M' est le **symétrique** du point M par rapport au point O si O est le **milieu du segment** $[MM']$: M, O, M' sont alignés et $OM = OM'$.

Le symétrique du point O est O lui-même. O s'appelle le **centre de symétrie**.

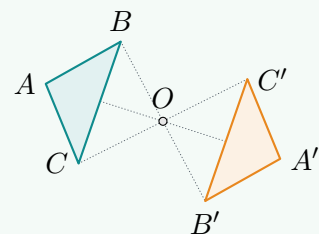
Image concrète : la symétrie centrale est un **demi-tour** (180°) autour du point O .



PROPRIÉTÉ — Ce que conserve la symétrie centrale

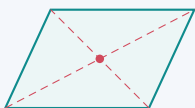
La symétrie centrale conserve les **longueurs**, les **angles**, l'**alignement**, les **périmètres** et les **aires**. De plus :

- le symétrique d'un segment est un segment **parallèle** et de **même longueur** ;
- le symétrique d'une droite est une droite **parallèle** ;
- le symétrique d'un cercle de centre A est un cercle de **même rayon**, de centre A' .

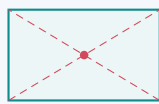


DÉFINITION — Centre de symétrie d'une figure

Le point O est un **centre de symétrie** d'une figure si le symétrique de cette figure par rapport à O est la **figure elle-même** : après un demi-tour autour de O , la figure se superpose à elle-même.



parallélogramme
(intersection des diagonales)



rectangle, losange, carré



cercle (son centre)

NSZH

certaines lettres



triangle :
aucun centre

REMARQUE — symétrie axiale ou symétrie centrale ?

	Symétrie axiale (axe (d))	Symétrie centrale (centre O)
Mouvement	un pliage : la figure est retournée (effet miroir)	un demi-tour : la figure n'est pas retournée
Point M et son image M'	(d) est la médiatrice de $[MM']$	O est le milieu de $[MM']$
Points qui ne bougent pas	tous les points de l'axe	seulement le centre O
Image d'une droite	une droite (pas forcément parallèle)	une droite parallèle

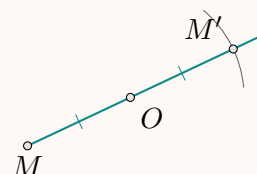
2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Construire le symétrique d'un point M par rapport à O

À la règle et au compas :

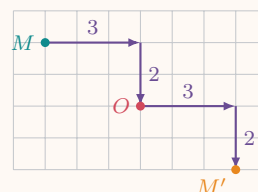
1. tracer la demi-droite $[MO)$;
2. pointe du compas en O , écartement OM : reporter cette longueur sur $[MO)$, de l'autre côté de O . On obtient M' .

Pour un segment ou une droite : construire les symétriques de **deux** de ses points, puis les relier (pour une droite, on peut aussi tracer la parallèle passant par l'image d'un seul point).

MÉTHODE — Sur un quadrillage : le « déplacement » de M vers O

Compter le déplacement pour aller de M à O (par exemple 3 carreaux vers la droite et 2 vers le bas), puis **refaire le même déplacement** à partir de O : on arrive en M' .

Pour une figure : faire de même pour chaque sommet, puis relier les images **dans le même ordre**.



★ ASTUCE DU PROF — le test du livre retourné

Pour savoir si une figure a un centre de symétrie, on fait faire un demi-tour au livre : si la figure est inchangée, elle a un centre de symétrie. Essaie avec les lettres **N, S, Z** ... et avec le mot **SOS** !

❌ PIÈGE À ÉVITER

Ne pas confondre les deux symétries ! Par la symétrie de centre O , le symétrique d'une droite **passant par O** est **elle-même**, et le symétrique d'une droite ne passant pas par O lui est **parallèle** (jamais perpendiculaire).

LE SAVAIS-TU ?

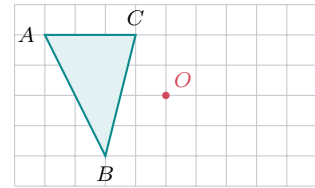
Sur les cartes à jouer, le roi, la dame et le valet sont dessinés deux fois, tête-bêche : la carte a un **centre de symétrie** et se lit dans les deux sens. Les mots qui restent lisibles après un demi-tour, comme **SOS** ou **NOON**, s'appellent des **ambigrammes**.

3 Exercices

EXERCICE 12.1 ★☆☆

Reproduire la figure sur un quadrillage.

1. Construire les symétriques A' , B' , C' des points A , B , C par rapport à O .
2. Tracer le triangle $A'B'C'$. Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont-ils la même aire ? Pourquoi ?
3. Quelle est la position des droites (AB) et $(A'B')$?



EXERCICE 12.2 ★☆☆

Vrai ou faux ? M' est le symétrique de M par rapport à O . Justifier.

- a) On a toujours $OM = OM'$.
- b) M est le symétrique de M' par rapport à O .
- c) Un triangle peut avoir un centre de symétrie.
- d) Si $MM' = 8$ cm, alors $OM = 4$ cm.

EXERCICE 12.3 ★☆☆

Lettres et chiffres. A B H I N O S T X Z 0 7 8

1. Quels caractères ont un centre de symétrie ?
2. Lesquels ont à la fois un centre et au moins un axe de symétrie ?

EXERCICE 12.4 ★☆☆

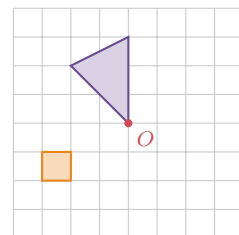
Type contrôle. Tracer un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 5$ cm. Soit I le milieu de $[AC]$ et D le symétrique de B par rapport à I .

1. Quel est le symétrique de A par rapport à I ? Justifier.
2. En déduire le symétrique du segment $[AB]$, puis les longueurs CD et AD .
3. Montrer que $(AB) \parallel (CD)$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Calculer son périmètre.

EXERCICE 12.5 ★☆☆

Le motif de zellige. Un artisan de Fès dessine une partie d'un motif sur un quadrillage.

1. Compléter le motif pour que le point O soit son centre de symétrie.
2. Le motif complet a-t-il un axe de symétrie ?
3. Chaque carreau mesure 1 cm de côté. Quelle est l'aire totale colorée ?



EXERCICE 12.6 ★☆☆

O et A sont deux points tels que $OA = 3$ cm. (C) est le cercle de centre A et de rayon 2 cm, et (d) est une droite qui passe par A mais pas par O .

1. Construire (C') et (d') , symétriques de (C) et de (d) par rapport à O . Préciser le centre et le rayon de (C') .
2. Calculer la distance AA' . Les cercles (C) et (C') se coupent-ils ?
3. Les droites (d) et (d') peuvent-elles se couper ? Justifier.

EXERCICE 12.7 ★★★

Sur la droite graduée. Sur une droite graduée, le point O a pour abscisse 2.

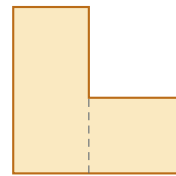


1. Le point A a pour abscisse -3 . Quelle est l'abscisse de son symétrique A' par rapport à O ?
2. Même question pour le point B d'abscisse $5,5$.
3. On cherche maintenant un point K tel que le symétrique du point d'abscisse -4 par rapport à K soit le point d'abscisse 10 . Quelle est l'abscisse de K ?

EXERCICE 12.8 ★★★

Partager le gâteau. Une galette a la forme d'un « L » formé de deux rectangles.

1. On trace une droite qui passe par le centre O d'un rectangle. Expliquer, avec la symétrie de centre O , pourquoi elle partage le rectangle en deux parties de même aire.
2. En déduire comment couper la galette en **deux parts de même aire** d'un seul coup de couteau bien droit.



4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 12.1 — l'année retournée

Après un demi-tour, les chiffres 0, 1 et 8 restent eux-mêmes, 6 devient 9 et 9 devient 6 ; les autres chiffres ne donnent pas de chiffre. Ainsi, l'année 1961 se lit encore 1961 quand on retourne la page !



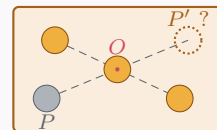
1. Que lit-on si on retourne le nombre 1986 ?
2. Quelle est la première année après 1961 qui possède la même propriété ?
3. Combien de nombres de 4 chiffres possèdent cette propriété ?

○ DÉFI OLYMPIADE 12.2 — le jeu des pièces de 1 dirham

Deux joueurs posent à tour de rôle une pièce de 1 DH à plat sur une table rectangulaire, sans chevaucher les autres pièces ni dépasser du bord. Le joueur qui ne peut plus poser de pièce a perdu.

Montrer que le premier joueur peut **gagner à coup sûr**.

Piste : où poser la première pièce ? Comment répondre ensuite à chaque coup de l'adversaire ?



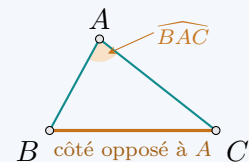
OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Utiliser l'inégalité triangulaire et construire un triangle à partir de mesures données.
- ✓ Connaître la somme des angles d'un triangle et les propriétés des triangles particuliers.
- ✓ Tracer les médiatrices, hauteurs, médianes et bissectrices ; calculer l'aire d'un triangle.

1 L'essentiel du cours

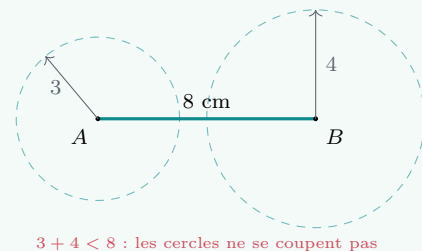
DÉFINITION — Vocabulaire du triangle

Un **triangle** ABC a trois **sommets** A, B, C (non alignés), trois **côtés** $[AB], [BC], [CA]$ et trois **angles** $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ (notés aussi $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$). Le côté $[BC]$ est **opposé** au sommet A ; l'angle $\widehat{BAC}$ est **compris** entre les côtés $[AB]$ et $[AC]$.



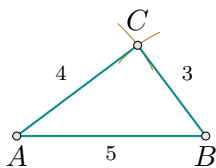
PROPRIÉTÉ — Inégalité triangulaire

Dans un triangle ABC , chaque côté est **plus court que la somme** des deux autres : $AB < AC + CB$, $AC < AB + BC$, $BC < BA + AC$. Le chemin direct est le plus court ! Si $AB = AC + CB$, alors C est **sur le segment** $[AB]$: le triangle est « aplati ».

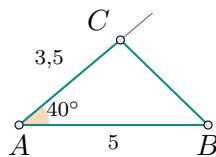


$3 + 4 < 8$: les cercles ne se coupent pas

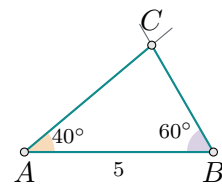
► Construire un triangle à la règle, au compas et au rapporteur



3 longueurs : $[AB]$, puis deux arcs de centres A (rayon AC) et B (rayon BC).



2 côtés et l'angle compris : $[AB]$, l'angle au rapporteur, puis reporter AC .

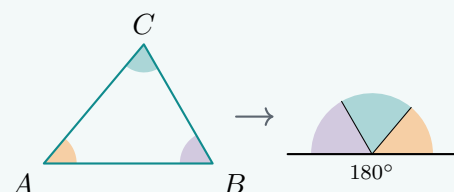


1 côté et 2 angles : $[AB]$, puis les angles en A et en B .

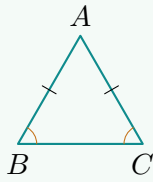
THÉORÈME — Somme des angles d'un triangle

Dans tout triangle ABC : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

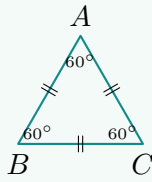
Illustration : on découpe les trois « coins » d'un triangle en papier et on les recolle côte à côte : ils forment toujours un **angle plat**.



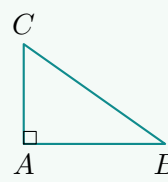
PROPRIÉTÉ — Triangles particuliers



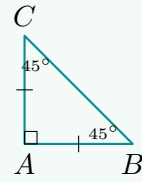
Isocèle en A : $AB = AC$
et $\widehat{B} = \widehat{C}$; il a un axe de symétrie.



Équilatéral : 3 côtés égaux, 3 angles de 60° .

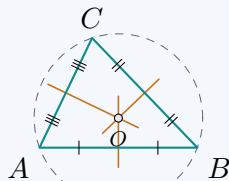


Rectangle en A : $\widehat{A} = 90^\circ$
et $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$.

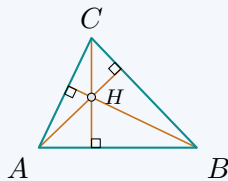


Rectangle isocèle :
 $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

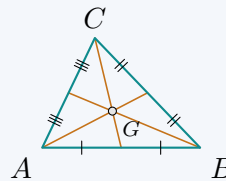
DÉFINITION — Droites remarquables d'un triangle



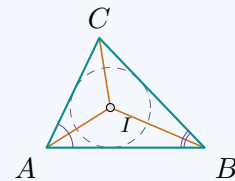
Médiatrice d'un côté :
la perpendiculaire à
ce côté en son **milieu**.



Hauteur issue d'un
sommet : passe
par ce sommet,
perpendiculaire
au côté opposé.



Médiane issue d'un
sommet : passe par ce
sommet et le **milieu**
du côté opposé.



Bissectrice d'un angle :
partage l'angle en
deux angles égaux.

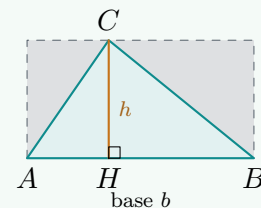
Propriété. Les trois **médiatrices** se coupent en un même point O , **centre du cercle circonscrit** (il passe par les trois sommets, car $OA = OB = OC$). Les hauteurs sont aussi concourantes (en H), de même que les médianes (en G , **centre de gravité**) et les bissectrices (en I , **centre du cercle inscrit**).

PROPRIÉTÉ — Aire d'un triangle

Si $[CH]$ est la hauteur relative au côté $[AB]$ (la « base ») :

$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{AB \times CH}{2}$$

Pourquoi ? Le triangle est la **moitié** du rectangle de mêmes base et hauteur (chaque morceau gris est égal à un morceau du triangle).



2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Peut-on construire ce triangle ?

1. Repérer le **plus grand** côté et calculer la somme des deux autres.
2. Si la somme est **plus grande** : triangle constructible ; **égale** : triangle aplati (points alignés) ; **plus petite** : impossible.

Ex. 5, 7 et 13 cm : $5 + 7 = 12 < 13$, **impossible**. 5, 8 et 13 cm : $5 + 8 = 13$, **aplatis**.

MÉTHODE — Calculer les angles d'un triangle isocèle

On connaît l'angle au **sommet principal** a :
chaque angle à la base vaut $(180^\circ - a) \div 2$.

Ex. $a = 40^\circ$: $(180 - 40) \div 2 = 70^\circ$.

On connaît un angle **à la base** b :
l'angle au sommet vaut $180^\circ - 2b$.

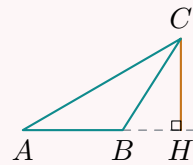
Ex. $b = 35^\circ$: $180 - 2 \times 35 = 110^\circ$.

★ ASTUCE DU PROF — Deux médiatrices suffisent !

Pour le cercle circonscrit, **deux** médiatrices suffisent : elles se coupent au centre O . Pointe du compas en O , ouverture jusqu'à un sommet : le cercle doit passer par les trois sommets (excellent test de précision!).

✗ PIÈGE À ÉVITER

- Si le triangle a un angle obtus, une hauteur peut être **à l'extérieur** : on prolonge le côté opposé (ci-contre, hauteur issue de C).
- Pour l'aire : à chaque base **sa** hauteur, et ne pas oublier de diviser par 2!
- Hauteur et médiane issues d'un même sommet sont en général **différentes**.

**3 Exercices****EXERCICE 13.1** ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

- | | |
|--|--|
| a) Il existe un triangle de côtés 4, 5, 10 cm. | d) Il existe un triangle d'angles 50° , 60° , 80° . |
| b) Un triangle peut avoir deux angles obtus. | e) Un triangle rectangle peut être isocèle. |
| c) Un triangle équilatéral est aussi isocèle. | f) Il existe un triangle de côtés 6, 6, 11,9 cm. |

EXERCICE 13.2 ★☆☆

Calculer les angles manquants. Justifier.

- | | |
|--|--|
| a) ABC : $\hat{A} = 47^\circ$, $\hat{B} = 68^\circ$. | d) JKL isocèle en J , $\hat{K} = 35^\circ$. |
| b) DEF rectangle en E , $\hat{D} = 34^\circ$. | e) MNP équilatéral. |
| c) GHI isocèle en G , $\hat{G} = 40^\circ$. | f) RST : $\hat{R} = 2\hat{S}$, $\hat{T} = 3\hat{S}$. |

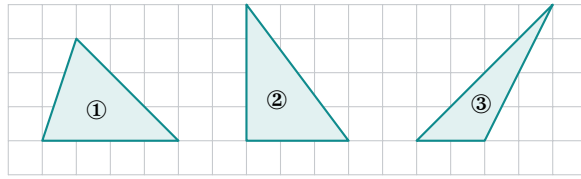
EXERCICE 13.3 ★☆☆

(Type contrôle) Trois douars de la région d'Azilal sont situés en A , B et C , avec $AB = 6$ km, $BC = 5$ km et $AC = 4$ km. On veut creuser un puits P **à la même distance** des trois douars.

1. Construire le triangle ABC à l'échelle 1 cm pour 1 km.
2. Tracer les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$; elles se coupent en P . Pourquoi a-t-on $PA = PB = PC$?
3. Tracer le cercle de centre P passant par A . À quelle distance du puits est chaque douar ?

EXERCICE 13.4 ★★☆☆

Chaque carreau mesure 1 cm de côté.
Calculer l'aire des triangles ①, ② et ③. Lequel a la plus grande aire ?



EXERCICE 13.5 ★★☆☆

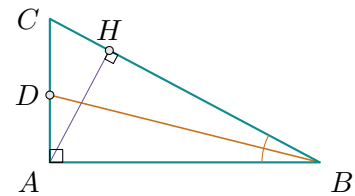
Le jardin de Si Ahmed, à Meknès, a la forme d'un triangle ABC avec $AB = 19,5$ m, $BC = 21$ m et $AC = 22,5$ m. La hauteur issue de A mesure $AH = 18$ m.

1. Calculer le périmètre du jardin, puis le prix de la clôture à 35 DH le mètre.
2. Calculer l'aire du jardin.
3. Un sac de gazon couvre 9 m^2 et coûte 48 DH. Combien de sacs faut-il ? Pour quel prix ?

EXERCICE 13.6 ★★☆☆

ABC est un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 28^\circ$. La bissectrice de $\widehat{ABC}$ coupe $[AC]$ en D , et H est le pied de la hauteur issue de A .

1. Calculer $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ABD}$.
2. Calculer $\widehat{ADB}$, puis $\widehat{BDC}$.
3. Calculer $\widehat{BAH}$. Que remarque-t-on ?



EXERCICE 13.7 ★★☆☆

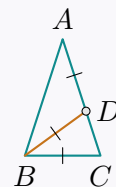
1. M est le milieu du côté $[BC]$ d'un triangle ABC . Pourquoi les triangles ABM et AMC ont-ils la **même aire** ? (Penser à la hauteur issue de A .)
2. Trois frères héritent d'un champ triangulaire ABC avec $BC = 90$ m. Comment le partager en trois parts de même aire par deux clôtures droites partant de A ?

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 13.1 — Le triangle isocèle découpé

ABC est isocèle en A et le point D de $[AC]$ vérifie $AD = DB = BC$ (voir le codage). Combien mesure l'angle $\widehat{BAC}$?

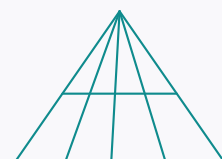
Piste : appeler x sa mesure et exprimer tous les autres angles à l'aide de x .



○ DÉFI OLYMPIADE 13.2 — Combien de triangles ?

Combien de triangles (de toutes tailles) contient la figure ci-contre ? Trouver une méthode de comptage sûre, sans les dessiner un par un.

Et s'il y avait 3 segments « horizontaux » au lieu de 2 ?



OBJECTIFS DU CHAPITRE

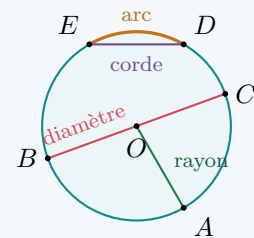
- ✓ Connaître le vocabulaire du cercle et du disque ; situer un point par rapport à un cercle.
- ✓ Tracer des cercles au compas à partir de conditions données.
- ✓ Calculer le périmètre d'un cercle et l'aire d'un disque, et résoudre des problèmes concrets.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Cercle et disque

Le **cercle** de **centre** O et de **rayon** r est formé de tous les points situés à la distance r de O . Le **disque** est la surface limitée par le cercle.

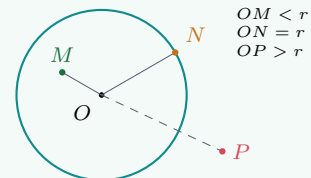
- **Rayon** : segment joignant le centre à un point du cercle : $[OA]$.
- **Corde** : segment joignant deux points du cercle : $[DE]$.
- **Diamètre** : corde passant par le centre : $[BC]$. $d = 2 \times r$
- **Arc** : portion de cercle entre deux de ses points : l'arc $\widehat{DE}$.



PROPRIÉTÉ — Position d'un point par rapport à un cercle

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon r , et M un point quelconque :

- M est **sur** le cercle équivaut à $OM = r$
- M est **à l'intérieur** du cercle équivaut à $OM < r$;
- M est **à l'extérieur** du cercle équivaut à $OM > r$.



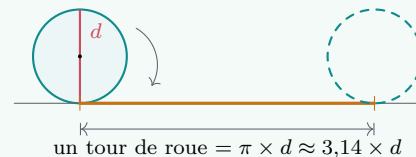
PROPRIÉTÉ — Périmètre du cercle et aire du disque

Le périmètre de tout cercle est environ 3,14 fois son diamètre. Ce nombre est noté π (« pi ») : $\pi \approx 3,14$.

Périmètre : $P = 2 \times \pi \times r = \pi \times d$

Aire du disque : $\mathcal{A} = \pi \times r \times r = \pi r^2$

Ex. $r = 5$ cm : $P \approx 2 \times 3,14 \times 5 = 31,4$ cm et $\mathcal{A} \approx 3,14 \times 5 \times 5 = 78,5$ cm².



2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Calculer un périmètre, une aire ... ou un rayon

1. Repérer si l'énoncé donne le **rayon** ou le **diamètre** (si on connaît d , alors $r = d \div 2$).
2. Choisir la bonne formule, remplacer π par 3,14 et écrire l'unité (cm pour un périmètre, cm² pour

une aire).

3. Pour retrouver le rayon, on « remonte » la formule : $d = P \div \pi$. Ex. $P = 18,84 \text{ m}$: $d = 18,84 \div 3,14 = 6 \text{ m}$, $r = 3 \text{ m}$.

★ ASTUCE DU PROF — Demi-cercle et quart de cercle

Un demi-cercle mesure la **moitié** du périmètre ($\pi \times r$) et un demi-disque a la moitié de l'aire ; pour un quart, on divise par 4. Mais attention : le **contour** d'un demi-disque comprend aussi le diamètre : $\pi \times r + 2 \times r$.

✗ PIÈGE À ÉVITER

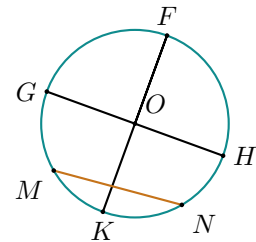
- Ne pas confondre $r \times r$ (le carré du rayon) et $2 \times r$: pour $r = 3$, $r^2 = 9$ mais $2r = 6$.
- Dans πr^2 , seul r est au carré : on calcule $\pi \times (r \times r)$, pas $(\pi \times r) \times (\pi \times r)$.
- Si on double le rayon, le périmètre double, mais l'aire est multipliée par 4 !

3 Exercices

EXERCICE 14.1 ★☆☆

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O ci-contre, de rayon 2 cm. **Vrai ou faux ?** Justifier.

- $[OF]$ est un rayon et $[GH]$ est un diamètre.
- $[FK]$ est une corde.
- $OK = 2 \text{ cm}$ et $GH = 4 \text{ cm}$.
- Le point L tel que $OL = 1,9 \text{ cm}$ est à l'extérieur du cercle.
- Une corde peut mesurer 4,5 cm.



EXERCICE 14.2 ★☆☆

Compléter le tableau ci-contre (prendre $\pi \approx 3,14$).

Rayon r	4 cm	...	1,5 m	...
Diamètre d	...	10 cm	...	20 m
Périmètre P	...	...	...	...
Aire $\mathcal{A}$	...	...	...	...

EXERCICE 14.3 ★☆☆

(Type contrôle)

- Tracer un segment $[AB]$ de 6 cm, puis le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A et de rayon 4 cm et le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre B et de rayon 3 cm. Ils se coupent en M et N .
- Sans mesurer, donner les longueurs AM , AN , BM et BN . Calculer le périmètre du quadrilatère $AMBN$.
- Tracer le cercle $\mathcal{C}_3$ de diamètre $[AB]$. Où est son centre ? Quel est son rayon ?

EXERCICE 14.4 ★★☆☆

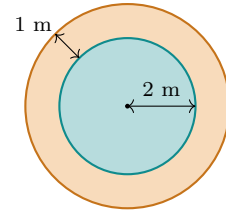
La roue du vélo de Yassine a un diamètre de 50 cm.

1. Quelle distance parcourt le vélo quand la roue fait un tour complet ?
2. Yassine va de chez lui au collège, à 1,57 km. Combien de tours fait chaque roue ?

EXERCICE 14.5 ★★☆☆

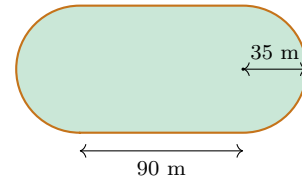
Au centre d'un riad de Fès se trouve une fontaine : un bassin circulaire de rayon 2 m, entouré d'une allée de 1 m de large (en couleur).

1. Calculer l'aire du bassin et la longueur de son bord.
2. Calculer l'aire de l'allée.
3. On couvre l'allée de zellige à 120 DH le m^2 . Quel est le coût ?

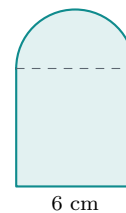
**EXERCICE 14.6** ★★☆☆

Le couloir intérieur d'une piste d'athlétisme est formé de deux lignes droites de 90 m et de deux demi-cercles de rayon 35 m.

1. Calculer la longueur d'un tour de piste.
2. Ilham fait 10 tours. Quelle distance a-t-elle parcourue ?
3. Calculer l'aire de la pelouse intérieure.

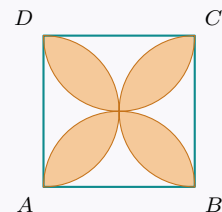
**EXERCICE 14.7** ★★★

1. Un cercle a pour périmètre 31,4 cm. Calculer son rayon et l'aire du disque.
2. Un disque a pour aire $28,26 \text{ cm}^2$. Calculer $r \times r$, puis le rayon.
3. La figure ci-contre est un carré de côté 6 cm surmonté d'un demi-disque. Calculer son périmètre et son aire.

**4 Défis olympiades****○ DÉFI OLYMPIADE 14.1 — La rosace**

Dans un carré $ABCD$ de côté 4 cm, on trace vers l'intérieur les quatre demi-cercles de diamètres $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Ils dessinent une rosace à quatre pétales. Calculer l'aire de la rosace ($\pi \approx 3,14$).

Piste : additionner les aires des quatre demi-disques. Quelle partie a-t-on alors comptée deux fois ?

**○ DÉFI OLYMPIADE 14.2 — La corde autour de la Terre**

Une corde bien tendue fait le tour de la Terre au niveau de l'équateur (environ 40 000 km). On l'allonge de 6,28 m seulement et on la soulève pour qu'elle forme un cercle de même centre que la Terre.

1. À quelle hauteur la corde passe-t-elle au-dessus du sol ? Un chat peut-il passer dessous ?
2. Même question avec un ballon de football au lieu de la Terre. Surprenant, non ?

Les quadrilatères particuliers

OBJECTIFS DU CHAPITRE

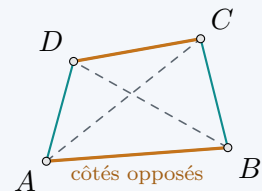
- ✓ Connaître la définition et les propriétés du parallélogramme, du rectangle, du losange et du carré.
- ✓ Reconnaître et construire ces quadrilatères (côtés, angles, diagonales, symétries).
- ✓ Calculer les périmètres et les aires des quadrilatères usuels.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Vocabulaire du quadrilatère

Un **quadrilatère** $ABCD$ a quatre **sommets** et quatre **côtés** $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ (on tourne dans l'ordre des lettres).

- $[AB]$ et $[BC]$ sont des côtés **consécutifs** (ils ont un sommet commun) ; $[AB]$ et $[CD]$ sont des côtés **opposés**.
- A et C sont des sommets **opposés** ; les **diagonales** $[AC]$ et $[BD]$ joignent les sommets opposés.

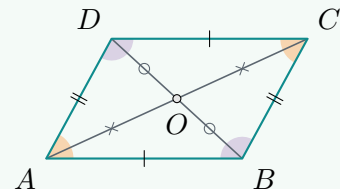


PROPRIÉTÉ — Le parallélogramme

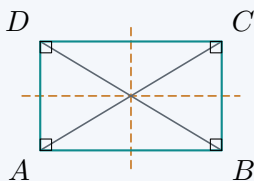
Définition. Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont **parallèles** : $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$.

Propriétés. Dans un parallélogramme $ABCD$:

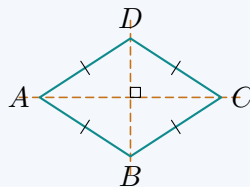
- les côtés opposés ont la **même longueur** : $AB = DC$ et $AD = BC$;
- les angles opposés sont **égaux** : $\hat{A} = \hat{C}$ et $\hat{B} = \hat{D}$;
- les diagonales se coupent en leur **milieu** O ;
- O est son **centre de symétrie**.



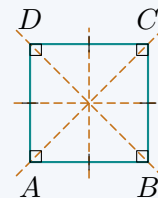
DÉFINITION — Rectangle, losange, carré : des parallélogrammes particuliers



Rectangle : quadrilatère qui a 4 angles droits.
Diagonales de **même longueur**.
2 axes de symétrie.



Losange : quadrilatère qui a 4 côtés égaux.
Diagonales **perpendiculaires**.
2 axes de symétrie (les diagonales).



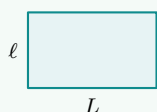
Carré : 4 angles droits et 4 côtés égaux.
Diagonales de même longueur et perpendiculaires.
4 axes de symétrie.

Un carré est à la fois un rectangle et un losange. Tous ces quadrilatères sont des parallélogrammes : ils en ont toutes les propriétés (en orange : les axes de symétrie).

REMARQUE — Tableau récapitulatif

	Parallélogramme	Rectangle	Losange	Carré
Côtés opposés parallèles et de même longueur	✓	✓	✓	✓
Quatre côtés de même longueur	✗	✗	✓	✓
Quatre angles droits	✗	✓	✗	✓
Diagonales qui se coupent en leur milieu	✓	✓	✓	✓
Diagonales de même longueur	✗	✓	✗	✓
Diagonales perpendiculaires	✗	✗	✓	✓
Nombre d'axes de symétrie	0	2	2	4

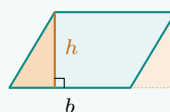
PROPRIÉTÉ — Périmètres et aires



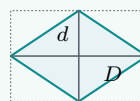
Rectangle
 $P = 2 \times (L + l)$
 $\mathcal{A} = L \times l$



Carré
 $P = 4 \times c$
 $\mathcal{A} = c \times c$



Parallélogramme
 (le triangle se déplace)
 $\mathcal{A} = b \times h$



Losange
 (moitié du rectangle)
 $\mathcal{A} = \frac{D \times d}{2}$

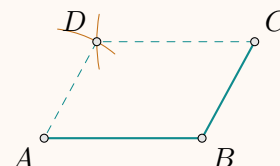
Pour le parallélogramme, la **hauteur** h est perpendiculaire à la base b (ce n'est pas le côté oblique !). Le losange étant un parallélogramme, on peut aussi calculer son aire par $b \times h$.

2 Méthodes & astuces

 MÉTHODE — Construire un parallélogramme $ABCD$ connaissant A, B et C

Au compas : tracer l'arc de centre C et de rayon AB , puis l'arc de centre A et de rayon BC ; ils se coupent en D (côtés opposés de même longueur).

Avec le milieu : placer le milieu O de $[AC]$, puis le point D tel que O soit le milieu de $[BD]$ (les diagonales se coupent en leur milieu).



MÉTHODE — Reconnaître un quadrilatère par ses diagonales

On regarde d'abord si les diagonales ont le **même milieu** (parallélogramme), puis on teste : **même longueur** $\Rightarrow$ rectangle ; **perpendiculaires** $\Rightarrow$ losange ; **les deux** $\Rightarrow$ carré.

★ ASTUCE DU PROF — Somme des angles d'un quadrilatère

Une diagonale découpe le quadrilatère en **deux triangles** : la somme de ses angles vaut $2 \times 180^\circ = 360^\circ$. Dans un parallélogramme, deux angles consécutifs ont donc pour somme 180° (ex. : 65° et 115°).

❌ PIÈGE À ÉVITER

- Un carré est un rectangle particulier, mais un rectangle n'est pas toujours un carré !
- Un losange n'est pas un « carré penché » : ses angles ne sont pas droits en général.
- Un parallélogramme (non rectangle, non losange) n'a **aucun** axe de symétrie : seulement un centre.

3 Exercices

EXERCICE 15.1 ★☆☆

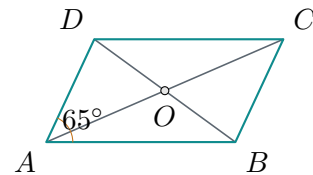
Vrai ou faux ? Justifier.

- Un carré est un rectangle.
- Un rectangle est un carré.
- Les diagonales d'un losange ont la même longueur.
- Un quadrilatère à 4 côtés égaux est un losange.
- Les diagonales d'un rectangle sont perpendiculaires.
- Un parallélogramme a toujours un axe de symétrie.

EXERCICE 15.2 ★☆☆

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O tel que $AB = 5$ cm, $AD = 3$ cm, $\widehat{DAB} = 65^\circ$ et $AC = 6,8$ cm.

- Donner, en justifiant, les longueurs CD , BC et AO .
- Donner la mesure de $\widehat{BCD}$, puis calculer $\widehat{ABC}$.
- Construire ce parallélogramme en vraie grandeur.



EXERCICE 15.3 ★☆☆

(Type contrôle) Construire en vraie grandeur :

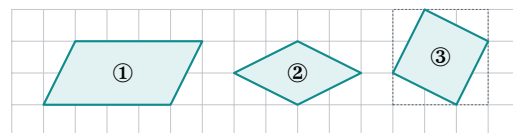
- le rectangle $EFGH$ tel que $EF = 6$ cm et $FG = 3,5$ cm ;
- le losange $IJKL$ de diagonales $IK = 8$ cm et $JL = 5$ cm ;
- le carré $MNPQ$ dont les diagonales mesurent 6 cm.

Expliquer chaque construction en une phrase.

EXERCICE 15.4 ★☆☆

Chaque carreau mesure 1 cm de côté. Donner la nature de chaque quadrilatère, puis calculer son aire.

Pour ③, on pourra enlever 4 triangles à un grand carré.



EXERCICE 15.5 ★☆☆

Le salon de la maison de Mme Bennani, à Tétouan, est un rectangle de 6 m sur 4,5 m.

- On pose une plinthe tout autour du salon, sauf devant la porte de 0,9 m. Quelle longueur de plinthe faut-il ? Quel est son prix à 25 DH le mètre ?
- On carrelé le sol avec des carreaux carrés de 30 cm de côté. Combien de carreaux faut-il ?

3. Un tapis carré de 3,5 m de côté est posé au centre. Quelle aire de carrelage reste visible ?

EXERCICE 15.6 ★★☆☆

Un cerf-volant a la forme d'un losange $ABCD$ de côté 5 dm, dont les diagonales mesurent 8 dm et 6 dm.

- Calculer son périmètre et son aire.
- Le losange est aussi un parallélogramme. En utilisant $\mathcal{A} = b \times h$, calculer la distance entre les droites parallèles (AB) et (DC) .

EXERCICE 15.7 ★★☆☆

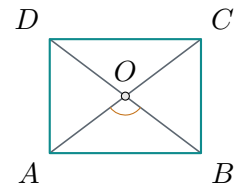
Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier en citant une propriété.

- Diagonales de même milieu et de même longueur.
- Diagonales de même milieu et perpendiculaires.
- Il a trois angles droits.
- C'est un parallélogramme avec $AB = BC$.
- C'est un rectangle aux diagonales perpendiculaires.
- C'est un parallélogramme avec $\hat{A} = 90^\circ$.

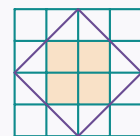
EXERCICE 15.8 ★★★

$ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $\widehat{AOB} = 106^\circ$.

- Expliquer pourquoi $OA = OB = OC = OD$.
- En déduire la nature du triangle AOB , puis calculer $\widehat{OAB}$.
- Calculer $\widehat{BOC}$, puis $\widehat{OBC}$. Vérifier que $\widehat{ABC} = 90^\circ$.


4 Défis olympiades
○ DÉFI OLYMPIADE 15.1 — Combien de carrés ?

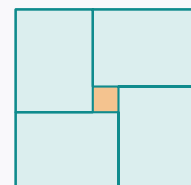
- Combien de carrés (de toutes tailles) voit-on dans la grille 4×4 ci-contre ?
- Même question pour un échiquier 8×8 .
- Bonus* : dans la grille 4×4 , combien de carrés en tout si l'on compte aussi les carrés « penchés » dont les quatre sommets sont des nœuds du quadrillage ?


○ DÉFI OLYMPIADE 15.2 — Le moulin à vent

Quatre rectangles identiques entourent un petit carré pour former un grand carré de périmètre 28 cm (voir la figure). Le petit carré central a une aire de 1 cm^2 .

Quelles sont les dimensions de chaque rectangle ? Quelle est son aire ?

Piste : que vaut la somme des deux dimensions d'un rectangle ? et leur différence ?



Prisme droit et cylindre : patrons, aires et volumes

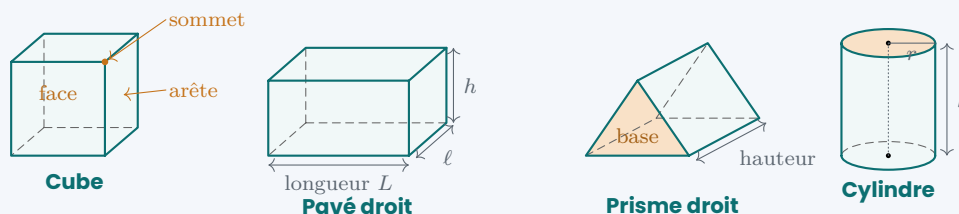
OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Reconnaître et représenter en perspective cavalière un pavé, un prisme droit et un cylindre ; en tracer un patron.
- ✓ Calculer l'aire latérale, l'aire totale et le volume d'un prisme droit et d'un cylindre.
- ✓ Convertir des unités de volume et de contenance ($1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$).

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Les solides usuels et leur vocabulaire

Un **prisme droit** a deux **bases** polygonales superposables et parallèles, et des **faces latérales** rectangulaires. La **hauteur** est la longueur d'une arête latérale. Le **pavé droit** (6 faces rectangulaires) et le **cube** (6 faces carrées) sont des prismes droits particuliers. Un **cylindre de révolution** a deux bases qui sont des **disques** de même rayon et une **surface latérale** courbe.



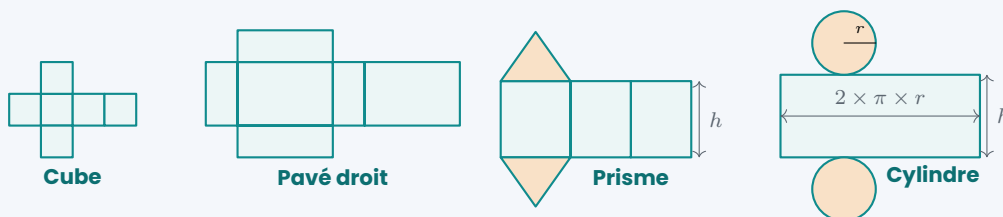
Solide	Faces	Arêtes	Sommets
Cube, pavé droit	6	12	8
Prisme droit à base triangulaire	5	9	6

REMARQUE — La perspective cavalière

On dessine la face avant **en vraie grandeur** ; les arêtes « fuyantes » (en profondeur) sont tracées **obliques** et **raccourcies** ; deux arêtes parallèles restent parallèles ; les arêtes **cachées** sont en **pointillés**.

DÉFINITION — Patron d'un solide

Un **patron** est une figure plane qui, après découpage et pliage, permet de fabriquer le solide sans superposition.



La surface latérale d'un cylindre, une fois déroulée, est un **rectangle** de largeur h et de longueur

égale au **périmètre de la base**. De même, les faces latérales d'un prisme droit forment un grand rectangle.

PROPRIÉTÉ — Aires et volumes

Pour un prisme droit ou un cylindre de hauteur h :

$$\mathcal{A}_{\text{latérale}} = \text{périmètre de la base} \times h$$

$$V = \text{aire de la base} \times h$$

$$\mathcal{A}_{\text{totale}} = \mathcal{A}_{\text{latérale}} + 2 \times \text{aire de la base}$$

Solide	Aire latérale	Volume
Cube d'arête a	$4 \times a \times a$	$a \times a \times a$
Pavé droit L, ℓ, h	$2 \times (L + \ell) \times h$	$L \times \ell \times h$
Cylindre de rayon r et de hauteur h	$2 \times \pi \times r \times h$	$\pi \times r \times r \times h$

PROPRIÉTÉ — Unités de volume et contenances

On passe d'une unité de volume à la suivante en multipliant ou en divisant par 1 000.

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L} \quad 1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L} \quad 1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$$

$$\text{Ex. } 2,5 \text{ m}^3 = 2\,500 \text{ dm}^3 = 2\,500 \text{ L}; \quad 750 \text{ cm}^3 = 0,75 \text{ L}.$$

m^3			dm^3			cm^3		
			hL	daL	L	dL	cL	mL
		2	5	0	0			

2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Calculer un volume ou une aire

1. Repérer les **bases** (les deux faces parallèles superposables) et la **hauteur** du solide.
2. Calculer l'aire (ou le périmètre) de la base avec les formules des figures planes.
3. Multiplier par la hauteur, en vérifiant que toutes les longueurs sont dans la **même unité**.

★ ASTUCE DU PROF — Penser « empilement »

Un prisme droit, c'est sa base empilée sur toute la hauteur, comme une pile de feuilles identiques ou un paquet de galettes : le volume est l'aire d'une « tranche » multipliée par la hauteur de la pile. Un pavé de $5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$, c'est 4 couches de $5 \times 3 = 15$ petits cubes : 60 cm^3 .

✗ PIÈGE À ÉVITER

- Une aire s'exprime en cm^2 , un volume en cm^3 : ne pas les confondre !
- La **hauteur du prisme** (arête latérale) n'est pas la hauteur du triangle de base.
- $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3$ et non 100 dm^3 : il y a $10 \times 10 \times 10$ petits cubes de 1 dm dans un cube de 1 m .

LE SAVAIS-TU ?

Comment mesurer le volume d'une couronne, bien trop tordue pour une formule ? Selon la légende, Archimède trouva l'idée dans son bain : le volume d'eau déplacé est égal au volume de l'objet plongé. « Eurêka ! » (« J'ai trouvé ! »). À toi de l'utiliser dans l'exercice 16.9.

3 Exercices

EXERCICE 16.1 ★☆☆

Conversions. Compléter.

- a) $3 \text{ m}^3 = \dots \text{ dm}^3 = \dots \text{ L}$ c) $750 \text{ mL} = \dots \text{ dm}^3$ e) $12\,000 \text{ cm}^3 = \dots \text{ L}$
 b) $4,5 \text{ L} = \dots \text{ cm}^3$ d) $0,8 \text{ m}^3 = \dots \text{ L}$ f) $25 \text{ cL} = \dots \text{ cm}^3$

EXERCICE 16.2 ★☆☆

QCM. Choisir la bonne réponse et justifier.

- Un prisme droit à base hexagonale (6 côtés) a : a) 6 faces b) 8 faces c) 12 faces.
- Le volume d'un cube d'arête 3 cm est : a) 9 cm^3 b) 27 cm^3 c) 54 cm^2 .
- La surface latérale déroulée d'un cylindre est : a) un disque b) un triangle c) un rectangle.
- Cylindre de rayon 1 cm, de hauteur 10 cm : a) $31,4 \text{ cm}^3$ b) $62,8 \text{ cm}^3$ c) 314 cm^3 .

EXERCICE 16.3 ★☆☆

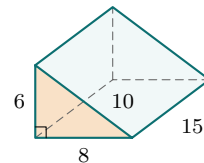
(Type contrôle) $ABCDEFGH$ est un pavé droit de dimensions 5 cm, 3 cm et 4 cm.

- Le représenter en perspective cavalière (arêtes cachées en pointillés).
- Tracer un patron de ce pavé en vraie grandeur.
- Calculer son aire latérale (base de 5×3), son aire totale et son volume.

EXERCICE 16.4 ★☆☆

Une boîte de thé à la menthe est un prisme droit de hauteur 15 cm, dont la base est un triangle rectangle de côtés 6 cm, 8 cm et 10 cm.

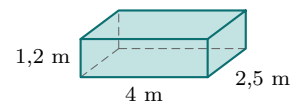
- Calculer l'aire d'une base, puis le volume de la boîte.
- Calculer l'aire latérale, puis l'aire totale de carton (sans les rabats).



EXERCICE 16.5 ★☆☆

Le bassin d'un riad de Marrakech est un pavé droit de 4 m de long, 2,5 m de large et 1,2 m de profondeur.

- Calculer son volume en m^3 , puis sa contenance en litres.
- Un tuyau débite 20 L par minute. Combien de temps faut-il pour le remplir ?
- On recouvre de zellige le fond et les quatre parois. Calculer l'aire à couvrir, puis le prix à 150 DH le m^2 .



EXERCICE 16.6 ★☆☆

Dans une ferme près de Béni Mellal, un réservoir d'eau cylindrique a un rayon de 1 m et une hauteur de 3 m ($\pi \approx 3,14$).

- Calculer son volume en m^3 , puis sa contenance en litres.
- La famille consomme 157 L d'eau par jour. Pendant combien de jours le réservoir plein suffit-il ?
- On peint la surface latérale extérieure. Un pot de peinture couvre 5 m^2 . Combien de pots faut-il acheter ?

EXERCICE 16.7 ★★☆☆

Pour arroser son potager près d'Agadir, Brahim hésite entre deux citernes vendues au même prix : une citerne en forme de pavé droit de $2 \text{ m} \times 1,5 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, et une citerne cylindrique de rayon 1 m et de hauteur 1 m .

1. Calculer la contenance de chaque citerne en litres. Laquelle doit-il choisir ?
2. L'eau coûte 7 DH le m^3 . Combien coûte le remplissage de la citerne choisie ?

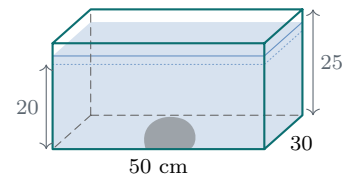
EXERCICE 16.8 ★★☆☆

Une brique de lait « 1 L » est un pavé droit à base carrée de 7 cm de côté et de $20,5 \text{ cm}$ de haut.

1. Calculer son volume en cm^3 . Contient-elle plus ou moins de 1 L ?
2. On range 12 briques debout dans un carton, en 3 rangées de 4. Donner les dimensions intérieures minimales du carton, puis son volume.

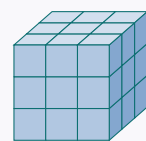
EXERCICE 16.9 ★★★

1. Le patron de la surface latérale d'un cylindre est un rectangle de $25,12 \text{ cm}$ sur 10 cm (la hauteur est 10 cm). Calculer le rayon de la base, puis le volume du cylindre.
2. Un aquarium en forme de pavé droit a une base de $50 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ et une hauteur de 25 cm . L'eau y monte à 20 cm . Combien de litres d'eau contient-il ?
3. On y plonge une pierre : l'eau monte à 22 cm . Quel est le volume de la pierre ?

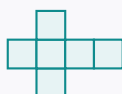
**4 Défis olympiades****○ DÉFI OLYMPIADE 16.1 — Le cube peint**

On peint en bleu toutes les faces d'un cube de 3 cm d'arête, puis on le découpe en 27 petits cubes de 1 cm d'arête.

1. Combien de petits cubes ont 3 faces peintes ? 2 faces ? 1 face ? aucune face ?
2. Même question pour un cube de 10 cm d'arête découpé en 1000 petits cubes.
3. Quelle doit être l'arête du grand cube pour qu'il y ait autant de petits cubes **sans** peinture que de petits cubes avec **une seule** face peinte ?

**○ DÉFI OLYMPIADE 16.2 — Patrons du cube**

Parmi ces six figures formées de six carrés, lesquelles sont des patrons de cube ? (*Imagine le pliage : une case est la face du dessous, puis on replie les autres.*)



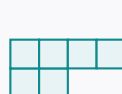
a)



b)



c)



d)



e)



f)

Formulaire : l'essentiel à retenir

PRIORITÉS ET DIVISION

Ordre : **parenthèses**, puis $\times$ et $\div$, puis $+$ et $-$.
 Division euclidienne : $a = b \times q + r$ avec $r < b$.
 $\times 10$, $\times 100$: la virgule se décale de 1, 2 rangs à droite.

CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ

Par 2 : unités paires · par 5 : 0 ou 5 · par 10 : 0
 Par 3 (ou 9) : somme des chiffres divisible par 3 (ou 9).

FRACTIONS ($b \neq 0, d \neq 0, k \neq 0$)

$\frac{a}{b} = a \div b$ $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ les $\frac{a}{b}$ de Q : $\frac{a}{b} \times Q$
 Dénominateurs différents : les rendre **égaux** d'abord.

NOMBRES RELATIFS

Opposés : -5 et 5 (même distance à zéro : 5).
 Deux négatifs : le plus loin de 0 est le plus petit ($-7 < -2$).
 Même signe : on **ajoute** les distances à zéro.
 Signes contraires : on **soustrait** (signe du plus éloigné de 0).
 Soustraire, c'est ajouter l'opposé : $a - b = a + (-b)$.

CALCUL LITTÉRAL

$3 \times a = 3a$ $a \times a = a^2$ $a \times a \times a = a^3$ $3x + 5x = 8x$
 Développer : $k(a + b) = ka + kb$; $k(a - b) = ka - kb$
 Factoriser : $ka + kb = k(a + b)$ (facteur commun k).

ÉQUATIONS

$x + a = b \iff x = b - a$ $a \times x = b \iff x = \frac{b}{a}$
 ($a \neq 0$). Toujours **vérifier** la solution trouvée !

PROPORTIONNALITÉ

Coefficient k : $y = k \times x$
 Produit en croix : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c$
 $t\%$ de Q : $\frac{t}{100} \times Q$ Échelle = $\frac{\text{sur le plan}}{\text{dans la réalité}}$
 Vitesse : $v = \frac{d}{t}$ $d = v \times t$ (1 h = 60 min)

DROITES PARALLÈLES ET PERPENDICULAIRES

$(d) \perp (\Delta)$ et $(d') \perp (\Delta) \implies (d) \parallel (d')$
 $(d) \parallel (d')$ et $(\Delta) \perp (d) \implies (\Delta) \perp (d')$
 $(d) \parallel (\Delta)$ et $(d') \parallel (\Delta) \implies (d) \parallel (d')$

ANGLES

Complémentaires : 90° ; supplémentaires : 180° .
 Opposés par le sommet : **égaux**.
 Parallèles et sécante : angles **alternes-internes** égaux, angles **correspondants** égaux (et réciproquement).

MÉDIATRICE ET SYMÉTRIE AXIALE

Médiatrice : perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu.
 M est sur la médiatrice de $[AB] \iff MA = MB$.
 Symétrie d'axe (d) : (d) est la médiatrice de $[MM']$.

SYMÉTRIE CENTRALE

Symétrie de centre O : O est le **milieu** de $[MM']$.
 L'image d'une droite est une droite **parallèle**.
 Les symétries conservent longueurs, angles, aires.

LE TRIANGLE

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ Équilatéral : $3 \times 60^\circ$
 Isocèle : les angles à la base sont égaux.
 Inégalité triangulaire : $AB < AC + CB$.
 Aire = $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ Médiatrices $\rightarrow$ cercle circonscrit.

LE CERCLE ($\pi \approx 3,14$)

$d = 2r$ $P = 2 \times \pi \times r$ $A = \pi \times r \times r$

QUADRILATÈRES PARTICULIERS

Parallélogramme : diagonales de même milieu.
 Rectangle : diagonales de même longueur.
 Losange : diagonales perpendiculaires. Carré : les deux.
 Aires : $L \times \ell$ $c \times c$ $b \times h$ losange $\frac{D \times d}{2}$

PRISME DROIT ET CYLINDRE

Volume = aire de la base $\times$ hauteur
 Aire latérale = périmètre de la base $\times$ hauteur
 $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$

Calculatrice non autorisée. Soigne la rédaction et les figures : elles comptent dans la note.

EXERCICE 1 (3,5 points)

- Calculer en respectant les priorités :
 $A = 15 - 2 \times (3,5 + 1,5)$ (0,5 pt)
 $B = 4,8 \div 0,4 + 2,5 \times 4$ (0,5 pt)
- Calculer astucieusement :
 $C = 0,25 \times 7,3 \times 4$. (0,5 pt)
- Rendre irréductible la fraction $\frac{36}{48}$. (0,5 pt)
- Comparer $\frac{5}{6}$ et $\frac{7}{9}$. (0,5 pt)
- Calculer et simplifier :
 $D = \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ (0,5 pt) $E = \frac{3}{5} \times \frac{10}{9}$ (0,5 pt)

EXERCICE 2 (2,5 points)

- Ranger dans l'ordre croissant : $-3,5$; 2 ; -7 ; 0 ; $-3,25$; $1,5$. (0,5 pt)
- Calculer : a) $(-7) + (+12)$ b) $(-4,5) - (+3)$ c) $(+6) - (+10)$ d) $(-8) - (-11)$. (1 pt)
- Calculer en regroupant les termes positifs et les termes négatifs : $F = 7 - 12 + 5 - 9 + 4$. (0,5 pt)
- À Ifrane, un matin d'hiver, le thermomètre indique -4°C ; à midi, il indique 9°C . De combien de degrés la température a-t-elle augmenté ? (0,5 pt)

EXERCICE 3 (3,5 points)

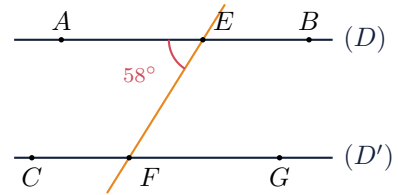
- Développer et réduire : $G = 3(2x + 5) - 4x$. (0,5 pt)
- Factoriser : $H = 12a + 18$. (0,5 pt)
- Réduire $L = 7y + 4 - 3y + 2$, puis calculer L pour $y = 2,5$. (0,5 pt)
- Résoudre les équations : a) $3x + 7 = 22$ (0,5 pt) b) $5x - 4 = 2x + 14$. (0,5 pt)
- Un jardin rectangulaire de Meknès a un périmètre de 46 m ; sa longueur dépasse sa largeur de 5 m. On note x la largeur (en m).
a) Montrer que x vérifie l'équation $4x + 10 = 46$. (0,5 pt)
b) Résoudre cette équation et donner les dimensions du jardin. (0,5 pt)

EXERCICE 4 (2,5 points)

- Un car roule à vitesse constante : il parcourt 160 km en 2 h.
a) Calculer sa vitesse moyenne en km/h. (0,25 pt)
b) Quelle distance parcourt-il en 3 h 30 min ? (0,5 pt)
- Au souk de Marrakech, un caftan coûte 600 DH. Le vendeur accorde une remise de 15 %.
a) Calculer le montant de la remise. (0,5 pt) b) Quel prix paie-t-on finalement ? (0,25 pt)
- Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{500\,000}$, Rabat et Casablanca sont distantes de 17,4 cm.
a) Calculer la distance réelle, en km, entre ces deux villes. (0,5 pt)
b) Rabat et Kénitra sont distantes de 40 km. Quelle est leur distance sur la carte ? (0,5 pt)

EXERCICE 5 (2,5 points)

Sur la figure ci-contre, les droites (D) et (D') sont parallèles et $\widehat{AEF} = 58^\circ$.



1. Calculer $\widehat{EFG}$ en justifiant. (0,5 pt)
2. Calculer $\widehat{BEF}$ en justifiant. (0,5 pt)
3. RST est un triangle tel que $\widehat{SRT} = 40^\circ$ et $\widehat{RST} = 70^\circ$.
 - a) Calculer $\widehat{RTS}$, puis préciser la nature du triangle RST . (0,5 pt)
 - b) La hauteur issue de R coupe $[ST]$ en H . Calculer $\widehat{SRH}$. (0,5 pt)
4. Peut-on construire un triangle dont les côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 8 cm ? Justifier. (0,5 pt)

EXERCICE 6 (2,5 points)

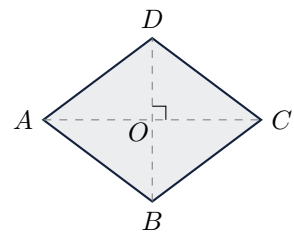
(C) est un cercle de centre O et de rayon 3 cm ; $[AB]$ est un diamètre de (C) et C est un point de (C) tel que $AC = 3$ cm.

1. Faire une figure soignée (elle sera complétée au fur et à mesure). (0,5 pt)
2. Montrer que le triangle AOC est équilatéral et en déduire la mesure de $\widehat{AOC}$. (0,5 pt)
3. Construire le point D , symétrique de C par rapport à O . Montrer que $ACBD$ est un rectangle. (0,75 pt)
4. Construire le point E , symétrique de C par rapport à la droite (AB) . Pourquoi E est-il sur (C) ? (0,5 pt)
5. Que représente le point O pour le triangle ABC ? Justifier. (0,25 pt)

EXERCICE 7 (1,5 point)

$ABCD$ est un losange de centre O tel que $AC = 8$ cm, $BD = 6$ cm et $AB = 5$ cm.

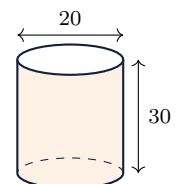
1. Calculer l'aire et le périmètre du losange $ABCD$. (0,75 pt)
2. Un losange est un parallélogramme. En utilisant la formule de l'aire d'un parallélogramme, calculer la hauteur h du losange relative au côté $[AB]$. (0,75 pt)



EXERCICE 8 (1,5 point)

Un bidon d'huile d'olive de Meknès a la forme d'un cylindre de révolution de diamètre 20 cm et de hauteur 30 cm. On prendra $\pi \approx 3,14$.

1. Calculer l'aire de la base de ce cylindre. (0,25 pt)
2. Calculer le volume du bidon en cm^3 , puis en litres. (0,5 pt)
3. On verse toute l'huile dans des bouteilles de 1,5 L. Combien de bouteilles pleines obtient-on ? Quelle quantité d'huile reste-t-il ? (0,5 pt)
4. Quelle longueur doit avoir une étiquette qui fait exactement le tour du bidon ? (0,25 pt)



Calculatrice non autorisée. Toute réponse doit être justifiée ; une idée bien expliquée rapporte des points même si le calcul n'est pas fini.

EXERCICE 1 (3,5 points)

Le nombre de l'année. On forme le nombre N en écrivant 10 fois de suite le bloc « 2026 » :

$$N = 2026\,2026\,2026 \dots 2026.$$

- Combien de chiffres compte N ? Quelle est la somme de ses chiffres ? (0,5 pt)
- Le nombre N est-il divisible par 2 ? par 5 ? par 3 ? par 9 ? Justifier chaque réponse. (1 pt)
- Combien de fois, au minimum, faut-il écrire le bloc « 2026 » pour obtenir un nombre divisible par 9 ? (1 pt)
- On écrit maintenant le bloc « 2026 » un très grand nombre de fois.
 - Quel est le 2026^e chiffre écrit ? (0,5 pt)
 - Quelle est la somme des 2026 premiers chiffres écrits ? (0,5 pt)

EXERCICE 2 (3 points)

Calculs astucieux. Calculer le plus simplement possible, en expliquant l'astuce utilisée :

- $A = 125 \times 37 \times 8$ (0,5 pt)
- $B = 47 \times 99 + 47$ (0,5 pt)
- $C = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$ (0,5 pt)
- Vérifier que $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ et que $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. (0,5 pt)
 - En déduire la valeur de : $D = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$. (1 pt)

EXERCICE 3 (3,5 points)

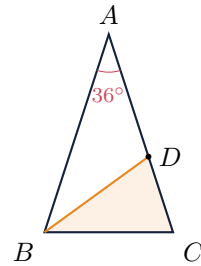
Logique et dénombrement.

- Trois boîtes, une rouge, une verte et une bleue, portent chacune une étiquette. Une seule boîte contient une pièce d'or.
Rouge : « La pièce est ici. » **Verte** : « La pièce n'est pas ici. »
Bleue : « La pièce n'est pas dans la boîte rouge. »
 Une seule des trois étiquettes dit la vérité. Où est la pièce ? Justifier. (1 pt)
- Combien y a-t-il de nombres de trois chiffres dont la somme des chiffres vaut 5 ? (1 pt)
 - Parmi eux, combien sont pairs ? (0,5 pt)
- Au tournoi d'échecs d'Ifrane, 7 joueurs s'affrontent : chacun joue une seule fois contre chacun des autres. Combien de parties sont jouées ? (1 pt)

EXERCICE 4 (3,5 points)

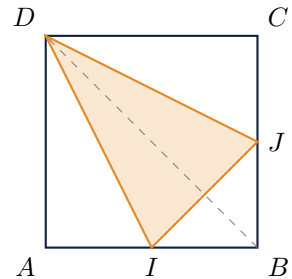
Le triangle d'or. ABC est un triangle isocèle en A tel que $\widehat{BAC} = 36^\circ$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté $[AC]$ en D .

1. Calculer $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. (0,5 pt)
2. Calculer $\widehat{ABD}$ et $\widehat{DBC}$. (0,5 pt)
3. Calculer $\widehat{BDC}$. (0,5 pt)
4. Montrer que les triangles ABD et BCD sont isocèles ; préciser en quels sommets. (1 pt)
5. En déduire que $AD = BC$. (0,5 pt)
6. On mesure $AB = 10$ cm et $BC \approx 6,18$ cm. En déduire une valeur approchée de DC (sans mesurer !). (0,5 pt)

**EXERCICE 5 (3 points)**

Le zellige. $ABCD$ est un carré de côté 10 cm ; I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$.

1. Calculer les aires des triangles DAI , IBJ et JCD . (0,75 pt)
2. Montrer que le quadrilatère $DIBJ$ occupe exactement la moitié du carré. (0,5 pt)
3. En déduire l'aire du triangle DIJ et la fraction du carré qu'il occupe. (0,75 pt)
4. Quel est le symétrique de A par rapport à la droite (BD) ? celui de I ? En déduire la nature du triangle DIJ . (1 pt)

**EXERCICE 6 (3,5 points)**

À la ferme de Ba Ahmed, près de Settat.

1. Ba Ahmed élève des poules et des moutons. En tout, il compte 30 têtes et 80 pattes. Combien a-t-il de moutons et combien de poules ? (On pourra supposer d'abord que tous les animaux sont des poules.) (1 pt)
2. Ba Ahmed a 60 ans et son petit-fils Yassine a 12 ans.
 - a) Que peut-on dire de la différence de leurs âges au fil des années ? (0,25 pt)
 - b) Dans combien d'années l'âge de Ba Ahmed sera-t-il le triple de celui de Yassine ? (0,5 pt)
 - c) Il y a combien d'années l'âge de Ba Ahmed était-il 7 fois celui de Yassine ? (0,25 pt)
3. Pour remplir le bassin de la ferme, le robinet A seul met 3 heures et le robinet B seul met 6 heures. Quelle fraction du bassin chaque robinet remplit-il en une heure ? En combien de temps les deux robinets ouverts ensemble remplissent-ils le bassin ? (0,75 pt)
4. Ba Ahmed a ramassé moins de 400 œufs. S'il les range par 2, par 3, par 4, par 5 ou par 6, il en reste toujours exactement 1 ; s'il les range par 7, il n'en reste aucun. Combien d'œufs a-t-il ramassés ? (0,75 pt)

Corrigés détaillés

Les solutions sont rédigées de façon concise : les étapes essentielles y figurent, à toi de compléter les détails de calcul sur ta copie.

1 Nombres entiers et décimaux : opérations et priorités

Exercice 1.1

1. Dixièmes : 5 ; dizaines : 7 ; millièmes : 6. 2. 3,705.
3. 5,409 et 23,75.

Exercice 1.2

1. $3,05 < 3,054 < 3,405 < 3,45 < 3,5$. 2. Par exemple 2,75 et 5,195.

Exercice 1.3

- a) **Faux** : $12 - 10 = 2$. b) **Faux** : 0,08. c) **Vrai** : $7,3 \times 100$. d) **Vrai** : $15,20 > 15,19$.

Exercice 1.4

- a) $25 - 12 + 4 = 17$ b) $21 \times (3 + 4) = 21 \times 7 = 147$
c) $3 \times [20 - 16] \div 2 = 3 \times 4 \div 2 = 6$ d) $7,5 + 10 - 3 = 14,5$.

Exercice 1.5

- a) $13 \times 100 = 1300$ b) $2,7 \times 1000 = 2700$ c) $3700 - 37 = 3663$
d) $3500 + 70 = 3570$ e) $3,7 \times 100 = 370$ f) $10 \times 7 = 70$.

Exercice 1.6

1. $1000 = 37 \times 27 + 1$ ($1 < 37$). 2. **27** boîtes pleines, 1 verre restant.
3. $1001 = 37 \times 27 + 2$: quotient 27, reste 2.

Exercice 1.7

1. Environ $2,5 \times 50 + 2 \times 85 + 25 = 320$ DH.
2. $2,5 \times 48 + 2 \times 85,5 + 1,2 \times 22,5 = 120 + 171 + 27 = 318$ DH.
3. $400 - 318 = 82$ DH.

Exercice 1.8

1. $9 \times 15 + 7 = 142$.
2. $100 = b \times q + 4$ donc $b \times q = 96$ avec $b > 4$. Les diviseurs de 96 plus grands que 4 : **6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96**.
3. Pour obtenir un grand nombre, on effectue d'abord les additions ($2 + 3 = 5$, $4 + 5 = 9$) puis on multiplie

Défi olympiade 1.1

1. $2 + 12 + 30 = 44$.
2. $(2 + 3) \times 4 + 5 \times 6 = 50$; $2 + 3 \times (4 + 5 \times 6) = 104$;
 $(2 + 3) \times (4 + 5 \times 6) = 170$.
3. Pour obtenir un grand nombre, on effectue d'abord les additions ($2 + 3 = 5$, $4 + 5 = 9$) puis on multiplie

tout : $(2 + 3) \times (4 + 5) \times 6 = 270$. En testant tous les placements, on ne trouve que 44, 50, 104, 114, 150, 164, 170, 174 et 270.

Défi olympiade 1.2

Les jours reviennent tous les 7 jours : seul le **reste** de la division par 7 compte.

1. $100 = 7 \times 14 + 2$: jeudi + 2 jours = **samedi**.
 $1000 = 7 \times 142 + 6$: jeudi + 6 = **mercredi**.
2. $365 = 7 \times 52 + 1$: **vendredi**.
3. $n = 7q + q = 8q$ avec $1 \leq q < 7$: $n \in \{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$.

2 Les fractions : écriture, égalité, simplification et comparaison

Exercice 2.1

- a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Exercice 2.2

- a) $45 \div 3 \times 2 = 30$ DH b) $60 \div 4 \times 3 = 45$ min
c) $2000 \div 8 \times 5 = 1250$ g d) $30 \div 10 \times 7 = 21$ élèves.

Exercice 2.3

1. Chaque unité est partagée en 6 : $A(\frac{2}{6}) = A(\frac{1}{3})$, $B(\frac{9}{6}) = B(\frac{3}{2})$, $C(\frac{11}{6})$.
2. $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$: 8 graduations après 0 ; $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$: 3 graduations.

Exercice 2.4

1. 1,75 ; 0,375 ; 2,4. 2. $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$; $\frac{125}{100} = \frac{5}{4}$; $\frac{36}{100} = \frac{9}{25}$.
3. $\frac{84}{126} = \frac{42}{63} = \frac{2}{3}$ ($\div 2$, $\div 21$) ; $\frac{1}{3}$ ($\div 120$) ; $\frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ ($\div 5$, $\div 3$) ; $\frac{66}{77} = \frac{6}{7}$ ($\div 2$, $\div 11$).

Exercice 2.5

- a) **Vrai** : les deux valent $\frac{2}{3}$. b) **Faux** : même numérateur, $8 > 5$ donc $\frac{1}{8} < \frac{1}{5}$.
c) **Vrai** : $15 > 14$. d) **Faux** : $\frac{8}{9} \neq \frac{3}{4}$ ($\frac{32}{36} \neq \frac{27}{36}$).

Exercice 2.6

- a) $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{7}{12}$: $\frac{7}{12} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.
b) Inférieures à 1 : $\frac{5}{7} = \frac{50}{70} < \frac{63}{70} = \frac{9}{10}$. Supérieures à 1 : $\frac{11}{10} = \frac{33}{30} < \frac{4}{3} = \frac{40}{30} < \frac{7}{5} = \frac{42}{30}$.
Donc $\frac{5}{7} < \frac{9}{10} < \frac{11}{10} < \frac{4}{3} < \frac{7}{5}$.

Exercice 2.7

- $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$; $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$; $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$.
- $\frac{14}{24} < \frac{15}{24} < \frac{16}{24}$: Ilyas a mangé le plus, Rania le moins (Rania < Adam < Ilyas).

Exercice 2.8

- $\frac{3}{5} = \frac{3k}{5k}$ et $3k + 5k = 8k = 64$ donc $k = 8$: $\frac{24}{40}$.
- Il manque $\frac{1}{2026}$ à la première et $\frac{1}{2027}$ à la seconde.
Or $\frac{1}{2027} < \frac{1}{2026}$: la seconde est plus proche de 1, donc $\frac{2025}{2026} < \frac{2026}{2027}$.

Défi olympiade 2.1

- $\frac{2}{6}$ et $\frac{3}{6}$: pas de place. En douzièmes : $\frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12}$.
- En 24^{es} : $\frac{8}{24} < \frac{9}{24} < \frac{10}{24} < \frac{11}{24} < \frac{12}{24}$: $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{11}{24}$.
- $\frac{10}{30} < \frac{12}{30} < \frac{15}{30}$ ✓. Puis $\frac{2+3}{5+7} = \frac{5}{12}$: $\frac{168}{420} < \frac{175}{420} < \frac{180}{420}$ ✓.
En prenant des dénominateurs de plus en plus grands, on trouve toujours de nouvelles fractions : il y en a une infinité entre deux fractions différentes !

Défi olympiade 2.2

- 12 est un multiple de 3, 4 et 6 : $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$. Ali : 4 parts, Badr : 3, Chama : 2.
- Dina : $12 - 4 - 3 - 2 = 3$ parts, soit $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$: oui, autant que Badr.
- Chama < Badr = Dina < Ali.

3 Opérations sur les fractions**Exercice 3.1**

- $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
- $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
- $\frac{6}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
- $\frac{15}{18} + \frac{4}{18} = \frac{19}{18}$
- $\frac{14}{20} - \frac{5}{20} = \frac{9}{20}$
- $\frac{12}{3} + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$
- $\frac{3}{8}$
- $\frac{9}{12} - \frac{2}{12} + \frac{5}{12} = \frac{12}{12} = 1$.

Exercice 3.2

- $\frac{2 \times 9}{3 \times 14} = \frac{3}{7}$
- $\frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 7 \times 3 \times 5} = \frac{2}{9}$
- $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$
- $\frac{84}{4} = 21$
- $\frac{6 \times 35}{25 \times 18} = \frac{7}{15}$.

Exercice 3.3

- b) $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$ 2. c) $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ 3. a) $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ 4. b) $\frac{8}{8} - \frac{3}{8}$.

Exercice 3.4

- $A = 1 - \frac{6}{24} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- $B = \frac{14}{18} + \frac{15}{18} - \frac{6}{18} = \frac{23}{18}$
- $C = \frac{1}{12} \times \frac{12}{5} = \frac{1}{5}$
- $D = \frac{2}{5} + \frac{30}{45} = \frac{6}{15} + \frac{10}{15} = \frac{16}{15}$.

Exercice 3.5

- $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.
- $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$.
- $1 - \frac{8}{20} - \frac{3}{20} = \frac{9}{20}$. Oliviers : $6\,000 \times \frac{2}{5} = 2\,400$ m²; amandiers : 900 m²; cerisiers : 2 700 m² (total : 6 000 ✓).

Exercice 3.6

- Tomates : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ kg; lentilles : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$ verre; coriandre : $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ botte.
- $\frac{10}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{30}{24} = \frac{5}{4}$ kg = 1,25 kg.

Exercice 3.7

- Les $\frac{2}{5}$ des $\frac{3}{4}$: $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.
- $600 \times \frac{3}{10} = 180$ élèves. Vérification : $600 \times \frac{3}{4} = 450$ à la cantine, et $450 \times \frac{2}{5} = 180$ ✓.

Exercice 3.8

- Après le livre, il reste $\frac{2}{3}$. Goûter : $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$. Total : $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- Il lui reste la moitié de son argent, soit 60 DH : il avait 120 DH. (Vérif. : livre 40, reste 80, goûter 20, reste 60 ✓.)

Défi olympiade 3.1

- $\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$; $\frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$; $\frac{5}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{20}$ ✓.
- $S = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{9} - \frac{1}{10})$: tout s'annule deux à deux sauf le premier et le dernier terme, donc $S = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.
- De même : $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$.

Défi olympiade 3.2

- 9, 6 et 2 chameaux : $9 + 6 + 2 = 17$: il reste bien 1 chameau, celui du sage.
- $\frac{9}{18} + \frac{6}{18} + \frac{2}{18} = \frac{17}{18} < 1$: les parts prévues ne font pas tout l'héritage ! Avec 18 chameaux, les fils prennent 17 dix-huitièmes, donc 17 chameaux, et il en reste exactement 1.
- $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$; $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

4 Les nombres décimaux relatifs : repérage et comparaison**Exercice 4.1**

Négatifs : -6, -0,7, -15,3; positifs : 4,2, 9; 0 est les deux.
Distances à zéro : 6; 4,2; 0,7; 0; 15,3; 9. Opposés : 6; -4,2; 0,7; 0; 15,3; -9.

Exercice 4.2

- Une graduation = 0,5 : A(-3,5); B(-2); C(-0,5); D(2,5).
- G a pour abscisse 0,5 (opposé de -0,5).

Exercice 4.3

- F (8 > 3, donc -8 < -3)
- V
- V (5,20 > 5,19)
- F (négatif < positif)
- V
- F (distances 3 > 2).

Exercice 4.4

- 2,77 < -2,7 < -2,07 < -2 < -0,27 < 1,5.
- 5 > 0,5 > -0,05 > -5,05 > -5,5 > -50.
- 3; -2; -1; 0; 1; 2 (six entiers).

Exercice 4.5

- F(-3; 2), H(4; 1), M(1; 3), P(-2; -3).
- T(-4; -3).
- Un rectangle de 5 carreaux sur 3 : 15 carreaux.

Exercice 4.6

- $-6 < -2 < -0,5 < 3 < 11$: Ifrane, Midelt, Azilal, Merzouga, Agadir.
- En comptant les étages : de -3 , il monte au niveau 4 , puis redescend au niveau -1 (1^{er} sous-sol).
- Distances à zéro : $4\,167$ et 55 : la **Sebkha Tah** (à 55 m sous le niveau de la mer).

Exercice 4.7

- Pythagore -570 ; Archimède -287 ; Juba II -25 ; Quaraouiyine $+859$.
Ordre : $-570 < -287 < -25 < 859$: Pythagore, Archimède, Juba II, Quaraouiyine.
- Distances à zéro : 570 , 287 , 25 , 859 : c'est **Juba II** (-25).

Défi olympiade 4.1

Ifrane, la plus froide : -5 . Seule paire d'opposés : -3 et 3 (pour Midelt et Merzouga). Le plus proche de 0 est -1 : Ouarzazate -1 . Midelt < -1 , donc Midelt -3 et Merzouga 3 . Il reste Agadir : 6 .

Défi olympiade 4.2

- 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 3 ; -3 : les positions vont par paires d'opposés (1 et -1 , 2 et -2 ...), chaque paire une unité plus loin de 0 .
- Après $2k$ sauts elle est en $-k$: après 10 sauts en -5 , et en -10 après 20 sauts. Après $2k - 1$ sauts elle est en k : elle atteint 50 après 99 sauts.

5 Addition et soustraction des nombres relatifs**Exercice 5.1**

- a) $+15$ b) -12 c) $+8$ d) -9 e) 0 f) $-4,7$ g) $-2,5$
h) $+15$
i) $4 + (-9) = -5$ j) $-6 + (-3) = -9$ k) $5 + 8 = +13$
l) $-2,5 + 6 = +3,5$.

Exercice 5.2

- a) **Vrai** : même signe, on garde le signe $-$. b) **Faux** : $8 > 3$, le résultat est -5 . c) **Faux** : $-4 - (-6) = -4 + 6 = +2$. d) **Vrai** : soustraire $-b$, c'est ajouter $+b$, qui est positif.

Exercice 5.3

$$A = 12 - 15 = -3; B = -9 - 5 + 12 - 6 = -20 + 12 = -8; C = 27 - 40 = -13; D = 11,5 - 11,5 = 0.$$

Exercice 5.4

- Lundi $8 - (-4) = 12$; mardi 10 ; mercredi 9 ; jeudi 11 ; vendredi 10 . Plus grand écart : **lundi** (12°C).
- $2 - 7 = -5^\circ\text{C}$.

Exercice 5.5

- $-350 + 6\,200 - 2\,500 - 1\,180 - 320 + 450 = 6\,650 - 4\,350 = \mathbf{2\,300}$ DH.
- $2\,300 - 2\,700 = -400$ DH (découvert de 400 DH).

Exercice 5.6

- $AB = 2 - (-4,5) = 6,5$; $AC = -1 - (-4,5) = 3,5$; $CD = 6,5 - (-1) = 7,5$; $BD = 4,5$.
- $-3 + 11 - 6 = +2$ (2^e étage); $2 - (-3) = 5$ étages.
- $4\,167 - (-55) = \mathbf{4\,222}$ m.

Exercice 5.7

Brique à gauche de $+4$: $0 - 4 = -4$. Bas : $-4 - (-7) = 3$, puis $4 - 3 = 1$. Ligne 2 : $1 + (-9) = -8$. Ligne 3 : $4 + (-8) = -4$. Sommet : $0 + (-4) = -4$.
Bas : -7 ; **3**; 1 ; -9 | -4 ; 4 ; **-8** | 0 ; **-4** | sommet -4 .

Défi olympiade 5.1

- Les opposés s'annulent deux à deux : la somme totale est 0 . Les 3 lignes se partagent ce total : chaque ligne vaut 0 .
- Ligne 1 : $-3 + 2 + 1 = 0$; colonne 3 : $1 - 4 + 3 = 0$; diagonale : $-3 + 0 + 3 = 0$; ligne 2 : $4 + 0 - 4 = 0$; colonne 1 : $-3 + 4 + (-1) = 0$; ligne 3 : $-1 + (-2) + 3 = 0$.
Grille : $(-3; 2; 1)$, $(4; 0; -4)$, $(-1; -2; 3)$.

Défi olympiade 5.2

- On groupe par deux : $(-1 + 2) + (-3 + 4) + \dots + (-99 + 100)$: 50 paquets valant chacun 1 , donc **$S = 50$** .
- Les impairs de 1 à 99 sont 50 nombres : 25 paquets $(1 - 3)$, $(5 - 7)$, ..., $(97 - 99)$ valant chacun -2 , donc **$T = -50$** .

6 Calcul littéral : développement et factorisation**Exercice 6.1**

- a) $5x$ b) $7ab$ c) x^2 d) y^3 e) t f) $12a$ (et non $34a$!)
g) $2(x + 5)$ h) $3x^2$.

Exercice 6.2

$x = 0$: $A = 3$, $B = 0$, $C = 6$; $x = 1$: $A = 7$, $B = 3$, $C = 9$; $x = 2,5$: $A = 13$, $B = 6,25 + 5 = 11,25$, $C = 13,5$; $x = 3$: $A = B = C = \mathbf{15}$, les trois expressions sont égales!

Exercice 6.3

- B** ($2a + 3a = 5a$). 2. **B** ($6x + 24$). 3. **C** : $2 \times 4^2 = 2 \times 16 = 32$ (et non $(2 \times 4)^2 = 64$). 4. **A** : $3 \times 3y + 3 \times 4$.

Exercice 6.4

$$A = 4x + 12; B = 14a - 35; C = x^2 + 6x; D = 6a^2 + 8a; E = 10x + 5y - 15; F = 3x + 6 + 8x + 4 = \mathbf{11x + 10}.$$

Exercice 6.5

a) $6(x+y)$ b) $5(a-3)$ c) $7(x+1)$ d) $x(x+4)$ e) $6(2a+3b)$ (le plus grand facteur commun est 6) f) $y(3y-1)$.

Exercice 6.6

$A = 5x+9$; $B = 4a+6$; $C = 3x^2+8x$; $D = y^2+5y+3$.

Exercice 6.7

a) $2\,300 + 23 = 2\,323$ b) $4\,500 - 45 = 4\,455$ c) $1\,200 - 24 = 1\,176$ d) $17 \times 100 = 1\,700$ e) $6,5 \times 10 = 65$ f) $360 + 36 = 396$.

Exercice 6.8

1) $\mathcal{A} = x(x+5)$ ou $\mathcal{A} = x^2 + 5x$ (cour + galerie).
 2) $P = 2 \times x + 2 \times (x+5) = 2x + 2x + 10 = 4x + 10$.
 3) $\mathcal{A} = 4 \times 9 = 36 \text{ m}^2$ ($16+20 = 36 \checkmark$); $P = 16+10 = 26 \text{ m}$.
 4) $x \times x = 5 \times x$ quand $x = 5$: la galerie est alors carrée elle aussi.

Exercice 6.9

1) $(5+4) \times 3 - 12 = 27 - 12 = 15$; $6,5 \times 3 - 12 = 19,5 - 12 = 7,5$.
 2) $3(x+4) - 12 = 3x + 12 - 12 = 3x$.
 3) $3x = 39$ donc $x = 13$. Le programme donne toujours le **triple** du nombre choisi.
 4) Avec un entier, $3x$ est un multiple de 3; or 100 n'en est pas un ($1+0+0 = 1$) : **impossible**.

Défi olympiade 6.1

1) Avec 3 : $(3+7) \times 2 - 6 = 14$; avec 10 : $34 - 20 = 14$.
 2) Avec x : $2(x+7) - 2x = 2x + 14 - 2x = 14$, quel que soit x .
 3) Avec « ajoute k » : $2(x+k) - 2x = 2k$. Il suffit que $2k = 2026$: **ajouter** 1 013 au lieu de 7.

Défi olympiade 6.2

1) $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$: un multiple de 3. (La flèche déplace un point : on obtient 3 colonnes de $n+1$.)
 2) $3(n+1) = 2025$: le nombre du milieu est 675 : **674, 675, 676**.
 3) $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6 = 2(2n+3)$ est toujours **pair** : 2025 est **impossible**. Pour 2026 : $4n = 2020$, $n = 505$: $505 + 506 + 507 + 508 = 2026 \checkmark$.

7 Les équations**Exercice 7.1**

a) $2 \times 5 + 3 = 13$: **Vrai**. b) $4 \times 3 - 1 = 11$ et $2 \times 3 + 7 = 13$: **Faux**. c) $6 \times 0,5 = 3$: **Vrai**. d) $4 + 2 = 6$: **Vrai**.

Exercice 7.2

a) 27 b) 35 c) 9 d) 60 e) 18,5 f) 7 g) 2,5 h) $7 \times 0,5 = 3,5$.

Exercice 7.3

a) $3x = 21$, $x = 7$ b) $5x = 45$, $x = 9$ c) $2x = 9$, $x = 4,5$ d) $8x = 6$, $x = 0,75$ e) $\frac{x}{4} = 4$, $x = 16$ f) $10x = 18 - 15 = 3$, $x = 0,3$ (vérif. : $3 + 15 = 18 \checkmark$).

Exercice 7.4

a) Pour « défaire » -6 , on **ajoute** 6 : $x = 21$. b) On **soustrait** 2 : $4x = 16$, $x = 4$. c) On **multiplie** par 2 : $x = 20$. (Vérifier évite ces erreurs!)

Exercice 7.5

A : $2x + 3 = 12$, $2x = 9$, $x = 4,5 \text{ kg}$. B : $4y = y + 6$; on retire un sac de chaque côté : $3y = 6$, $y = 2 \text{ kg}$.

Exercice 7.6

1) $4x + 60 = 1\,260$, $4x = 1\,200$, $x = 300 \text{ DH}$. 2) $2L + 14 = 38$, $2L = 24$, $L = 12 \text{ cm}$.
 3) $\frac{x}{3} + 8 = 20$, $\frac{x}{3} = 12$, $x = 36$ (vérif. : $12 + 8 = 20 \checkmark$).

Exercice 7.7

1) $x + (x+4) + 9 = 2x + 13$: réponse **C**. $2x = 18$, $x = 9$: côtés 9, 13, 9 cm.
 2) $x + 2x + (x+20) = 180$, $4x = 160$, $x = 40$: $\hat{A} = 40^\circ$, $\hat{B} = 80^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$.

Exercice 7.8

1) Karim : $3x$; dans 12 ans : Adam $x + 12$, Karim $3x + 12$.
 2) $(x+12) + (3x+12) = 4x + 24 = 72$.
 3) $4x = 48$, $x = 12$: Adam a **12 ans**, Karim **36 ans**. Vérif. : $24 + 48 = 72 \checkmark$.

Exercice 7.9

1) $150 + 80x = 1\,110$, $80x = 960$, $x = 12 \text{ mois}$.
 2) 3 mois : Rania $150 + 240 = 390 \text{ DH}$, Omar $3 \times 130 = 390 \text{ DH}$: **même prix**. 12 mois : Rania 1 110 DH, Omar 1 560 DH : la formule de **Rania**.
 3) $8 \times 130 = 1\,040 \leq 1\,110 < 9 \times 130 = 1\,170$: **8 mois**.

Défi olympiade 7.1

1) Chacun aurait 5 ans de moins : $105 - 4 \times 5 = 85 \neq 86$. Donc Ilyas **n'était pas encore né** il y a 5 ans.
 2) Soit b l'âge d'Ilyas. Il y a 5 ans : $(105-b) - 3 \times 5 = 86$, soit $90 - b = 86$: $b = 4$ ans.
 3) Lina : 8 ans. Parents : $105 - 12 = 93$; avec m l'âge de la mère : $m + (m+3) = 93$, $2m = 90$, $m = 45$. Mère **45 ans**, père **48 ans**. Vérif. : $40 + 43 + 3 = 86 \checkmark$.

Défi olympiade 7.2

1) $23 \times 2 = 46 \text{ DH}$; il manque $79 - 46 = 33 \text{ DH}$.
 2) Chaque échange ajoute 3 DH : $33 \div 3 = 11$ pièces de 5 DH, donc 12 pièces de 2 DH.

- 3) $5x + 2(23 - x) = 79$, $3x + 46 = 79$, $3x = 33$, $x = 11$.
Vérif. : $55 + 24 = 79$ ✓.
4) Il faudrait $3x = 80 - 46 = 34$; or 34 n'est pas un multiple de 3 : **impossible**, elle se trompe !

8 La proportionnalité

Exercice 8.1

- a) Oui, coefficient **3,5**. b) Non : $12 \div 3 = 4$ mais $30 \div 9 \neq 4$ ($9 \times 4 = 36$). c) Oui, coefficient **0,75**.

Exercice 8.2

Coefficient $14 : 5 \text{ L} \rightarrow 70 \text{ DH}$; $20 \text{ L} \rightarrow 280 \text{ DH}$; $350 \div 14 = 25 \text{ L}$; $105 \div 14 = 7,5 \text{ L}$. Les points sont alignés avec l'origine.

Exercice 8.3

- a) **Vrai** : $P = 4 \times c$ (coefficient 4). b) **Faux** : côté 1 cm $\rightarrow 1 \text{ cm}^2$, côté 2 cm $\rightarrow 4 \text{ cm}^2$ (et non 2). c) **Vrai** : $12 = 3 \times 4$, donc $3 \times 10 = 30 \text{ DH}$.

Exercice 8.4

- 1) Pour 1 personne : 50 g, 75 g, 25 g. Pour 10 : **500 g** de pois chiches, **750 g** de tomates, **250 g** de lentilles.
(Ou : $10 = 6 + 4$, avec 4 personnes = $\frac{2}{3}$ de 6.)
2) $1050 \div 75 = 14$ personnes.

Exercice 8.5

- 1) Veste : $450 \times \frac{30}{100} = 135 \text{ DH}$ de réduction, donc **315 DH**. Jean : $280 - 84 = 196 \text{ DH}$.
2) $640 \times \frac{45}{100} = 288$ filles. 3) $\frac{8}{32} = \frac{25}{100}$: **25 %**.

Exercice 8.6

- 1) $5,2 \times 40 = 208 \text{ km}$. 2) $52 \div 40 = 1,3 \text{ cm}$.
3) $12 \text{ m} = 1200 \text{ cm}$; $e = \frac{6}{1200} = \frac{1}{200}$.

Exercice 8.7

- 1) $200 \div 50 = 4 \text{ km/min}$, soit $4 \times 60 = 240 \text{ km/h}$.
2) $2 \text{ h } 15 \text{ min} = 2,25 \text{ h}$; $24 \times 2,25 = 54 \text{ km}$.
3) $t = 260 \div 80 = 3,25 \text{ h} = 3 \text{ h } 15 \text{ min}$.

Exercice 8.8

- 1) **Amine** : sa courbe est une droite qui passe par l'origine (distance proportionnelle à la durée).
2) 16 km en 4 h : **4 km/h**.
3) **12 km** en 3 h. Entre 1 h et 2 h, la distance reste 6 km : Hiba fait une **pause**.
4) Les courbes se croisent à **3 h** (12 km). Après la pause : 12 km en 2 h, soit **6 km/h**.

Exercice 8.9

- 1) $0,3 \times 80 + 0,2 \times 120 = 24 + 24 = 48 \text{ DH}$ pour 0,5 kg, donc **96 DH** le kg (pas 100 : il y a plus de thé bon marché).

- 2) En 6 h : $1 + 2 = 3$ bassins. Le temps est proportionnel au nombre de bassins : $6 \div 3 = 2 \text{ h}$ pour un bassin.

Défi olympiade 8.1

- 1) A : $1000 - 200 = 800$, puis $800 - 240 = 560 \text{ DH}$; B : **500 DH**. Dans A, on paie 56 % du prix : réduction de **44 %** (et non 50 %).
2) $1000 \rightarrow 700 \rightarrow 560$: **même résultat** (on multiplie par 0,8 et par 0,7, l'ordre ne compte pas). Pour 1500 DH : $1500 \times 0,56 = 840 \text{ DH}$, encore 44 %.
3) Passer de 800 à 500 DH, c'est retirer 300 DH sur 800 : $\frac{300}{800} = \frac{37,5}{100}$, soit **37,5 %**.

Défi olympiade 8.2

- 1) Aller : $18 \div 12 = 1,5 \text{ h}$; retour : $18 \div 36 = 0,5 \text{ h}$. 36 km en 2 h : $v = 18 \text{ km/h}$ (et non 24 : il roule plus *longtemps* à 12 km/h).
2) Pour 24 km/h sur 36 km, il faudrait $36 \div 24 = 1,5 \text{ h}$ en tout. Or l'aller dure déjà 1,5 h : il faudrait revenir en 0 h, **impossible** !

9 Droites parallèles et droites perpendiculaires

Exercice 9.1

1. (AB), (AC), (BC). 2. $C \notin [AB]$; $C \in [AB]$; $A \notin [BC]$; $D \notin [AC]$. 3. Le segment [BD] et la demi-droite [DE).

Exercice 9.2

- a) **Vrai** : elles se coupent au sommet de l'angle droit.
b) **Faux** : elles peuvent se couper sans angle droit. c) **Faux** : (d_1) et (d_3) sont $\perp$ à (d_2), donc **parallèles** (P1).
d) **Faux** : une seule.

Exercice 9.3

1. Par [MH] : (MH) $\perp$ (d) et la perpendiculaire donne le plus court chemin. 2. La distance est $MH = 400 \text{ m}$.

Exercice 9.4

1. On sait que (d_1) $\perp$ (d) et (d_2) $\perp$ (d). Or deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles. Donc (d_1) $\parallel$ (d_2). 2. On sait que (d_3) $\perp$ (d_1) et (d) $\perp$ (d_1). Or (P1). Donc (d_3) $\parallel$ (d). 3. On sait que (d_1) $\parallel$ (d_2) et (d_3) $\perp$ (d_1). Or (P2). Donc (d_3) $\perp$ (d_2).

Exercice 9.5

1. Non : toutes deux sont $\perp$ au bd Hassan II, donc **parallèles** (P1). 2. L'avenue et le boulevard sont $\perp$ à la rue Ibn Battouta : **parallèles** (P1). 3. Rue des Orangers $\parallel$ rue Ibn Battouta et avenue $\perp$ rue Ibn Battouta, donc avenue $\perp$ rue des Orangers (P2) : **oui**.

Exercice 9.6

1. (d_1) et (d_2) sont $\perp$ à (AB) : **parallèles** (P1). 2. (d_3) et (AB) sont $\perp$ à (d_2) : **parallèles** (P1); puis $(d_3) \parallel (AB)$ et $(d_1) \perp (AB)$: $(d_1) \perp (d_3)$ (P2). 3. Quatre angles droits : **rectangle**. Périmètre $2 \times (6 + 4) = 20$ cm. $(CD) \perp (d_1)$: la distance est $CD = AB = 6$ cm.

Exercice 9.7

$(d_2) \parallel (d_3)$ et $(d_1) \perp (d_2)$: $(d_1) \perp (d_3)$ (P2). (d_1) et (d_4) sont $\perp$ à (d_3) : $(d_1) \parallel (d_4)$ (P1). $(d_1) \parallel (d_4)$ et $(d_5) \perp (d_4)$: $(d_1) \perp (d_5)$ (P2). $(d_5) \parallel (d_6)$ et $(d_1) \perp (d_5)$: $(d_1) \perp (d_6)$ (P2). Vérification : 3 symboles $\perp$, nombre impair. $\checkmark$

Défi olympiade 9.1

1. 3, 6, 10; la k^{e} droite coupe les $k - 1$ précédentes en $k - 1$ points nouveaux : $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ pour 10 droites (ou : une paire de droites = un point, $\frac{10 \times 9}{2} = 45$). 2. **3 points** : trois parallèles coupées par une quatrième droite. **5 points** : deux parallèles, coupées par deux droites sécantes entre elles (en un point hors des parallèles).

Défi olympiade 9.2

1. Chaque barre horizontale coupe les 5 verticales : $4 \times 5 = 20$ points. 2. Choisir 2 barres horizontales parmi 4 : 6 façons. Choisir 2 barres verticales parmi 5 : 10 façons. Chaque choix donne un rectangle différent : $6 \times 10 = 60$ rectangles.

10 Les angles**Exercice 10.1**

1. Sommet O , côtés $[OB)$ et $[OC)$. 2. $\widehat{AOB}$ aigu, $\widehat{AOC}$ obtus, $\widehat{BOC}$ droit, $\widehat{COD}$ aigu, $\widehat{AOD}$ plat. 3. $\widehat{AOC}$ et $\widehat{COD}$ (ou $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOD}$).

Exercice 10.2

1. $90 - 35 = 55^\circ$; $180 - 35 = 145^\circ$; $180 - 128 = 52^\circ$. 2. $90 \div 2 = 45^\circ$; $180 \div 2 = 90^\circ$. 3. Les deux angles font 180° ; en enlevant les 40° d'écart : $(180 - 40) \div 2 = 70$. L'angle mesure $70 + 40 = 110^\circ$ (et $110 + 70 = 180 \checkmark$).

Exercice 10.3

a) **Faux** : 30° et 40° peuvent être adjacents. b) **Vrai** : chacun est inférieur à 90° (s'ils sont non nuls). c) **Vrai** : si $a > 90$, alors $180 - a < 90$. d) **Faux** : deux angles de 50° peuvent être n'importe où.

Exercice 10.4

$\widehat{BOD} = \widehat{AOC} = 64^\circ$ (opposés par le sommet). $\widehat{BOC} = 180 - 64 = 116^\circ$ (supplémentaires), $\widehat{AOD} = \widehat{BOC} = 116^\circ$. Bissectrice : $\widehat{EOD} = 64 \div 2 = 32^\circ$. $\widehat{AOE} = \widehat{AOD} + \widehat{DOE} = 116 + 32 = 148^\circ$.

Exercice 10.5

1. $b = 180 - 58 = 122^\circ$ (supplémentaires : a et b forment un angle plat). $c = a = 58^\circ$ (alternes-internes, $(d) \parallel (d')$). $e = 180 - c = 122^\circ$ (supplémentaires). 2. $a + e = 180^\circ$: $e = b$ (alternes-internes), et $a + b = 180^\circ$.

Exercice 10.6

Fig. 1 : deux angles correspondants égaux : d'après la réciproque, **parallèles**. **Fig. 2** : sur (d') , le correspondant de l'angle de 70° mesure $180 - 108 = 72^\circ$ (supplémentaires); $72 \neq 70$: **non parallèles**. **Fig. 3** : sur (d) , l'angle opposé par le sommet à celui de 130° mesure 130° ; il est correspondant avec l'angle de 130° marqué sur (d') : égaux, donc **parallèles**.

Exercice 10.7

1. $(d) \parallel (BC)$: x et $\widehat{ABC}$ sont alternes-internes (sécante (AB)), donc égaux; de même $y = \widehat{ACB}$ (sécante (AC)). 2. $x, \widehat{BAC}, y$ forment un angle plat : $x + \widehat{BAC} + y = 180^\circ$, d'où le résultat. 3. $\widehat{BAC} = 180 - 48 - 67 = 65^\circ$.

Exercice 10.8

1. $\widehat{BOC} = 130^\circ$; $\widehat{MON} = 25 + 65 = 90^\circ$. 2. $\widehat{BOC} = 70^\circ$; $\widehat{MON} = 55 + 35 = 90^\circ$: les bissectrices sont **perpendiculaires**. 3. $\widehat{MON} = \frac{\widehat{AOB}}{2} + \frac{\widehat{BOC}}{2} = \frac{\widehat{AOB} + \widehat{BOC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Défi olympiade 10.1

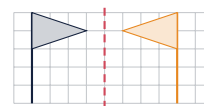
1. Grande : $360 \div 60 = 6^\circ$ par minute; petite : 30° par heure, soit $0,5^\circ$ par minute. 2. Grande aiguille sur le 8 : $40 \times 6 = 240^\circ$ depuis midi. Petite : $3 \times 30 + 40 \times 0,5 = 110^\circ$. Angle : $240 - 110 = 130^\circ$. 3. Grande : 180° ; petite : $9 \times 30 + 15 = 285^\circ$; angle : $285 - 180 = 105^\circ$.

Défi olympiade 10.2

La parallèle (δ) à (d) passant par M est aussi parallèle à (d') (P3 du chapitre 9). Elle partage $\widehat{AMB}$ en deux angles : celui du haut est alterne-interne avec $\widehat{xAM}$ (sécante (AM)), il mesure 35° ; celui du bas est alterne-interne avec $\widehat{MBx}$, il mesure 48° . Donc $\widehat{AMB} = 35 + 48 = 83^\circ$. En général : $\widehat{AMB} = a + b$.

11 Médiatrice et symétrie axiale**Exercice 11.1**

1. **4 carreaux**, à droite de l'axe. 2. **Vers la gauche** : la symétrie retourne la figure.



Exercice 11.2

- a) **Faux** : M est sur la médiatrice, pas forcément sur $[AB]$. b) **Vrai** : la médiatrice passe par le milieu. c) **Faux** : 2 axes ; les diagonales ne sont pas des axes. d) **Vrai** : la symétrie conserve les angles.

Exercice 11.3

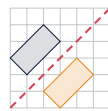
Aucun axe : N, S, Z. **Un axe vertical** : A, M, T. **Un axe horizontal** : B, E, K. **Deux axes** : H, O, X (un O parfaitement rond en a même une infinité).

Exercice 11.4

1. Les points à égale distance de A et B sont sur la médiatrice de $[AB]$: on la construit au compas ; l'école est à son **intersection avec la route**. 2. L'école E est sur la médiatrice, donc $EB = EA = 3,5 \text{ km}$.

Exercice 11.5

1. Figure ci-contre. 2. $[KK']$ est formé de **3 diagonales** de carreaux ; son milieu est le centre du carreau du milieu, sur (Δ) .

**Exercice 11.6**

1. (d) est la médiatrice de $[BC]$: le symétrique de B est C , celui de C est B . 2. $[A'C]$ est le symétrique de $[AB]$: $A'C = 5 \text{ cm}$; $\widehat{A'CB}$ est le symétrique de $\widehat{ABC}$: 50° . 3. $A'B = AC = 3,9 \text{ cm}$; périmètre $5 + 4 + 3,9 = 12,9 \text{ cm}$. 4. $(AA') \perp (d)$ et $(BC) \perp (d)$: deux droites perpendiculaires à une même droite sont **parallèles**.

Exercice 11.7

1. $AB = AC$: par la réciproque, $A \in (\Delta)$. 2. $A' = A$ (sur l'axe), $B' = C$ et $C' = B$: le triangle ABC est son propre symétrique, (Δ) est un **axe de symétrie**. $\widehat{ACB}$ est le symétrique de $\widehat{ABC}$: ils sont **égaux**. 3. $\widehat{ABC} = (180 - 40) \div 2 = 70^\circ$.

Exercice 11.8

1. O est sur la médiatrice de $[AB]$: $OA = OB$; sur celle de $[AC]$: $OA = OC$. 2. Donc $OB = OC$: par la réciproque, O est sur la médiatrice de $[BC]$. Les trois médiatrices sont **concurrentes**. 3. $OA = OB = OC$: le cercle de centre O et de rayon OA passe par A , B , C (**cercle circonscrit**).

Défi olympiade 11.1

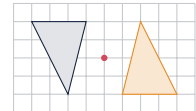
1. (d) est la médiatrice de $[BB']$ et $M \in (d)$. 2. $AM + MB = AM + MB'$; le plus court chemin de A à B' est le segment $[AB']$: M est l'**intersection de $[AB']$ et de (d)** . 3. L'angle entre $[MA]$ et (d) est opposé par le sommet à celui entre $[MB']$ et (d) , qui est le symétrique de celui entre $[MB]$ et (d) : angles **égaux**.

Défi olympiade 11.2

1. Le trou traverse 4 épaisseurs : **4 trous**, placés symétriquement par rapport aux deux axes de la feuille (aux sommets d'un rectangle). 2. 8 épaisseurs : **8 trous**, symétriques par rapport aux deux axes **et** aux deux diagonales du carré.

12 La symétrie centrale**Exercice 12.1**

1. Figure ci-contre. 2. **Oui** : la symétrie centrale conserve les aires. 3. Le symétrique d'une droite est une droite parallèle : $(AB) \parallel (A'B')$.

**Exercice 12.2**

- a) **Vrai** (O milieu de $[MM']$). b) **Vrai**. c) **Faux** : chaque côté aurait pour image un côté parallèle, donc lui-même, et O serait le milieu des trois côtés. d) **Vrai** : $8 \div 2 = 4$.

Exercice 12.3

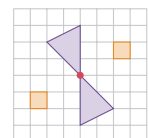
1. **H, I, N, O, S, X, Z, 0, 8**. 2. **H, I, O, X, 0, 8** : N, S et Z n'ont aucun axe.

Exercice 12.4

1. I est le milieu de $[AC]$: C . 2. $[AB] \rightarrow [CD]$: $CD = AB = 6 \text{ cm}$; $[BC] \rightarrow [DA]$: $AD = 4 \text{ cm}$. 3. Une droite et son image sont parallèles : $(CD) \parallel (AB)$ et $(AD) \parallel (BC)$: $ABCD$ est un **parallélogramme** ; périmètre $2 \times (6 + 4) = 20 \text{ cm}$.

Exercice 12.5

1. Figure ci-contre. 2. **Non** (motif « en moulinet »). 3. Triangle : $3 \times 2 \div 2 = 3 \text{ cm}^2$; carré : 1 cm^2 . Total : $2 \times (3 + 1) = 8 \text{ cm}^2$.

**Exercice 12.6**

1. Centre A' (symétrique de A), rayon **2 cm**. 2. $AA' = 2 \times 3 = 6 \text{ cm}$. Un point commun M donnerait un chemin $A \rightarrow M \rightarrow A'$ de 4 cm, plus court que la ligne droite (6 cm) : **non**. 3. **Non** : $(d') \parallel (d)$ et $(d') \neq (d)$ car $O \notin (d)$.

Exercice 12.7

1. De -3 à 2 : $+5$; encore $+5$: A' a pour abscisse **7**. 2. De $5,5$ à 2 : $-3,5$; encore $-3,5$: **$-1,5$** . 3. K est le milieu : de -4 à 10 il y a 14 ; $-4 + 7 = 3$.

Exercice 12.8

1. La droite et le rectangle sont leurs propres symétriques par rapport à O : le demi-tour échange les deux parties, **superposables** donc de même aire. 2. Couper selon la droite qui passe par les **centres**

des deux rectangles : chaque part reçoit la moitié de chaque rectangle.

Défi olympiade 12.1

1. On lit **9861** (l'ordre des chiffres s'inverse et $6 \leftrightarrow 9$). 2. Le dernier chiffre est le retourné du premier. Les années 19... doivent s'écrire 1961 ; 2 à 5 sont interdits en tête ; la suivante commence par 6 : **6009**. 3. 1^{er} chiffre : 1, 6, 8 ou 9 ; 2^e : 0, 1, 6, 8, 9 ; les deux derniers en découlent : $4 \times 5 = 20$.

Défi olympiade 12.2

Jouer d'abord au **centre O de la table**, puis répondre à chaque pièce posée en P par une pièce en P' , symétrique de P par rapport à O . La position reste symétrique, donc P' est libre (une pièce en P touchant celle en P' couvrirait O , déjà occupé). Le premier joueur a **toujours** une réponse : l'adversaire sera bloqué le premier.

13 Le triangle

Exercice 13.1

a) **F** : $4 + 5 < 10$. b) **F** : leur somme dépasserait 180° . c) **V** : deux côtés sont égaux. d) **F** : $50 + 60 + 80 = 190$. e) **V** : $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$. f) **V** : $6 + 6 = 12 > 11,9$.

Exercice 13.2

a) $\widehat{C} = 180 - 47 - 68 = 65^\circ$. b) $\widehat{F} = 90 - 34 = 56^\circ$. c) $\widehat{H} = \widehat{I} = (180 - 40) \div 2 = 70^\circ$. d) $\widehat{L} = 35^\circ$, $\widehat{J} = 180 - 70 = 110^\circ$. e) 60° chacun. f) $6 \times \widehat{S} = 180^\circ$: $\widehat{S} = 30^\circ$, $\widehat{R} = 60^\circ$, $\widehat{T} = 90^\circ$ (rectangle en T !).

Exercice 13.3

1. Méthode des 3 longueurs. 2. P est sur la médiatrice de $[AB]$: $PA = PB$; sur celle de $[AC]$: $PA = PC$. 3. Le cercle passe par A, B, C ; rayon mesuré ≈ 3 cm : chaque douar est à environ **3 km** du puits.

Exercice 13.4

① $\frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$. ② $\frac{3 \times 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$. ③ base 2, hauteur 4 (extérieure) : 4 cm^2 . Ex æquo : ① et ②.

Exercice 13.5

1. $19,5 + 21 + 22,5 = 63$ m ; $63 \times 35 = 2\,205$ DH. 2. $\frac{21 \times 18}{2} = 189 \text{ m}^2$. 3. $189 \div 9 = 21$ sacs ; $21 \times 48 = 1\,008$ DH.

Exercice 13.6

1. $\widehat{ACB} = 90 - 28 = 62^\circ$; $\widehat{ABD} = 14^\circ$. 2. ABD rectangle en A : $\widehat{ADB} = 90 - 14 = 76^\circ$; angle plat : $\widehat{BDC} = 104^\circ$. 3. ABH rectangle en H : $\widehat{BAH} = 90 - 28 = 62^\circ$, égal à $\widehat{ACB}$!

Exercice 13.7

1. Bases égales ($BM = MC$) et **même hauteur** $[AH]$ issue de A : $\frac{BM \times AH}{2} = \frac{MC \times AH}{2}$ ($[AM]$ est la médiane). 2. Placer E et F sur $[BC]$ avec $BE = EF = FC = 30$ m, et clôturer selon $[AE]$ et $[AF]$: trois triangles de même hauteur et de bases égales.

Défi olympiade 13.1

Soit $x = \widehat{BAC}$. ABD isocèle en D : $\widehat{ABD} = x$, $\widehat{ADB} = 180 - 2x$, donc $\widehat{BDC} = 2x$. BDC isocèle en B : $\widehat{BCD} = 2x$. ABC isocèle en A : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 2x$. Somme : $5x = 180$, $x = 36^\circ$ (angles à la base : 72°).

Défi olympiade 13.2

Chaque triangle est formé de 2 des 5 segments issus du sommet ($4 + 3 + 2 + 1 = 10$ choix) et d'un des 2 segments horizontaux : $10 \times 2 = 20$ triangles. Avec 3 horizontaux : **30**.

14 Le cercle

Exercice 14.1

a) **V** : $[GH]$ passe par O . b) **V** (c'est même un diamètre). c) **V** : $OK = r$ et $GH = 2r$. d) **F** : $1,9 < 2$, L est à l'intérieur. e) **F** : la plus longue corde est un diamètre (4 cm).

Exercice 14.2

$r = 4$: $d = 8$ cm, $P = 25,12$ cm, $\mathcal{A} = 50,24 \text{ cm}^2$.
 $d = 10$: $r = 5$ cm, $P = 31,4$ cm, $\mathcal{A} = 78,5 \text{ cm}^2$.
 $r = 1,5$: $d = 3$ m, $P = 9,42$ m, $\mathcal{A} = 7,065 \text{ m}^2$.
 $d = 20$: $r = 10$ m, $P = 62,8$ m, $\mathcal{A} = 314 \text{ m}^2$.

Exercice 14.3

1. Figure au compas. 2. M et N sont sur $\mathcal{C}_1$: $AM = AN = 4$ cm ; sur $\mathcal{C}_2$: $BM = BN = 3$ cm. Périmètre : $4 + 3 + 3 + 4 = 14$ cm. 3. Centre : le **milieu** de $[AB]$; rayon $6 \div 2 = 3$ cm.

Exercice 14.4

1. $P = \pi \times d \approx 3,14 \times 50 = 157$ cm. 2. $1,57 \text{ km} = 157\,000$ cm ; $157\,000 \div 157 = 1\,000$ tours.

Exercice 14.5

1. $\mathcal{A} \approx 3,14 \times 2 \times 2 = 12,56 \text{ m}^2$; bord : $2 \times 3,14 \times 2 = 12,56$ m. 2. Grand disque ($r = 3$ m) moins bassin : $28,26 - 12,56 = 15,7 \text{ m}^2$. 3. $15,7 \times 120 = 1\,884$ DH.

Exercice 14.6

1. Les deux demi-cercles forment un cercle : $2 \times 3,14 \times 35 = 219,8$ m ; tour : $180 + 219,8 = 399,8$ m. 2. **3 998** m. 3. Rectangle $90 \times 70 = 6\,300$ et disque $3,14 \times 35 \times 35 = 3\,846,5$: **10 146,5 m²**.

Exercice 14.7

1. $d = 31,4 \div 3,14 = 10$, $r = 5$ cm ; $\mathcal{A} = 78,5$ cm². 2. $r \times r = 28,26 \div 3,14 = 9 = 3 \times 3$, donc $r = 3$ cm. 3. $P = 3 \times 6 + 3,14 \times 3 = 27,42$ cm ; $\mathcal{A} = 36 + \frac{3,14 \times 9}{2} = 50,13$ cm².

Défi olympiade 14.1

Chaque demi-disque a pour rayon 2 cm et pour aire $\frac{3,14 \times 2 \times 2}{2} = 6,28$ cm². Les quatre demi-disques recouvrent tout le carré, et les pétales sont recouverts deux fois. Donc $4 \times 6,28 =$ aire du carré + aire de la rosace, soit $25,12 = 16 +$ rosace : rosace $\approx 9,12$ cm².

Défi olympiade 14.2

1. Si le rayon augmente de h , le périmètre augmente de $2 \times \pi \times h$ (car $2\pi(R + h) = 2\pi R + 2\pi h$). Donc $2 \times 3,14 \times h = 6,28$: $h = 1$ m. Un chat passe largement !
2. Le calcul ne dépend pas du rayon de départ : encore 1 m.

15 Les quadrilatères particuliers**Exercice 15.1**

a) **V** : il a 4 angles droits. b) **F** : ses côtés ne sont pas forcément égaux. c) **F** : seulement si c'est un carré. d) **V** (définition). e) **F** : seulement pour un carré. f) **F** : il a un **centre** de symétrie, mais en général aucun axe.

Exercice 15.2

1. Côtés opposés : $CD = AB = 5$ cm, $BC = AD = 3$ cm ; O milieu de $[AC]$: $AO = 3,4$ cm. 2. Angles opposés : $\widehat{BCD} = 65^\circ$. Somme 360° et $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$: $\widehat{ABC} = (360 - 130) \div 2 = 115^\circ$. 3. $[AB]$, angle de 65° en A , $AD = 3$ cm, puis C au compas.

Exercice 15.3

1. Deux angles droits en E et F (équerre), puis reporter 3,5 cm. 2. Tracer $[IK]$, sa médiatrice, et placer J et L à 2,5 cm du milieu de part et d'autre. 3. Deux diagonales **perpendiculaires** de 6 cm qui se coupent en leur milieu.

Exercice 15.4

① Parallélogramme, $b = 4$, $h = 2$: **8** cm². ② Losange, $D = 4$, $d = 2$: $\frac{4 \times 2}{2} = 4$ cm². ③ Carré « penché » : $3 \times 3 - 4 \times \frac{2 \times 1}{2} = 9 - 4 = 5$ cm².

Exercice 15.5

1. $2 \times (6 + 4,5) - 0,9 = 20,1$ m ; $20,1 \times 25 = 502,5$ DH.
2. $600 \div 30 = 20$ et $450 \div 30 = 15$: $20 \times 15 = 300$ carreaux. 3. $27 - 3,5 \times 3,5 = 27 - 12,25 = 14,75$ m².

Exercice 15.6

1. $P = 4 \times 5 = 20$ dm ; $\mathcal{A} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$ dm². 2. $5 \times h = 24$, donc $h = 24 \div 5 = 4,8$ dm.

Exercice 15.7

a) **Rectangle**. b) **Losange**. c) $\widehat{D} = 360 - 3 \times 90 = 90^\circ$: **rectangle**. d) Côtés opposés égaux, donc $AB = BC = CD = DA$: **losange**. e) **Carré**. f) Angles opposés égaux et consécutifs de somme 180° : 4 angles droits, **rectangle**.

Exercice 15.8

1. Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur et le même milieu O . 2. AOB est **isocèle** en O : $\widehat{OAB} = (180 - 106) \div 2 = 37^\circ$. 3. Angle plat : $\widehat{BOC} = 180 - 106 = 74^\circ$; BOC isocèle en O : $\widehat{OBC} = (180 - 74) \div 2 = 53^\circ$. $\widehat{ABC} = 37 + 53 = 90^\circ$ ✓.

Défi olympiade 15.1

1. Carrés de côté 1 : $4 \times 4 = 16$; côté 2 : $3 \times 3 = 9$; côté 3 : 4 ; côté 4 : 1. Total : **30**. 2. $1 + 4 + 9 + \dots + 64 = 204$. 3. Chaque carré penché s'inscrit dans un carré « droit » de côté n , et un carré droit de côté n contient exactement n carrés inscrits (lui-même compris). Total : $16 \times 1 + 9 \times 2 + 4 \times 3 + 1 \times 4 = 50$ carrés.

Défi olympiade 15.2

Côté du grand carré : $28 \div 4 = 7$ cm. Si L et ℓ sont les dimensions d'un rectangle : $L + \ell = 7$ (un côté du grand carré) et $L - \ell = 1$ (côté du petit carré, car $1 \times 1 = 1$). Donc $L = (7 + 1) \div 2 = 4$ cm et $\ell = 3$ cm ; aire **12** cm². Vérification : $4 \times 12 + 1 = 49 = 7 \times 7$ ✓.

16 Prisme droit et cylindre : patrons, aires et volumes**Exercice 16.1**

a) $3\,000$ dm³ = $3\,000$ L. b) $4\,500$ cm³. c) $0,75$ dm³. d) 800 L. e) 12 L. f) 250 cm³.

Exercice 16.2

1. b) : $6 + 2$. 2. b) : $3 \times 3 \times 3$. 3. c). 4. a) : $3,14 \times 1 \times 1 \times 10$.

Exercice 16.3

1. et 2. Figures (voir le cours). 3. $\mathcal{A}_\ell = 2 \times (5 + 3) \times 4 = 64$ cm² ; $\mathcal{A}_t = 64 + 2 \times 15 = 94$ cm² ; $V = 5 \times 3 \times 4 = 60$ cm³.

Exercice 16.4

1. $\mathcal{B} = \frac{6 \times 8}{2} = 24$ cm² ; $V = 24 \times 15 = 360$ cm³. 2. $\mathcal{A}_\ell = (6 + 8 + 10) \times 15 = 360$ cm² ; $\mathcal{A}_t = 360 + 2 \times 24 = 408$ cm².

Exercice 16.5

1. $V = 4 \times 2,5 \times 1,2 = 12 \text{ m}^3 = 12\,000 \text{ L}$. 2. $12\,000 \div 20 = 600 \text{ min} = 10 \text{ h}$. 3. Fond 10 m^2 + parois $2 \times (4 + 2,5) \times 1,2 = 15,6 \text{ m}^2$: **25,6 m²** ; $25,6 \times 150 = 3\,840 \text{ DH}$.

Exercice 16.6

1. $3,14 \times 1 \times 1 \times 3 = 9,42 \text{ m}^3 = 9\,420 \text{ L}$. 2. $9\,420 \div 157 = 60 \text{ jours}$. 3. $2 \times 3,14 \times 1 \times 3 = 18,84 \text{ m}^2$; $18,84 \div 5 \approx 3,8$: **4 pots**.

Exercice 16.7

1. Pavé : $3 \text{ m}^3 = 3\,000 \text{ L}$; cylindre : $3,14 \text{ m}^3 = 3\,140 \text{ L}$: le cylindre. 2. $3,14 \times 7 = 21,98 \text{ DH}$.

Exercice 16.8

1. $7 \times 7 \times 20,5 = 1\,004,5 \text{ cm}^3$: un peu plus de 1 L. 2. $28 \times 21 \times 20,5 \text{ (cm)} ; V = 12\,054 \text{ cm}^3$.

Exercice 16.9

1. $2 \times 3,14 \times r = 25,12 ; r = 4 \text{ cm} ; V = 3,14 \times 4 \times 4 \times 10 = 502,4 \text{ cm}^3$. 2. $50 \times 30 \times 20 = 30\,000 \text{ cm}^3 = 30 \text{ L}$. 3. Volume de la couche « soulevée » : $50 \times 30 \times 2 = 3\,000 \text{ cm}^3$.

Défi olympiade 16.1

1. 3 faces : les coins, **8** ; 2 faces : milieux des 12 arêtes, **12** ; 1 face : centres des faces, **6** ; aucune : **1**. 2. **8** ; $12 \times 8 = 96$; $6 \times 8 \times 8 = 384$; $8 \times 8 \times 8 = 512$. 3. Arête n , $k = n - 2$: $k \times k \times k = 6 \times k \times k$ pour $k = 6$, soit $n = 8 \text{ cm}$ (216 et 216).

Défi olympiade 16.2

a), c) et e). b) La 1^{re} et la 5^e face se superposent. d) Bloc 2×2 : 4 faces autour d'un point, or un sommet du cube n'en touche que 3. f) Les deux carrés du haut se superposent. (Il existe **11** patrons du cube.)

S1 Contrôle type — fin d'année**Contrôle type — fin d'année — Exercice 1**

1) $A = 15 - 10 = 5$; $B = 12 + 10 = 22$. 2) $C = (0,25 \times 4) \times 7,3 = 7,3$. 3) $\frac{3}{4}$ (on divise par 12). 4) $\frac{5}{6} = \frac{15}{18} > \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$. 5) $D = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{3}{2}$; $E = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$.

Contrôle type — fin d'année — Exercice 2

1) $-7 < -3,5 < -3,25 < 0 < 1,5 < 2$. 2) a) **5** b) **-7,5** c) **-4** d) $-8 + 11 = 3$. 3) $F = (7 + 5 + 4) - (12 + 9) = 16 - 21 = -5$. 4) $9 - (-4) = 9 + 4 = 13^\circ\text{C}$.

Contrôle type — fin d'année — Exercice 3

1) $G = 6x + 15 - 4x = 2x + 15$. 2) $H = 6 \times 2a + 6 \times 3 = 6(2a + 3)$. 3) $L = 4y + 6$; $4 \times 2,5 + 6 = 16$. 4) a) $3x = 15$, $x = 5$. b) $5x - 2x = 14 + 4$, $3x = 18$, $x = 6$.

5) a) $2(x + x + 5) = 46$, soit $4x + 10 = 46$. b) $4x = 36$, $x = 9$: **9 m** sur **14 m**.

Contrôle type — fin d'année — Exercice 4

1) a) $160 \div 2 = 80 \text{ km/h}$. b) $80 \times 3,5 = 280 \text{ km}$. 2) a) $600 \times \frac{15}{100} = 90 \text{ DH}$. b) **510 DH**. 3) a) $17,4 \times 500\,000 = 8\,700\,000 \text{ cm} = 87 \text{ km}$. b) $4\,000\,000 \div 500\,000 = 8 \text{ cm}$.

Contrôle type — fin d'année — Exercice 5

1) Alternes-internes et $(D) \parallel (D') : \widehat{EFG} = 58^\circ$. 2) Supplémentaires : $\widehat{BEF} = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$. 3) a) $\widehat{RTS} = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$: RST isocèle en R . b) Dans $RHS : \widehat{SRH} = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$. 4) Non : $3 + 4 = 7 < 8$ (inégalité triangulaire).

Contrôle type — fin d'année — Exercice 6

1) Figure. 2) $OA = OC = 3 \text{ cm}$ (rayons) = AC : AOC équilatéral, $\widehat{AOC} = 60^\circ$. 3) Les diagonales $[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres : même milieu O , même longueur ; $ACBD$ est un rectangle. 4) $O \in (AB)$ et la symétrie conserve les longueurs : $OE = OC = 3 \text{ cm}$. 5) $OA = OB = OC$: centre du cercle circonscrit (concours des médiatrices).

Contrôle type — fin d'année — Exercice 7

1) $\mathcal{A} = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$; $P = 4 \times 5 = 20 \text{ cm}$. 2) $\mathcal{A} = AB \times h : 5 \times h = 24$, $h = 4,8 \text{ cm}$.

Contrôle type — fin d'année — Exercice 8

1) $r = 10 \text{ cm} : B = 3,14 \times 10 \times 10 = 314 \text{ cm}^2$. 2) $V = 314 \times 30 = 9\,420 \text{ cm}^3 = 9,42 \text{ L}$. 3) $6 \times 1,5 = 9 \leq 9,42 < 10,5$: **6 bouteilles** ; reste **0,42 L**. 4) Périmètre : $2 \times 3,14 \times 10 = 62,8 \text{ cm}$.

S2 Épreuve type olympiade**Épreuve type olympiade — Exercice 1**

1) **40** chiffres ; somme $10 \times (2 + 0 + 2 + 6) = 100$. 2) Par 2 : **oui** (finit par 6) ; par 5 : **non** ; par 3 et 9 : **non** (100 n'est multiple ni de 3 ni de 9). 3) Avec k blocs, la somme vaut $10k$; plus petit multiple de 9 : $k = 9$. 4) a) $2026 = 4 \times 506 + 2$: 506 blocs puis « 2, 0 » : chiffre **0**. b) $506 \times 10 + 2 = 5\,062$.

Épreuve type olympiade — Exercice 2

1) $A = (125 \times 8) \times 37 = 1\,000 \times 37 = 37\,000$. 2) $B = 47 \times (99 + 1) = 4\,700$. 3) $(1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (99 - 100) : 50 \text{ fois } -1$, $C = -50$. 4) a) $\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$; $\frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$. b) $D = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{9} - \frac{1}{10})$: tout se simplifie, $D = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

Épreuve type olympiade — Exercice 3

1) Pièce dans la rouge : rouge et verte disent vrai ; dans la bleue : verte et bleue disent vrai. Impossible. Dans la verte, seule la bleue dit vrai : **boîte verte**. 2) a) Chiffre des centaines 1 : 104, 113, 122, 131, 140 (5) ; puis 4, 3, 2, 1 nombres : **15**. b) 104, 122, 140, 212, 230, 302, 320, 410, 500 : **9**. 3) $7 \times 6 = 42$ compte chaque partie deux fois : **21** parties.

Épreuve type olympiade — Exercice 4

1) $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$. 2) $\widehat{ABD} = \widehat{DBC} = 36^\circ$. 3) $\widehat{BDC} = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$. 4) $\widehat{DAB} = \widehat{ABD} = 36^\circ$: ABD isocèle en **D** ; $\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = 72^\circ$: BCD isocèle en **B**. 5) $AD = BD = BC$. 6) $DC = AC - AD = AB - BC \approx 10 - 6,18 = 3,82$ cm.

Épreuve type olympiade — Exercice 5

1) $DAI : \frac{10 \times 5}{2} = 25 \text{ cm}^2$; $IBJ : \frac{5 \times 5}{2} = 12,5 \text{ cm}^2$; $JCD : 25 \text{ cm}^2$. 2) $100 - 25 - 25 = 50 \text{ cm}^2$, la moitié de 100 cm^2 . 3) $50 - 12,5 = 37,5 \text{ cm}^2$, soit $\frac{37,5}{100} = \frac{3}{8}$ du carré. 4) (BD) est un axe du carré : $A \mapsto C$, donc $[AB] \mapsto [CB]$ et $I \mapsto J$ (milieux). D est sur l'axe, donc $DI = DJ$: **isocèle en D**.

Épreuve type olympiade — Exercice 6

1) 30 poules : 60 pattes ; il en manque 20 ; un mouton à la place d'une poule ajoute 2 pattes : **10 moutons, 20 poules** ($40 + 40 = 80$). 2) a) Elle reste égale à 48 ans. b) Triple : l'écart 48 vaut 2 fois l'âge de Yassine, qui aura 24 ans : dans **12 ans** ($72 = 3 \times 24$). c) 7 fois : l'écart vaut 6 fois l'âge de Yassine, qui avait 8 ans : il y a **4 ans** ($56 = 7 \times 8$). 3) A : $\frac{1}{3}$, B : $\frac{1}{6}$; ensemble $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ du bassin par heure : **2 heures**. 4) $n - 1$ est multiple de 3, 4 et 5, donc de 60 : $n \in \{61, 121, 181, 241, 301, 361\}$. Seul $301 = 7 \times 43$ est multiple de 7 : **301 œufs**.

MATHÉMATIQUES 1APIC

Un livret complet pour **bien démarrer le collège** et **réussir les mathématiques de la 1^{re} année (1APIC)**. Chaque notion est expliquée simplement, illustrée par des figures soignées et travaillée à travers des exercices de difficulté croissante, dans des situations de la vie au Maroc. Les élèves les plus curieux y trouveront aussi des **défis de type olympiade** pour développer leur raisonnement.

PARTIE A — NOMBRES ET CALCUL

1. Entiers et décimaux, priorités
2. Les fractions
3. Opérations sur les fractions
4. Les nombres relatifs
5. Addition et soustraction des relatifs
6. Calcul littéral
7. Les équations
8. La proportionnalité

PARTIE B — GÉOMÉTRIE

9. Droites parallèles et perpendiculaires
10. Les angles
11. Médiatrice et symétrie axiale
12. La symétrie centrale
13. Le triangle
14. Le cercle
15. Les quadrilatères particuliers
16. Prisme droit et cylindre

PARTIE C — SE TESTER

Formulaire de révision · Contrôle type sur 20 points · Épreuve type olympiade · Corrigés détaillés de tous les exercices

16

chapitres

127

exercices

32

défis

2

sujets types

Auteur



Maths Olympiad

Programme marocain
1^{re} année du collège (1APIC)