

Mathématique

8^e Année

Les Editions du Savoir

SOMMAIRE

PRÉFACE

ALGÈBRE

PUISSANCES DE DIX

I. CALCULS ET PUISSANCES D'UN ENTIER

Activité 1

Consigne 1 : Ecris sous la forme d'une seule puissance

1) $5^2 \times 5^3$; $(-3)^4 \times (-3)^3$; $7^3 \times 7^{-2}$; $2^{-4} \times 2^{-5}$; $a^n \times a^p$

2) $(5^2)^3$; $(5^{-2})^3$; $(a^n)^p$

3) $7^3 \times 11^3$; $a^5 \times b^5$; $a^{-8} \times b^{-8}$; $a^n \times b^n$

Consigne 2 : Détermine le nombre n dans les cas suivants :

$2^n = 2^5$; $3^n = 9$; $7^n = 7^2 \times 7$; $n^3 = 5^3$; $n^6 = 8^2$

Définition : On appelle puissance du nombre a , le produit de n facteurs égaux à a .

$$a \times a \times \dots \times a (n \text{ facteurs}) = a^n$$

Dans a^n , a est la base et n est l'exposant

Règles de calcul : Pour tous les nombres relatifs a et b non nuls et pour tous entiers n, p , positifs, négatifs ou nuls, on a :

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$; $(a^n)^p = a^{n \times p}$; $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $a^n = a^p$ lorsque $n = p$
- $a^n = b^n$ lorsque $a = b$

II. PUISSANCES POSITIVES DE DIX

Activité 2

Consigne 1 : Calcule

10×10 ; $10 \times 10 \times 10$; $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$.

Consigne 2 : Ecris sous forme d'une seule puissance

10×10 ; $10 \times 10 \times 10$; $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$.

Consigne 3 : Complète avec $=$ ou $\neq$

$100 \dots 10^2$; $1000 \dots 10^3$; $1000000 \dots 10^6$; $100000 \dots 10^5$.

Dans chacun des cas, que peux-tu dire de l'exposant et du nombre de zéro ?

Définition :

$$10^n = 10 \dots 0 \text{ (n zéros)}$$

10^n s'écrit 1 suivi de n zéros.

Remarque

Si $n = 0$, $10^0 = 1$ et si $n = 1$, $10^1 = 10$

Opérations

n et p étant des entiers naturels

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p} \quad \textbf{Exemple: } 10^3 \times 10^6 = 10^{3+6} = 10^9$$

$$(10^n)^p = 10^{n \times p} \quad \textbf{Exemple: } (10^3)^6 = 10^{3 \times 6} = 10^{18}$$

III. PUISSANCES NEGATIVES DE DIX

Activité 3

Consigne : On te donne les nombres décimaux suivants :

0,01 ; 0,001 ; 0,00001. Ecris chacun de ces nombres sous forme de fraction décimale puis sous la forme $\frac{1}{10^n}$ où n est un entier naturel.

Ecriture :

$$\frac{1}{10^n} \text{ s'écrit } 10^{-n} \text{ avec n un entier naturel : } \frac{1}{10^n} = 10^{-n} \text{ et } 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

$$\text{Ainsi } 0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}; 0,01 = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}; 0,001 = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}.$$

$10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$ sont des puissances négatives de 10.

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0,0 \dots 01 \text{ (n chiffres après la virgule)}$$

IV. ECRITURE DES GRANDS NOMBRES ET DES PETITS NOMBRES

Activité 4

Consigne : Complète

$$0,0027 = \dots \times 10^{-1}; \quad 0,0027 = \dots \times 10^1$$

$$0,0027 = \dots \times 10^{-2}; \quad 0,0027 = \dots \times 10^2$$

$$0,0027 = \dots \times 10^{-3}; \quad 0,0027 = \dots \times 10^3$$

$$0,0027 = \dots \times 10^{-4}; \quad 0,0027 = \dots \times 10^4$$

Que peux-tu déduire du déplacement de la virgule dans le nombre 0,0027 ?

Les différentes écritures d'un nombre décimal

- Un nombre décimal peut s'écrire de plusieurs façons : écriture décimale à virgule ; sous forme de fraction décimale ; sous la forme $a \times 10^n$.
- L'écriture (ou notation) scientifique d'un nombre décimal est l'écriture de la forme $a \times 10^n$ avec a un nombre décimal ayant 1 seul chiffre non nul avant la virgule.
- L'écriture scientifique est commode pour écrire les grands nombres et les petits nombres.

Activité 5

Consigne 1 : Ecris les nombres suivants sous la forme $a \times 10^n$.

0,0123 ; 102000 ; 5,32 ; -48,204 ; 70080000 ; -9000000000.

Consigne 2 : Donne l'écriture scientifique des nombres suivants :

234,5 ; 0,0084 ; -0,87 ; -0,0562.

Consigne 3 : Complète les phrases suivantes avec une écriture scientifique du nombre donné.

1. La distance de la Terre à Saturne est environ 1270000000 km, ce qui s'écrit en écriture scientifique : ...
2. La masse d'un atome d'oxygène est 0,00000000000000000000000026g, ce qui s'écrit en écriture scientifique : ...

Remarque :

- Un nombre positif dont l'écriture scientifique est $a \times 10^{13}$ est compris entre 10^{13} et 10^{14} car a est compris entre 1 et 10 (10 exclu).
- Certaines calculatrices donnent l'écriture scientifique des nombres en affichant seulement la partie décimale et l'exposant n de la puissance de dix. Ainsi, $3,9807 \times 10^{11}$ s'affiche

3,9807	11
--------	----

EXERCICES

1) Que représente le nombre 4 dans les écritures suivantes :

$$10 \times 4 ? 10 + 4 ? 10^4 ?$$

2) a) Ecris les nombres suivants sous la forme d'un entier ou d'un nombre décimal à virgule : 10^8 ; 10^{-3} ; 10^0 ; 10^5 ; 10^{-1} ; 10^{-4} .

b) combien de zéros comporte l'écriture décimale des nombres $(10^{10})^{10}$ et $10^{(10^{10})}$?

3) Ecris sous la forme d'une puissance de dix.

$$10^6 \times 10^8 ; 10^4 \times 10 ; 10^4 \times 10^{-7} ; 10^{-5} \times 10^{-7} ; 10^{-5} \times 10^7 ;$$

$$(10^5)^3 ; (10^5)^{-3} ; (10^3)^4 \times 10^{-9} ; (10^8)^2 \times (10^7)^{-2} ; (10^4)^8 \times (10^3)^6$$

4) Recopie et complète les égalités suivantes :

$$10^5 \times 10^{\dots} = 10^8 ; 10^{\dots} \times 10^7 = 10^4 ; 10^7 \times 10^{\dots} = 10^7 ; 10^{-7} \times 10^{\dots} = 10^{-9} ;$$

$$(10^{\dots})^2 = 10^{14} ; (10^5)^{\dots} = 10^{-20} ; 10^{2p} \times 10^0 = 10^{\dots}.$$

5) Ecris sous la forme $a \times 10^n$.

$$200300 ; -20300000 ; 0,00023 ; -0,000203$$

6) Ecris sous la forme décimale :

$$25 \times 10^3 ; 301 \times 10^2 ; 245 \times 10^{-2} ; -3004 \times 10^{-5} ;$$

$$3,4 \times 10^4 ; 0,078 \times 10^3 ; -36,24 \times 10^{-2} ; 92 \times 10^{-1}.$$

7) Recopie et complète les égalités suivantes :

$$32,5 \times 10^4 = \dots \times 10^6 ; -407 \times 10^{-4} = \dots \times 10^{-1} ; -2,359 \times 10^5 = \dots \times 10^2 ;$$

$$0,0328 \times 10^{-5} = \dots \times 10^{-7} ; 23 \times 10^4 = 2,3 \times 10^{\dots} ; 342 \times 10^5 = 3,42 \times 10^{\dots} ; 245$$

$$\times 10^{-4} = 0,245 \times 10^{\dots} ; -12 \times 10^3 = -0,12 \times 10^{\dots} ; 3,47 \times 10^4 = 347 \times 10^{\dots}$$

8) Donne l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$23000000 ; 4007000 ; -234500000 ; 0,002318 ; -0,023046 ;$$

$$0,000023768 ; 54,2 \times 10^3 ; 120 \times 10^{-4} ; -17,4 \times 10^{-3}.$$

9) Trouve x dans les égalités suivantes tel que :

$$a) 7^x \times 7^9 = 7^{15} ; 3^5 \times 3^x = 3^8 ; c) x^5 = 100000 ; x^3 = 1000000$$

$$b) (2^x)^7 = 2^{35} ; (2^6)^x = 8^{30}$$

DIVISEURS ET MULTIPLES D'UN ENTIER NATUREL

I. MULTIPLES D'UN ENTIER NATUREL

Activité 1

Consigne 1 : Dans une classe, il y a 15 tables et 3 élèves par table.

Calcule l'effectif de cette classe.

Exemple de réponse

L'effectif de cette classe est : $3 \times 15 = 45$

On dit que l'effectif de la classe est un **multiple** de 3.

Consigne 2 : Cite des multiples de 3.

Conclusion :

L'ensemble des multiples de 3 se note M_3

$$M_3 = \{0 ; 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; \dots ; 3n ; \dots\}$$

L'ensemble M_3 est infini.

Pour trouver tous les multiples de 3, il faut multiplier 3 par chaque élément de $\mathbb{N}$ d'où la notation $3\mathbb{N}$.

Consigne 3 : Ecris par énumération les ensembles M_3 et M_6 puis complète la phrase : L'ensemble M_6 est ... dans l'ensemble M_3 .

6 est un multiple de 3. Tout multiple de 6 est aussi un multiple de 3.

Propriété 1 : Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Si a est un multiple de b alors tout multiple de a est un multiple de b.

Consigne 4 : Les nombres 21 et 35 sont des multiples de 7.

La somme de $21 + 35$ est-il un multiple de 7 ?

La différence de $35 - 21$ est-il un multiple de 7 ?

Propriété 2 : La somme ou la différence de deux multiples d'un entier naturel est un multiple de cet entier naturel.

II. DIVISEUR D'UN ENTIER NATUREL

Activité 2

Consigne 1 : 35 est un multiple de 7. On dit aussi que 7 est un diviseur de 35 ou que 7 divise 35.

Complète avec « *diviseur* » ou « *multiple* »

3 est un ... de 24 ; 15 est un ... de 45 ; 32 est un ... de 4

12 est un ... de 3 ; 27 est un ... de 9 ; 5 est un ... de 35

Définition : On dit qu'un entier naturel b est un diviseur d'un entier naturel a lorsque a est un multiple de b .

On dit aussi que l'entier naturel non nul b divise a .

L'ensemble des diviseurs de a se note D_a . Ainsi,

$D_9 = \{1, 3, 9\}$; $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Consigne 2 : Détermine D_5 ; D_8 ; D_{24} ; D_{35} .

III. NOMBRE PREMIER

Rappels

- **Définition :** Un entier naturel est un nombre premier, s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ;

43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

- **Comment reconnaître si un entier $a > 100$ est premier ?**

Pour savoir si un entier naturel a supérieur à 100 est premier, on le divise successivement par les nombres premiers 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; ...

Si on n'obtient pas de quotient exact (reste zéro) avant que celui-ci ne deviennent inférieur au diviseur, alors le nombre donné est premier.

Exemple

a = 149

149 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 (caractères de divisibilité)

$149 : 7 \quad q = 21 ; r = 2$

$149 : 11 \quad q = 13 ; r = 6$

$149 : 13 \quad q = 11 ; r = 6$

$11 < 13$

149 est premier.

a = 121

121 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 (caractères de divisibilité)

$121 : 7 \quad q = 17 ; r = 2$

$121 : 11 \quad q = 11 ; r = 0$

121 est divisible par 11

121 n'est pas premier.

Activité 3

Consigne : Décompose les nombres suivants en produit de facteurs premiers : 84 ; 315 ; 8820.

IV. DIVISEURS COMMUNS A PLUSIEURS ENTIERS**Activité 4****Consigne 1 :**

a) Vérifie que

$D_{24} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24\}$ et

$D_{90} = \{1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 15 ; 18 ; 30 ; 45 ; 90\}$

b) Détermine $D_{24} \cap D_{90}$.

Conclusion :

- 1 est toujours un diviseur commun à deux ou plusieurs nombres.
- Les éléments de $D_{24} \cap D_{90}$ sont les diviseurs communs à 24 et 90.
- Parmi les diviseurs communs à 24 et 90, le nombre 6 est le plus grand.

On dit que 6 est le **Plus Grand Commun Diviseur** de 24 et de 90.

On note **pgcd (24 ; 90) = 6**.

- Les diviseurs communs aux deux nombres sont les diviseurs de leur PGCD : $D_{24} \cap D_{90} = D_6$

Recherche du pgcd de deux ou plusieurs nombres

Méthode : On décompose les nombres en produit de facteurs premiers. Le pgcd des nombres est alors égal au produit de leurs facteurs premiers communs avec leur exposant le plus petit.

Consigne 2 : En utilisant cette méthode, calcule le pgcd de 24 et 90 puis le pgcd de 132, 120 et 252.

Nombres premiers entre eux

Définition : On dit que deux entiers (non nuls) a et b sont premiers entre eux si leur pgcd est égal à 1.

Exemples

- $\text{pgcd}(12 ; 18) = 6$ alors 12 et 18 ne sont pas premiers entre eux.
- $\text{pgcd}(45 ; 28) = 1$ alors 45 et 28 sont premiers entre eux.

Algorithme d'Euclide : C'est le calcul du pgcd de deux nombres par la méthode des divisions successives.

Méthode

- Pour trouver le pgcd de deux nombres a et b ($a > b$), on utilise le programme suivant :
 1. Diviser a par b . on obtient le reste r .
 2. Si $r = 0$, le pgcd est trouvé $\text{pgcd}(a ; b) = b$.
 3. Si $r \neq 0$, remplacer a par b , b par r et recommencer à partir de 1.
- Le pgcd de a et b est ainsi égal au dernier reste non nul.

Exemple

Etape	Dividende	Diviseur	Reste
1	90	24	18
2	24	18	6
3	18	6	0

Le dernier reste non nul est 6 donc $\text{pgcd}(24 ; 90) = 6$.

24 et 90 ne sont pas premiers entre eux car $\text{pgcd}(24 ; 90) \neq 1$.

V. MULTIPLES COMMUNS A PLUSIEURS ENTIERS

Activité 5

Consigne 1 : Voici les ensembles des multiples de 12, 15 et 20

$$M_{12} = \{0 ; 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72 ; 84 ; 96 ; 108 ; 120 ; 132 ; \dots\}$$

$$M_{15} = \{0 ; 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 ; 105 ; 120 ; 135 ; \dots\}$$

$$M_{20} = \{0 ; 20 ; 40 ; 60 ; 80 ; 100 ; 120 ; 140 ; 160 ; \dots\}$$

Forme l'ensemble $E = M_{12} \cap M_{15} \cap M_{20}$. Nomme cet ensemble.

Conclusion :

- 0 est un multiple commun à tous les nombres.
- Les éléments de E sont les multiples communs à 12, à 15 et à 20.
- Parmi les multiples communs à 12, à 15 et à 20, le nombre 60 est le plus petit non nul. On dit que 60 est le **Plus Petit Commun Multiple** de 12, de 15 et de 20. On note **ppcm (12 ; 15 ; 20) = 60**.
- L'ensemble des multiples communs à 12, 15 et 20 est l'ensemble des multiples de leur ppcm : $M_{12} \cap M_{15} \cap M_{20} = M_{60}$.

Recherche du ppcm de deux ou plusieurs nombres

Méthode : On décompose les nombres en produit de facteurs premiers. Le ppcm des nombres est alors égal au produit de leurs facteurs premiers (communs ou non) avec leur exposant le plus grand.

Consigne 2 : En utilisant cette méthode, calcule le pgcd de 12, 15 et 20 puis le pgcd de 60 et 84.

EXERCICES

- 1) On te donne l'ensemble $A = \{85; 609; 103; 322; 119; 0; 221; 357\}$
Indique les éléments de A qui sont des multiples de 7, puis ceux qui sont des multiples de 17.
- 2) a) Ecris l'ensemble E des multiples de 39 qui sont inférieurs à 600.
b) Ecris l'ensemble F des multiples de 19 qui sont compris entre 100 et 300.
- 3) a) Ecris les douze premiers éléments de chacun des ensembles M_{13} , M_{14} , M_{15} .
b) Explique pourquoi les éléments de M_{13} sont alternativement pairs et impairs.
c) Explique pourquoi les éléments de M_{14} tous pairs.
d) Explique pourquoi les éléments de M_{15} sont alternativement terminés par 0 et par 5.
- 4) Ecris par énumération l'ensemble des diviseurs de chacun des nombres suivants :
a) 6 ; 7 ; 10 ; 13. c) 24 ; 36 ; 42 ; 84.
b) 5 ; 15 ; 35 ; 70. d) 72 ; 77 ; 101 ; 770.
- 5) Décompose en produit de facteurs premiers chacun des nombres suivants.
a) 35 ; 28 ; 68 ; 81 ; 96 ; 132 ; 333 ; 480.
b) 84 ; 136 ; 315 ; 975 ; 108 ; 180 ; 810 ; 8100.
c) 75 ; 90 ; 270 ; 800 ; 875 ; 2970 ; 5940 ; 8075.
- 6) Décompose en produit de facteurs premiers chacun des nombres suivants :
a. 35×3 ; 18×6 ; 45×15 ; 35×14
b. 84×33 ; 56×21 ; 105×49 ; 38×24
- 7) Les nombres suivants sont-ils premiers ?

107 ; 381 ; 679 ; 1421 277 ; 479 ; 869 ; 2019 ;

257 ; 771 ; 979 ; 1909 ; 387 ; 703 ; 743 ; 1937.

8) Calcule le pgcd et le ppcm des nombres suivants :

34 et 51 ; 16 et 24 ; 18 et 42 ; 303 et 404 ; 88 et 77

90 et 270 ; 374 et 891 ; 930 et 217 ; 128 et 352

9) Calcule le pgcd et le ppcm des nombres suivants :

15, 5 et 10 ; 98, 28 et 35 ; 7, 14 et 21 ; 12, 24 et 8 ; 980, 280 et 350 ; 96, 320 et 1616.

10) Calcule le pgcd et le ppcm des nombres suivants :

7×5 et 7×8 ; 9×8 et 8×13 ; 15×3 et 5×17 ; 7×17 , 7×13 et 35 ;
15, 15×8 et 15×4 ; 18, 9×5 et 27.

11) a) Calcule le pgcd de 702 et 273.

1. 702 et 273 sont-ils des nombres premiers entre eux ?

12) a) Ecris tous les diviseurs de 60.

b) Ecris tous les diviseurs de 140.

c) Donne les diviseurs communs à 60 et 140. Quel leur pgcd ?

13) complète le tableau ci-dessous qui permet de calculer le pgcd de 215 et 129 par la méthode des divisions successives. Quel est ce pgcd ?

Dividende	Diviseur	Reste
215	129	

14) Décompose les deux nombres 411 et 685 en produits de facteurs premiers. Une femme dispose de 411 perles blanches et de 685 perles noires. Afin de préparer des colliers, elle désire répartir ces perles en les utilisant tous et en obtenant le maximum de colliers identiques.

1. Calcule le nombre de colliers.

2. Calcule le nombre de perles blanches et de perles noires dans chaque collier.

NOMBRES DECIMAUX

I. ECRITURE DES NOMBRES DECIMAUX

Activité 1

Consigne : Complète avec une puissance de 10.

$$12,453 = 124,53 \times \dots ; \quad 12,453 = 1245,3 \times \dots ;$$

$$12,453 = 12453 \times \dots ; \quad 12,453 = 1,2453 \times \dots ;$$

$$12,453 = 0,12453 \times \dots ; \quad 12,453 = 0,0012453 \times \dots$$

Conclusion : n étant un nombre entier naturel.

Dans un nombre décimal, le déplacement de la virgule :

- à droite de n chiffres s'accompagne d'une multiplication par 10^{-n}
- à gauche de n chiffres s'accompagne d'une multiplication par 10^n

II. PRODUIT DE DECIMAUX

Activité 2

Consigne 1 : On te donne deux nombres $x = 0,0012$ et $y = 3,52$

- 1) Ecris x et y sous la forme $a.10^n$.
- 2) Calcule $0,0012 \times 3,52$ et donne le résultat sous la forme $a.10^n$.
- 3) Dédire des deux résultats précédents une méthode de calcul de $(12.10^{-4}) \times (352.10^{-2})$.

Propriété :

$$a.10^n \times b.10^p = 10^{n+p}$$

Consigne 2 : Effectue

$$(7.10^3) \times (6.10^4); (3,5.10^{-5}) \times (2.10^2);$$

$$(8,7.10^{-6}) \times (0,3.10^{-1}) \times (4.10^5)$$

III. SOMME DE DECIMAUX

Méthode : Pour effectuer des sommes de nombres décimaux écrits avec de puissances de dix différentes, il faut d'abord écrire tous ces nombres avec une même puissance de 10, puis appliquer la formule

$$a.10^n + b.10^n = (a + b).10^n$$

Activité 3

Consigne 1 : Calcule : $A = 2,7 \times 10^5 - 31200 + 4,18 \times 10^4$

Exemple de réponse

$$2,7 \times 10^5 = 27 \times 10^4 = 2700 \times 10^2; 31200 = 312 \times 10^2; 4,18 = 418 \times 10^2$$

$$A = 2700 \times 10^2 - 312 \times 10^2 + 418 \times 10^2 = (2700 - 312 + 418) \cdot 10^2$$

$$A = 2806 \cdot 10^2$$

Consigne 2 : Effectue

$$0,27 \cdot 10^8 + 13,3 \cdot 10^5; \quad 13,03 \cdot 10^{11} - 0,52 \cdot 10^{13}$$

$$(3,2 \times 10^3) \times (-5 \times 10^5) + (-9,4 \times 10^8) \times (-4 \times 10^{-1})$$

Consigne 3 : Soit $A = 72 \times 10^{-9}$ et $B = -3,1 \times 10^{-11}$ Calcule $A \times B$, $A + B$, $A - B$ **IV. QUOTIENT DE DECIMAUX**

Méthode : Pour calculer des quotients de décimaux, il est souvent pratique d'écrire, chaque nombre sous la forme d'un entier multiplié par

une puissance de 10. Ainsi : $\frac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^p} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot 10^{n-p}$

Exemple : Calculons $A = \frac{2,8 \times 10^8}{1,4 \times 10^3}$

$$2,8 \cdot 10^8 = 28 \cdot 10^7; 1,4 \cdot 10^3 = 14 \cdot 10^2$$

$$A = \frac{28 \times 10^7}{14 \times 10^2} = \left(\frac{28}{14}\right) \cdot 10^{7-2} = 2 \cdot 10^5$$

Activité 4**Consigne :** Effectue les calculs suivants

$$\frac{7,2 \times 10^5}{36 \times 10^{-2}}; \quad \frac{21 \times 10^7}{14 \times 10^5}; \quad \frac{0,26 \times 10^{-9}}{0,019 \times 10^{-8}}$$

EXERCICES

- 1) Effectue les calculs suivants puis écris les résultats en notation scientifique.

$$a = (3,5 \times 10^8) \times (0,2 \times 10^6) ; b = (21 \times 10^4) \times (4 \times 10^{-3}) ;$$

$$c = (8,7 \times 10^{-6}) \times (3 \times 10^2) ; d = (0,03 \times 10^{-2}) \times (7 \times 10^{-2}) ;$$

$$e = (25 \times 10^{-5}) \times (-4,8 \times 10^8) \times (4 \times 10^2)$$

- 2) Effectue les calculs suivants puis écris les résultats en écriture scientifique

$$A = 7,2 \times 10^4 + 35 \times 10^4 ; B = 9,5 \times 10^{-7} - 0,7 \times 10^{-7} ;$$

$$C = 7 \times 10^2 + 3 \times 10^3 ; D = 5,2 \times 10^4 + 23,1 \times 10^2 ;$$

$$E = 6,4 \times 10^4 + 0,078 \times 10^{-2} ; F = 3 \times 10^{-2} - 0,004 \times 10^2$$

- 3) Calcule

$$a = \frac{-18 \times 10^8}{1,2 \times 10^{-3}} ; b = \frac{3,2 \times 10^{-3}}{-8 \times 10^{-5}} ; c = \frac{-9 \times 10^{-5}}{0,09 \times 10^{-3}} ; d = \frac{5,6}{-1,75 \times 10^{-4}}$$

- 4) Donne les résultats des calculs suivants sous la forme la plus simple.

$$A = \frac{28 \times 10^3}{0,4 \times 10^4} ; B = \frac{318 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-3}} ; C = \frac{15 \times 10^2}{0,3 \times 10^5} ; D = \frac{0,7 \times 10^5}{14 \times 10^3}$$

- 5) Calcule $A \times B$; $A + B$; $A - B$ et $\frac{A}{B}$ dans les deux cas suivants (on donnera les résultats en écriture scientifique)

a) $A = 7 \times 10^7$ et $B = 2,8 \times 10^8$;

b) $A = 4 \times 10^{-4}$ et $B = 85 \times 10^{-5}$

- 6) La distance Terre-Lune est d'environ trois cent mille kilomètres.

La distance Terre-Soleil est cinq cents fois plus grande.

Calcule cette distance (en km) en utilisant les puissances de dix et exprime-le en écriture scientifique.

- 7) La masse du soleil est de $2 \times 10^{27}t$.

La masse de la Terre est de $6 \times 10^{21}t$.

Calcule le quotient de ces deux masses.

ENSEMBLE $\mathbb{Q}$ DES NOMBRES RATIONNELS

I. FRACTION D'UNE GRANDEUR

Activité 1

Consigne 1 : Prends une bande $\mathcal{A}$ de papier comme indique la figure suivante :

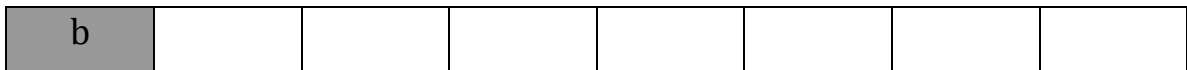


Plie-la en deux, puis en deux, puis encore en deux, déplies. Qu'observes-tu ?

Réponse : On obtient 8 parties de même longueur.

On dit que chacune de ces parties représente *un huitième* de la bande, on écrit : $\frac{1}{8}$ de $\mathcal{A}$.

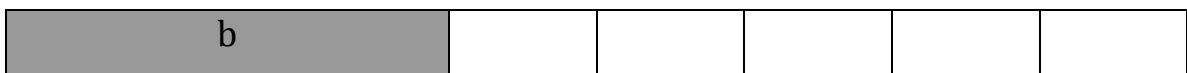
Consigne 2 : Dans chacun des cas suivants b représentent une fraction de la bande $\mathcal{A}$. Ecris cette fraction en complétant.



$$b = \dots \mathcal{A}$$



$$b = \dots \mathcal{A}$$



$$b = \dots \mathcal{A}$$

Conclusion :

- $\frac{a}{b}$ est une fraction :
 - a est le numérateur ;
 - b est le dénominateur ;
 - a et b sont les termes de la fraction.
- Une fraction de dénominateur zéro n'a pas de sens.
- $a = \frac{a}{1}$; $5 = \frac{5}{1}$; $17 = \frac{17}{1}$
- Prendre la fraction $\frac{a}{b}$ d'une grandeur, c'est la partager en b parties égales et prendre a de ces parties.

$$x = \frac{a}{b}y \text{ équivaut à } y = \frac{b}{a}x$$

Consigne 3 : Complète

$$x = \frac{5}{2}y \text{ alors } y = \dots x; \quad a = \frac{3}{7}b \text{ alors } b = \dots a$$

$$a = 2b \text{ alors } b = \dots a; \quad y = ax \text{ alors } x = \dots y$$

II. FRACTIONS EQUIVALENTES

Activité 2

Consigne 1 : Complète le tableau suivant. Que constates-tu ?

a	$\frac{3}{8}$ de a	$\frac{6}{16}$ de a	$\frac{9}{24}$ de a	$\frac{12}{32}$ de a	$\frac{15}{40}$ de a	$\frac{30}{80}$ de a
80						
120						
200						

Dans chacun des cas, les fractions $\frac{3}{8}$; $\frac{6}{16}$; $\frac{9}{24}$; $\frac{12}{32}$; $\frac{15}{40}$; $\frac{30}{80}$ représentent le même nombre.

On dit que les fractions $\frac{3}{8}$; $\frac{6}{16}$; $\frac{9}{24}$; $\frac{12}{32}$; $\frac{15}{40}$; $\frac{30}{80}$ sont *équivalentes*.

$$\text{On écrit : } \frac{3}{8} = \frac{6}{16} = \frac{9}{24} = \frac{12}{32} = \frac{15}{40} = \frac{30}{80}$$

Conclusion :

- Si on multiplie les deux termes d'une fraction par un même nombre, on obtient une fraction équivalente à cette fraction.
- En divisant les deux termes d'une fraction par un même nombre non nul, on obtient une fraction équivalente à cette fraction.

Consigne 2 : Trouve trois fractions équivalentes à $\frac{8}{12}$

Consigne 3 : Parmi les fractions suivantes, trouve celles qui sont

équivalentes : $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{21}{30}$; $\frac{12}{18}$; $\frac{7}{10}$

III. SIMPLIFICATION DE FRACTION

Définition : Simplifier une fraction c'est la remplacer par une fraction équivalente de termes plus petits.

Exemple : Simplifie $A = \frac{504}{196}$

Exemple de réponse

504 et 196 sont tous divisible par 2

$$504 = 252 \times 2 \text{ et } 196 = 98 \times 2, \text{ donc } A = \frac{504}{196} = \frac{252 \times 2}{98 \times 2} = \frac{252}{98}$$

$$\frac{252}{98} = \frac{126 \times 2}{49 \times 2} = \frac{126}{49} \text{ d'où } A = \frac{126}{49} = \frac{18 \times 7}{7 \times 7} \text{ et } A = \frac{18}{7}$$

On ne peut plus simplifier $\frac{18}{7}$ qui est une fraction *irréductible*.

$\text{pgcd}(18 ; 7) = 1$ alors 18 et 7 sont premiers entre eux. Ainsi, une fraction est dite irréductible si ses termes sont premiers entre eux.

Remarque : Si on divise les deux termes d'une fraction par leur pgcd, on obtient une fraction irréductible.

Exemple : $\frac{45}{30}$

$$\text{pgcd}(45; 30) = 15 \text{ ainsi } \frac{45}{30} = \frac{45 \div 15}{30 \div 15} = \frac{3}{2} \text{ irréductible}$$

Activité 3

Consigne 1 : Simplifie

$$\frac{35}{45}; \frac{48}{60}; \frac{11 \times 2 \times 5}{2 \times 5 \times 13}; \frac{23 \times a}{23 \times b}$$

Consigne 2 : Remplace chacune des fractions suivantes par une fraction

irréductible équivalente : $\frac{66}{55}; \frac{90}{126}; \frac{168}{216}$

IV. NOMBRES RATIONNELS

Activité 4

Consigne 1 : Classe les fractions suivantes en fraction équivalentes :

$$\frac{3}{2}; \frac{6}{4}; \frac{30}{21}; \frac{18}{12}; \frac{10}{7}; \frac{40}{28}; \frac{15}{10}. \text{ Combien de nombres distincts obtiens-tu ?}$$

Exemple de réponse

$$\frac{3}{2}; \frac{6}{4}; \frac{18}{12}; \frac{15}{10} \text{ sont équivalentes}$$

$$\frac{30}{21}; \frac{10}{7}; \frac{40}{28} \text{ sont équivalentes}$$

On obtient deux nombres distincts.

Ces deux nombres sont appelés des **nombres rationnels**

Définition : On appelle nombre rationnel(ou simplement rationnel)

l'ensemble des fractions équivalentes à une fraction donnée.

Exemple : L'ensemble des fractions représentant le rationnel

$$\frac{5}{7} \text{ est } \frac{5k}{7k} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^*$$

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$

Cet ensemble comprend :

- le nombre 0
- tous les nombres pouvant s'écrire sous la forme

$$\frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*$$

$\mathbb{Q}^*$: est l'ensemble des nombres rationnels non nuls

$\mathbb{Q}^+$: est l'ensemble des nombres rationnels positifs ou nuls

$\mathbb{Q}^-$: est l'ensemble des nombres rationnels négatifs ou nuls

Remarque :

- $\frac{-5}{3}$; $\frac{5}{-3}$ et $-\frac{5}{3}$ représentent le même nombre rationnel

- $0,3 = \frac{3}{10}$ alors 0,3 est nombre rationnel

$-1,75 = -\frac{175}{100}$ alors $-1,75$ est un nombre rationnel

Retiens que tout nombre décimal est un nombre rationnel

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

Valeur absolue d'un nombre rationnel

$$\left| -\frac{5}{2} \right| = \frac{5}{2}; \quad \left| +\frac{73}{15} \right| = \frac{73}{15}; \quad \left| +\frac{5}{2} \right| = \frac{5}{2}$$

Les nombres rationnels $-\frac{5}{2}$ et $+\frac{5}{2}$ sont **opposés**

Consigne 2 : Complète avec $\in$ ou $\notin$

$$2,7 \dots \mathbb{N}; \quad 2,7 \dots \mathbb{Z}; \quad 2,7 \dots \mathbb{D}; \quad 2,7 \dots \mathbb{Q}$$

$$-\frac{3}{4} \dots \mathbb{Z}; \quad -\frac{3}{4} \dots \mathbb{D}; \quad -\frac{3}{4} \dots \mathbb{Q}; \quad \pi \dots \mathbb{Q}$$

Consigne 3 :

1) Détermine : $\left| -\frac{301}{101} \right|$; $\left| +\frac{13}{20} \right|$; $\left| -\frac{1}{5} \right|$; $\left| -\frac{5}{2} \right|$

2) Trouve x tel que : $|x| = \frac{5}{2}$; $|x| = 0,71$

EXERCICES

- 1) Quelle fraction d'une heure représente :
 - a) une minute ; cinq minutes ; treize minutes ?
 - b) Vingt minutes ; quarante minutes ; quinze minutes ?
- 2) Quelle fraction d'une journée représente :
 - a) une heure ; sept heures ; huit heures ; douze heures ?
 - b) une minute ; cinq heures ; dix heures ; onze heures ?
- 3) Parmi les fractions suivantes quelles sont celles qui sont équivalentes ?

$$\frac{9}{12}; \frac{5}{8}; \frac{14}{20}; \frac{3}{4}; \frac{15}{24}$$

- 4) Trouve cinq fractions équivalentes à chacune des fractions suivantes

$$\frac{4}{7}; \frac{8}{9}; \frac{5}{6}; \frac{11}{7}; \frac{15}{6}; \frac{31}{4}; \frac{1}{8}; \frac{27}{45}$$

- 5) Détermine les entiers x, y, z, t pour que les fractions suivantes soient équivalentes :

$$a) \frac{x}{5}; \frac{6}{15}; \frac{y}{35}; \frac{z}{40}; \frac{t}{45}$$

$$b) \frac{18}{42}; \frac{x}{21}; \frac{y}{35}; \frac{z}{56}; \frac{t}{630}$$

$$c) \frac{14}{10}; \frac{35}{x}; \frac{y}{35}; \frac{42}{z}; \frac{t}{45}$$

- 6) Simplifie les fractions suivantes (donne le résultat sous la forme de fraction irréductible)

$$a) \frac{66}{18}; \frac{45}{165}; \frac{75}{150}; \frac{51}{153}; \frac{455}{273}$$

$$b) \frac{115}{92}; \frac{726}{858}; \frac{110}{286}; \frac{300}{27000}; \frac{1024}{1508}$$

- 7) Remplace les fractions suivantes par des fractions équivalentes ayant même dénominateur.

$$a) \frac{3}{4} \text{ et } \frac{5}{7}; \frac{12}{15} \text{ et } \frac{6}{45}; \frac{18}{68} \text{ et } \frac{47}{51}$$

$$b) \frac{5}{6} \text{ et } \frac{4}{9}; \frac{11}{12} \text{ et } \frac{13}{15}; \frac{15}{35} \text{ et } \frac{36}{168}$$

8) Trouve une écriture du rationnel $\frac{2}{3}$ dont la somme des termes soit 25.

9) Simplifie les écritures des rationnels suivants

$$a) \frac{9}{12}; \frac{8}{32}; \frac{25}{30}; \frac{12}{16}; \frac{50}{100}$$

$$b) \frac{-40}{60}; \frac{20}{-45}; \frac{64}{-126}; \frac{-48}{92}; \frac{-108}{140}$$

10) a) Détermine

$$\left[+\frac{18}{24} \right]; \left[+\frac{5}{7} \right]; \left[\frac{-7}{3} \right]; \left[\frac{-13}{-17} \right]$$

b) détermine l'opposé de chacun des nombres

$$+\frac{7}{15}; +\frac{8}{9}; -\frac{7}{16}; \left(\frac{-8}{15} \right)$$

c) détermine les rationnels x tels que :

$$|x| = \frac{5}{4}; |x| = \frac{3}{5}; |x| = 0,9; |x| = 64$$

11) un terrain rectangulaire a 78m de large. Sa longueur est les $\frac{4}{3}$ de sa largeur. Calcule son périmètre et son aire.

12) Une personne achète une maison à 5410000Fcfa. Les divers frais s'élèvent à $\frac{3}{20}$ du prix d'achat.

A combien revient cette maison ?

13) Un rouleau de fil mesure 150m. on prend les $\frac{3}{5}$, puis la moitié du reste.

Combien en reste-t-il ?

OPÉRATIONS DANS $\mathbb{Q}$

I. PRODUIT DE NOMBRES RATIONNELS

Règle : Le produit de deux ou plusieurs rationnels s'obtient en multipliant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

On utilise la règle du signe d'un produit.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \text{ avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0$$

Activité 1

Consigne 1 : Effectue les produits

$$\frac{5}{3} \times \frac{7}{2}; \frac{-9}{6} \times \frac{1}{3}; \frac{13}{-2} \times \frac{5}{3}; \left(\frac{-2}{5}\right) \times \frac{4}{3} \times \left(\frac{8}{-11}\right)$$

Consigne 2 : Effectue les produits

$$\frac{-7}{12} \times 5; 4 \times \frac{3}{11}; \frac{3}{7} \times 1; 11 \left(\frac{-4}{5}\right); \frac{7}{3} \times 0; 0 \times \left(-\frac{2}{3}\right)$$

Consigne 3 : Effectue les produits

$$\frac{5}{3} \times \frac{3}{5}; \left(-\frac{7}{4}\right) \times \left(-\frac{4}{7}\right); \frac{a}{b} \times \frac{b}{a}$$

Propriétés : Quels que soient les rationnels x et y

- si $xy = 0$ alors $x = 0$ ou $y = 0$
- $x \times 1 = 1 \times x = x$
- $\frac{x}{y} \times \frac{y}{x} = 1$ alors $\frac{x}{y}$ et $\frac{y}{x}$ sont inverses l'un de l'autre

Deux nombres inverses ont le même signe.

Exemples: $\frac{5}{3}$ et $\frac{3}{5}$; $\left(-\frac{7}{4}\right)$ et $\left(-\frac{4}{7}\right)$

II. QUOTIENT DE DEUX NOMBRES RATIONNELS

« Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse »

Règle : Pour diviser le rationnel $\frac{a}{b}$ par le rationnel $\frac{c}{d}$ non nul, on multiplie

$\frac{a}{b}$ par l'inverse de $\frac{c}{d}$.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \quad (b \neq 0, c \neq 0 \text{ et } d \neq 0)$$

Activité 2**Consigne 1 :** Effectue

$$\frac{15}{16} \div \frac{5}{8}; \frac{-5}{11} \div \frac{9}{11}; \left(-\frac{7}{9}\right) \div \left(-\frac{5}{3}\right)$$

Consigne 2 : Effectue

$$25 \div \frac{15}{7}; -3 \div \frac{4}{5}; \frac{2}{3} \div 8; -\frac{5}{3} \div 7$$

III. SOMME DE NOMBRES RATIONNELS**Règle :** Pour calculer la somme de deux rationnels de représentants

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on les écrit avec les mêmes dénominateurs puis on additionne les numérateurs en gardant le dénominateur commun.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}; \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

Exemple: Soit à calculer $\frac{10}{15} + \left(-\frac{18}{24}\right)$

Méthode

- on simplifie si possible chaque fraction ;
- on applique la règle de calcul.

$$\frac{10}{15} + \left(-\frac{18}{24}\right) = \frac{2}{3} + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{8}{12} + \left(-\frac{9}{12}\right) = -\frac{1}{12}$$

$$\frac{10}{15} + \left(-\frac{18}{24}\right) = -\frac{1}{12}$$

Activité 3**Consigne 1 :** Calcule

$$-\frac{14}{3} + \frac{10}{3}$$

Consigne 2 : Calcule

$$\left(-\frac{56}{264}\right) + \left(-\frac{63}{108}\right)$$

Consigne 3 : Calcule

$$A = \frac{3}{8} + \frac{6}{15} + \left(-\frac{31}{40}\right)$$

Consigne 4 : Calcule les sommes suivantes. Que constates-tu ?

$$-\frac{8}{7} + \frac{8}{7}; \quad \frac{5}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right); \quad \left(+\frac{13}{45}\right) + \left(-\frac{13}{45}\right)$$

Propriété : *La somme de deux rationnels opposés est nulle.*

IV. SOMME ET PRODUIT DE NOMBRES RATIONNELS

Activité 4

Consigne : Calcule puis compare avec = ou $\neq$

$$a) \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8}\right) \times \frac{4}{5}; \text{ et } \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{8}$$

$$b) \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{7} - \frac{5}{8}\right) \text{ et } \frac{4}{9} \times \frac{3}{7} - \frac{4}{9} \times \frac{5}{8}$$

Synthèse

$$\frac{c}{d} \times \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right) = \frac{ac}{md} + \frac{bc}{md} = \frac{ac + bc}{md}$$

$$\frac{c}{d} \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{e}{m}\right) = \frac{ac}{md} + \frac{bc}{md} - \frac{ce}{md}$$

V. PUISSANCES DANS $\mathbb{Q}$

Rappels

Pour tous les nombres relatifs a et b non nuls et pour tous entiers n, p , positifs, négatifs ou nuls, on a :

- $a^n \times a^p = a^{n+p}; (a^n)^p = a^{n \times p}; a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}; \frac{1}{a^n} = a^{-n}$
- $a^n = a^p$ lorsque $n = p$
- $a^n = b^n$ lorsque $a = b$

Activité 5**Consigne 1 :** Calcule

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 ; \left(-\frac{1}{3}\right)^2 ; \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$$

Consigne 2 : Ecris sous forme d'une seule puissance

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^5 ; \left[\left(-\frac{3}{4}\right)^5\right]^2 ; \left(-\frac{5}{3}\right)^3 \times \left(\frac{9}{15}\right)^3$$

Consigne 3 : Simplifie

$$A = \frac{12a^2}{9b} \times \frac{15b^3}{8a^3}$$

VI. COMPARAISON DE DEUX NOMBRES RATIONNELS**Activité 6****Consigne 1 :** Compare les deux termes de chacune des fractions suivantes puis à l'aide d'une division compare la fraction donnée à 1.

$$\frac{5}{2}; \frac{15}{9}; \frac{1}{3}; \frac{7}{10}$$

Règle : Pour tous entiers naturels a et b

$$\text{si } a > b \text{ alors } \frac{a}{b} > 1$$

$$\text{si } a < b \text{ alors } \frac{a}{b} < 1$$

Consigne 2 : Compare les numérateurs de chacune des fractions suivantes, puis à l'aide d'une division compare les deux fractions données.

$$\frac{5}{7} \text{ et } \frac{4}{7}; \frac{4}{10} \text{ et } \frac{6}{10}; \frac{1}{2} \text{ et } \frac{3}{2}; \frac{25}{15} \text{ et } \frac{20}{15}$$

Règle : De deux fractions de même dénominateur, le plus grand est celui qui a le plus grand numérateur.

Pour tous entiers naturels a, b et c :

$$\text{si } a > b \text{ alors } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

Consigne 3 : Compare les dénominateurs de chacune des fractions suivantes, puis à l'aide d'une division compare les deux fractions données.

$$\frac{3}{2} \text{ et } \frac{3}{5}; \frac{12}{15} \text{ et } \frac{12}{20}; \frac{7}{5} \text{ et } \frac{7}{3}; \frac{1}{4} \text{ et } \frac{1}{3}$$

Règle : De deux fractions de même numérateur, le plus grand est celui qui a le plus petit dénominateur

Pour tous entiers naturels a, b et c :

$$\text{si } b < c \text{ alors } \frac{a}{b} > \frac{a}{c}$$

Règles de comparaison de deux rationnels quelconques

R₁ : Tout nombre rationnel positif est supérieur ou égal à zéro.

R₂ : Tout nombre rationnel négatif est inférieur ou égal à zéro.

R₃ : Tout nombre rationnel négatif est inférieur ou égal à tout rationnel positif.

R₄ : Soient $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^*$

$$\text{si } a \leq b \text{ alors } \frac{a}{m} \leq \frac{b}{m}$$

Consigne 4 : Compare les rationnels

$$-\frac{3}{8} \text{ et } -\frac{7}{12}; \frac{5}{14} \text{ et } \frac{6}{21}$$

EXERCICES

1) Effectue les produits des rationnels suivants et donne le résultat sous la forme de fraction irréductible

$$a) \frac{15}{8} \times \frac{8}{25}; \frac{16}{21} \times \frac{14}{32}; \frac{51}{13} \times \frac{39}{68}$$

$$b) \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{9}{4}; \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right); \left(-\frac{8}{11}\right) \times \frac{5}{3}; \left(-\frac{7}{13}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$c) A = \left(-\frac{3}{7}\right) \times \left(-\frac{8}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right) \times \left(-\frac{7}{4}\right);$$

$$B = \left(-\frac{9}{7}\right) \times \left(+\frac{11}{3}\right) \times \left(-\frac{7}{4}\right) \times \left(-\frac{2}{11}\right)$$

2) Effectue les multiplications des rationnels suivants et donne le résultat sous la forme de fraction irréductible

$$\frac{12}{65} \times 15; \left(-\frac{49}{260}\right) \times 65; \frac{38}{225} \times (-15); \frac{17}{30} \times 12$$

3) a) Trouve trois fractions équivalentes à la fraction $\frac{40}{65}$

b) calcule le produit de $\frac{40}{65}$ et des trois fractions trouvées par 15.

Les quatre fractions produits obtenues sont-elles équivalentes ?

4) calcule les quotients suivants (donne l'écriture la plus simple)

$$a) \frac{15}{16} \div \frac{5}{8}; \frac{14}{15} \div \frac{21}{25}; \frac{-45}{77} \div \frac{18}{55}; \frac{-48}{13} \div \frac{(-12)}{77}; \frac{-702}{625} \div \frac{144}{125}$$

$$b) \frac{2k}{3} \div \frac{4k}{5} (k \in \mathbb{N}^*); \frac{3x}{5} \div \frac{9x}{40} (x \in \mathbb{Z}^*); \frac{15x}{4} \div \frac{5x}{16} (x \in \mathbb{Z}^*);$$

5) détermine le rationnel x tel que

$$a) \frac{24}{5} \times x = \frac{16}{25} \quad b) \frac{18}{35} \times x = \frac{19}{7} \quad c) \frac{15}{7} \times x = \frac{15}{7}$$

$$d) \frac{-18}{47} \times x = \frac{18}{47} \quad e) \frac{51}{43} \times x = 1 \quad f) \frac{48}{19} \times x = -1$$

6) a) Effectue

$$A = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right); \quad B = \left(-\frac{7}{8}\right) \times \left(+\frac{5}{2}\right);$$

$$C = \left(-\frac{5}{4}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right); D = \left(-\frac{19}{2}\right) \times \left(-\frac{15}{7}\right).$$

b) Calcule

$$A \times B; A \times C; A \times D; B \times C; B \times D; C \times D; \frac{A}{B}; \frac{A}{C}; \frac{A}{D}; \frac{B}{C}; \frac{B}{D}; \frac{C}{D}.$$

7) effectue les sommes des rationnels suivants et donne le résultat sous la forme la plus simple possible (fraction irréductible)

$$a) \frac{11}{16} + \frac{13}{16}; \frac{7}{8} + \frac{15}{8}; \left(-\frac{8}{13}\right) + \left(-\frac{44}{13}\right); \frac{15}{22} + \left(-\frac{3}{22}\right);$$

$$b) \frac{3}{4} + \frac{5}{7}; \frac{8}{9} + \frac{6}{7}; \left(-\frac{4}{7}\right) + \frac{5}{9}; \frac{15}{8} + \left(-\frac{31}{7}\right); \frac{11}{8} + \frac{15}{8} + \frac{7}{8}$$

$$c) \frac{3}{15} + \frac{7}{15} - \frac{35}{15}; \frac{3}{8} + \frac{6}{15} - \frac{(-31)}{40}; \frac{(-15)}{17} + \frac{3}{34} - \frac{27}{34}; 3 + \frac{5}{8} - \frac{58}{16}$$

8) Effectue de deux manières :

$$\left(\frac{6}{7} + \frac{3}{8}\right) \times \frac{14}{23}; \frac{27}{11} \times \left(\frac{35}{18} - \frac{4}{9}\right); \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{2}\right) \times \frac{20}{22}; \left(\frac{45}{31} + \frac{18}{35}\right) \times \frac{65}{51}$$

9) Calcule

$$\left(\frac{3x}{4} + \frac{5y}{8}\right) \times \frac{4}{5}$$

$$a) \text{ pour } x = \frac{6}{7} \text{ et } y = \frac{4}{5}; \quad b) \text{ pour } x = -\frac{2}{5} \text{ et } y = 2$$

10) Calcule

$$A = \frac{1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{1+\frac{2}{9}}}{1 + \frac{1}{1+\frac{4}{36}}}; \quad B = \frac{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}}}$$

$$11) \text{ On donne } A = \left(-\frac{2}{3}x + y\right) \times \frac{3}{2} + \left(-\frac{4}{5}x + 7\right) \times \left(-\frac{5}{4}\right)$$

a) Simplifie l'écriture de A.

b) Calcule A, avant et après simplification d'écriture pour :

$$x = \frac{3}{2} \text{ et } y = -1$$

$$x = \frac{5}{4} \text{ et } y = \frac{1}{6}$$

$$x = 0 \text{ et } y = 1$$

12) Compare les rationnels suivants :

$$\frac{5}{4} \text{ et } \frac{7}{6}; \frac{8}{5} \text{ et } 2; -\frac{3}{2} \text{ et } -\frac{5}{4}; -\frac{9}{2} \text{ et } -\frac{11}{8}$$

13) On donne l'ensemble A défini par

$$A = \left\{ \frac{3}{2}; -2; -\frac{5}{2}; \frac{7}{3}; \frac{9}{5}; 3; -\frac{3}{4} \right\}$$

- a) Range par ordre croissant les éléments de A.
- b) Ecris par énumération l'ensemble B des opposés des éléments de A.
- c) Range par ordre croissant les éléments de B.
- d) Ecris par énumération l'ensemble C des inverses des éléments de A.
- e) Range par ordre croissant les éléments de C.

CALCUL DANS $\mathbb{Q}$

I. REDUCTION ET SUPPRESSION DES PARENTHESES

1. **Réduction** : Réduire, c'est regrouper des termes qui ont même partie littérale.

Exemple :

$$\begin{aligned} A &= 5x + 1 + 10x - 4 \\ A &= (5x + 10x) + (1 - 4) \\ A &= 15x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{5}x - \frac{9}{5}x + \frac{5}{2} - \frac{8}{5}x - \frac{7}{2} \\ B &= \left(\frac{3}{5}x - \frac{9}{5}x - \frac{8}{5}x \right) + \left(\frac{5}{2} - \frac{7}{2} \right) \\ B &= -\frac{14}{5}x - 1 \end{aligned}$$

2. Suppression des parenthèses

Dans une somme,

- on peut supprimer les parenthèses précédés d'un signe (+) ;
- on peut supprimer les parenthèses précédés d'un signe (-) à condition de changer les signes des termes placés dans les parenthèses.

Exemple : Développe et réduis les expressions

$$\begin{aligned} A &= 2 + (x + 3) - (-x + 4) \\ A &= 2 + x + 3 + x - 4 \\ A &= 2x + 1 \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} B &= 5x + 1 - (7x - 3) \\ B &= 5x + 1 - 7x + 3 \\ B &= -2x + 4 \end{aligned} \right.$$

Activité 1

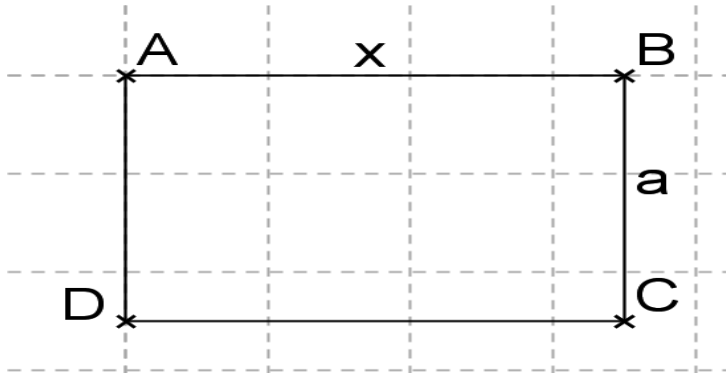
Consigne : Développe et réduis les expressions

$$\begin{aligned} A &= 8 - (x + 5) + (3 - x) \\ B &= (5 - x) + (7 + x) - (11 - x) \\ C &= (x^2 + x + 2) - (8x - 2x^2 - 5) + (3x^2 - 2x - 7) \\ A &= -\left(\frac{5}{7}x - \frac{7}{3}x^2\right) + (3 - 2x^2) - \left(5 - \frac{3}{7}x\right) \end{aligned}$$

II. DEVELOPPEMENT

Activité 2

Consigne 1 : Dans le rectangle ABCD suivant



On pose $AB = CD = x$ et $BC = AD = a$

- 1) Calcule de trois manières différentes le périmètre du rectangle ABCD.
- 2) Compare les expressions : $2(x + a)$ et $2x + 2a$
- 3) Calcule de même : $5(x + 3)$; $x(3x - 2)$; $m(a + b)$.

Définition : Remplacer le produit $m(a + b)$ par la somme $ma + mb$, c'est développer $m(a + b)$

$$m(a + b) = ma + mb$$

Consigne 2 : On veut développer $(a + b)(c + d)$

- 1) Pose $m = (c + d)$ et développe $(a + b).m$
- 2) En remplaçant m par $(c + d)$ développe am et bm .
- 3) En déduire le développement de $(a + b)(c + d)$
- 4) Développe alors $(3x + 5)(x + 2)$; $2x + 7)(3x - 5)$; $3x - 2)(5x - 4)$.

Propriété : Soit a, b, c, d des nombres rationnels

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Consigne 3 : Développe et réduis les expressions

$$A = 5(3x - 2) + 7x(3x - 2); \quad B = (x + 5)(x - 3)$$

$$C = (x + 2)(x - 3)(x + 4); \quad D = \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}\right)\left(2x - \frac{7}{2}\right)$$

III. FACTORISATION

Définition : Factoriser une somme, c'est remplacer cette somme par un produit de facteurs.

$$ma + mb = m(a + b)$$

Dans la somme $ma + mb$, chaque terme est un produit :

ma est un produit, ses facteurs sont : m et a

mb est un produit, ses facteurs sont : m et b

Le facteur commun aux deux termes est m

Nous avons mis le facteur commun m en facteur. Ainsi nous avons effectué une mise en facteur.

Activité 3

- Le facteur commun est apparent

Exemple : $T = 7a + 7b = 7(a + b)$

Consigne 1 : Factorise les expressions (ou écris sous forme de produit de facteurs).

$$A = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}a; \quad B = \frac{4}{3}ax + \frac{4}{3}xy; \quad C = x(3x - 4) - 4(3x - 4);$$

$$D = (x + 2)(x - 3) + (x + 2)(2x - 1)$$

- Le facteur commun est caché

Exemple : $T = 21 - 7x = 3 \times 7 - 7x = 7(3 - x)$

Consigne 2 : Factorise

$$a = 3x + 15; \quad b = 5x^5 + 25x^4 - 35x^2; \quad c = (x + 5)(3x + 2) + 3x + 15$$

- Autres factorisations

Consigne 3 : Factorise

$$A = (x + 3)(2x - 1) - (x + 3)^2; \quad B = (4x - 3)(2x + 5) - (4x - 3);$$

$$C = (2x + 10)(5x + 1) - 5(5 - x); \quad D = 12x(5x - 3) + 15x - 9$$

EXERCICES

1) Développe et réduis les expressions suivantes

$$A = 2 + (3x - 4) - 5 - (6 - 7x) + 4 - (3x - 8);$$

$$B = 4 - (3x - 2) - 5 + (4 - 3x) - (7x + 3);$$

$$C = 2x - (4 - 4x) + 5 + (-7x - 4);$$

$$D = 4x + 3 - (4 - 3x) + (7x - 2)$$

2) Développe et réduis les expressions suivantes

$$A = 2x(3 - 4y) + 2y(5x - 3); \quad B = 7 - 2x(x - 3) + 5x(2x - 3)$$

$$C = 4 - 3x(5 - 2x) - 3 + 7x(x - 1);$$

$$D = 3x + 2x(1 - 3x) - x(5 - 6x) + 9$$

3) Développe et réduis les expressions suivantes

$$A = (5x - 3)(3x + 2);$$

$$B = (4x + 3)(3x + 5);$$

$$C = (2x - 3)(7x - 4);$$

$$D = (5x + 7)(4x - 1);$$

$$E = \left(\frac{1}{2}x + 5\right)\left(\frac{3}{2}x - 1\right);$$

$$F = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}\right);$$

$$G = \left(\frac{3}{5}x - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{7}x - 1\right);$$

$$H = \left(\frac{x}{7} + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{2x}{3} + \frac{4}{5}\right)$$

$$I = 5(x - 7) + (3x + 2)(4x - 3);$$

$$J = 11(x - 4) - (5x - 2)(3x + 7)$$

$$K = (3x + 1)(4x + 2) - 5(2x - 3);$$

$$L = (3x + 1)(3x + 1) - (3x - 1)(3x - 1)$$

4) Factorise les expressions suivantes

$$A = 28 - 7x; \quad B = 8x + 24; \quad C = 12x + 6a - 3b;$$

$$D = x^3 + 4x; \quad E = 4x^3 - 3x^2; \quad F = x^2y - xy^2 + 2x^2y^2$$

$$G = 6xy^2 - 4x^2y^3 + 20xy^3; H = 25x^3y^2 - 5x^2y^2 + 75x^2y^3$$

5) Factorise les expressions suivantes

$$A = (x + 2)(x - 3) + (x + 2)(2x - 1);$$

$$B = (x - 3)(2x + 3) - (3x - 1)(x - 3)$$

$$C = 5x(x + 2) - 3y(x + 2) + 5z(x + 2);$$

$$D = 5(2x - 3) - (3x + 2)(3 - 2x)$$

$$E = x(2x - 3) + 7(3 - 2x);$$

$$F = (3x - 7)(4x + 2) - (6x - 14)(5x + 3)$$

$$G = x(x + 5) + 4x + 20; H = 13x + 26 + x(x + 2);$$

$$I = (2x - 3)(5x + 2) + 24 - 36;$$

6) On donne l'expression $A = (2x - 3)^2 - (4x + 7)(2x - 3)$

a) Développe et réduis A.

b) Factorise A.

c) Calcule A pour $x = -5$ et pour $x = \frac{3}{2}$

7) On donne l'expression $B = 3x(5x + 4) - (5x + 4)$

a) Développe et réduis B.

b) Factorise B.

c) Calcule B pour $x = \frac{1}{3}$, $x = -\frac{4}{5}$ et $x = 0$

8) x étant un nombre rationnel, on pose

$$C = (2x - 5)(3x + 1) - 10x + 25$$

a) Développe et réduis C.

b) Factorise C.

c) Calcule C pour $x = 2,5$

PRODUITS REMARQUABLES

I. CARRE D'UNE SOMME $(a + b)^2$

Activité 1

Consigne 1 : En remarquant que $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$, développe et réduis $(a + b)^2$.

Consigne 2 : En utilisant le résultat précédent, développe et réduis :

$$(x + 4)^2, (2x + 1)^2, (x + a)^2.$$

Enoncé : Pour tous nombres rationnels a et b : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- Remplacer $(a + b)^2$ par $a^2 + 2ab + b^2$, c'est développer $(a + b)^2$.
- Remplacer $a^2 + 2ab + b^2$ par $(a + b)^2$, c'est factoriser $a^2 + 2ab + b^2$

Consigne 3 : Développe

$$(x + 5)^2; (2x + 3)^2; \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\right)^2$$

Consigne 4 : Factorise

$$9x^2 + 30x + 25; x^2 + 8x + 16; \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{16}$$

II. CARRE D'UNE DIFFERENCE $(a - b)^2$

Activité 2

Consigne 1 : En remarquant que $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$, développe et réduis $(a - b)^2$.

Consigne 2 : En utilisant le résultat précédent, développe et réduis :

$$(x - 4)^2, (2x - 1)^2, (x - b)^2.$$

Enoncé : Pour tous nombres rationnels a et b : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- Remplacer $(a - b)^2$ par $a^2 - 2ab + b^2$, c'est développer $(a - b)^2$.
- Remplacer $a^2 - 2ab + b^2$ par $(a - b)^2$, c'est factoriser $a^2 - 2ab + b^2$

Consigne 3 : Développe : $(x - 5)^2; (2x - 3)^2; \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right)^2$

Consigne 4 : Factorise : $9x^2 - 30x + 25; x^2 - 8x + 16; \frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{16}$

III. PRODUIT D'UNE SOMME PAR UNE DIFFERENCE $(a + b)(a - b)$

Activité 3

Consigne 1 : Développe et réduis $(a + b)(a - b)$.

Consigne 2 : En utilisant le résultat précédent, développe et réduis :

$(x + 4)(x - 4)$, $(2x + 1)(2x - 1)$, $(x + a)(x - a)$.

Enoncé : Pour tous nombres rationnels a et b : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

- Remplacer $(a + b)(a - b)$ par $a^2 - b^2$, c'est développer $a^2 - b^2$
- Remplacer $a^2 - b^2$ par $(a + b)(a - b)$, c'est factoriser $a^2 - b^2$

Consigne 3 : Développe

$(x + 5)(x - 5)$; $(2x - 3)(2x + 3)^2$; $\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right)$

Consigne 4 : Factorise

$9x^2 - 25$; $x^2 - 16$; $\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{16}$; $T = (x + 4)(2x + 3) + (4x^2 - 9)$

EXERCICES

1) Développe

$$(x + 7)^2; (x + 1)^2; (a + 8)^2; (4 + x)^2; (5x + 2)^2;$$

$$(7x + a)^2; (3x + 4)^2; \left(5x + \frac{1}{3}\right)^2; \left(x + \frac{7}{5}\right)^2; \left(\frac{4}{3}x + \frac{7}{5}\right)^2.$$

2) Développe

$$(x - 2)^2; (x - 1)^2; (a - 3)^2; (4 - x)^2; (5x - 2)^2;$$

$$\left(2x - \frac{3}{5}\right)^2; \left(\frac{2}{5}x - 3\right)^2; \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right)^2; (2x - 3y)^2; \left(\frac{4}{3}x - \frac{7}{5}\right)^2.$$

3) Développe

$$(x + 1)(x - 1); (2x - 5)(2x + 5); (3 - x)(3 + x); (11x + 7)(11x - 7);$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right); \left(\frac{7}{5}x + \frac{8}{9}\right)\left(\frac{7}{5}x - \frac{8}{9}\right); \left(2x - \frac{4}{6}\right)\left(2x + \frac{4}{6}\right);$$

$$(2x + 3y)(2x - 3y); (x - 5y)(x + 5y); (ax + 10)(ax - 10)$$

4) Factorise

$$x^2 + 10x + 25; x^2 + 4x + 4; 49 + 28x + 4x^2; 9x^2 + 24x + 16;$$

$$36x^2 - 12x + 1; 100x^2 - 60x + 9; 64x^2 - 48x + 9; x^2 - 6xy + 9y^2;$$

$$25x^2 - 80xy + 64y^2; 6x^2 + 60x + 150; x^2 - 4; x^2 - 81;$$

$$16x^2 - 49; 4x^2 - 49; \frac{9}{4}x^2 - 25; \frac{9x^2}{25} - \frac{36y^2}{49}; \frac{4x^2}{25} - \frac{16}{81}$$

5) Factorise

$$A = (2x - 3)^2 - (5x + 2)^2;$$

$$B = (5x + 2)^2 - (4x - 1)^2;$$

$$C = (7x + 3)^2 - (11x + 5)^2;$$

$$D = (x^2 - 10x + 25) - (2x^3)^2;$$

$$E = (5x - 10)(x + 3) - 3(x^2 - 4);$$

$$F = (5 - 3x)(x - 2) + 9x^2 - 30x + 25;$$

$$G = x^2 - 9 - (3 - x)(x + 5);$$

$$H = 12x^3 - 16x^2 - (3x - 4);$$

6) Complète les égalités suivantes

$$(2x + \dots)^2 = 4x^2 + 12x + \dots; \quad (3x - \dots)^2 = \dots - 42x + \dots$$

$$\left(\dots + \frac{1}{2}\right)^2 = \dots + \frac{3}{5}x + \dots; \quad \left(\frac{2}{3}x - \dots\right)^2 = \dots - 2x + \dots$$

7) On donne

$$A = 5x^2 - \frac{9}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5} + x\right)\left(\frac{9}{2} - x\right)$$

$$B = 5x + 3 - (5x + 3)\left(x + \frac{3}{4}\right)$$

a) Développe, réduis A et B.

b) Factorise A et B.

c) Calcul A pour $x = -\frac{3}{5}$; $x = \frac{27}{32}$; $x = 0$

d) Calcule B pour $x = -\frac{3}{5}$; $x = \frac{1}{4}$; $x = 0$

ENCADREMENTS

I. ENCADREMENT D'UN NOMBRE REEL

Activité 1

Consigne : Effectue $\frac{8}{7}$ à 0,001 près puis complète avec l'un des signes d'inégalité $<$ ou $>$.

$$1,14 \dots \frac{8}{7}; \frac{8}{7} \dots 1,15$$

Exemple de réponse

$$\frac{8}{7} = 1,142$$

$$1,14 < \frac{8}{7}; \frac{8}{7} < 1,15$$

Conclusion : On peut donc écrire la double inégalité suivante :

$$1,14 \leq \frac{8}{7}; \frac{8}{7} < 1,15 \text{ ou } 114 \cdot 10^{-2} \leq \frac{8}{7} < 115 \cdot 10^{-2}$$

On dit que nous avons réalisé un encadrement d'ordre 2 de $\frac{8}{7}$ car

$$1,15 - 1,14 = 0,01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

✚ L'amplitude de cet encadrement est : 0,01 ou $\frac{1}{100}$ ou 10^{-2}

✚ 1,14 une valeur approchée de $\frac{8}{7}$ à 10^{-2} près par **défaut**.

✚ 1,15 est une valeur approchée de $\frac{8}{7}$ à 10^{-2} par **excès**.

Règle : Pour encadrer un réel négatif, on encadre d'abord sa valeur absolue puis on multiplie cette double inégalité par (-1).

Activité 2

Consigne 1 :

Trouve l'encadrement d'ordre 2 puis d'ordre 3 de $\pi = 3,14159$

Rép : D'ordre 2 : $3,14 \leq \pi < 3,15$; D'ordre 3 : $3,141 \leq \pi < 3,142$

Consigne 2 :

Trouvons l'encadrement d'ordre 1 puis d'ordre 2 du nombre négatif $-\frac{3}{7}$

Exemple de réponse

$$\frac{3}{7} = 0,4285$$

Encadrement d'ordre 1 de $-\frac{3}{7}$

$$0,4 \leq \frac{3}{7} < 0,5 \text{ on en déduit } -0,5 \leq \frac{3}{7} < -0,4$$

Encadrement d'ordre 2 de $-\frac{3}{7}$

$$0,42 \leq \frac{3}{7} < 0,43 \text{ on en déduit } -0,43 \leq \frac{3}{7} < -0,42$$

II. ENCADREMENT D'UNE SOMME

Règle : Pour trouver un encadrement de a et b , on ajoute membre à membre les encadrements de a et b .

$$x \leq a < y$$

$$x' \leq b < y'$$

$$x + x' \leq a + b < y + y'$$

Activité 3

Consigne : On donne les encadrements :

$$3,1415 \leq \pi < 3,141 \text{ et } 1,7320 \leq a < 1,7321$$

Trouve un encadrement de $\pi + a$

Rép : $4,8735 \leq \pi + a < 4,6737$

On en déduit les encadrements

Ordre 0 : $4 \leq \pi + a < 5$

Ordre 2 : $4,87 \leq \pi + a < 4,88$

Ordre 3 : $4,873 \leq \pi + a < 4,874$

III. ENCADREMENT D'UN PRODUIT

Sachant que a et b sont deux rationnels positifs

Règle1 : Pour encadrer le produit ab , on multiplie membre à membre les inégalités.

Règle2 : Pour encadrer $-ab$, on encadre d'abor $|-ab|$ puis on multiplie les membres de l'inégalité par (-1)

Activité 4

Consigne : On donne les encadrements :

$$0,571 \leq a < 0,572 \text{ et } 2,236 \leq b < 2,237.$$

Trouve un encadrement d'ordre 1 et d'ordre 3 de ab et $-ab$

Rép : $1,276756 \leq ab < 1,279564$

On en déduit les encadrements :

Ordre 1: $1,2 \leq ab < 1,3$

Ordre 3 : $1,276 \leq ab < 1,277$

Ordre 1: $-1,3 \leq -ab < -1,2$

Ordre 3 : $-1,277 \leq -ab < -1,276$

IV. ENCADREMENT D'UN QUOTIENT EXACT

Règle : Pour trouver un encadrement du quotient $\frac{x}{y}$, on procède comme

suit : $a \leq x < b \text{ et } c \leq y < d$

On fait : $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} < \frac{b}{c}$

Activité 5

Consigne : On donne $3,14 \leq \pi < 3,15 \text{ et } 1,41 \leq a < 1,42$

Trouve un encadrement du quotient $\frac{\pi}{a}$.

Rép : $2,21126 \leq \frac{\pi}{a} < 2,23404$

On en déduit les encadrements

Ordre 1: $2,2 \leq \frac{\pi}{a} < 2,3$

Ordre 2 : $2,21 \leq \frac{\pi}{a} < 1,22$

Ordre 3 : $2,211 \leq \frac{\pi}{a} < 1,212$

EXERCICES

- 1) On donne le nombre $x = \frac{141}{27}$
 - a) Effectue la division de 141 par 27 à $\frac{1}{10000}$ près.
 - b) Donne l'encadrement d'ordre 1 puis d'ordre 3 de x.
 - c) Donne la valeur approchée par défaut de x à 10^{-3} près.
 - d) Donne l'encadrement d'ordre 2 de -x.
- 2) De l'encadrement $2,236 \leq a < 2,237$ déduis un encadrement de -a.
- 3) Sachant que $2,6 \leq x < 2,7$ et $27,3 \leq y < 27,4$.
Donne un encadrement de : $x + y$; $x - y$; xy .
- 4) Sachant que $1,414 \leq a < 1,415$ et $1,732 \leq b < 1,733$, donne
l'encadrement d'ordre 1 puis d'ordre 2 de : $2a$; $5 - 2a$; $3b$; $7 - b$;
 $2a + 3b$; $3b - 2a$.
- 5) Donne un encadrement de x , $x + y$, $x - y$, xy et $\frac{x}{y}$ pour $15,1 \leq x < 15,2$ et
 $1,9 \leq y < 20$. Dans chacun des cas suivants, donne l'amplitude de
l'encadrement.
- 6) Sachant que le nombre rationnel x vérifie $1,54 \leq x < 1,55$, encadre $5 +$
 $2x$ et $\frac{1}{5+2x}$.
- 7) On donne $0,02 \leq a < 0,04$ et $2,215 \leq b < 2,225$.
 - a) Encadre $a + b$. Quelle est l'amplitude de l'encadrement ?
 - b) Encadre $a - b$. Quelle est l'amplitude de l'encadrement ?
 - c) Encadre $\frac{b}{1+a}$.

PRATIQUE DU CALCUL SUR LES PROPORTIONS

I. DEFINITION

Activité 1

Consigne 1 : Au marché, on a relevé les prix suivants de sucre chez deux boutiquiers :

- Chez le 1^{er} : 5kg à 3000f CFA
- Chez le 2^{ème} : 2kg à 1200f CFA

Ces boutiquiers ont – ils vendus le kilogramme de sucre au même prix ? Justifie ta réponse.

Exemple de réponse

$$\frac{3000}{5} = 600; \frac{1200}{2} = 600$$

Ces boutiquiers ont vendu le kilogramme de sucre au même prix car les quotients calculés sont tous égaux à 600.

On dit que les nombres (3000 ; 5 ; 1200 ; 2) forment une proportion. On écrit : $\frac{3000}{5} = \frac{1200}{2}$ (attention l'ordre est très important).

Les nombres **3000** et **2** sont les extrêmes ;

Les nombres **5** et **1200** sont les moyens.

Le nombre 600 est appelé coefficient (ou rapport) de proportionnalité.

On dit aussi que les prix sont proportionnels à leurs masses.

Définition : Quatre nombres (a ; b ; c ; d) forment une proportion lorsque

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Les nombres **a** et **d** sont les extrêmes ;

Les nombres **b** et **c** sont les moyens.

Consigne 2 : Les nombres suivants forment-ils une proportion :

- a) (65 ; 13 ; 40 ; 8) ;
- b) (10 ; 2 ; 8 ; 5)

II. PROPRIETES

Activité 2

Consigne 1 : Dans chacune des proportions suivantes, calcule le produit des extrêmes et le produit des moyens. Que constates-tu ?

a) (65; 13; 40; 8); b) $\frac{3000}{5} = \frac{1200}{2}$

On constate que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Cela est général, on admet la propriété suivante :

Propriété fondamentale : Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **alors** $ad = bc$

Remarque : On dit souvent qu'on fait les « produits en croix »

$\frac{a}{b} \swarrow \nearrow \frac{c}{d}$

Consigne 2 : En utilisant la propriété fondamentale, vérifie si les nombres forment une proportion dans les cas suivants :

a) (2; 3; 4; 6)

b) (5; 3; 2; 4)

c) $\frac{3}{87} = \frac{5}{145}$

Propriété : Dans une proportion,

- Permuter les extrêmes :

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **alors** $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

- Permuter les moyens :

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **alors** $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

- Permuter à la fois les extrêmes et les moyens :

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **alors** $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

Consigne 3 : A partir de chacune des égalités suivantes, forme trois proportions :

a) $27 \times 32 = 48 \times 18$

b) $-3 \times 15 = -5 \times 9$

III. CALCUL D'UN TERME D'UNE PROPORTION

Activité 3

Consigne : Calcule x dans les proportions suivantes :

a) $\frac{x}{72} = \frac{9}{81}$; b) $\frac{9}{x} = \frac{3}{4}$ c) $\frac{20}{100} = \frac{x}{425}$; d) $\frac{5}{3,7} = \frac{41}{x}$

Méthode : si $a \times x = b \times c$ alors $x = \frac{b \times c}{a}$

IV. RESOLUTION DE PROBLEMES

Exemple : 5 oranges coûtent 125Fcfa. Combien coutent 2 oranges

Solution du premier cycle

On cherche le prix d'une orange : $\frac{125}{5} = 25\text{Fcfa}$.

Le prix de 2 oranges : $2 \times 25 = 50\text{Fcfa}$

Solution du second cycle

Soit x le prix des 2 oranges, on a :

$$\frac{x}{2} = \frac{125}{5} \text{ alors } x = \frac{2 \times 125}{5} = 50\text{Fcfa}$$

5 oranges coûtent 50Fcfa

Activité 4

Consigne 1 : Un arc d'un cercle de mesure 24° a une longueur de 9cm.

Quelle est la mesure en degrés d'un arc de ce cercle de longueur 75cm ?

Consigne 2 : 7mètres de bazin riche coutent 38500Fcfa. Calcule le prix de 2 mètres de ce bazin riche.

EXERCICES

1) Vérifie que les nombres forment une proportion dans les cas suivants :

a) (18 ; 7 ; 54 ; 21)

b) (11 ; 77 ; 6 ; 42)

c) 21,5 ; 3,5 ; 45,26 ; 7,3)

d) 12,5 ; 5 ; 7,5 ; 3)

2) Détermine x dans les cas suivants :

a) $\frac{77}{88} = \frac{14}{x}$; b) $\frac{-42}{70} = \frac{x}{10}$; c) $\frac{-91}{39} = \frac{35}{x}$

d) $\frac{x}{34} = \frac{-143}{221}$; e) $\frac{3x}{5} = \frac{9}{10}$; f) $\frac{\frac{3}{2}}{x} = \frac{2}{\frac{4}{9}}$

3) Détermine les entiers relatifs x, y, z et t tels que :

$$\frac{x}{-310} = \frac{-70}{217}; \quad \frac{-70}{217} = \frac{y}{155}; \quad \frac{-210}{z} = \frac{-70}{217}; \quad \frac{-70}{217} = \frac{-50}{t}$$

4) Calcule le prix p trois cahiers de 100pages sachant que (p ; 3 ; 400 ; 2) forment une proportion.

5) On sait que 3kg de farine de blé donnent 12 baguettes de pain. Quelle quantité de farine de blé donneront 30 baguettes de pain ?

6) A 20°C, 5litres d'essence ont une masse de 3,7kg. Dans ces conditions de température,

a) quelle est le masse de 41litres d'essence ?

b) quel est le volume de 34,04kg d'essence

7) Une vendeuse vend un lot de quatre bananes à 180Fcfa et six bananes valent 270Fcfa.

a) Le prix est-il proportionnel au nombre de bananes ?

b) Sans calculer le prix d'une banane, trouve le prix, de 10bananes, de 16bananes, de 26bananes.

EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

I. NOTION D'EQUATION

Activité 1

Consigne 1 : Dans les opérations suivantes, comment tu lis les points ?

Ecris horizontalement ces opérations.

$$\begin{array}{r} 13 \\ + \quad \bullet \\ \hline = 32 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \times \bullet \\ - 12 \\ \hline = 10 \end{array}$$

En remplaçant le point par une lettre, par exemple x , nous pouvons écrire :

$$13 + x = 32; \qquad 2x - 12 = 10$$

Ces égalités sont des équations d'inconnue x .

L'exposant de x étant 1 alors l'équation est du premier degré.

Dans une équation, le signe $(=)$ sépare les deux membres.

Dans l'équation $13 + x = 32$,

$13 + x$ est le premier membre,

32 est le deuxième membre.

Consigne 2 : Ecris une équation du premier degré à une inconnue x ou y .

II. EQUATIONS EQUIVALENTES

Activité 2

Consigne 1 : Soit l'équation $5 + x = 3$

Ajoute (-5) aux deux membres de l'équation, quelle équation obtiens-tu ?

Consigne 2 : Soit l'équation $2x = 6$

Divise les deux membres de l'équation par 2, quelle équation obtiens-tu ?

Définition : Deux ou plusieurs équations sont équivalentes lorsque ces équations ont exactement les mêmes solutions.

Comment obtenir des équations équivalentes ?

Pour trouver une équation équivalente à une équation donnée, on peut :

- Ajouter (ou retrancher) un même nombre aux deux membres de l'équation donnée, ou transposer un terme d'un membre dans l'autre en changeant son signe.

Exemple : $13 + x = 23$ équivaut à $x = 23 - 13$

- Multiplier (ou diviser) les deux membres de l'équation donnée par un même nombre différent de 0.

Exemple: $2x - 12 = 10$ équivaut à $\frac{1}{2}(2x - 12) = \frac{1}{2} \times 10$ soit
 $x - 6 = 5$

III. RESOLUTION D'UNE EQUATION

Résoudre une équation, c'est déterminer, si elles existent, la ou les valeurs de l'inconnue, qui rendent vraie l'égalité.

Pour résoudre une équation, on utilise les règles d'obtention des équations équivalentes.

1. Vérifier si un rationnel est solution d'une équation

Exemple : Soit l'équation $3x + 1 = 7$

Les nombres 2 et -1 son-t-ils solutions de cette équation ?

Exemple de réponse

Dans l'équation, on remplace x par la valeur donnée.

Pour $x = 2$

$$3 \times 2 + 1 = 7$$

$$6 + 1 = 7 \text{ vraie}$$

L'équation est vérifiée pour $x = 2$

Donc 2 est solution de l'équation.

Pour $x = -1$

$$3 \times (-1) + 1 = 7$$

$$-3 + 1 = 7 \text{ fausse}$$

L'équation n'est pas vérifiée pour
 $x = -1$

Donc -1 n'est pas solution de
l'équation.

2. Résolution d'une équation**Exemple :** Résous dans $\mathbb{Q}$ l'équation : $3x + 1 = 7$

$$3x + 1 = 7$$

$$3x = 7 - 1$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} ; \text{ou } x = 2$$

L'ensemble solution de l'équation est $S = \{2\}$ **Activité 3****Consigne 1 :** Résous dans $\mathbb{Q}$ l'équation :

$$5x + 1 = 3x - 2$$

Consigne 2 : Résous dans $\mathbb{Q}$ l'équation :

$$2(3x + 5) - 3(1 - 2x) = 5x - 7$$

Consigne 3 : Résous dans $\mathbb{Q}$ l'équation :

$$\frac{3x}{2} = -3$$

Consigne 4 : Résous dans $\mathbb{Q}$ l'équation :

$$\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} = 4$$

IV. EQUATION PRODUIT**Propriété :** Un produit de facteurs est nul si l'un au moins de ses facteurs est nul.

$$(ax + b)(cx + d) = 0 \text{ si } ax + b = 0 \text{ ou } cx + d = 0$$

$$x = -\frac{b}{a} \text{ ou } x = -\frac{d}{c} \quad S = \left\{ -\frac{b}{a}; -\frac{d}{c} \right\}$$

Activité 4**Consigne 1 :** Résous dans $\mathbb{Q}$ l'équation

$$(2x + 1)(x - 3) = 0$$

Consigne 2 : Résous dans $\mathbb{Q}$ l'équation

$$(x + 5)(x + 2)(x - 2)(3x - 7) = 0$$

Consigne 3 : Résous dans $\mathbb{Q}$ l'équation

$$3x^2 + 2x = 0$$

Consigne 4 : Résous dans $\mathbb{Q}$ l'équation

$$x^2 - 1 + 3(x + 1) = 0$$

V. UTILISATION D'UNE EQUATION POUR RESOUDRE DES PROBLEMES CONCRETS

Pour résoudre un problème, il faut suivre les cinq (5) étapes suivantes :

1. Choix de l'inconnue et contraintes ;
2. Mise en équation (C'est traduire l'énoncé par une équation) ;
3. Résolution de l'équation ;
4. Vérification (n'est pas obligatoire) ;
5. Conclusion.

Exemple : Quel est le nombre entier naturel dont le triple diminué de 4 est égal au double augmenté de 5.

Résolution du problème

Choix de l'inconnue et contraintes

Soit x la solution du problème (si elle existe). x désigne un entier naturel.

Mise en équation

Le triple du nombre est : $3x$

Le triple diminué de 4 s'écrit : $3x - 4$

Le double du nombre est : $2x$

Le double augmenté de 5 s'écrit : $2x + 5$

L'équation s'écrit alors : $3x - 4 = 2x + 5$

Résolution de l'équation

$3x - 4 = 2x + 5$ équivaut à $3x - 2x = 5 + 4$ alors $x = 9$

Ensemble solution : $S = \{9\}$

Conclusion : Le nombre cherché est 9.

Vérification

$$3 \times 9 - 4 = 27 - 4 = 23$$

$$2 \times 9 + 5 = 18 + 5 = 23$$

Activité 5

Consigne : Mon voisin a une fille de 5ans, un garçon de 8ans, sa femme à 32ans. La somme des âges de mon voisin, de sa femme et de son fils est égale à 15fois l'âge de sa fille.

Calcule l'âge de mon voisin en posant une équation.

EXERCICES

1) Résous dans $\mathbb{Q}$ les équations

$$x + 2 = 5 ; 3 - x = 7 ; 2x = 6 ; 4x - 8 = 0 ; 2x - 5 = x + 1 ; 3x - 8 = 4 - 3x ;$$

$$3x + 7x - 6x = 7 - 9 + 2 ; 7x + 4 = 3 ; 9x = 5 - 2x ; 5x - 2 = 2x + 3.$$

2) Résous dans $\mathbb{Q}$ les équations

a) $2(x + 1) - 3 = 7(x - 3) - 5$

b) $4(x - 3) - 3(3x + 5) = 4(4x + 7) - 8(4x + 5) - 4$

c) $4x - 2 + 3(9x - 7) = 7x - 2(4x + 5)$

d) $5,2 + 3,5x - 1,7(2x - 1,3) = 7,8$

e) $3,4 + 2,7x = 5(3,9x + 4,2) - 9,8$

3) Résous dans $\mathbb{Q}$ les équations

$$\frac{2x}{7} = \frac{3}{4}; \quad \frac{5x}{3} = \frac{12}{5}; \quad \frac{2x}{5} + \frac{3}{4} = \frac{9x}{10} - \frac{2}{5}; \quad \frac{7x + 5}{2} = \frac{4x - 3}{3};$$

$$\frac{4x + 5}{3} - 2x = \frac{5x}{3} + 7; \quad \frac{4x - 1}{5} - \frac{x - 2}{5} = \frac{3x - 2}{3} - \frac{2x + 4}{5}$$

4) Effectue les produits puis résous dans $\mathbb{Q}$ les équations

a) $(x - 5)^2 - (x + 12) = (x - 3)(x - 7)$

b) $(x + 3)^2 = (x - 3)^2 - 12x$

c) $(4x - 3)(2x - 7) = 8x(x - 4) - 2x + 21$

d) $(5x - 2)(7x + 3) = 2x + 7(5x - 2) - 12$

5) Résous dans $\mathbb{Q}$ les équations

a) $(3x - 2)(x + 3) = 0$; c) $x(5x + 7)(2x - 1) = 0$

b) $(x - 2)(x + 7)\left(x - \frac{3}{4}\right) = 0$; $\left(2x + \frac{3}{5}\right)\left(3x - \frac{5}{2}\right) = 0$

6) Factorise puis résous dans $\mathbb{Q}$ les équations

a) $(2x - 3)(x + 2) - (x + 2)(5x + 6) = 0$

b) $7x\left(3x - \frac{5}{2}\right) - 6\left(3x - \frac{5}{2}\right) = 0$

c) $(8x - 9)^2 - (x - 3)^2 = 0$

d) $(2x + 1)(3x - 5)^2 - (2x + 1)(2x - 1)^2 = 0$

7) Trouve le nombre dont le double diminué de 5 est égal au nombre lui-même augmenté de 1.

8) Détermine le nombre dont le triple moins 2 est égal au double plus 5.

9) Détermine trois nombres consécutifs dont la somme est 39.

10) Trouve trois nombres impairs consécutifs tels que leur somme soit 567.

11) Trouve le nombre dont les $\frac{2}{3}$ plus les $\frac{3}{4}$ font 1241.

12) La somme des âges de trois personnes est 105.

Trouve l'âge de chacune sachant que la deuxième est deux fois plus âgée que la première et la troisième a 10ans de moins que la deuxième.

13) Baba, Mama et Mariam, sont nés dans cet ordre à intervalles de 2ans.

La somme de leurs âges est 63. Trouve l'âge de chacun.

14) On donne :

$$A = 4 - 9x^2 + (6x + 4)(x - 3); \quad B = (3x + 2)(2x - 7) - 3x - 2$$

a) Développe et réduis A et B.

b) Factorise A et B.

c) Calcule A et B pour $x = -\frac{2}{3}$; $x = -4$; $x = 4$; $x = 0$; $x = -\frac{3}{5}$

d) Résous dans $\mathbb{Q}$ les équations : $A = 0$; $B = 0$; $A = B$.

INEQUATION DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

I. NOTION D'INEQUATION

Activité 1

Consigne 1 : Donne les symboles d'inégalité.

Consigne 2 : Donne une équation d'inconnue x . Dans cette équation, remplace le signe « = » par l'un des signes d'inégalité.

Soit l'équation du premier degré à une inconnue $13 + x = 32$.

En remplaçant le signe « = » par l'un des signes $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$, on obtient une inéquation du premier à une inconnue x .

$13 + x < 32$; $13 + x > 32$; $13 + x \leq 32$; $13 + x \geq 32$ sont des inéquations du premier à une inconnue.

II. RESOLUTION D'UNE INEQUATION

Résoudre une inéquation, c'est trouver tous les nombres vérifiant une inégalité donnée.

On utilise toute les méthodes de résolution des équations et les règles suivantes :

R₁ : Soient trois nombres rationnels a , b et c .

Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$

Si $a + c \leq b + c$ alors $a \leq b$

R₂ : Soient deux nombres rationnels a et b et m un rationnel positif.

Si $a \leq b$ alors $a \times m \leq b \times m$

Si $a \times m \leq b \times m$ alors $a \leq b$

R₃ : Soient deux nombres rationnels a et b

Si $a \leq b$ alors $a \times m \geq b \times m$

Si $a \times m \geq b \times m$ alors $a \leq b$

Exemple de résolution

Enoncé : On donne l'inéquation : $3x - 4 \leq x + 7$

- a) Les nombres -1 et 6 sont-ils solution de l'inéquation donnée ?
 b) Résous dans $\mathbb{Q}$ et représente graphiquement l'ensemble solution de l'inéquation donnée.

Exemple de réponse

a) $3x - 4 \leq x + 7$

Pour $x = -1$

$$3 \times (-1) - 4 \leq -1 + 7$$

$$-3 - 4 \leq 6$$

$$-7 \leq 6 \text{ vraie}$$

Donc -1 est solution

Pour $x = 6$

$$3 \times 6 - 4 \leq 6 + 7$$

$$18 - 4 \leq 13$$

$$-14 \leq 13 \text{ fausse}$$

Donc 6 n'est pas solution

b)

$$3x - 4 \leq x + 7$$

$$3x - x \leq 7 + 4$$

$$2x \leq 11$$

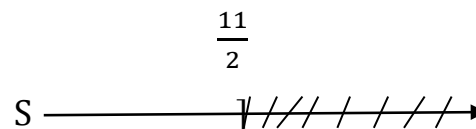
$$x \leq \frac{11}{2}$$

$$x \leq 5,5$$

L'ensemble solution s'écrit :

$$S = \left\{ x / x \in \mathbb{Q}, x \leq \frac{11}{2} \right\}$$

Représentation graphique : on représente l'ensemble solution sur un axe (droite graduée)



Activité 2

Consigne 1 : Résous dans $\mathbb{Q}$ et représente graphiquement l'ensemble solution de l'inéquation : $3(x - 4) - 2(2x + 1) < 0$

Consigne 2 : Résous dans $\mathbb{Q}$ et représente graphiquement l'ensemble solution de l'inéquation :

$$\frac{1}{3} - \frac{2 - x}{2} < -\frac{1}{6}$$

Consigne 3 : Résous dans $\mathbb{Q}$ et interprète graphiquement l'ensemble solution de l'inéquation : $5x - 3 \geq -2 + 7x$

Consigne 4 : Résous dans $\mathbb{Q}$ et interprète graphiquement l'ensemble solution de l'inéquation :

$$\frac{2x}{5} > -\frac{1}{2}$$

EXERCICES

- 1) Résous et représente graphiquement dans $\mathbb{Q}$ l'ensemble solution des inéquations

$$x + 7 < 11; \quad x - 3 \geq 7; \quad x + 5 < 2; \quad -x + 5 < 9; \quad x - 7 \geq 12; \\ -x - 4 > 10; \quad -x - 5 > -3; \quad 2x < 4; \quad 4x \leq -5; \quad 3x > -7$$

- 2) Résous et représente graphiquement dans $\mathbb{Q}$ l'ensemble solution des inéquations

$$2x + 7 < 15 - 5x; \quad 3x - 5 < 11 + 2x; \quad 7x - 3 \geq 5x + 2; \\ -4x + 7 > -15 + 3x; \quad -5x + 8 < -3x + 2; \quad 2x - 7 \geq 8x - 5$$

- 3) Résous et représente graphiquement dans $\mathbb{Q}$ l'ensemble solution des inéquations

$$2x - 3(4x + 2) > 5x - 3(7x + 1); \quad -5x + 2(3x + 1) < -2x; \\ 3x - 5(2x + 3) - 4(2x - 5) \leq 0; \quad 5 - 3(2x + 8) - 4(2x - 5) \geq 0$$

- 4) Résous et représente graphiquement dans $\mathbb{Q}$ l'ensemble solution des inéquations

$$\frac{5x}{3} + \frac{2x}{5} < \frac{3}{4}; \quad \frac{3x}{3} - \frac{5}{2} \geq \frac{5x}{2} - 3; \quad \frac{5x}{4} - \frac{3}{2} \geq 2x; \quad \frac{3x}{5} < 1; \\ \frac{2x - 3}{5} - \frac{3x + 4}{2} \geq 3x + \frac{5}{3}; \quad 5 + \frac{3x - 2}{3} < \frac{2x - 1}{2} + 5; \quad \frac{7x - 1}{2} - \frac{5x + 3}{5} \geq 0$$

- 5) Détermine les nombres dont le double plus 5 est inférieur au triple moins 1.
- 6) Détermine les nombres naturels dont le double plus 16 est inférieur au triple moins 21.
- 7) Kadi a deux frères, Moussa et Adama. L'âge de Adama est le double de celui de Kadi. La somme des âges de Kadi et Adama est inférieure à l'âge de Moussa qui a huit ans de plus que Kadi. Trouve les âges possibles. (on donnera comme réponses des nombres entiers données)

POURCENTAGES - ECHELLES

I. POURCENTAGES

Activité 1

Youma veut acheter une calculatrice. Sur une publicité, elle lit :

« Jusqu'au 31 octobre remise exceptionnelle de 5% sur les calculatrices »

Consigne 1 : Que signifie le mot « remise » ? Trouve des synonymes.

Consigne 2 : Comment lit-on l'expression « -5% » ? Que signifie-t-elle ?

Consigne 3 : Complète le tableau suivant

Prix affiché (en Fcfa)	1000	1320	1150
Remise (en Fcfa)			
Prix payé (en Fcfa)			

Définition : Un pourcentage est un coefficient de proportionnalité exprimé sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est 100.

Le pourcentage $\frac{6}{100}$ se lit « six pour cent » et se note 6%.

On utilise les pourcentages dans de nombreux domaines de la vie courante.

- Un pourcentage peut être supérieur à 100%.

Exemple : Si Malitel offre un bonus de 150%, alors si un client qui prend une recharge de 100Fcfa, aura un crédit de 250Fcfa.

- Lorsqu'un pourcentage, ou tant pour cent, est inférieur à 1% on le remplace souvent par un tant pour mille.

Consigne 4 : Un commerçant achète un article à 6200Fcfa. Il le revend avec un bénéfice de 40% sur le prix d'achat.

Calcule :

- Le bénéfice réalisé.
- Le prix de vente de l'article.

II. ECHELLES

Activité 2

Consigne 1 : Sur une carte, on peut lire « 1cm sur la carte représente 2km sur le terrain ». Que signifie cette phrase ?

On sait que $2\text{km} = 200000\text{cm}$. Donc 1cm sur carte représente 200000cm sur le terrain. On dit que l'échelle de la carte est $1/200000$. On lit « un deux cent millième ».

Les distances sur le terrain et les distances sur la carte sont proportionnelles.

$$\text{Echelle} = \frac{\text{Dimensions sur dessin}}{\text{Dimensions réelles}}$$

Consigne 2 : Sur une carte à l'échelle $1/50000$, à quelle distance (en km) correspond la distance sur carte de 1,5cm.

Consigne 3 : Sur une carte à l'échelle $1/50000$, à quelle distance (en cm) sur la carte correspond la distance sur le terrain de 10km.

EXERCICES

- 1) Convertis en fraction décimale, puis en pourcentage :
0,78 ; 0,05 ; 0,125 ; 3,4
- 2) a) Calcule les 25% de: 500F ; 320L ; 5340g.
b) Calcule les 150% des nombres : 3 ; 70 ; 2500 ; 100000 ; 52000000
- 3) Un objet coutait 1450Fcfa. Il vient d'augmenter de 12%. Combien coûte-t-il maintenant ?
- 4) Le prix affiché d'une moto est 350000Fcfa. A l'achat le client obtient une réduction de 5%. Combien a-t-il acheté la moto ?
- 5) Calcul l'intérêt annuel des capitaux suivants placé au taux de 6,5% :
2500F ; 5840F ; 14320F.
- 6) Les expressions : « carte au 1/200000 » et « 1cm représente 2km » ont-elles la même signification?
- 7) Sur une carte au 1/1000000, la distance entre deux villes est 5,7cm. Quelle est la distance réelle, à vol d'oiseau, entre ces deux villes ?
- 8) La distance réelle entre deux villes est 24km. Quelle sera la distance entre ces deux villes sur une carte au 1/50000 ?
- 9) On dispose d'une carte au 1/1200000.
 - a) Quelle sera la distance réelle (en km), à vol d'oiseau, entre deux villes distantes sur la carte, de 3,6cm ; de 5,4cm ; de 25mm.
 - b) Quelle sera la distance sur la carte (en cm) si la distance réelle, à vol d'oiseau, est de 50km ; de 180km ; de 600km.

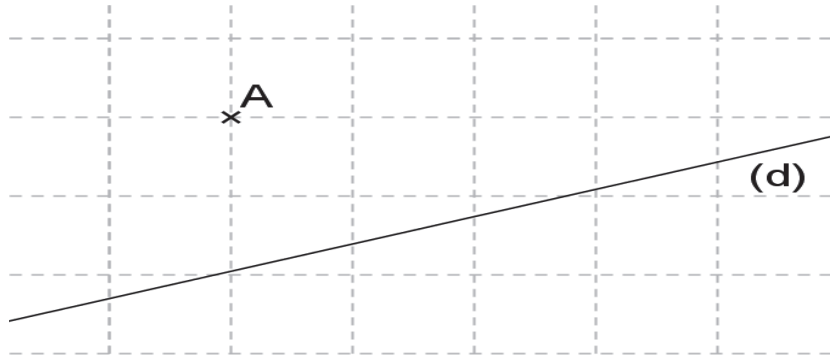
GÉOMETRIE

DROITES PARLLELES

I. CONSTRUCTION ET DEFINITION

Activité 1

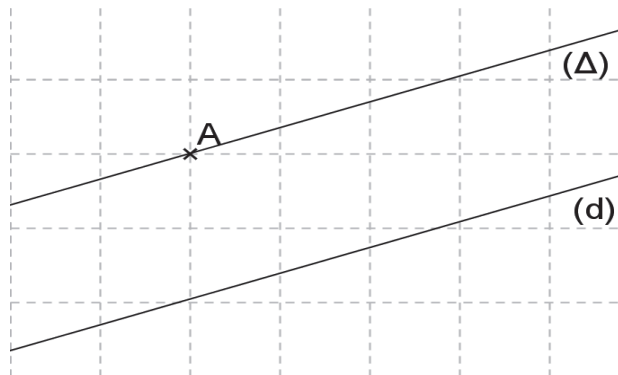
Soit (d) une droite et A un point du plan non situé sur (d).



Consigne : Trace toutes les droites passant par A et parallèles à (d) :

- 1) en utilisant la règle et l'équerre ;
- 2) en utilisant la règle et le compas.
- 3) Combien de droites peux-tu tracer ?

Axiome d'Euclide : Etant donné une droite (d) et un point A. il existe une droite (Δ) et une seule passant par A et parallèle à (d).



Définition : Deux droites sont parallèles lorsqu'elles n'ont pas de point commun ou lorsqu'elles sont confondues.

$(d) // (d')$ lorsque $(d) \cap (d') = \emptyset$ ou $(d) = (d')$

Conséquences

- ✚ Toute droite est parallèle à elle-même.
- ✚ Deux droites parallèles distinctes sont strictement parallèles.

II. PROPRIETES

Comment faire une démonstration ?

Une démonstration comporte les étapes suivantes :

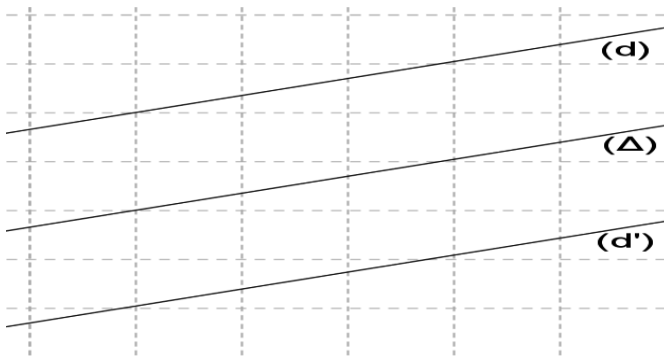
- les Hypothèses (H) : ce que l'on sait ;
- l'application des propriétés qui conviennent : Démonstration ;
- la Conclusion (C) : ce que l'on veut démontrer.

La propriété ainsi démontrée s'appelle un théorème qui est très utile pour d'autres démonstrations.

Activité 2

Consigne 1 : Trace deux droites (d) et (d') parallèles à une même droite (Δ).
Démontre que (d) et (d') sont parallèles.

Exemple de réponse



$$(H): \begin{cases} (d) // (\Delta) \\ (d') // (\Delta) \\ (d) \neq (d') \end{cases} \quad (C): (d) // (d')$$

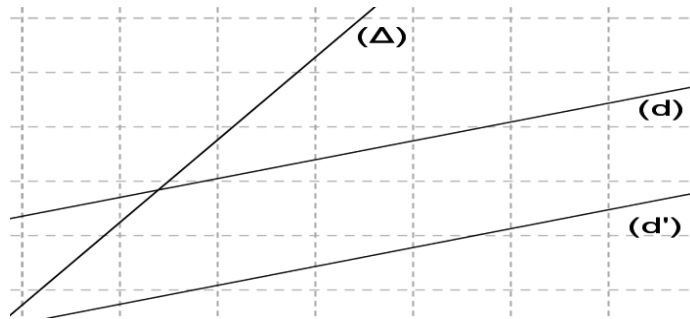
Démonstration : Si (d) et (d') se coupent en un point A, par ce point on peut mener deux droites parallèles à (Δ), ce qui est impossible (axiome d'Euclide), donc (d) et (d') ne sont pas sécantes, elles sont parallèles.

Théorème 1 : Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

Si $(d) // (\Delta)$ **et** $(d') // (\Delta)$ **alors** $(d) // (d')$

Consigne 2 : Trace deux droites (d) et (d') strictement parallèles et une droite (Δ) qui coupe (d). Démontre que (Δ) coupe (d').

Exemple de réponse



$$(H): \begin{cases} (d) // (d') \\ (d) \neq (d') \\ (\Delta) \text{ coupe } (d) \end{cases} \quad (C): (\Delta) \text{ coupe } (d')$$

Démonstration : (Δ) sécante à (d) , (d') parallèle à (d) alors $(\Delta) \neq (d')$.

Si $(\Delta) // (d')$, on a :

$(\Delta) // (d')$ et $(d) // (d')$ donc $(\Delta) // (d)$ (théorème 1) ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc (Δ) et (d') ne sont pas parallèles alors (Δ) coupe (d') .

Théorème 2 : Si deux droites sont parallèles, toute droite sécante à l'une est sécante à l'autre.

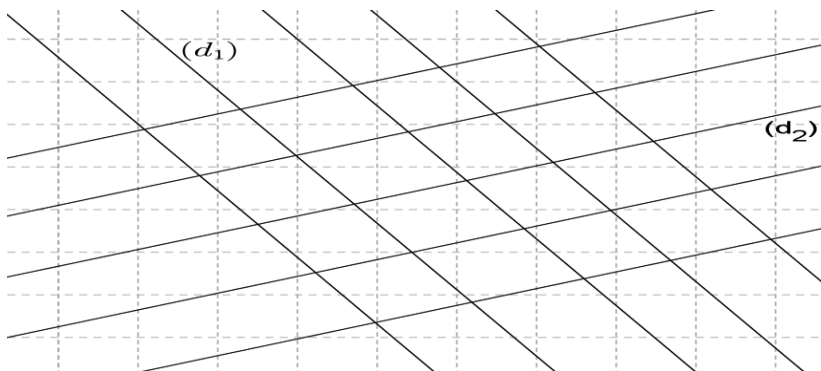
Si $(d) // (d')$ et (Δ) coupe (d) alors (Δ) coupe (d')

III. DIRECTION D'UNE DROITE

Activité 3

Consigne : Trace deux droites (d_1) et (d_2) sécantes puis quelques droites parallèles à (d_1) et quelques droites parallèles à (d_2) .

Exemple de réponse



Soit D_1 l'ensemble des droites parallèles à (d_1) et D_2 celui des droites parallèles à (d_2) .

On a $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, on dit que D_1 et D_2 sont deux ensembles **disjoints**.

D_1 et D_2 sont des classes d'équivalences d'une droite du plan.

On appelle classe d'équivalence d'une droite du plan, l'ensemble des droites qui lui sont parallèles.

Définition de la direction d'une droite : La direction d'une droite est l'ensemble des droites parallèles à cette droite.

- Deux droites parallèles ont même direction.
- Deux droites sécantes n'ont pas même direction.
- Pour représenter une direction on dessine une droite de la classe.

EXERCICES

- 1) Représente à l'aide de la règle et du compas deux droites (d) et (d') parallèles.
- 2) Soit (Δ) une droite et I un point n'appartenant pas à (Δ) . Trace la droite (d) passant par I et parallèle à (Δ) .
- 3) Représente deux droites (D) et (D') de même direction et deux droites (d_1) et (d_2) de directions différentes.
- 4) Construis un parallélogramme $ABCD$.
Trace une droite (d) passant par A et parallèle à (BD) puis la droite (d') passant par C et de même direction que (BD) .
 - a) Démontre que (d) et (d') sont parallèles.
 - b) Démontre que (AB) et (d') sont sécantes.
- 5) Trace une droite (xy) et un point A n'appartenant pas à (xy) . Construis la parallèle $(x'y')$ à (xy) contenant A .
Marque sur (xy) deux points distincts B et C et sur $(x'y')$ un point D distinct de A .
 - a) Trace le quadrilatère $ABCD$.
 - b) Une droite (Δ) coupe (AD) . Peut-elle être parallèle à (BC) ? à (CD) ?
- 6) Soit A, B et C trois points non alignés du plan.
Trace la droite (d_1) passant par A et parallèle à la droite (BC) et la droite (d_2) passant par C et parallèle à (AB) .
 - a) Prouve que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes.
 - b) Soit (d_3) passant par B et parallèle à la droite (AC) .
Comment sont les droites (d_3) et (d_1) ? les droites (d_3) et (d_2) ?

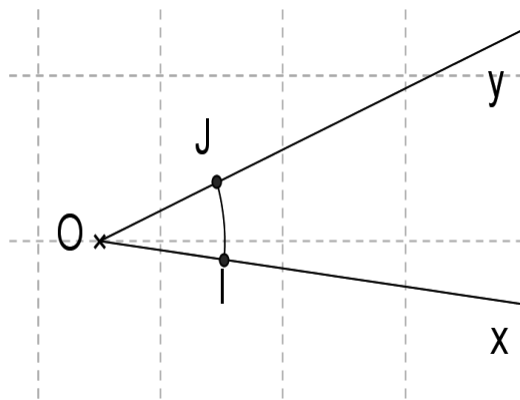
LES ANGLES

I. SECTEUR ANGULAIRE ET ANGLE

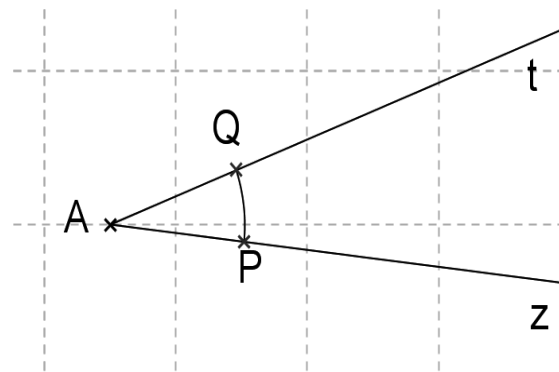
Activité 1

Consigne : Construis sur une feuille deux secteurs angulaires de même mesure. Découpe-les puis pose l'un sur l'autre. On dit qu'ils sont superposables.

Voici la construction de deux secteurs angulaires $[\widehat{xOy}]$ et $[\widehat{zAt}]$ superposables



$[\widehat{xOy}]$ est secteur $OI = OJ$



- 1- Trace une demi-droite $[Az)$
- 2- Trace le cercle de centre A et de rayon OI . Il coupe $[Az)$ en P.
- 3- Trace le cercle de centre P et de rayon IJ . Il coupe le précédent en Q.
- 4- Trace la demi-droite $[At)$ qui contient Q.

Les secteurs angulaires $[\widehat{xOy}]$ et $[\widehat{zAt}]$ sont superposables. Ils représentent le même angle noté $\widehat{xOy}$ ou $\widehat{zAt}$ et on écrit $\widehat{xOy} = \widehat{zAt}$.

Conclusion :

- Tous les secteurs angulaires superposables appartiennent à un même angle.
- Deux secteurs angulaires superposables définissent le même angle.
- Un angle est toujours représenté par un secteur angulaire.

- Un abus de langage familier substitue le mot angle au mot secteur angulaire.

II. MESURE ET CONSTRUCTION D'UN ANGLE

Activité 2

Consigne 1 : Dessine deux secteurs angulaires $[x\widehat{O}y]$ et $[u\widetilde{A}v]$ puis donne les mesures des angles $x\widehat{O}y$ et $u\widetilde{A}v$

Consigne 2 : Dessine un secteur angulaire de 30° et un secteur angulaire de 100° .

Consigne 3 : Dessine les secteurs angulaires suivants : un secteur angulaire saillant, un secteur angulaire rentrant, un secteur angulaire droit, un secteur angulaire plat, un secteur angulaire plein, un secteur angulaire nul et donne leur mesure.

Conclusion :

<i>Un angle dont la mesure est comprise entre ...</i>	<i>est un angle ...</i>
0° et 180°	saillant
180° et 360°	Rentrant
0° et 90°	Aigu
90° et 180°	Obtus
<i>Un angle dont la mesure est ...</i>	<i>est un angle ...</i>
0°	Nul
90°	Droit
180°	Plat
360°	plein

1) Unités d'angle

Le degré ($^\circ$) : Le degré est la 90^{ème} partie d'un angle droit.

- L'angle droit vaut 90°
- L'angle plat vaut 180°
- L'angle plein vaut 360°
- L'angle nul vaut 0°

Les sous-multiples sexagésimaux du degré sont :

- ✚ La minute (') : $1^\circ = 60'$
- ✚ La seconde (") : $1' = 60''$

Le grade (gr) : Le grade est la 100^{ème} partie d'un angle droit.

- L'angle droit vaut 100 gr
- L'angle plat vaut 200 gr
- L'angle plein vaut 400 gr

Les sous-multiples du grade sont :

- ✚ Le décigrade : $1\text{gr} = 10\text{ dgr}$
- ✚ Le centigrade : $1\text{gr} = 100\text{ cgr}$
- ✚ Le milligrade : $1\text{gr} = 1000\text{ mgr}$

Remarque : Un cercle mesure $360^\circ = 2\pi = 400\text{gr}$

2) **Changement de système d'unités :** Soit d la mesure d'un secteur angulaire en degrés et g sa mesure en grades on a :

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200}$$

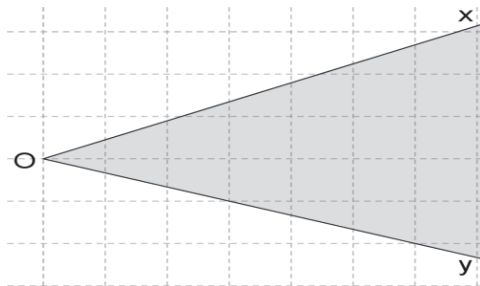
Consigne 4 : Complète le tableau suivant

Degrés	1		60	
Grades		$\frac{100}{3}$		50

III. BISSECTRICE D'UN ANGLE

Activité 3

Voici un secteur angulaire $[x\widehat{O}y]$



Consigne :

1. Trace un cercle de centre O et de rayon quelconque ; tel qu'il coupe respectivement $[Ox)$ et $[Oy)$ en A et B.

2. Trace deux cercles de même rayon et de centres A et B sécants en C (à l'intérieur du secteur).
3. Trace la demi-droite $[Ot)$ d'origine O passant par C.
4. Mesure les secteurs $[t\widehat{O}x]$ et $[t\widehat{O}y]$. Que constates-tu ?

La demi-droite $[Ot)$ s'appelle la bissectrice du secteur angulaire $[x\widehat{O}y]$

Définition : La **bissectrice** d'un secteur angulaire est la demi-droite qui le partage en deux secteurs superposables.

IV. SOMME DE DEUX ANGLES SAILLANTS

Activité 4

Consigne 1 : Dessine deux secteurs saillants $[x\widehat{O}y]$ et $[y\widehat{O}z]$ tels que $x\widehat{O}y = 30^\circ$ et $y\widehat{O}z = 40^\circ$.

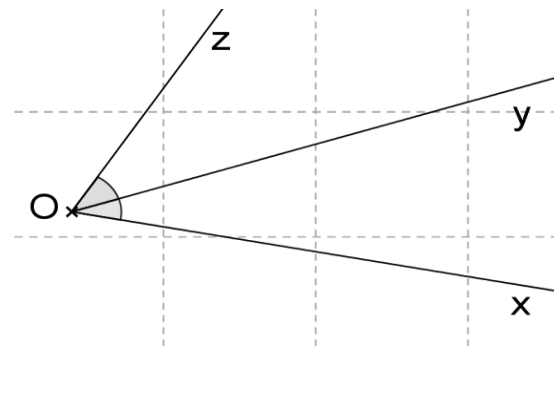
Donne la mesure de $[x\widehat{O}z]$. Justifie par un calcul.

Exemple de réponse

$$x\widehat{O}z = 70^\circ$$

$$30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$$

$$x\widehat{O}y + y\widehat{O}z = x\widehat{O}z$$



Sommes particulières

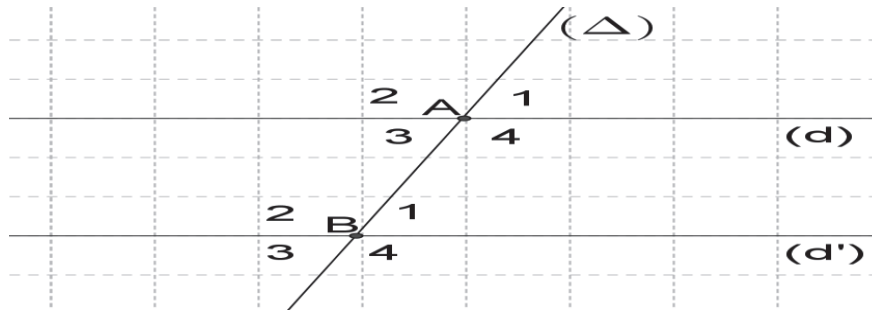
- Deux angles dont la somme des mesures est égale à 90° sont dites **complémentaires**.
- Deux dont la somme des mesures est égale à 180° sont dites **supplémentaires**.

Consigne 2 : Trouve le complémentaire et le supplémentaire de 35° et de 80° .

V. ANGLES DE DEUX DROITES PARALLELES ET D'UNE SECANTE

Activité 5

Soit deux droites (d) et (d') coupées par une droite (Δ)



Consigne 1 : Les secteurs $\widehat{A_3}$ et $\widehat{B_1}$ sont *alternes-internes*

Nomme d'autres secteurs alternes-internes. Justifie.

Consigne 2 : Les secteurs $\widehat{A_2}$ et $\widehat{B_4}$ sont *alternes-externes*.

Nomme d'autres secteurs alternes-externes. Justifie.

Consigne 3 : Les secteurs $\widehat{A_1}$, $\widehat{B_1}$ sont *correspondants*.

Nomme d'autres secteurs correspondants. Justifie.

Consigne 4 : Les secteurs $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_3$ sont opposés par le sommet.

Nomme d'autres secteurs opposés par le sommet.

Définitions :

1. Les secteurs $\widehat{A_3}$ et $\widehat{B_1}$ sont internes, situés de part et d'autre du segment $[AB]$, ils sont *alternes-internes*. De même que $\widehat{A_4}$ et $\widehat{B_2}$.
2. Les secteurs $\widehat{A_2}$ et $\widehat{B_4}$ sont externes, situés de part et d'autre de la droite (Δ) , ils sont *alternes-externes*. De même que $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_3}$.
3. Les secteurs $\widehat{A_1}$, $\widehat{B_1}$ sont situés d'un même côté de la droite (Δ) , l'un est interne et l'autre est externe, ils sont *correspondants*.
De même que : $\widehat{A_2}$ et $\widehat{B_2}$; $\widehat{A_3}$ et $\widehat{B_3}$; $\widehat{A_4}$ et $\widehat{B_4}$.
4. Les secteurs $\widehat{A_1}$ et $\widehat{A_3}$ sont opposés par le sommet car chacun d'eux a pour côté les demi-droites opposées aux côtés de l'autre.
De même que : $\widehat{A_2}$ et $\widehat{A_4}$; $\widehat{B_2}$ et $\widehat{B_4}$.

Remarque :

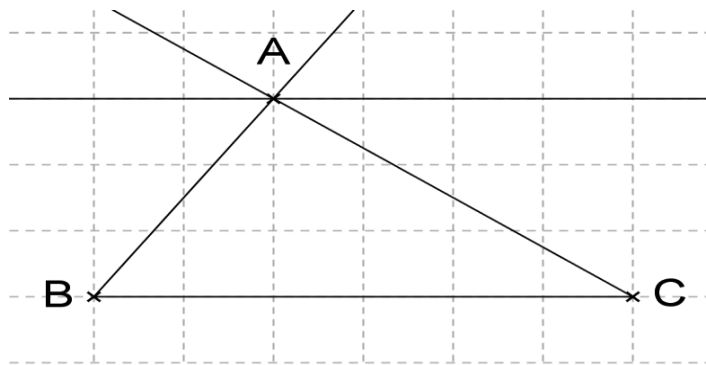
Les droites (d) et (d') étant parallèles alors :

1. Deux secteurs alternes-internes ont le même angle.
2. Deux secteurs alternes-externes ont le même angle.
3. Deux secteurs correspondants ont le même angle.
4. Deux secteurs opposés par le sommet ont le même angle.

VI. SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE

Activité 6

Voici un triangle ABC et une droite passant par A et parallèle à (BC).

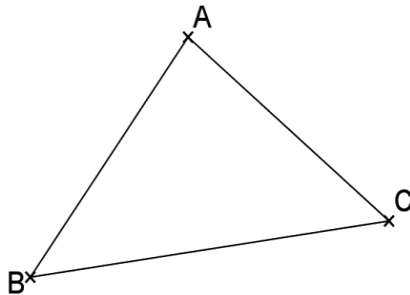


Consigne : En utilisant les angles de deux droites parallèles et d'une sécante, donne l'angle représentant la somme des angles du triangle ABC.

Théorème : La somme des angles d'un triangle quelconque est un angle plat (180°)

EXERCICES

- 1) Représente des angles de mesure :
a) 15° ; b) 130° ; c) 50° ; d) 120° ; e) 36° .
- 2) Représente un angle de 70° puis trace sa bissectrice ($d=$) à l'aide d'un rapporteur et d'une règle.
- 3) Convertis en grades : 30° ; 25° ; 120° ; 15°
Convertis en degrés : 25gr ; 150gr ; 75gr ; 200gr .
- 4) Soit un angle de $23^\circ 31'$. Donne sa mesure en minutes.
Soit un angle de $432'$. Donne sa mesure en degrés et minutes
- 5) Reproduis le triangle suivant



- a) *Mesure les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CBA}$ du triangle ABC.*
- b) *Calcule $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBA}$*
- 6) a) Trace deux demi-droites d'origine O passant par I et J telles que :
 $\widehat{IOJ} = 30^\circ$; $OI = 3\text{cm}$; $OJ = 6\text{cm}$
 - b) La perpendiculaire à (OI) passant par I coupe (OJ) en H. Place H.
 - c) *Mesure $\widehat{OHI}$ et $\widehat{IHJ}$.*
 - d) La parallèle à (OI) passant par J coupe (IH) en K. Place K.
 - e) *Mesure $\widehat{HKJ}$.*
- 7) Construis les points O, A et B tels que :
 $OA = 4\text{cm}$; $\widehat{AOB} = 80^\circ$; $OB = 4\text{cm}$
 - a) Trace la bissectrice (Δ) de l'angle $\widehat{AOB}$.
 - b) Soit C un point de (Δ) tel que $OC = 4\text{ cm}$. Mesure les angles :

$\widehat{AOC}, \widehat{OBC}, \widehat{BCO}, \widehat{OCA}$ et $\widehat{OAC}$

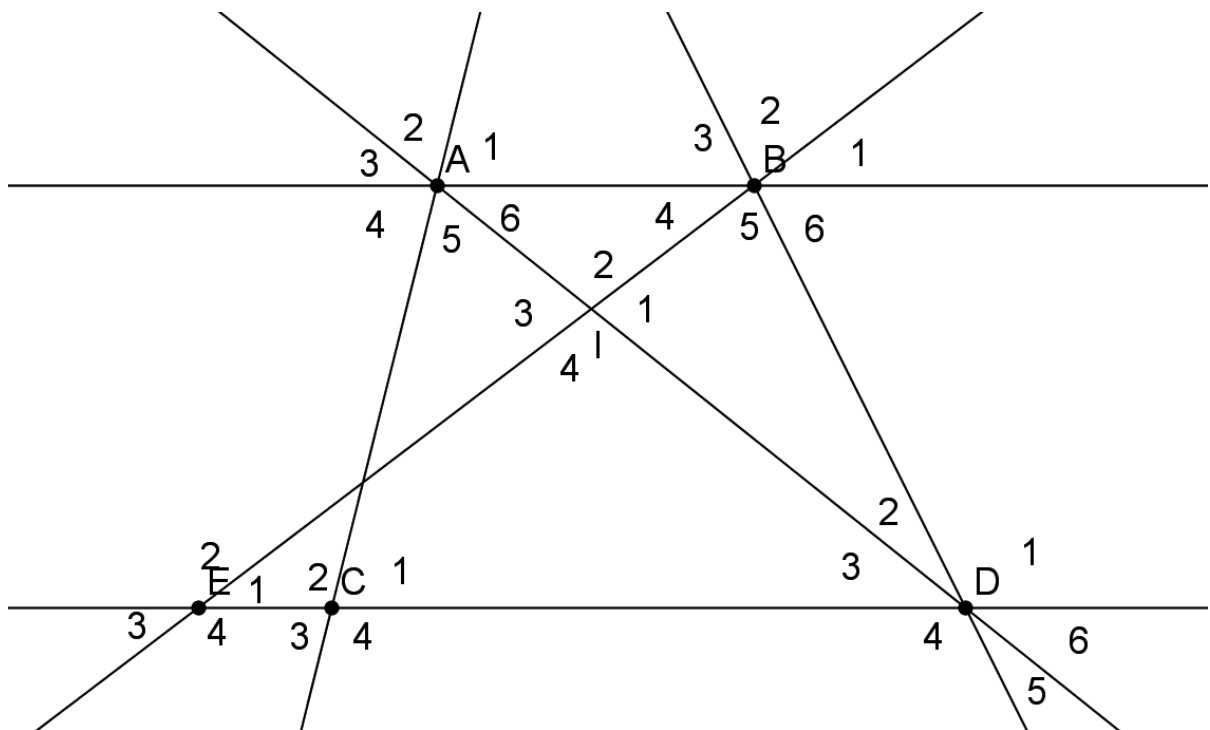
8) Trouve le complémentaire de chacun des angles suivants :

$25^\circ ; 78^\circ ; 30^\circ ; 0^\circ ; 45^\circ ; 85^\circ ; 89^\circ ; 7^\circ ; 20^\circ$

Trouve le supplémentaire de chacun des angles suivants :

$25^\circ ; 75^\circ ; 120^\circ ; 90^\circ ; 13^\circ ; 105^\circ ; 85^\circ ; 45^\circ$

9) Dans la figure suivante le quadrilatère ABCD est un trapèze dont les bases sont [AB] et [CD]



- Cite cinq paires d'angles alternes-internes.
- Cite deux angles alternes-internes égaux.
- Cite trois paires d'angles correspondants.
- Cite deux angles correspondants égaux.
- Cite cinq paires d'angles alternes-externes.
- Cite deux angles alternes-externes égaux.
- Cite deux paires d'angles opposés par le sommet.
- Cite cinq paires d'angles adjacents.

10) L'unité de longueur est le cm. Trace un segment $[AD]$ tel que $AD = 8$.

Sur ce segment place le point C tel que $AC = 5$. Construis un point B tel que $BC = 4$ et $BA = 6$. La parallèle à la droite (AB) qui passe par D coupe la droite (CB) en E.

En utilisant les lettres A, B, C, D, E, nomme les angles égaux de la figure et précise à chaque fois la raison de cette égalité.

11) Dans chaque suivant, donne les mesures des angles du triangle ABC

a) $\hat{A} = 72^\circ$, $\hat{C} = 51^\circ$, $\hat{B} = \dots$

b) $\hat{A} = 20^\circ$, $\hat{B} = 3\hat{A}$, $\hat{B} = \dots$, $\hat{C} = \dots$

c) $\hat{A} = 42^\circ$, $\hat{B} = 2\hat{C}$, $\hat{B} = \dots$, $\hat{C} = \dots$

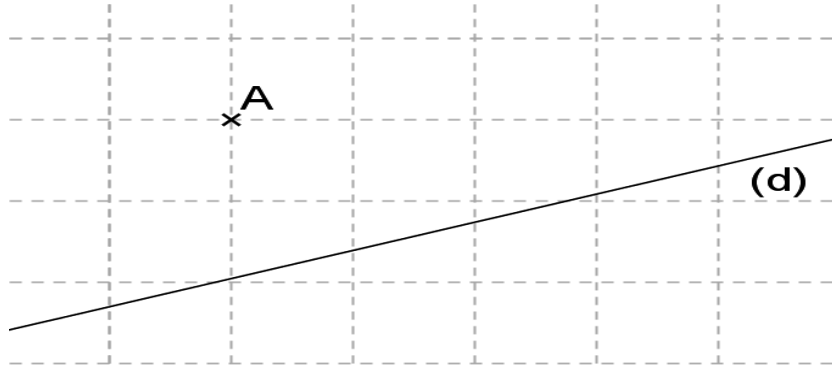
d) $\hat{B} = 2\hat{A}$, $\hat{C} = 5\hat{A}$, $\hat{A} = \dots$, $\hat{B} = \dots$, $\hat{C} = \dots$

DROITES PERPENDICULAIRES

I. CONSTRUCTION ET DEFINITION

Activité 1

Soit (d) une droite et A un point du plan non situé sur (d) .



Consigne : Trace toutes les droites passant par A et perpendiculaires à (d) :

- 1) en utilisant la règle et l'équerre ;
- 2) en utilisant la règle et le compas.
- 3) Combien de droites peux-tu tracer ?
- 4) Donne la mesure de chacun des angles formés par les deux droites.

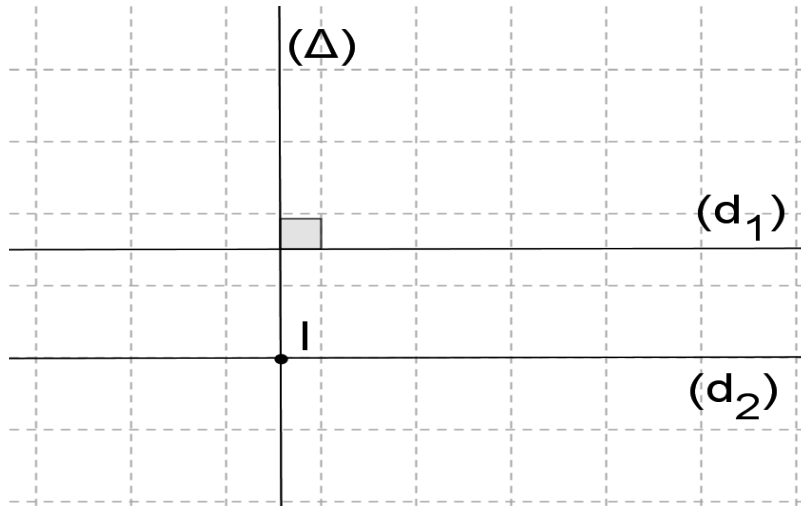
Définition : Deux droites sont perpendiculaires lorsqu'elles se coupent en formant un angle droit (90°).

Si (d) est perpendiculaire à (d') , on note $(d) \perp (d')$.

II. PERPENDICULARITE ET PARALLELISME

Activité 2

Consigne 1 : Construis deux droites (d_1) et (d_2) parallèles et (Δ) une droite perpendiculaire à (d_1) . Démontre que (Δ) est perpendiculaire à (d_2) .

Exemple de réponse

$$(H): \begin{cases} (d_1) // (d_2) \\ (\Delta) \perp (d_1) \end{cases} \quad (C): (\Delta) \perp (d_2)$$

Démonstration :

$(\Delta) \perp (d_1)$ alors (Δ) et (d_1) sont sécantes.

$(d_1) // (d_2)$ et (Δ) coupe (d_1) alors (Δ) coupe (d_2) en I.

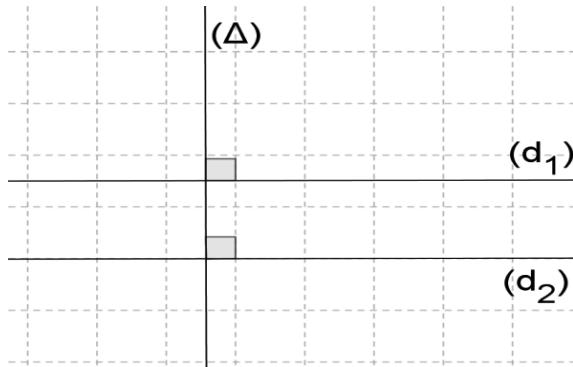
La perpendiculaire (d_3) en I à la droite (Δ) est parallèle à (d_1) car « Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles » les droites (d_2) et (d_3) donc parallèles à (d_1) . Ainsi « Par le point I, on ne peut mener qu'une parallèle à (d_1) » alors $(d_2) = (d_3)$ et $(d_2) \perp (\Delta)$.

Théorème 1 : Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Si $(d_1) // (d_2)$ et $(\Delta) \perp (d_1)$ alors $(\Delta) \perp (d_2)$

Consigne 2 : Construis deux droites (d) et (Δ) perpendiculaires et une droite (d') perpendiculaire à (Δ) . Démontre que (d) et (d') sont parallèles.

Exemple de réponse



$$(H): \begin{cases} (d) \perp (\Delta) \\ (d') \perp (\Delta) \end{cases} \quad (C): (d) // (d')$$

Démonstration :

$(d) \perp (\Delta)$ et $(d') \perp (\Delta)$ alors $(d) // (d')$

Théorème 2 : Si deux droites sont perpendiculaires, toute perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre.

Si $(d) \perp (\Delta)$ et $(d') \perp (\Delta)$ alors $(d) // (d')$

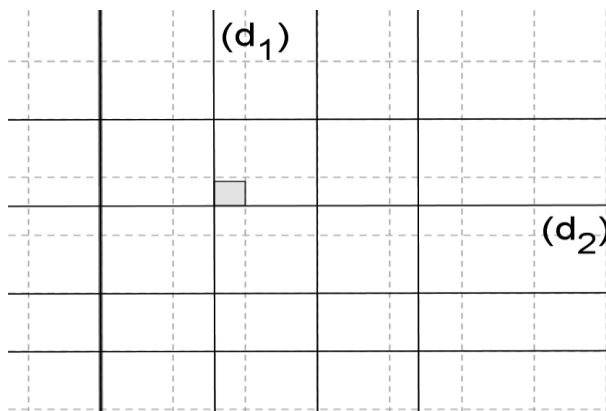
III. DIRECTION ORTHOGONALE

Activité 3

Consigne : Trace deux droites (d_1) et (d_2) perpendiculaires puis construis quelques droites parallèles à (d_1) et quelques droites parallèles à (d_2) .

Trace deux droites (d_1) et (d_2) sécantes puis quelques droites parallèles à (d_1) et quelques droites parallèles à (d_2) .

Exemple de réponse



Soit D_1 la direction de (d_1) et D_2 celle de (d_2) .

Toute droite de D_1 est perpendiculaire à toute droite de D_2 . On dit les directions D_1 et D_2 sont **orthogonales**.

Définition : Si deux droites sont perpendiculaires, leurs directions sont orthogonales.

EXERCICES

- 1) Représente à l'aide de la règle et du compas deux droites (d) et (d') perpendiculaires.
- 2) Soit (Δ) une droite et I un point n'appartenant pas à (Δ) . Trace la droite (d) passant par I et orthogonale à (Δ) .
- 3) Représente deux droites (D) et (D') de directions orthogonales et deux droites (d_1) de la direction de (D) et (d_2) de la direction de (D') .
Comment sont les droites (d_1) et (d_2) .
- 4) Le parallélogramme $ABCD$ est tel que les droites (AB) et (BD) soient Perpendiculaires.
 - a) Fais un dessin.
 - b) Démontre que les droites (BD) et (CD) sont perpendiculaires.
 - c) La droite passant par C et perpendiculaire à la droite (AB) la coupe en E . que penses-tu du quadrilatère $BDCE$?
- 5) Soient deux droites (D) et (D') et un point A n'appartenant ni à l'une, ni à l'autre. La perpendiculaire (D) passant par A coupe (D) en H . La perpendiculaire (D') passant par A coupe (D') en H' .
Que peux-tu dire des droites (AH) et (AH') lorsque :
 - a) (D) et (D') sont parallèles ?
 - b) (D) et (D') sont orthogonales ?
 - c) (D) et (D') sont sécantes ?
- 6) On considère les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 du plan, telles que :
 $(d_1) \perp (d_4)$, (d_2) et $(d_2) \perp (d_3)$.
 Démontre que :
 - a) Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.
 - b) Les droites (d_3) et (d_4) sont parallèles.
 - c) Les droites (d_1) et (d_3) .

7) Complète le tableau suivant :

	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅	D ₆
D ₁		//				
D ₂			//			
D ₃						
D ₄	⊥					⊥
D ₅			⊥	//		
D ₆						

8) Soient Δ , Δ' , d et d' quatre droites. On pose $\Delta // \Delta'$ et $d // d'$. que peux-tu dire des droites Δ' et d' si :

- a) Δ et d sont parallèles.
- b) Δ et d sont perpendiculaires.
- c) Δ et d sont deux droites sécantes et non perpendiculaire.

9) Soient Δ , Δ' , d et d' quatre droites. On pose $\Delta \perp \Delta'$ et $d \perp d'$. que peux-tu dire des droites Δ' et d' si :

- a) Δ et d sont parallèles.
- b) Δ et d sont perpendiculaires.
- c) Δ et d sont deux droites sécantes et non perpendiculaire.

LE CERCLE

I. CERCLE

Activité 1

Consigne 1 : Trace un cercle de centre O et de rayon 3 cm.

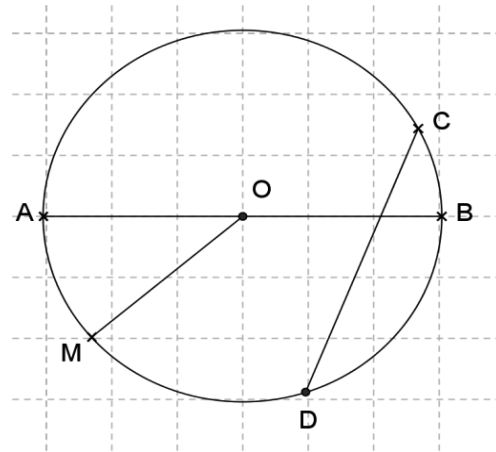
Définis alors un cercle de centre O et de rayon R.

Définition : O étant un point fixe du plan.

On appelle cercle de centre O et de rayon R l'ensemble des points du plan situés à la distance R du point O.

Consigne 2 : Observe la figure ci-contre :

- 1) Cite trois segments rayons.
- 2) Donne le rayon de ce cercle.
- 3) Cite deux cordes.
- 4) Donne le diamètre du cercle.
- 5) Comment sont les points A et B sur le cercle.



Définitions :

- Les segments qui joignent le centre du cercle à un point du cercle sont appelés **rayons** du cercle.
- La distance entre le centre du cercle et n'importe quel point du cercle est le **rayon**.
- Un segment joignant deux points du cercle est une corde.
- Une corde passant par le centre du cercle est un **diamètre**.
- Deux points situés aux extrémités d'un diamètre sont dits diamétralement opposés.
- Soit D le diamètre d'un cercle et R son rayon. On a :

$$D = 2 \times R; \quad R = \frac{D}{2}$$

II. ARC DE CERCLE

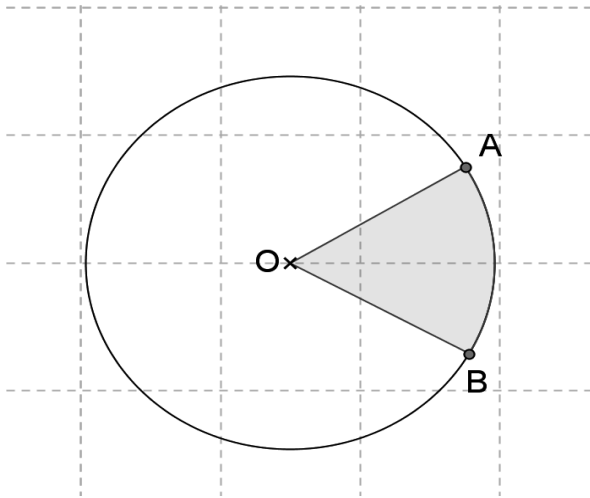
Activité 2

Consigne : Trace un cercle de centre O et deux points A et B sur le cercle.

Colorie l'intersection du cercle et du secteur angulaire $[\widehat{AOB}]$.

Cette intersection est appelée arc de cercle.

Conclusion : Si A et B désignent les points d'intersection des côtés du secteur angulaire et du cercle.



La partie du cercle situé dans le secteur saillant s'appelle arc « AB » on note $\widehat{AB}$ on lit « arc AB »

III. ANGLE AU CENTRE – ANGLE INSCRIT

Activité 3

Consigne 1 : Trace deux cercle (O ; R) et $\mathcal{C}'(O' ; R)$.

- 1) Sur $\mathcal{C}$, place deux points A et B puis trace l'angle $\widehat{AOB}$.
- 2) Sur $\mathcal{C}'$, place deux points A' et B' puis trace l'angle $\widehat{A'MB'}$.
- 3) Nomme les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'MB'}$

Définition 1 : Un angle dont le sommet est le centre du cercle et ses côtés coupent le cercle est un angle au centre de ce cercle.

Exemple : L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre du cercle $\mathcal{C}$.

Définition 2 : Un angle dont le sommet est sur le cercle et ses côtés coupent le cercle est un angle inscrit dans ce cercle.

Exemple : L'angles $\widehat{A'MB'}$ est un angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}'$.

Consigne 2 : Trace un cercle de centre de centre O et place trois points A, B et M sur ce cercle.

- 1) Trace les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AMB}$.
- 2) Mesure les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AMB}$ puis complète

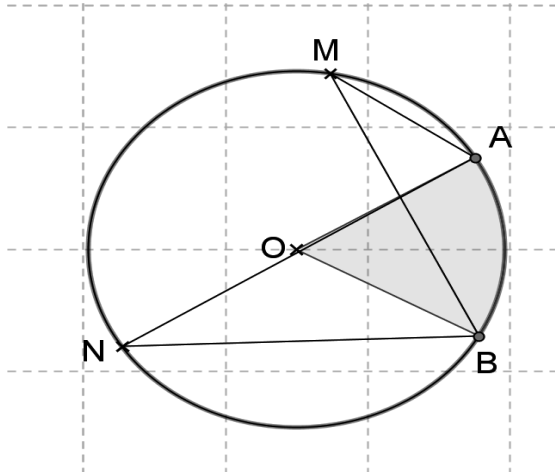
$$\widehat{AOB} = \dots \widehat{AMB} \text{ et } \widehat{AMB} = \dots \widehat{AOB}$$

Conclusion : On dit que l'angle $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre correspondant ou associé à $\widehat{AMB}$;

On dit que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AMB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$

Théorème 1 : La mesure d'un angle inscrit dans un cercle est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Théorème 2 : Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.



$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} \text{ et } \widehat{ANB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} \text{ alors } \widehat{AMB} = \widehat{ANB}$$

IV. MESURE D'UN ARC DE CERCLE - OPERATIONS

Un arc de cercle et l'angle au centre qui lui est associé ont même mesure. La mesure de l'arc « AB » se note $\text{mes}(\widehat{AB})$.

Un arc de cercle peut être mesuré en degré ($^\circ$) ou en grade (gr)

1. **Degré ($^\circ$) :** Le degré est la 90^{ème} partie d'un angle droit.

Par définition, la mesure de l'arc de cercle intercepté par un angle droit est 90° . $1^\circ = 60'$ et $1' = 60''$

Exemple : $8^{\circ}12'20''$ se lit « 8degrés12minutes20secondes »

2. Grade (gr) : Le grade est la 100^{ème} partie d'un angle droit :

$$90^{\circ} = 100\text{gr}$$

3. Conversion : Si la mesure d'un arc en degrés est (d) et (g) sa mesure en grades, on a :

$$\frac{d}{90} = \frac{g}{100} \text{ alors } d = \frac{90 \times g}{100} \text{ et } g = \frac{100 \times d}{90}$$

$$\text{ou encore } d = \frac{9 \times g}{10} \text{ et } g = \frac{10 \times d}{9}$$

Activité 4

Consigne 1 :

- 1) Un arc mesure $25^{\circ}31'$. Trouve sa mesure en minutes.
- 2) Un arc mesure $420'$. Trouve sa mesure en degrés.

Consigne 2 : Convertis en grades la mesure d'un arc de 30° , de 25° .

Consigne 3 : Convertis en degrés la mesure d'un arc de 50gr, de 150gr.

4. Opérations

Activité 5

Consigne 1 : Sur un cercle de centre O, place dans cet ordre les points A, B, C, D tels que : $mes(\widehat{AB}) = 20^{\circ}$; $mes(\widehat{AC}) = 50^{\circ}$; $mes(\widehat{CD}) = 60^{\circ}$.

Calcule : $mes(\widehat{AD})$; $mes(\widehat{BC})$.

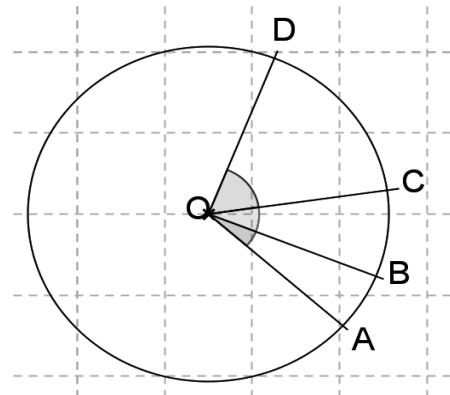
Exemple de réponse

$$mes(\widehat{AD}) = mes(\widehat{AC}) + mes(\widehat{CD})$$

$$mes(\widehat{AD}) = 50^{\circ} + 60^{\circ} = 110^{\circ}.$$

$$mes(\widehat{BC}) = mes(\widehat{AC}) - mes(\widehat{AB})$$

$$mes(\widehat{BC}) = 50^{\circ} - 20^{\circ} = 30^{\circ}.$$



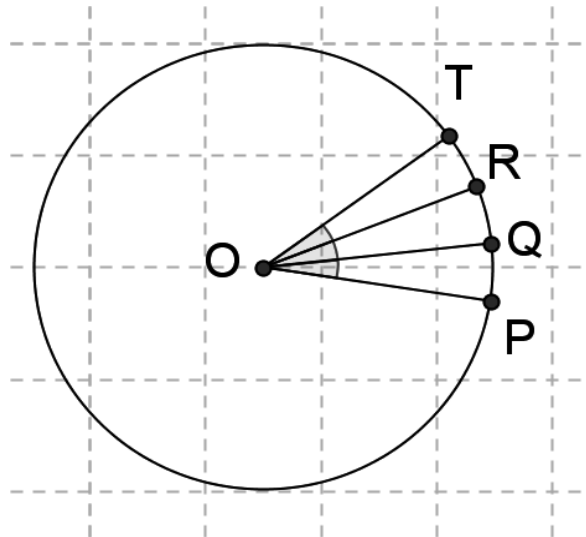
Consigne 2 : Sur un cercle de centre I, place les points P, Q, R, T tels que $mes(\widehat{PQ}) = mes(\widehat{QR}) = mes(\widehat{RT}) = 15^\circ$

Calcule $mes(\widehat{PT})$.

Exemple de réponse

$$mes(\widehat{PT}) = 3 \times mes(\widehat{PQ}) = 3 \times mes(\widehat{QR}) = 3 \times mes(\widehat{RT}) = 3 \times 15^\circ$$

$$mes(\widehat{PT}) = 45^\circ$$



EXERCICES

- 1) Soient un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et deux cordes $[AB]$ et $[CD]$ de même direction et telle que B appartient à l'arc $\widehat{AB}$.
- a) Fais une figure.
- b) Que peux-tu dire des arcs $\widehat{AC}$ et $\widehat{BD}$ des cordes $[AC]$ et $[BD]$? des cordes $[AD]$ et $[BC]$?
- 2) Complète le tableau suivant où c_1 , c_2 , c_3 et c_4 .

Cercle	c_1	c_2	c_3	c_4
Rayon en (cm)	2		$\frac{3}{2}$	
Diamètre en (cm)		5		$\frac{5}{2}$

- 3) Complète les tableaux suivants

Mesure de l'arc en degrés	0	30	40	45	135	150	180
Mesure de l'arc en grades							

Mesure de l'arc en degrés							
Mesure de l'arc en grades	25	50	60	120	135	150	180

- 4) Marque sur un cercle deux points A et B non diamétralement opposés. Ces points définissent deux arcs de cercle, l'un que tu traces en jaune et l'autre en bleu.
- Marque les points M, E, F et G sur l'arc jaune et compare les angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{AEB}$, $\widehat{AFB}$ et $\widehat{AGB}$.
- Marque les points P, Q, K et L sur l'arc bleu et compare les angles $\widehat{APB}$, $\widehat{AQB}$, $\widehat{AKB}$ et $\widehat{ALB}$.
- Recommence si $[AB]$ est un diamètre du cercle.

5) Soient un cercle de centre O et M un point de ce cercle. Une corde $[AB]$ de ce cercle est telle que $\widehat{AMB} = 30^\circ$.

a) Fais une figure.

b) Détermine en degrés la mesure de $\widehat{AOB}$.

c) Détermine en grades la mesure de l'arc $\widehat{AB}$

6) Des arcs $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD} \dots$ d'un cercle sont dits consécutifs si

$$\widehat{AB} \cap \widehat{BC} = \{B\}, \widehat{BC} \cap \widehat{CD} = \{C\}, \dots$$

Soit sur un cercle de centre O et de rayon r , trois arcs consécutifs

$\widehat{AB}, \widehat{BC}$ et $\widehat{CD}$ de mesures respectives $60^\circ, 90^\circ$ et 120° .

a) Trouve les mesures des arcs $\widehat{AC}, \widehat{AD}, \widehat{BD}$.

b) Place sur $\widehat{CD}$ le point I tel que $\widehat{CI} = 25^\circ$. Trouve $\text{mes}(\widehat{ID})$.

c) Compare les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOD}$, $\widehat{BOD}$ et $\widehat{AOC}$.

7) Sur un cercle de centre O , place quatre points A, B, C, D dans cet ordre tels que $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = 120^\circ$.

Que constates-tu ? Pouvais-tu prévoir ce résultat ? Pourquoi ?

LE TRIANGLE

I. CONSTRUCTION D'UN TRIANGLE

Activité 1

Consigne 1 : Construis un triangle DEF tel que

$$DE = 5\text{cm}, DF = 3\text{cm} \text{ et } \hat{D} = 30^\circ$$

Consigne 2 : Construis un triangle PQR tel que

$$QR = 6\text{cm}, \hat{Q} = 40^\circ \text{ et } \hat{R} = 25^\circ$$

Consigne 3 : Construis le triangle ABC dans les cas suivants :

1) $AB = 3\text{cm}; AC = 5\text{cm} \text{ et } BC = 6\text{cm}$

2) $AB = 2\text{cm}; AC = 3\text{cm} \text{ et } BC = 6\text{cm}$

Consigne 4 : En utilisant les données de la consigne 3, compare dans chacun des cas : $AC - AB$ à BC et $AC + AB$ à BC

Conclusion :

- Pour qu'un triangle existe, il faut que la mesure du plus grand côté soit comprise entre la différence et la somme des mesures des deux autres côtés.
- La donnée de l'une des trois informations suivantes permet de construire un triangle :
 1. les longueurs de deux côtés et la mesure d'un angle ;
 2. la longueur d'un côté et les mesures de deux angles ;
 3. les longueurs des trois côtés.

Définition : On appelle base d'un triangle le côté opposé à un sommet désigné.

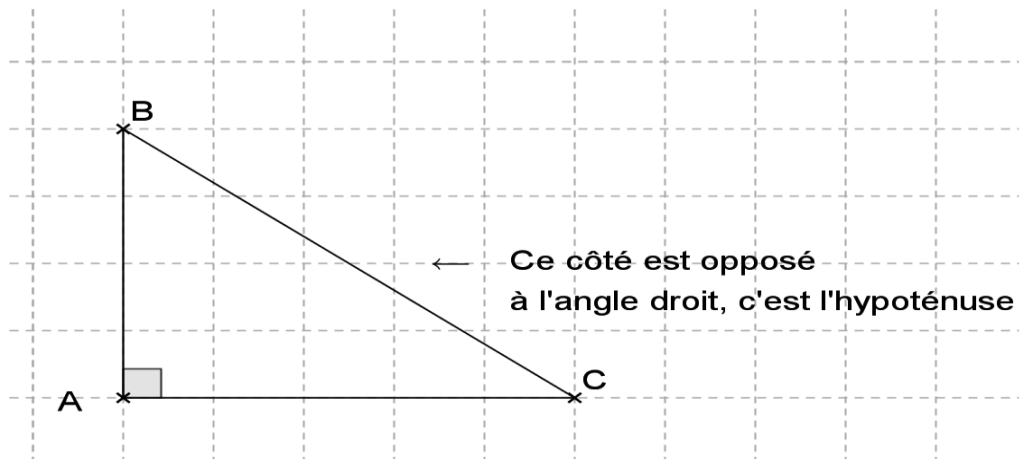
II. TRIANGLES PARTICULIERS

Activité 2

Consigne 1 : Construis et définis un triangle rectangle.

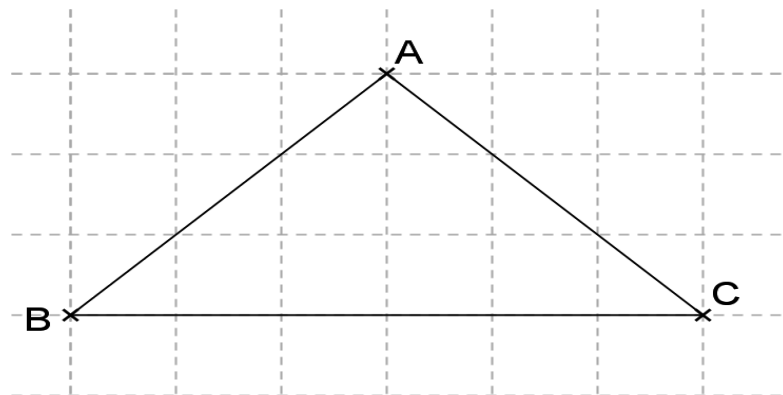
Définition 1 : Un triangle qui a un angle droit est un triangle rectangle.

Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'hypoténuse : c'est le plus grand côté.



Consigne 2 : Construis et définis un triangle isocèle.

Définition 2 : Un triangle qui a au moins deux côtés de même longueur est un triangle isocèle.

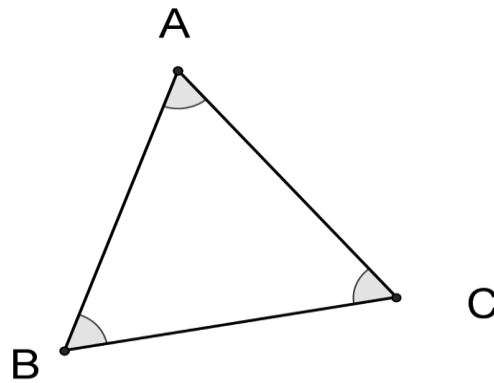


Remarque : Un triangle peut être à la fois isocèle et rectangle.

Propriété : Dans un triangle isocèle, deux angles au moins ont la même mesure ; réciproquement, si dans un triangle deux angles au moins ont la même mesure, alors ce triangle est isocèle.

Consigne 3 : Construis et définis un triangle équilatéral.

Définition 3 : Un triangle dont les trois côtés ont même longueur est un triangle équilatéral.



Remarque :

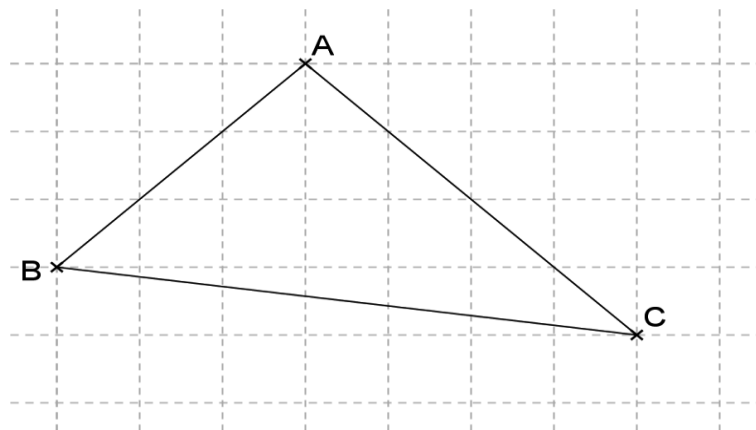
- Tout triangle équilatéral est isocèle mais tout triangle isocèle n'est pas équilatéral.
- Un triangle équilatéral ne peut jamais être rectangle.

Propriété : Dans un triangle équilatéral, chaque angle mesure 60° ; réciproquement, si dans un triangle chaque angle mesure 60° , alors ce triangle est équilatéral.

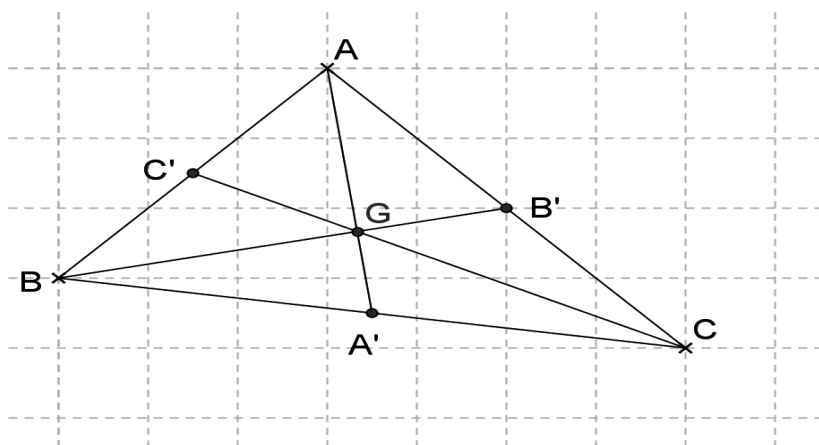
III. DROITES REMARQUABLES DANS UN TRIANGLE

Activité 3

Consigne 1 : Définis et trace les trois médianes du triangle ABC suivants.



Médiane d'un triangle : Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet du triangle et le milieu du côté opposé à ce sommet.



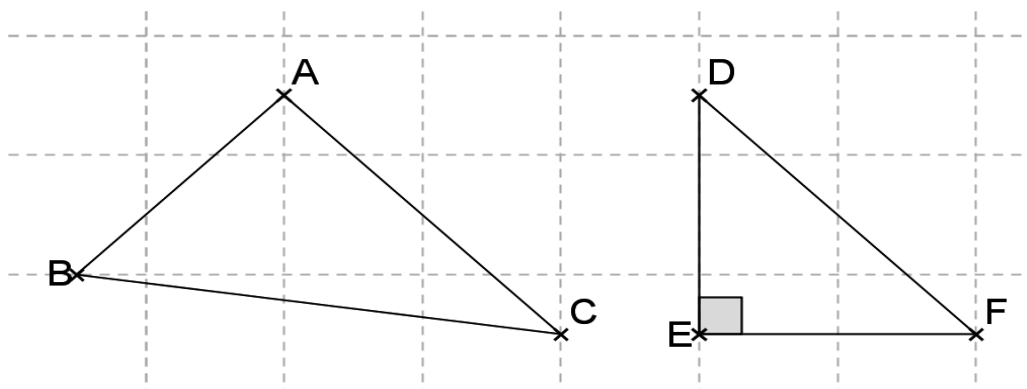
Propriétés : Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes. Leur point de concours est appelé centre de gravité du triangle.

Position du centre de gravité : Le centre de gravité d'un triangle se trouve aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane, à partir du sommet.

Dans le triangle ABC précédent : $AG = \frac{2}{3}AA'$; $BG = \frac{2}{3}BB'$ et $CG = \frac{2}{3}CC'$

Le centre de gravité d'un triangle se trouve donc toujours à l'intérieur du triangle.

Consigne 2 : Définis et trace les trois médiatrices des triangles ABC et DEF suivants.

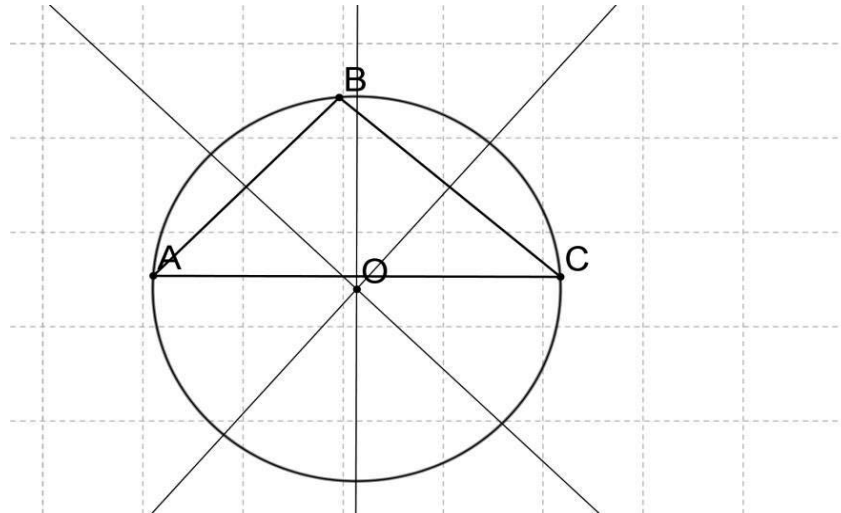


Médiatrice d'un triangle : On appelle médiatrice d'un triangle, la droite perpendiculaire à un côté de ce triangle en son milieu.

Propriété : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est à la même *distance des trois sommets* du triangle et c'est le seul point ayant cette propriété.

Il est donc le centre du cercle passant par les trois sommets du triangle.

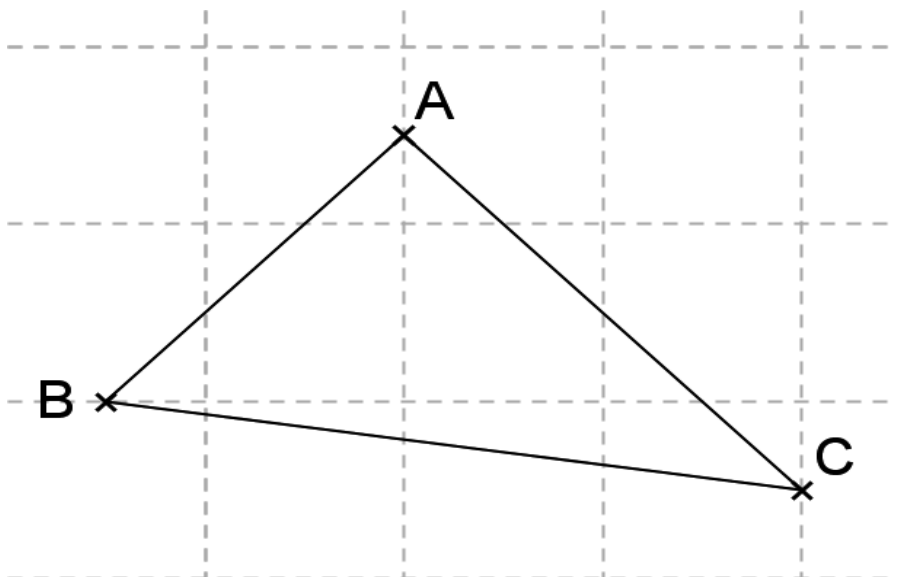
Ce cercle est appelé cercle circonscrit au triangle.



Remarque :

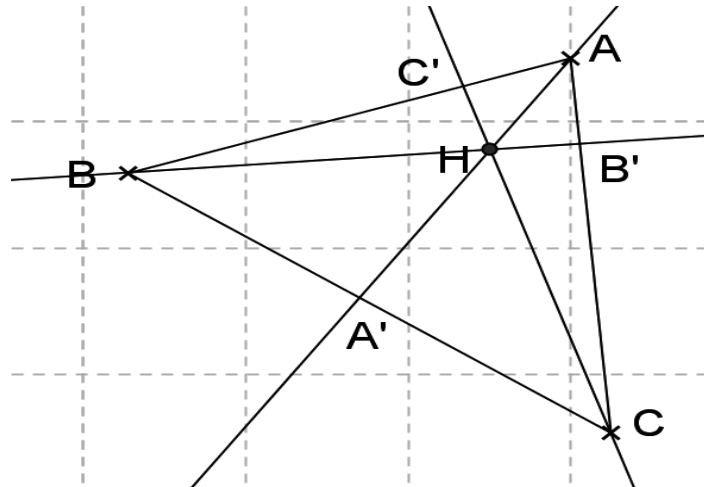
- Si le triangle est rectangle alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse. Ainsi l'hypoténuse est un diamètre du cercle et le rayon est : $r = \frac{\text{hypoténuse}}{2}$
- Si le triangle a tous ses angles aigus, le centre du cercle circonscrit est à l'intérieur du triangle.
- Si le triangle a un angle obtus, le centre du cercle circonscrit est à l'extérieur du triangle.

Consigne 3 : Définis et trace les trois hauteurs du triangle ABC suivants.



Hauteur d'un triangle : Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet de ce triangle et est perpendiculaire au support du côté opposé à ce sommet.

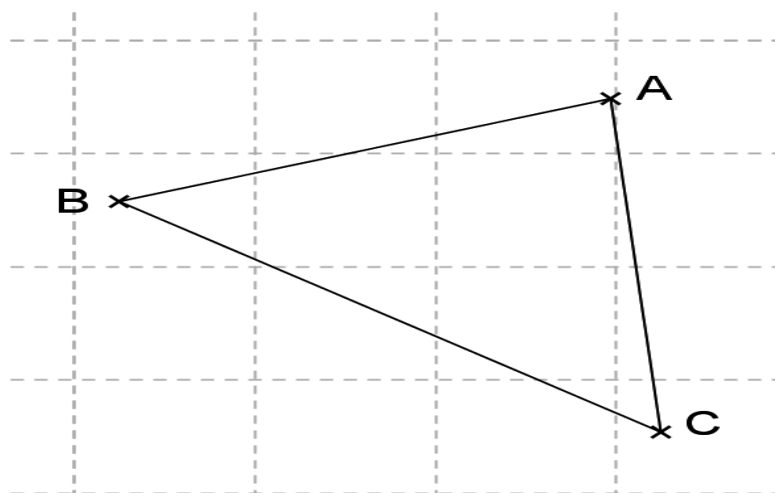
Propriété : Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes. Leur point de concours est appelé l'orthocentre de ce triangle



Remarque :

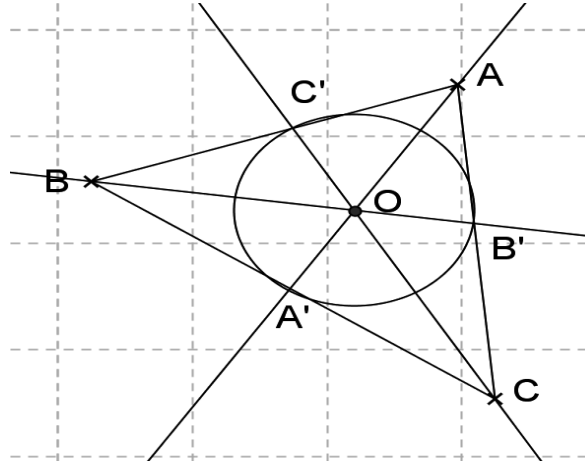
- Sur la figure, A' s'appelle le pied de la hauteur issue de A ;
- Ainsi construire la hauteur passant par A dans le triangle ABC revient à construire la perpendiculaire à la droite (BC) passant par A .
- L'orthocentre ne se trouve pas toujours à l'intérieur du triangle.

Consigne 4 : Définis et trace les trois bissectrices du triangle ABC suivants.



Bissectrice d'un triangle : On appelle bissectrice de l'angle d'un triangle la droite qui partage cet angle en deux angles de même mesure.

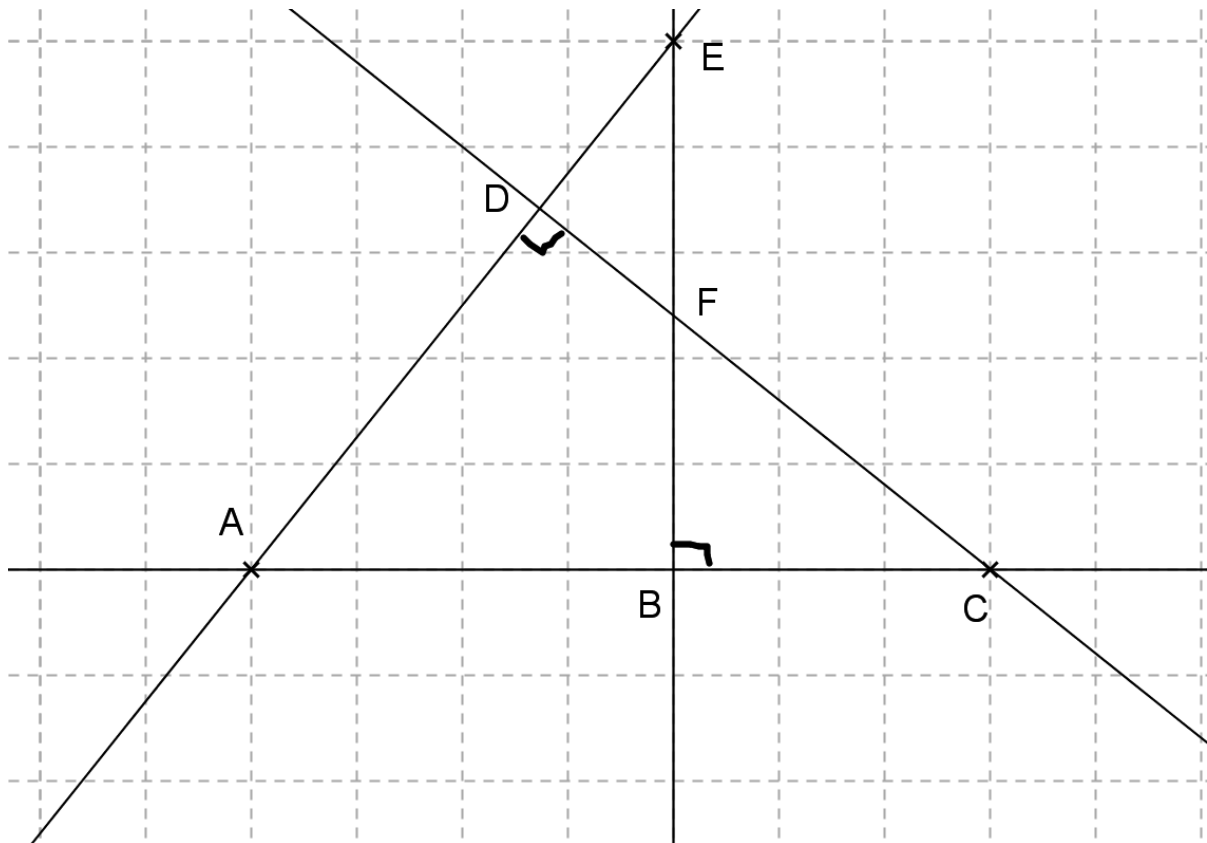
Propriété : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est à la même distance des trois côtés du triangle ; il est donc le centre du cercle inscrit dans le triangle. On dit aussi que ce cercle est tangent aux trois côtés du triangle.



EXERCICES

- 1) Trace un triangle ABC
 - a) D est un point de $[BC]$: on trace $[DA]$.
Combien obtiens-tu de nouveaux triangles ?
Combien de triangles en tout ?
 - b) E est un point de $[BD]$: on trace $[AE]$.
Combien obtiens-tu de nouveaux triangles ?
Combien de triangles en tout ?
 - c) Mêmes questions avec un nouveau point F de $[BE]$.
- 2) a) (d) est une droite. PQR est un triangle rectangle en P tel que $P \in (d)$ et $Q \in (d)$. Dessine la figure.
- b) (d) est une droite. ABC est un triangle rectangle tel que $A \in (d)$ et $B \in (d)$. Dessine plusieurs figures possibles.
- 3) Dessine et donne un programme de construction des triangles suivants :
 - a. Un triangle ABC de hauteur $[AH]$, tel que $AB = 5\text{cm}$; $HC = 3,5\text{cm}$; $BC = 4\text{cm}$.
 - b. Un triangle AGT de hauteur $[GH]$, tel que $AT = 3\text{cm}$; $TH = 5\text{cm}$; $BC = 3,5\text{cm}$.
 - c. Un triangle FGN, isocèle en F ($FG = FN$) de hauteur $[FO]$, tel que $GN = 6\text{cm}$ et $FO = 7\text{cm}$.
- 4) ABC est triangle. I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
M, N et P sont les milieux respectifs de $[KJ]$, $[KI]$ et $[IJ]$.
Vérifie que A, M et I sont alignés.
Trouve d'autres points alignés. Trouve des droites parallèles.
- 5) Soit M un point sur un cercle (O, R) .
 - a. Trace la médiatrice (Δ) de $[OM]$ et $(\Delta) \cap \mathcal{C} = \{B, C\}$.
 - b. A étant le point diamétralement opposé à M sur $\mathcal{C}$, place le point A.
 - c. Montre que le triangle ABC est équilatéral.

- d. $(AM) \cap (BC) = \{H\}$. montre que le triangle ABH est rectangle.
- 6) Construis un triangle ABC tel que : $AB = 10\text{cm}$; $\widehat{CAB} = 50^\circ$; $\widehat{CBA} = 70^\circ$
- Construis le cercle de centre O circonscrit à ce triangle.
Mesure son rayon. Le centre O est-il intérieur au triangle ou extérieur ?
 - Reprends la construction du triangle ABC et construis son orthocentre H.
 - Reprends la construction du triangle ABC et construis son centre de gravité G.
 - Reprends la construction du triangle ABC et construis son cercle inscrit.
- 7) Mêmes questions qu'à l'exercice 6 avec le triangle DEF tel que
 $DE = 10\text{cm}$; $DF = 7\text{cm}$ et $EF = 4\text{cm}$
- 8) Reproduis la figure suivante :



- a. Que représente le point F pour le triangle AEC ? le point A pour le triangle FEC ?
 - b. Démontre que les droites (AF) et (EC) sont perpendiculaires.
- 9) Construis un triangle ABC sachant que :
 $AB = 9\text{cm}$; $\widehat{ABC} = 55^\circ$; $\widehat{ACB} = 80^\circ$
 Construis le centre I du cercle inscrit dans le triangle ABC et calcule les mesures des angles des triangles IAB, IBC et ICA.
- 10) Que peux-tu dire d'un triangle dans lequel :
 - a. le centre du cercle circonscrit est confondu avec le centre de gravité.
 - b. l'orthocentre est confondu avec le centre de gravité.
 - c. les médianes, les médiatrices et les hauteurs sont confondues.
- 11) Mariam a dessiné un triangle ABC et son orthocentre H ; elle prétend qu'en traçant la droite (AH), elle obtient une médiane ! Est-ce possible ?

DROITE GRADUÉE

I. AXE ET ABSCISSE D'UN POINT

Activité 1

Consigne 1 : Sur un axe (Δ), place deux points O et I d'abscisses respectives 0 et 1.

Repère d'un axe :

Sur un axe, le point d'abscisse 0 est appelé origine de l'axe (ici le point O).

Le couple de points (ou bipoint) former par l'origine et le point d'abscisse 1 est un repère de l'axe [ici le repère est (O ; I)]

Remarque : Tout bipoint d'un axe peut être un repère de cet axe.

Abscisse d'un point :

A tout point M d'un axe correspond un et un seul nombre appelé son abscisse et notée x_M . On dit qu'il existe une bijection de l'ensemble des points d'une droite vers l'ensemble des nombres.

Consigne 2 : Sur un axe de repère (O ; I), place les points A, B et d'abscisses respectives -3 ; 1,5 et 3 puis les points D, E et F tels que $x_D = -1,5$; $E\left(\frac{9}{2}\right)$ et $x_F = \frac{1}{2}$

II. MESURE ALGÈBRE DU BIPOINT

La mesure algébrique du bipoint (A ; B) se note $\overline{AB}$ on lit « AB barre » ou « AB surligné » ou « mesure algébrique du bipoint (A ; B) »

Soit un axe de repère (O ; I) et soient A et B deux points de cet axe.

La mesure algébrique du bipoint (A ; B) se calcule par la formule :

$$\overline{AB} = |x_B - x_A|$$

Activité 2

Soit les points A (-3), B (-1) et C(4) d'un même axe (Δ) d'origine O.

Consigne 1 : Place les points A, B et C sur (Δ) puis calcule

$$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}, \overline{BA}, \overline{CA}, \overline{CB}.$$

Que peux-tu conclure pour $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$, $\overline{AC}$ et $\overline{CA}$, $\overline{BC}$ et $\overline{CB}$?

Consigne 2 : Calcule $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ Que peux-tu conclure ?

Conclusion : Pour des points d'un même axe $\overline{AB} = -\overline{BA}$, $\overline{AC} = -\overline{CA}$,
 $\overline{BC} = -\overline{CB}$

Si O est l'origine d'un axe, l'abscisse d'un point M de cet axe peut s'écrire
 $x_M = \overline{OM}$

III. RELATION DE CHASLES

Activité 3

Sur un axe, place au hasard trois points A, B et C.

Consigne 1 : Complète

$$\overline{AB} = \dots; \overline{AC} = \dots; \overline{BC} = \dots; \overline{AB} + \overline{BC} = \dots$$

Consigne 2 : Compare avec $=$ ou $\neq$ $\overline{AB} + \overline{BC}$ et $\overline{AC}$

Enoncé : Pour tous points A, B et C d'un axe, $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

Cette égalité s'appelle la **relation de Chasles**.

Consigne 3 : Utiliser la relation de Chasles pour compléter

$$\overline{MP} + \overline{PN} = \dots; \overline{...K} + \overline{...F} = \overline{E...}; \overline{PK} + \dots = \overline{...N};$$

IV. DISTANCE DE DEUX POINTS

La distance de deux points A et B est notée $d(A ; B)$ et la longueur du segment $[AB]$ se note AB donc $d(A ; B) = AB$

La distance du point A au point B d'un axe se calcule par la formule :

$$d(A, B) = |x_B - x_A|$$

Activité 4

Sur un axe de repère (O ; I), place les points A, B et C d'abscisses respectives : +2; -5 et +5

Consigne 1 : Calcule

$d(A ; B)$, $d(A ; C)$, $d(B ; C)$, $d(B ; A)$, $d(C ; A)$, $d(C ; B)$. Que constates-tu?

Consigne 2 : Calcule

$d(A ; A)$, $d(B ; B)$, $d(C ; C)$. Que constates-tu ?

Remarque : Quels que soient deux points A et B,

- $d(A ; B) = d(B ; A)$
- $d(A ; A) = d(B ; B) = 0$

V. ABSCISSE DU MILIEU D'UN SEGMENT

Sur un axe, le milieu M du segment [AB] est tel que

$$\overline{MA} = -\overline{MB} \text{ ou } \overline{AM} + \overline{MB} = 0$$

L'abscisse du point M se calcule par la formule : $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$

Activité 5

Consigne : Sur un axe de repère (O, I), place les points A(-4), B(-2) ; C(3).

Calcule les abscisses des points M, N, K et L milieux respectifs des segments [AB], [AC], [OA] et [IC]

VI. CHANGEMENT D'ORIGINE SANS CHANGEMENT D'UNITE

Soit une droite graduée $\mathcal{D}$ de repère (O ; I) et soit (O' ; I') un autre bipoint unitaire de $\mathcal{D}$, distinct de (O ; I), ($OI = O'I'$).

Pour tout point M de $\mathcal{D}$, la relation de Chasles permet d'écrire :

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$$

Soit x_M l'abscisse de M dans le repère (O ; I), $x_M = \overline{OM}$

Soit x'_M l'abscisse de M dans le repère (O' ; I'), $x'_M = \overline{O'M}$

Soit $x_{O'}$ l'abscisse de O' dans le repère (O ; I), $x_{O'} = \overline{OO'}$

Alors $x_M = x_{O'} + x'_M$ ou $x'_M = x_M - x_{O'}$ (Formule du changement d'origine)

Activité 6

Consigne : Sur un axe de repère (O ; I), place les points A ; B ; C et O' d'abscisses respectives -3 ; 2 ; 5 et 3. Calcule les abscisses des points A ; B ; C ; O et I dans le repère d'origine O'.

VII. CHANGEMENT D'UNITE SANS CHANGEMENT D'ORIGINE

Soit x_M l'abscisse d'un point M dans le repère (O ; I) et X_M son abscisse dans le repère (O ; I').

Si $\overline{OI'} = a \cdot \overline{OI}$ alors $x_M = a \cdot X_M$ d'où $X_M = \frac{x_M}{a}$

Activité 7

Consigne : Sur un axe de repère (O ; I), place les points I' ; E ; F et G d'abscisses respectives 2 ; -5 ; 4 et 6.

Trouve les abscisses des points E, F et G dans le repère (O, I')

EXERCICES

- 1) Soit une droite graduée d'origine I et soit les points A ; B ; C ; D et E d'abscisses respectives : 5 ; 2,5 ; 1 ; -6 et 3,5.
 - a) Place ces points sur la droite graduée.
 - b) Calcule : $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CD}, \overline{CE}$,
- 2) Sur un axe (Δ) de repère (O ; I), place les points P(-3) ; Q(2) ; R(4) et S(3,5). Calcule l'abscisse de chacun des points A, B, C et D milieu respectifs des segments [PQ], [PI], [QS] et [PS]
- 3) Sur une droite graduée d'origine O, soit les points A ; B ; C d'abscisses respectives : +2 ; -5 ; 4,5.
 - a) Place ces points sur la droite graduée.
 - b) Calcule : $d(A ; B), d(A ; C), d(B ; C), d(O ; A), d(O ; B), d(O ; C)$.
- 4) Sur un axe de repère (O ; I), place les points A ; B et C d'abscisses respectives -3 ; 2 et 5.
 - a) Calculer $\overline{AB}, \overline{BC}$ et $\overline{AC}$ puis compare $\overline{AB} + \overline{BC}$ et $\overline{AC}$. Pouvais-tu prévoir ce résultat ? pourquoi ?
 - b) Calculer $d(I, A)$ et $d(O, C)$.
 - c) Calculer l'abscisse de K milieu de [AC]
- 5) Sur une droite graduée (d) munie d'un repère (O ; I).
 - a) Place sur cette droite les points A, B, C, D tels que $\overline{OA} = -3 ; \overline{OB} = 5 ; \overline{OC} = 2 ; \overline{OD} = 1,5$
 - b) Calcule : $\overline{AB} ; \overline{BC} ; \overline{CD} ; \overline{DA}$
- 6) Sur un axe de (O ; I), on donne les points A ; B ; C ; D et E d'abscisses respectives : -9 ; 7 ; -3 ; 10 et -2.
 - a) Calcule $\overline{AB} ; \overline{BD} ; \overline{CE} ; \overline{DC}$.
 - b) Calcule $\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DC} + \overline{CE}$.
 - c) Calcule $\overline{AE}$.
 - d) Compare les résultats des questions b) et c).

7) Soit un axe de repère $(O ; I)$ et trois points $A ; B$ et C d'abscisses respectives $-2 ; 2$ et x .

a) Calcule $\overline{AC}$; $\overline{BC}$ à l'aide de x .

b) Si l'on sait que $\overline{BC} = 3$, trouve l'abscisse x de C .

c) Dans ce cas, calcule $\overline{AC}$.

8) On donne sur un axe (Δ) de repère $r = (O ; I)$ les points $A ; B ; I'$ et O' d'abscisses respectives $2,6 ; 5 ; -6$ et -7 .

a. Calcule le repère r l'abscisse du point M milieu de $[AB]$.

b. Calcule l'abscisse de B' telle que A soit milieu de $[BB']$ et l'abscisse du point C telle que $\overline{BC} = -9,8$.

c. Calcule $\overline{AB}$; $\overline{AC}$; $\overline{CI'}$ et $\overline{O'B}$.

d. Calcule $d(A, B)$, $d(A, C)$, $d(B, C)$.

e. On prend un nouveau repère $r' = (O' ; I')$. Calcule dans ce nouveau repère r' les abscisses des points A, B, B' et C .

f. Calcule dans le repère r' : $\overline{AB}$; $\overline{AC}$; $\overline{CI'}$ et $\overline{O'B}$.

g. Compare les résultats des questions c et f. que peux-tu en conclure ?

QUADRILATÈRES

Un quadrilatère est polygone à quatre côtés. Les quadrilatères particuliers sont le parallélogramme, le rectangle, le losange, le carré et le trapèze. Le rectangle, le losange, le carré et le trapèze sont des parallélogrammes particuliers.

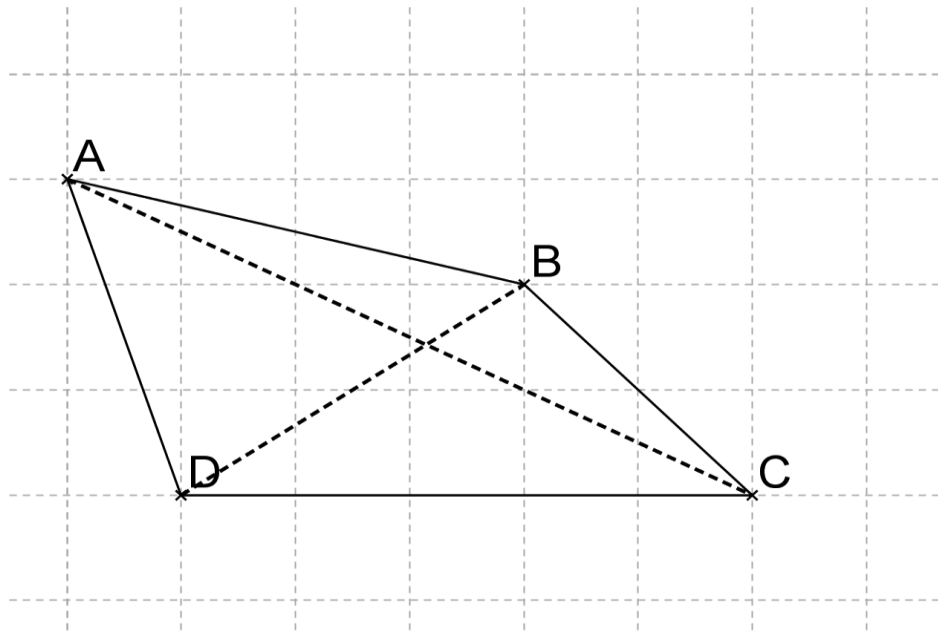
I. QUADRILATÈRE NON CROISÉ – QUADRILATÈRE CROISÉ

a. Quadrilatère non croisé

Activité 1

Consigne : Construis un quadrilatère non croisé ABCD et nomme ses sommets, ses côtés, ses diagonales et ses noms possibles. Comment sont ses diagonales ?

Exemple de réponse



Les sommets sont les points A, B, C et D. les sommets A et C sont opposés de même que B et D.

Les côtés sont : $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$

Les diagonales sont : $[AC]$ et $[BD]$

Les noms possibles : ABCD, ADCB, BCDA, BADC, CDAB, CBAD, DABC et DCBA.

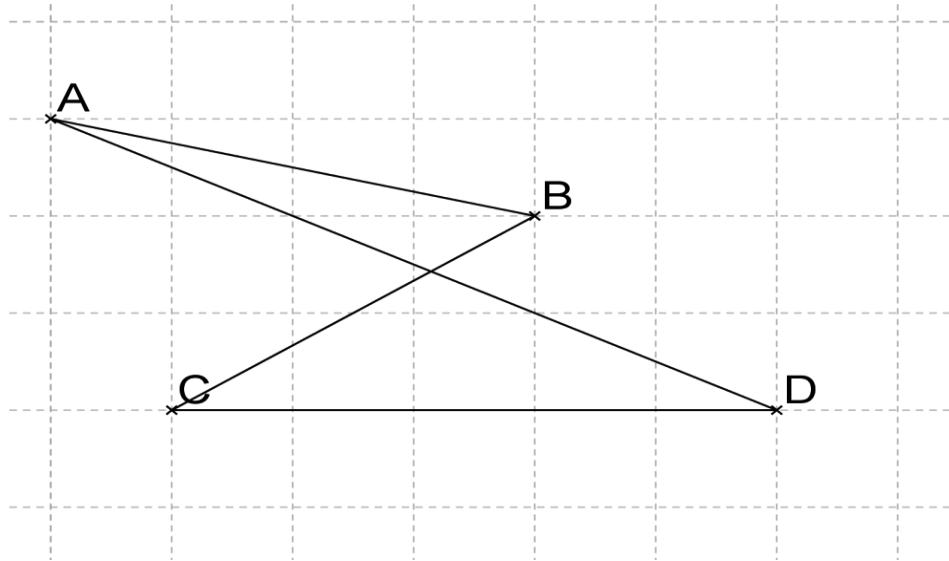
Remarque : Dans un quadrilatère non croisé, les diagonales se coupent.

b. Quadrilatère croisé

Activité 2

Consigne : Construis un quadrilatère croisé ABCD et nomme ses sommets, ses côtés, ses diagonales et ses noms possibles. Comment sont ses diagonales ?

Exemple de réponse



Les sommets sont les points A, B, C et D. les sommets A et C sont opposés de même que B et D.

Les côtés sont : [AB], [BC], [CD] et [DA]

Les diagonales sont : [AC] et [BD]

Les noms possibles : ABCD, ADCB, BCDA, BADC, CDAB, CBAD, DABC et DCBA.

Remarque : Dans un quadrilatère croisé, les diagonales ne se coupent pas.

II. LE PARALLELOGRAMME

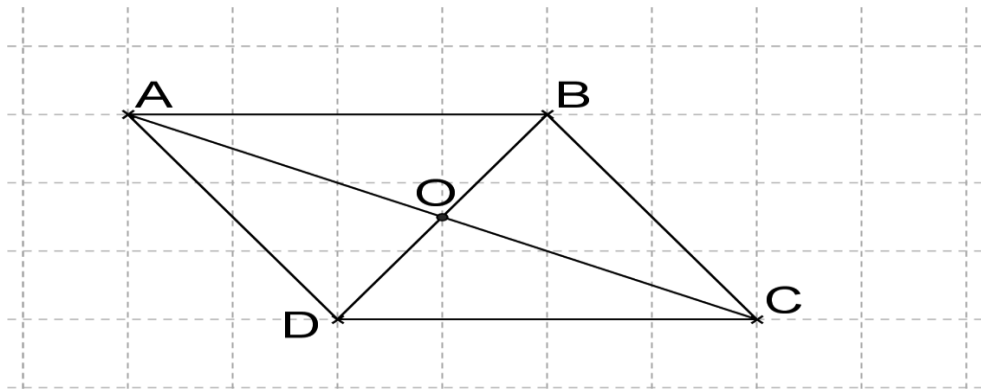
Un parallélogramme est un quadrilatère non croisé.

1. Propriétés

Activité 3

Consigne 1 : Construis un parallélogramme ABCD et ses diagonales puis donne ses propriétés.

Exemple de réponse



Propriété 1 (P1) : Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles.

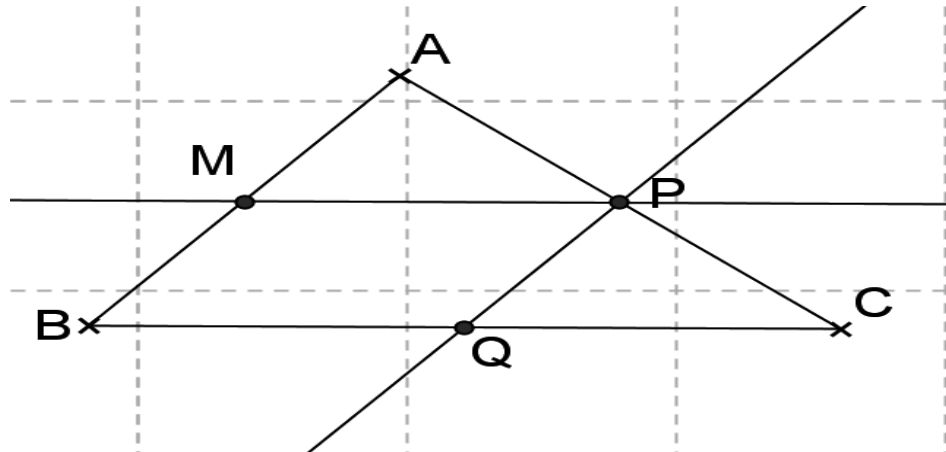
Propriété 2 (P2) : Dans un parallélogramme, deux cotés opposés ont même longueur.

Propriété 3 : Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu.

Remarque : le point d'intersection des diagonales est centre du parallélogramme.

Consigne 2 : Par le milieu M du côté [AB] d'un triangle ABC, mène la parallèle à (BC). Cette droite coupe (AC) en un point P. Démontre que le point P est le milieu de [AC].

Exemple de réponse



(H): $\begin{cases} ABC \text{ est un triangle} \\ M \text{ est le milieu de } [AB] ; \\ (MP) \parallel (BC) \\ P \in (AC) \end{cases}$

(C): P est le milieu de [AC]

Démonstration

M milieu de $[AB]$; $(MP) \parallel (BC)$ et (MP) coupe (AC) en P par P on mène la parallèle à (AB) .

$(PQ) \parallel (AB)$ et $(PQ) \cap (BC) = \{Q\}$

$\left. \begin{array}{l} (MP) \parallel (BC) \text{ ou } (MP) \parallel (BQ) \\ (PQ) \parallel (AB) \text{ ou } (PQ) \parallel (BM) \end{array} \right\} \text{ alors } MPQB \text{ est un parallélogramme}$

D'après P1 $MP = BQ$ et $MA = MB$ (H) donc $MB = PQ$ et $MA = PQ$.

Comme $(MA) \parallel (PQ)$ et $MA = PQ$ alors $APQM$ est un parallélogramme d'après P2. On en déduit d'après P1 que $MQ = AP$ ①

$\left. \begin{array}{l} (MQ) \parallel (AP) \text{ ou } (MQ) \parallel (AQ) \\ (MP) \parallel (BC) \text{ ou } (MP) \parallel (BQ) \end{array} \right\} \text{ alors } MPCQ \text{ est un parallélogramme}$

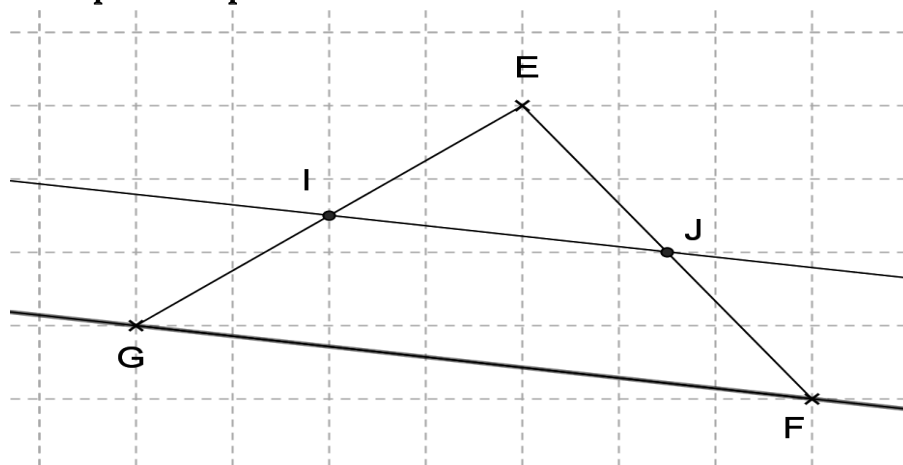
d'où $PC = MQ$ ②

De ① et ② on déduit que $AP = PC$ alors P milieu de $[AC]$

Théorème 1 : Lorsqu'on mène par le milieu d'un côté d'un triangle la parallèle à un côté, cette droite coupe le troisième côté en son milieu.

Consigne 3 (Réciproque) : Trace un triangle EFG puis la droite passant par le milieu I de $[EG]$ et le milieu J de $[EF]$. Démontre que la droite (IJ) est parallèle à (GF) .

Exemple de réponse :



(H): $\left\{ \begin{array}{l} \text{EGF est un triangle} \\ \text{I est le milieu de } [EG] ; \\ \text{J est le milieu de } [EF] \end{array} \right.$

(C): $(IJ) \parallel (GF)$

Démonstration

Menons par I milieu de [EG] la parallèle qui coupe (EF) en J'.

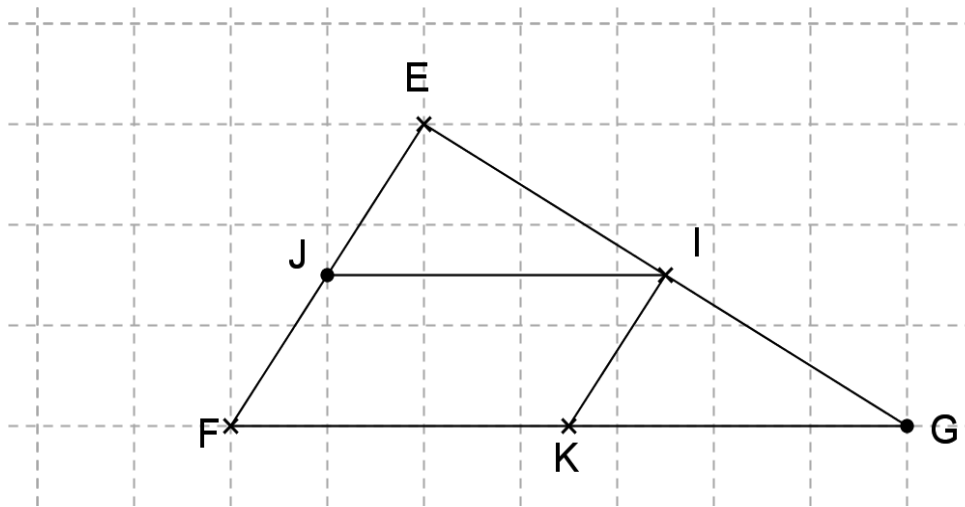
J' est le milieu de [EF] d'après le théorème 1

J est le milieu de [EF] d'après (H) alors $J = J'$ d'où $(IJ) // (FG)$

Théorème 2 : La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

Consigne 4 (Conséquences) : Démontre que $IJ = \frac{1}{2} FG$

Exemple de réponse :



$$(H): \begin{cases} I \text{ milieu de } [EG] \\ J \text{ milieu de } [EF] \\ K \text{ milieu de } [FG] \end{cases} \quad (C): IJ = \frac{1}{2} FG$$

Démonstration :

I milieu de [EG] et J milieu de [EF] alors $(IJ) // (FG)$ ou $(IJ) // (GK)$ ①

J milieu [EF] et K milieu de [FG] alors $(JK) // (EG)$ ou $(JK) // (IG)$ ②

De ① et ② IJKG est un parallélogramme donc $IJ = KG$ et $KG = \frac{1}{2} FG$

$$D'où IJ = \frac{1}{2} FG$$

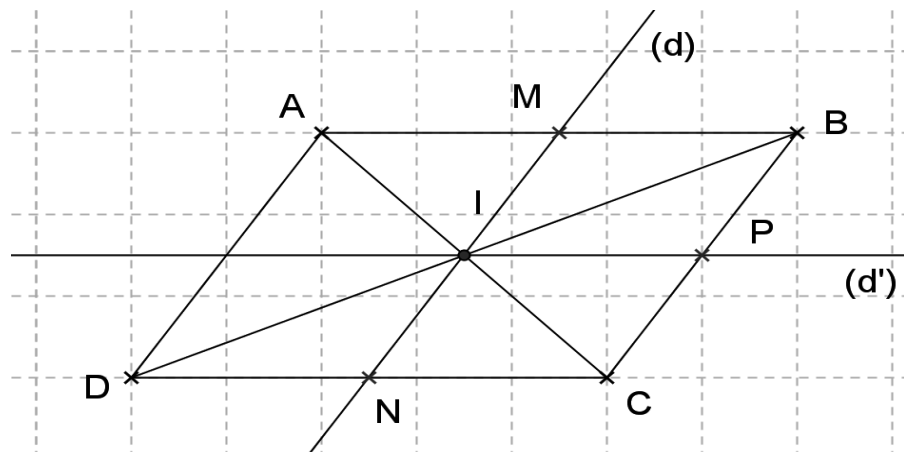
Remarque : Le parallélogramme permet de démontrer une propriété importante dans le triangle

2. Les diagonales du parallélogramme :

Activité 4

Consigne 1 : Dessine un parallélogramme ABCD. Soit I le point d'intersection de ses diagonales [AC] et [BD]. Le point I est-il le milieu de [AC] et de [BD] ?

Exemple de réponse :



(H): $\left\{ \begin{array}{l} \text{ABCD est un parallélogramme} \\ \text{[AC] et [BD] se coupe en I} \end{array} \right.$ (C): I milieu de [AC] et de [BD]

Démonstration :

Par M milieu de [AB], mesure la parallèle (d) à (BC) qui coupe [AC] en I d'après le théorème, I est milieu de [AC] en considérant le triangle ABC

Menons par I la parallèle (d') à (AB) qui coupe [BC] en P

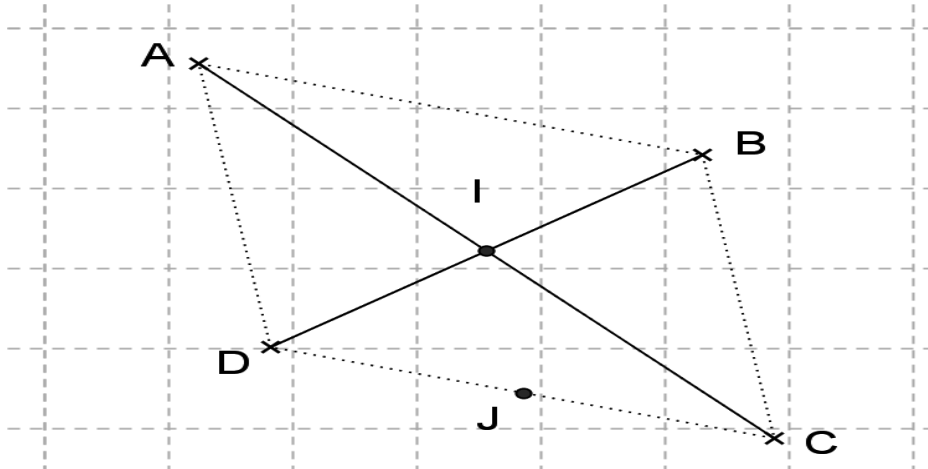
D'après le théorème 1, P est le milieu de [BC]. Le point I milieu de [AC] est le point d'intersection de (d) et (d') or (d) est parallèle à (AD) menée par le milieu M de [AB] et (d') est la parallèle à [AB] menée par le milieu P de [BC]. Dans le triangle BCD menons par le milieu N de [DC], la parallèle à (BC) qui est la droite (d). Elle coupe [BD] en J. Par J menons la parallèle (d'') à la droite (DC). (d'') passe par le milieu P de [BC].

$\left. \begin{array}{l} (d'') // (DC) \\ (d'') // (AB) \\ (d'') \text{ passe par } P \end{array} \right\} \text{ alors } (d'') = (d') \text{ on a : } \left\{ \begin{array}{l} (d) \cap (d') = \{I\} \\ (d) \cap (d') = \{J\} \end{array} \right. \text{ alors } J = I$

Théorème 3 : Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Consigne 2 (réciproque) : Construis deux segments sécants [AB] et [BD] se coupant en leur milieu I. ABCD est-il un parallélogramme ?

Exemple de réponse :



(H) : $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu

(C) : ABCD est un parallélogramme

Démonstration :

Soit J le milieu de $[CD]$.

Dans le triangle ADC : $\left. \begin{array}{l} I \text{ milieu de } [AC] \\ J \text{ milieu de } [CD] \end{array} \right\} \text{ alors } (IJ) \parallel (AD) \text{ et } IJ = \frac{1}{2} AD$

Dans le triangle BDC : $\left. \begin{array}{l} I \text{ milieu de } [AC] \\ J \text{ milieu de } [CD] \end{array} \right\} \text{ alors } (IJ) \parallel (BC) \text{ et } IJ = \frac{1}{2} BC$

On a :

$\left. \begin{array}{l} (IJ) \parallel (AD) \text{ et } (IJ) \parallel (BC) \text{ donc } (AD) \parallel (BC) \\ IJ = \frac{1}{2} AD \text{ et } IJ = \frac{1}{2} BC \text{ donc } AD = BC \end{array} \right\} \text{ alors ABCD est un } \\ \text{parallélogramme d'après } P_2$

Théorème 4 : Lorsque les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, ce quadrilatère est un parallélogramme.

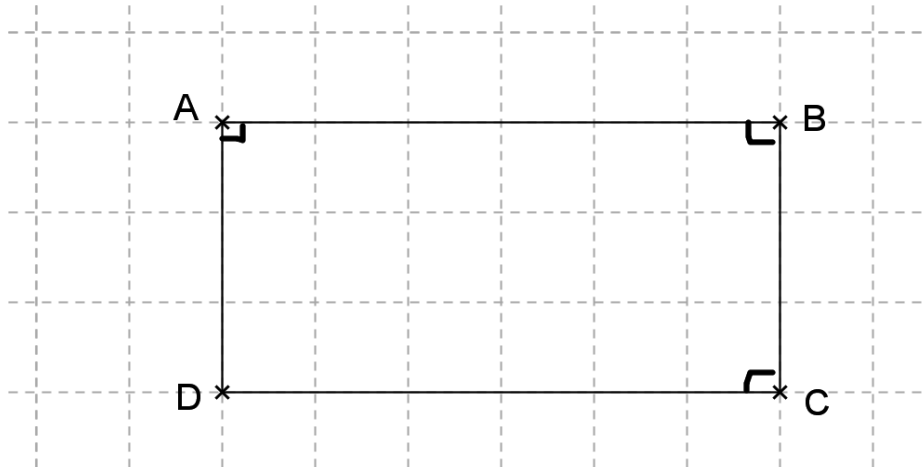
III. LE RECTANGLE :

Activité 5

Consigne 1 : Construis un rectangle ABCD et ses diagonales puis donne ses propriétés.

Consigne 2 : Démontre qu'un quadrilatère qui a trois angles droits est un rectangle.

Exemple de réponse :



(H): $\begin{cases} \hat{A} \text{ est un angle droit} \\ \hat{B} \text{ est un angle droit} \\ \hat{C} \text{ est un angle droit} \end{cases} \quad (C): ABCD \text{ est rectangle}$

Démonstration : ABCD est un quadrilatère

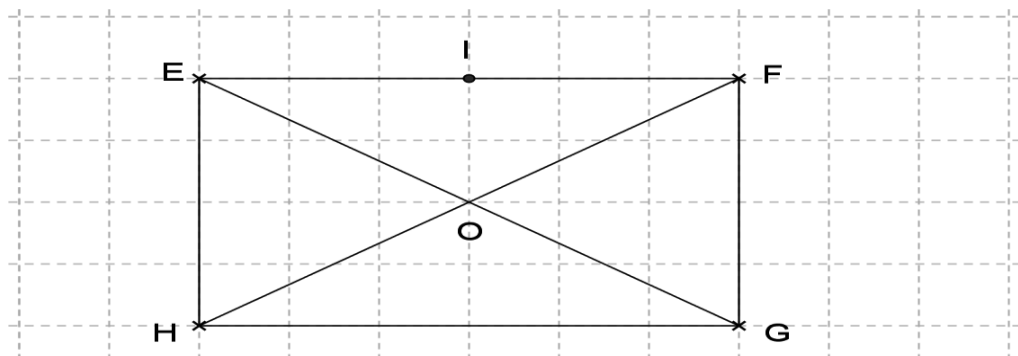
$\begin{array}{l} (AB) \perp (BC) \\ (DC) \perp (BC) \\ (AD) \perp (CD) \\ (BC) \perp (CD) \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{alors } (AB) \parallel (CD) \\ \text{alors } (AD) \parallel (BC) \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{donc ABCD est un parallélogramme} \end{array} \right.$

qui a un angle droit d'où un rectangle.

A propos des diagonales :

Consigne 3 (Problème) : Démontre que les diagonales [EG] et [FH] d'un rectangle EFGH ont même longueur.

Exemple de réponse :



(H) : EFGH est un rectangle

(C) : $EG = FH$

Démonstration :

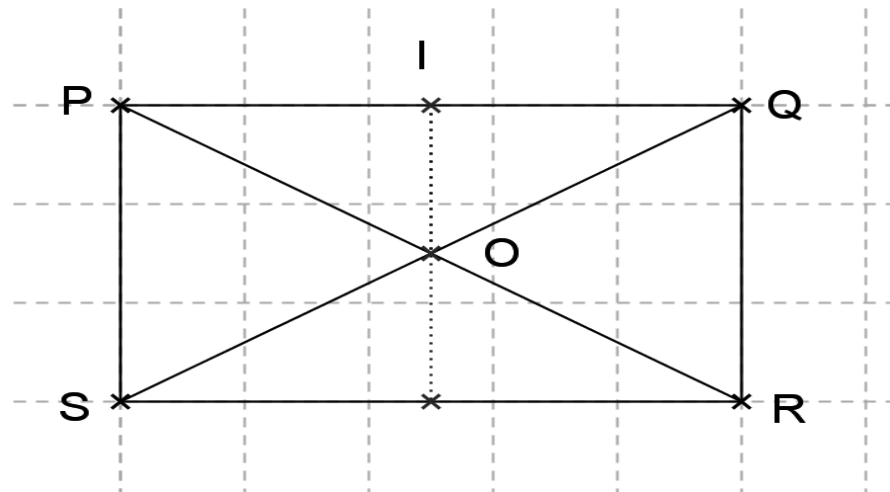
Soit I le milieu du segment [EF] et O le point d'intersection des diagonales O est le milieu de [FH]. D'après le théorème 2, $(OI) \parallel (EH)$ $(EH) \perp (EF)$. Donc $(OI) \perp (EF)$. I étant le milieu de [EF] (OI) est la médiatrice de [EF] alors $OE = OF$

$$OE = \frac{1}{2} EG \text{ et } OF = \frac{1}{2} FH \text{ donc } EG = FH.$$

Théorème 5 : les diagonales d'un rectangle ont même longueur.

Consigne 4 (Problème réciproque) : Construis un parallélogramme PQRS dont les diagonales [PR] et [QS] ont la même longueur. PQRS est-il un rectangle ?

Exemple de réponse :



(H): $\begin{cases} \text{PQRS est un parallélogramme} \\ PR = QS \end{cases}$

(C) : PQRS est un rectangle

Démonstration :

PQRS est un parallélogramme $PR = QS$ ([PR] et [QS] sont des diagonales)
O milieu de [PR] et [QS]. I étant milieu de [PQ] alors $(OI) \parallel (QR)$ or $(QR) \parallel (PS)$ donc $(OI) \parallel (PS)$.

PQRS est un parallélogramme, les diagonales [PR] et [QS] se coupent en leur milieu O et $PR = QS$ donc $OP = OQ$ entraîne que (OI) est la médiatrice de [PQ].

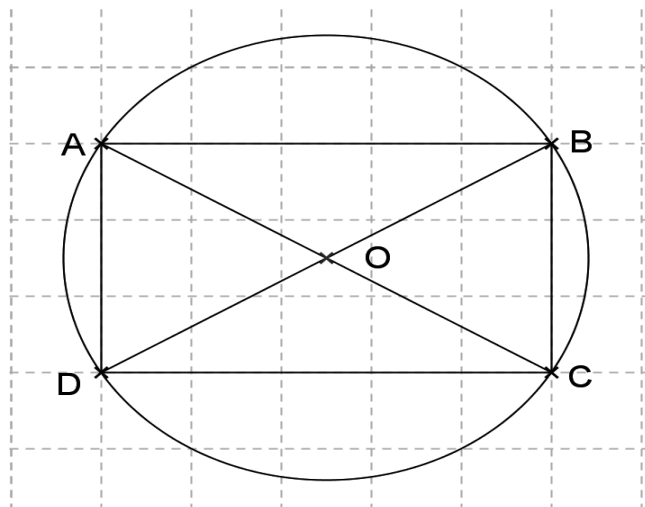
(OI) médiatrice de [PQ] et $(OI) \parallel (PS)$ alors $(PQ) \perp (PS)$.

Le parallélogramme PQRS possède un angle droit $(PQ) \perp (PS)$ d'où PQRS est un rectangle.

Théorème 6 : lorsqu'un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, c'est un rectangle.

Consigne 5(Conséquence 1) : Démontre que le point d'intersection des diagonales d'un rectangle est équidistant des sommets du rectangle puis trace le cercle centré en ce point et passant par les quatre sommets.

Exemple de réponse :



(H): $\begin{cases} \text{ABCD est un rectangle} \\ \text{[AC] et [BD] sont des diagonales} \\ \text{O est l'intersection de [AC] et [BD]} \end{cases}$

(C) : Le cercle de centre O et de rayon OA passe par A, B, C et D

Démonstration :

ABCD est un rectangle $(AC) \cap (BD) = \{O\}, AC = BD$

O milieu de [AC] alors $OA = OC = \frac{AC}{2}$

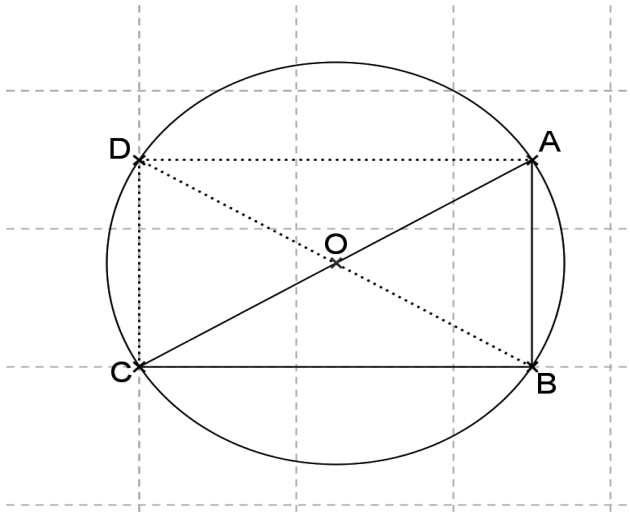
O milieu de [BD] alors $OB = OD = \frac{BD}{2}$

Donc $OA = OC = OB = OD$ par suite le cercle de centre O est de rayon $r = OA$ passe par les points A, B, C et D

Consigne 6(Conséquence 2) : Construis un triangle ABC rectangle en A. Soit O le milieu de l'hypoténuse.

Démontre que la longueur de la médiane [AO] est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse [BC] et que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exemple de réponse :



(H) : $\begin{cases} \text{ABC est un triangle rectangle en A;} \\ \text{O milieu de [BC]} \end{cases}$; (C) : $OA = \frac{1}{2}BC$

Démonstration :

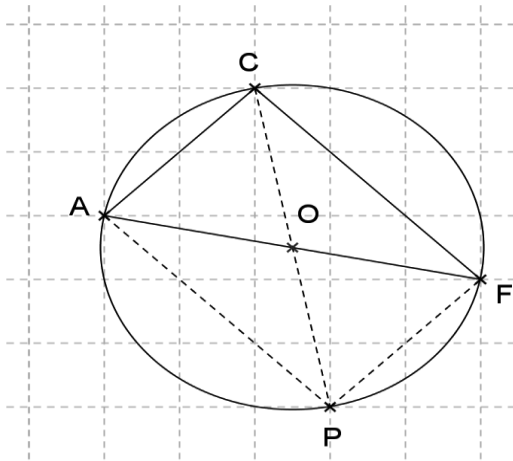
Le triangle ABC est rectangle en A et O milieu de [BC] donc $OC = OB$
 Construisons D tel que $OD = OA$ alors O milieu [AD] donc ABCD est un parallélogramme qui a un angle droit d'où ABCD est un rectangle

$$AD = BC \text{ et } AO = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2}$$

Théorème 7 : Dans le triangle rectangle la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse est centre du cercle circonscrit au triangle.

Consigne 7(Conséquence 3) : Construis un triangle CAF dans lequel la médiane [CO] relative au côté [AF] a pour longueur la moitié de ce côté ($AF = 2CO$). Démontre que ce triangle est rectangle en C.

Exemple de réponse :



$$(H) : \begin{cases} \text{CAF est un triangle} \\ CO = \frac{1}{2}AF \end{cases} ; \quad (C) : \text{CAF est un triangle rectangle en C}$$

Démonstration :

O milieu de $[AF]$. Construisons un point P tel que

$OC = OP = \frac{AF}{2}$; $CP = AF$, les diagonales se coupent en leur milieu et sont égales alors ACFP est un rectangle d'où le triangle CAF est rectangle en C.

Théorème 8 : si dans un triangle la médiane relative à un côté a pour longueur la moitié de la longueur de ce côté alors le triangle est rectangle.

IV. LE LOSANGE

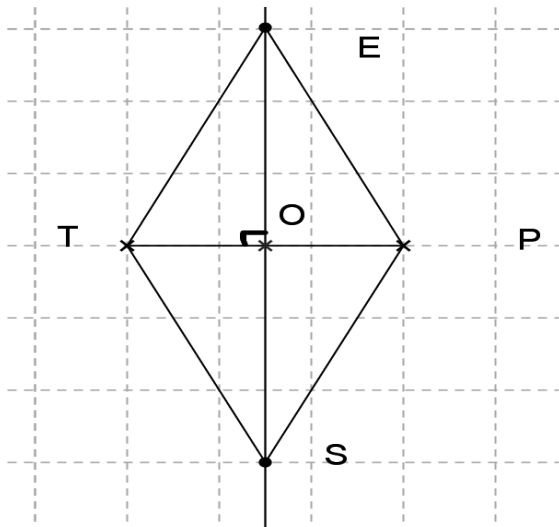
Activité 6

Consigne 1 : Construis un losange ABCD et ses diagonales puis donne ses propriétés.

A propos des diagonales :

Consigne 2 : Démontre que les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

Exemple de réponse :



(H) : $EPST$ est un losange; (C) : $\begin{cases} (ES) \perp (TP) \\ [ES] \text{ et } [TP] \text{ se coupent en leur milieu} \end{cases}$

Démonstration :

$EPST$ est un losange signifie que $EP = PS = ST = TE$

On a :

$ET = EP$ implique E est sur la médiatrice de $[TP]$
 $ST = SP$ implique S est sur la médiatrice de $[TP]$

donc (ES) est la médiatrice de $[TP]$

De même :

$TE = TS$ alors T est sur la médiatrice de (ES)
 $PE = PS$ alors P est sur la médiatrice de (ES)

donc (TP) est la médiatrice de $[ES]$

On conclue que $(ES) \perp (TP)$

Théorème 9 : Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

Consigne 3(Conséquence) : Problème : $EPST$ est un losange. $EPST$ est-il un parallélogramme ?

Exemple de réponse :

(H) : $EPST$ est un losange

(C) : $EPST$ est un parallélogramme

Démonstration :

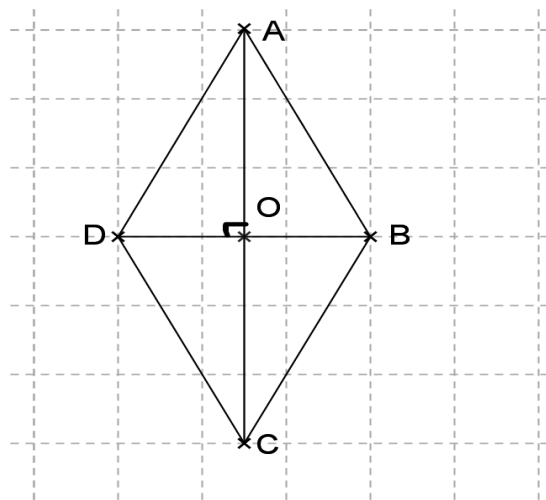
$[ES]$ et $[TP]$ sont les diagonales de $EPST$

$\left. \begin{array}{l} O \text{ milieu de } [ES] \\ O \text{ milieu de } [TP] \end{array} \right\} \text{ donc } [ES] \text{ et } [TP] \text{ ont même milieu}$

alors $EPST$ est un parallélogramme

Consigne 4 (Problème réciproque) : Démontre qu'un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

Exemple de réponse :



(H) : $\left\{ \begin{array}{l} ABCD \text{ est un parallélogramme} \\ (AC) \perp (BD) \end{array} \right.$; (C) : ABCD est un losange

Démonstration :

ABCD est un parallélogramme, $(AC) \perp (BD)$ et O milieu de $[AC]$ alors (BD) est la médiatrice de $[AC]$, d'où ABCD est un losange.

Théorème 10 : Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

V. LE CARRE

Activité 7

Consigne : Construis, un carré ABCD et ses diagonales puis, donne ses propriétés. Que remarques-tu ?

Exemple de réponse :

Le carré est un parallélogramme car les diagonales se coupent en leur milieu.

Le carré est un rectangle car les diagonales, sont égales.

VI. LE TRAPEZE :

Activité 8

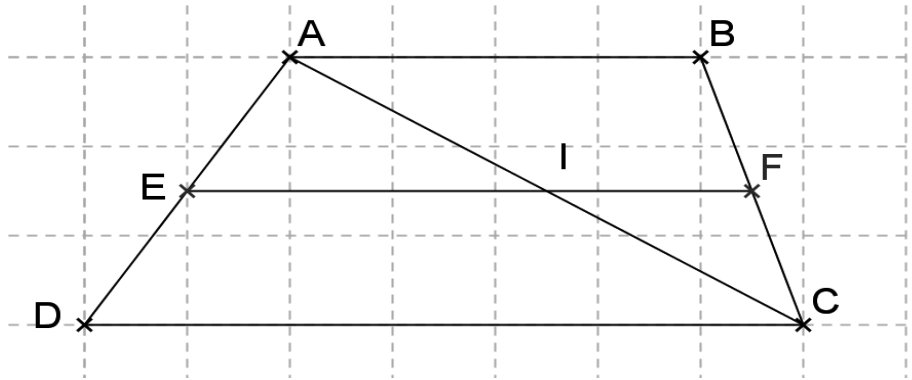
Consigne 1 : Construis un trapèze quelconque ABCD et une hauteur.

Consigne 2 : Construis un trapèze isocèle EFGH et une hauteur.

Consigne 3 : Construis un trapèze rectangle PQRS.

Consigne 4 : Construis un trapèze ABCD dont les bases sont [AB] et [CD].
Soit E le milieu de [AD]. Démontre que la parallèle aux bases menée par E coupe [BC] en son milieu F.

Exemple de réponse :



$$(H) : \begin{cases} ABCD \text{ est un trapèze} \\ E \text{ milieu de } [AD] \\ (EF) \parallel (AB) ; (EF) \parallel (DC) \end{cases} ; \quad (C) : F \text{ est le milieu de } [BC]$$

Démonstration :

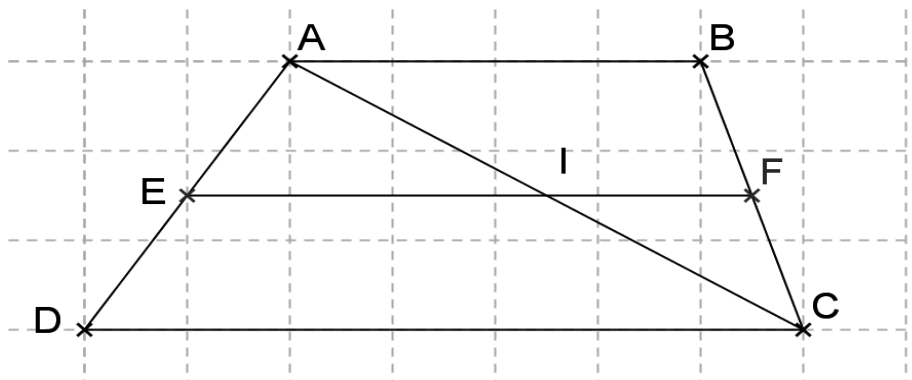
Dans le triangle ADC : $(EF) \parallel (DC)$ et (EF) passe par I milieu de [AC]

Dans le triangle ABC : $(EF) \parallel (AB)$, $(EF) \cap (AC) = \{I\}$

I milieu de [AC] alors F est le milieu de [BC]

Consigne 5 : Construis un trapèze ABCD. Soit E milieu de [AD] et F milieu de [BC]. Démontre que (EF) est parallèle à (AB) et à (DC) .

Exemple de réponse :



$$(H) : \begin{cases} ABCD \text{ est un trapèze} \\ E \text{ milieu de } [AD] \\ F \text{ milieu de } [BC] \end{cases} ; \quad (C) : \{(EF) \parallel (AB) \text{ et } (EF) \parallel (DC)\}$$

Démonstration :

Traçons (EF) qui coupe [AC] en I.

Dans ADC : $\left. \begin{array}{l} E \text{ milieu de } [AD] \\ I \text{ milieu de } [AC] \end{array} \right\} \text{ alors } (EI) // (DC) \text{ donc } (EF) // (DC)$

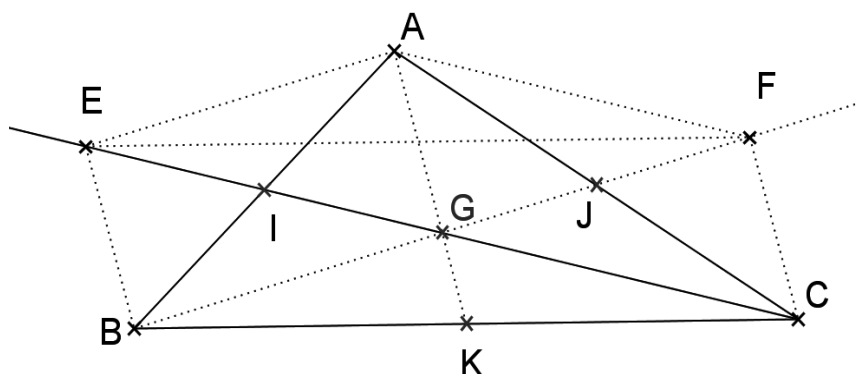
Dans ABC : $\left. \begin{array}{l} I \text{ milieu de } [AC] \\ F \text{ milieu de } [BC] \end{array} \right\} \text{ alors } (FI) // (AB) \text{ donc } (EF) // (AB)$

Les trapèzes particuliers : trapèzes isocèles, trapèzes rectangles.

Consigne 6 : Démontre que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Exemple de réponse :

Soit ABC un triangle et I, J, K milieux respectifs des segments [AB], [AC], [BC].



Dans le quadrilatère AFCG les diagonales [AC] et [FG] se coupent en leur milieu alors AFCG est un parallélogramme donc $(AG) // (FC)$ et $AG = FC$

Dans le quadrilatère AFBE les diagonales se coupent en leur milieu alors AGBE est un parallélogramme $(EB) // (AG)$ et $(AE) // (BG)$ et $EB = AG$

Ainsi : $\left\{ \begin{array}{l} (EB) // (AG) \\ (FC) // (AG) \end{array} \right\} \text{ alors } (EB) // (FC) \text{ et } EB = FC \text{ donc EBCF est un parallélogramme.}$

K milieu de [BC]

EBCF est un parallélogramme les diagonales [EC] et [BF] se coupent en leur milieu G

$\left. \begin{array}{l} K \text{ milieu de } [BC] \\ G \text{ milieu de } [BF] \end{array} \right\} \text{ alors } (GK) // (FO)$

$\left. \begin{array}{l} (AG) \parallel (FC) \\ (GK) \parallel (FC) \end{array} \right\}$ G étant commun à (AG) et (GK) alors (AG) = (GK) donc les

points A, G, K sont alignés

$\left. \begin{array}{l} A \text{ sommet de } ABC \\ K \text{ milieu de } [BC] \end{array} \right\}$ on en déduit que (AG) est la médiane.

Les trois médianes de ABC se coupent en un point G

$$GF = BG \text{ et } GJ = \frac{1}{2} BG \text{ alors } BG = 2GJ$$

$$BJ = BG + GJ = 2GJ + GJ = 3GJ$$

$$GJ = \frac{BJ}{3} = \frac{1}{3} BJ$$

On démontre de même que :

$$GI = \frac{1}{3} CG \text{ et } GK = \frac{1}{3} AG.$$

EXERCICES

- 1) Soit ABC un triangle.
 - a) Construis la parallèle à la droite (AB) contenant C et la parallèle à la droite (AC) contenant B se coupent en D.
 - b) Démontre que le quadrilatère ACDB est un parallélogramme.
- 2) Soit un triangle DEF rectangle en E. la droite passant par F et parallèle à la droite (ED) et la droite passant par D et parallèle à la droite (EF) se coupent en G.
 - a) Fais un dessin.
 - b) Démontre que les droites (DG) et (FG) sont perpendiculaires.
 - c) Donne la nature du quadrilatère EDGF. Démontre-le.
- 3) ABC étant un triangle, construis les points E, F et G tels que le quadrilatère ABEC, BCFA, CAGB soient des parallélogrammes.
Démontre que les droites (AE), (BF) et (CG) sont concourantes.
- 4) Soit ABC un triangle isocèle ($AB = AC$).
 - a) Construis le point I milieu de [BC] puis le point D tel que I milieu de [AD].
 - b) Démontre que le quadrilatère ABDC est un losange.
- 5) Soit un triangle DEF rectangle et isocèle en D. Construis le point O milieu de [EF] puis le point G tel que O milieu de [DG].
Donne la nature du quadrilatère DEGF. Démontre-le.
- 6) ABC un triangle quelconque.
I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [AB], [AC] et [BC].
Démontre que les segments [AK] et [IJ] se coupent en leur milieu.
- 7) ABC un triangle isocèle de sommet principal A. I, H et K sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [AC].
Donne la nature du quadrilatère AIHK. Démontre ta réponse.

- 8) ABCD est un parallélogramme de centre O. E, F, G et H sont les milieux respectifs des segments [OA], [OB], [OC] et [OD].
- Démontre que EFGH est un parallélogramme.
 - Démontre que le périmètre de EFGH est égal à la moitié de celui de ABCD.
- 9) EFD est un triangle quelconque et M un point du côté [FD]. I est le milieu du segment [FM]. La parallèle à [EF] passant par I coupe (EM) en K. la parallèle à (ED) passant par K coupe (MD) en H. Démontre que H est le milieu de [MD].
- 10) On donne un segment [AB] et sa médiatrice (Δ). Soit C un point non aligné avec A et B et situé du même côté que B par rapport à (Δ). D est le point tel que (Δ) soit la médiatrice de [CD]. On suppose que $CD > AB$.
- Fais une figure.
 - Montre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
 - Donne la nature du quadrilatère ABCD.
 - $(AB) \cap (\Delta) = \{I\}$ et $(CD) \cap (\Delta) = \{J\}$.
Donne la nature précise des quadrilatères AIJD et BIJC.
- 11) Soit M, N, P les milieux respectifs des côtés [BC], [CA], [AB] d'un triangle ABC. Démontre que le quadrilatère BPNM est un parallélogramme.
- 12) Soit M, N, P les milieux respectifs des côtés [BC], [CA], [AB] d'un triangle ABC isocèle en B. Quelle est la nature du quadrilatère BPNM.
- 13) Soit M, N, P les milieux respectifs des côtés [BC], [CA], [AB] d'un triangle ABC rectangle en B. Quelle est la nature du quadrilatère BPNM.

DISTANCE**I. INEGALITE TRIANGULAIRE****Activité 1**

Consigne 1 : Dessine un triangle ABC (A, B et C ne sont pas alignés).

Compare avec l'un des symboles $<$, $>$, $\geq$, $\leq$ ou $=$:

1) AB et $AC + CB$

2) BC et $BA + AC$

3) CA et $CB + BA$

Consigne 2 : Trace un segment $[AC]$ et place un point B sur ce segment.

Compare avec l'un des symboles $<$, $>$, $\geq$, $\leq$ ou $=$:

1) AB et $AC + CB$

2) BC et $BA + AC$

3) CA et $CB + BA$

Conclusion :

Etant donnés trois points A, B, C, les distances AB, AC et BC

vérifient l'inégalité : **$AB \leq AC + CB$**

Condition d'existence d'un triangle : Pour qu'un triangle existe, il faut que la mesure du plus grand côté est comprise entre la différence et la somme des mesures des deux autres côtés.

Exemple : Soit un triangle ABC tel que : $AB = 4\text{cm}$; $AC = 3,5\text{cm}$ et $BC = 2,5\text{cm}$. Peut-on construire ce triangle ?

$AC - BC = 3,5 - 2,5 = 1$; $AC + BC = 3,5 + 2,5 = 6$ par suite $1 < 4 < 6$ équivaut à $AC - BC < AB < AC + BC$ donc on peut construire le triangle ABC.

Contre-exemple : Soit un triangle EFG tel que : $EF = 7\text{cm}$; $EG = 3\text{cm}$ et $FG = 2\text{cm}$. Peut-on construire ce triangle ?

$EG - FG = 3 - 2 = 1$; $EG + FG = 3 + 2 = 5$. EF n'est pas compris entre 1 et 5 donc on ne peut pas construire ce triangle.

Points alignés : Si A, B, C sont trois points tels que :

$$AC = AB + BC \text{ alors } B \in [AC]$$

Pour démontrer que trois points sont alignés, on peut vérifier que la distance qui sépare deux de ces points est égale à la somme de leurs distances respectives au troisième point.

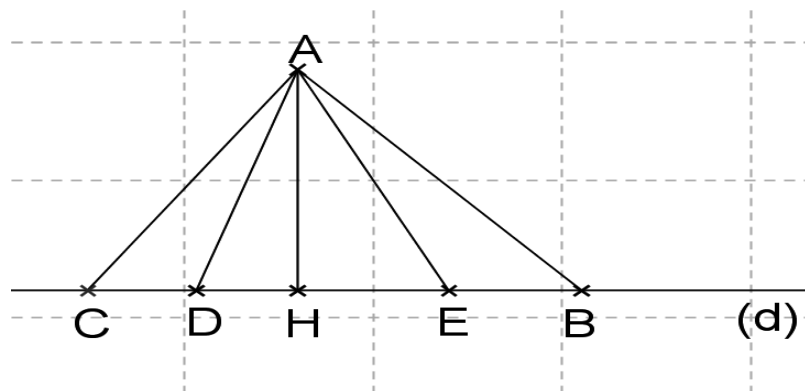
Consigne 3 : Dans chacun des cas suivants, examine s'il est possible de construire les points A, B et C puis dire si les points A, B, C sont alignés.

- $AB = 5\text{cm}$; $BC = 2\text{cm}$; $AC = 8\text{cm}$
- $AB = 8\text{cm}$; $BC = 2\text{cm}$; $AC = 10\text{cm}$
- $AB = 3\text{cm}$; $BC = 4\text{cm}$; $AC = 8\text{cm}$
- $AB = 4\text{cm}$; $BC = 3\text{cm}$; $AC = 5\text{cm}$
- $AB = 6\text{cm}$; $BC = 7\text{cm}$; $AC = 5\text{cm}$

II. DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE

Activité 2

Consigne 1 : Dans la figure suivante, mesure les longueurs AB, AC, AH, AD, AE puis compare chacun de ces longueurs à AH



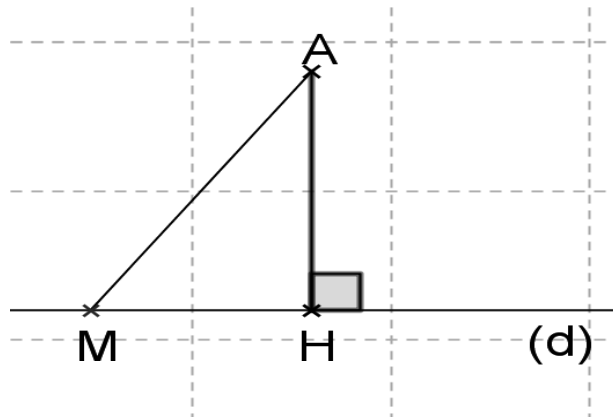
Consigne 2 : Trace une droite(Δ) et place un point A non situé sur (Δ). La perpendiculaire à (Δ) passant par A coupe (Δ) en H. Soit M un point de (Δ) distinct de H. Compare AH et AM.

Conclusion :

Soit A un point n'appartenant pas à une droite (d). La perpendiculaire à (d) passant par A coupe (d) en H.

Pour tout point M de (d) autre que H, on a : $AH < AM$

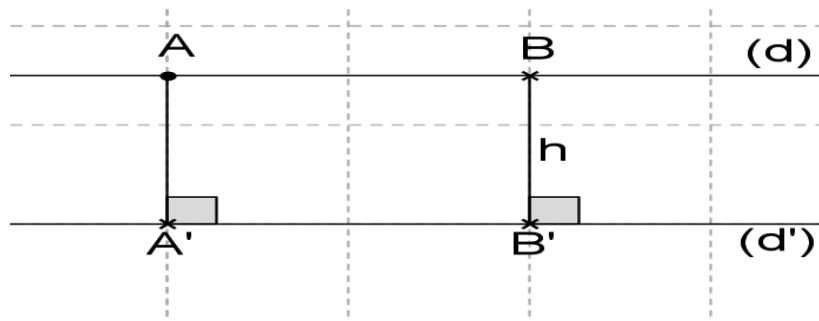
La distance AH s'appelle la distance de A à la droite (d).



III. DISTANCE DE DEUX DROITES PARALLELES

Activité 3

Consigne 1 : Dans la figure suivante démontre que $AA' = BB' = h$ sachant que $(d) \parallel (d')$, $(AA') \perp (d')$ et $(BB') \perp (d')$



Exemple de réponse

$(AA') \perp (d')$ et $(BB') \perp (d')$ alors $(AA') \parallel (BB')$

on a : $(d) \parallel (d')$ et $(AA') \parallel (BB')$ alors $ABB'A'$ est un parallélogramme

qui a un angle droit donc un rectangle par suite $AA' = BB' = h$

Ainsi tous les points de (d') sont à la distance h de (d).

Définition : On appelle distance de deux droites parallèles, la distance d'un point de l'une des droites à l'autre.

EXERCICES

- 1) Construis un triangle EFG tel que : $\widehat{FEG} = 20^\circ$ et $\widehat{FGE} = 10^\circ$.

Compare les longueurs :

EF et FE + GF

FG et FE + EG

GE et GF + FE

- 2) Un triangle ABC est tel que : $AB = 5\text{cm}$ et $BC = 8\text{cm}$.

Montre que la distance AC vérifie les deux inégalités :

$AC < 13$ et $8 < AC + 5$. En déduis que $3 < AC$.

- 3) Dans chacun des cas suivants, examine s'il est possible de construire le triangle ABC puis dire si les points A, B, C sont alignés.

a. $AB = 8\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$; $AC = 11\text{cm}$

b. $AB = 6\text{cm}$; $BC = 3\text{cm}$; $AC = 11\text{cm}$

c. $AB = 2,8\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$; $AC = 2,7\text{cm}$

d. $AB = 3\text{cm}$; $BC = 8\text{cm}$; $AC = 5\text{cm}$

- 4) L'unité de longueur est le cm. Dans chacun des cas suivants, on donne les distances AM, BM et AB. Dis si le point M appartient au segment [AB] :

a) $AB = 12$; $AM = 4,5$; $MB = 7,5$

b) $AB = 10$; $AM = 10,3$; $MB = 0,3$

c) $AB = 8$; $AM = 5,7$; $MB = 3,2$

d) $AB = \frac{17}{4}$; $AM = \frac{5}{4}$; $MB = 3$

e) $AB = \frac{13}{4}$; $AM = \frac{5}{2}$; $MB = 2$

- 5) Vrai ou faux ? Répondre sans faire la figure.

a. Si $MA = MB$ alors M est le milieu de [AB].

b. Si M est le milieu de [AB] alors $MA = MB$.

c. Si $2MA = AB$ alors M est le milieu de [AB].

d. Si M est le milieu de [AB] alors $2MA = AB$.

- 6) Trace un segment $[AC]$ et place un point B sur ce segment. Construis les droites d_1 et d_2 médiatrices respectives des segments $[AB]$ et $[BC]$. Place un point M sur la droite d_1 et un point N sur la droite d_2 .
- Montre que : $AM = MB$.
 - Montre que : $MN \leq AM + CN$.
 - Dans quel cas de figure as-tu : $MN = AM + CN$?
- 7) Trace une droite (d) , puis construis les points P, A, R, I, S, situés d'un même côté de (d) , à 4cm de cette droite. Que remarques-tu ?
- 8) Trace une droite (Δ) , puis construis les points A, C, N, O, R, S, T, U situés à 3cm de (Δ) sachant que :
- C, A, E, N sont d'un même côté de (Δ) ;
 - T, O, U, R, S sont d'un même côté de (Δ) ;
 - C et T sont de part et d'autre de (Δ) .
- Que remarques-tu ?

PROJECTIONS

I. PROJECTIONS PARALLELES ET ORTHOGONALES

Activité 1

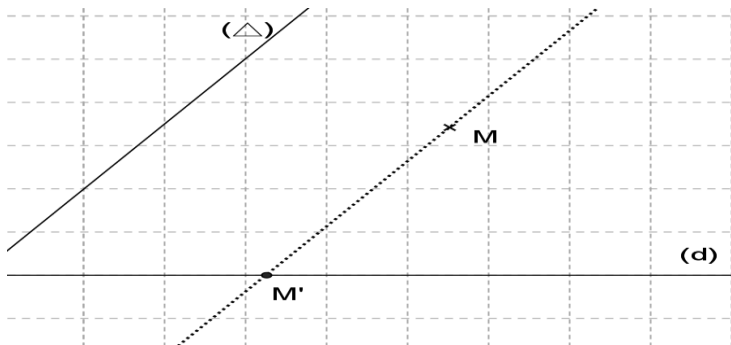
Consigne 1 : Soit (d) et (Δ) deux droites non parallèles et M un point du plan.

Trace la droite passant par M et parallèle à (Δ) , elle coupe (d) en M' .

Place M' .

Le point M' s'appelle le projeté de M sur (d) parallèlement à (Δ) .

Exemple de réponse



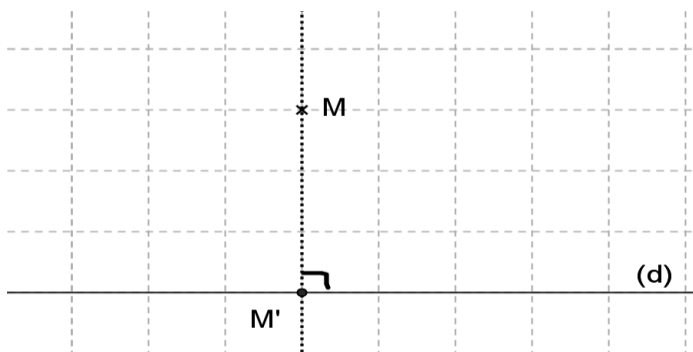
Définition 1 : Soit deux droites (d) et (Δ) non parallèles.

Etant donné un point M , le point d'intersection de la droite (d) et de la parallèle à (Δ) passant par M est appelé projeté de M sur (d) parallèlement à (Δ) .

Consigne 2 : Soit (d) une droite et M un point n'appartenant pas à (d) .

Trace la perpendiculaire à (d) passant par M , elle coupe (d) en M' . Place M' . Le point M' est appelé projeté orthogonal de M sur (d) .

Exemple de réponse



Définition 2 : Soit (d) une droite et M un point du plan. La perpendiculaire (Δ) à (d) passant par M coupe (d) en un point M' appelé projeté orthogonal de M sur (d) .

Remarque : La longueur MM' est la distance du point M à la droite (d) .

II. IMAGE DU MILIEU D'UN SEGMENT

Activité 2

Soit (d) et (Δ) deux droites sécantes, A et B deux points distincts, I le milieu de $[AB]$.

Consigne 1 :

- Fais une figure pour chacun des cas suivants : $(AB) \parallel (d)$; $(AB) \parallel (\Delta)$; (AB) sécante à (d) et à (Δ) .
- Dans chacun des cas de figure, construis les projetés A' , I' , B' de A , I , B sur (d) parallèlement à (Δ) .
- Le point I' est-il le milieu de $[A'B']$?

Consigne 2 : Soit J le milieu de $[AI]$ et J' le milieu de $[A'I']$.

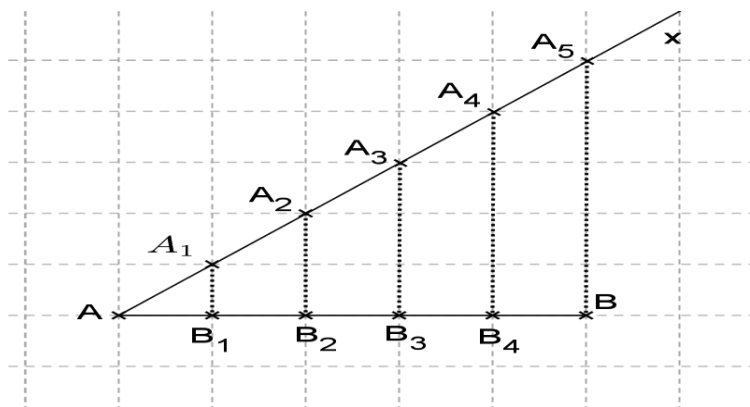
- Comment sont les droites (AA') , (II') et (JJ') ?
- Quel est le projeté de J sur (d) parallèlement à (Δ) ?

III. PROJECTION D'UNE DIVISION REGULIERE

Activité 3

Consigne : Partage un segment AB en 5 segments de même longueur en utilisant la projection parallèle.

Exemple de réponse



On trace une demi-droite $[Ax)$, n'ayant pas la même direction que (AB) , sur laquelle on marque les points A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 tels que $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ à l'aide d'une règle graduée.

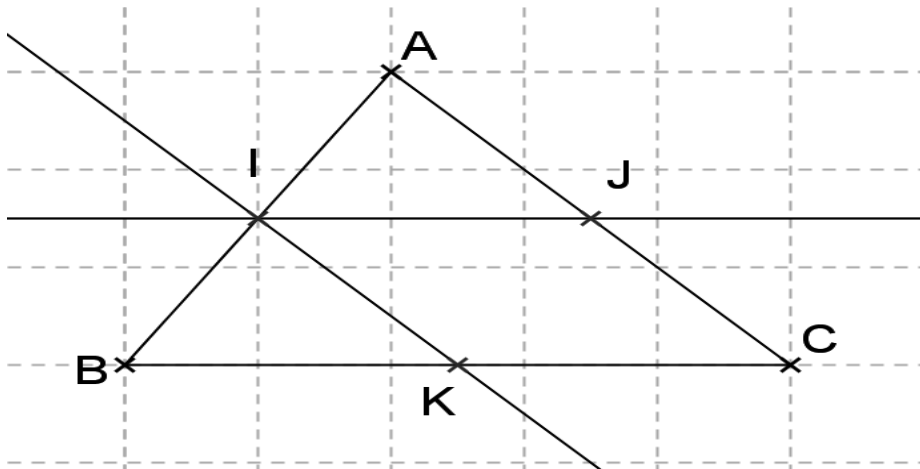
On joint A_5 et B puis on projette les points A_1, A_2, A_3 et A_4 sur $[AB]$ en B_1, B_2, B_3 et B_4 parallèlement à (A_5B) . On obtient ainsi les segments $[AB_1], [B_1B_2], [B_2B_3], [B_3B_4], [B_4B]$ de même longueur.

IV. APPLICATION AU TRIANGLE ET AU TRAPEZE

1. Dans un triangle

Activité 4

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$. La parallèle à (BC) passant par I coupe $[AC]$ en J .



Consigne :

- a) Que représente le point J pour $[AC]$?

Compare les longueurs IJ et BC .

- b) Soit K le milieu de BC .

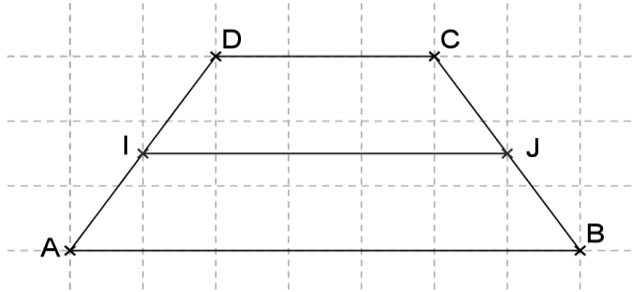
Que peux-tu dire des droites (IK) et (AC) ? (JK) et (AB) ?

Quels théorème (ou règles) peux-tu énoncer ?

2. Dans un trapèze

Activité 5

Soit ABCD un trapèze de bases [AB] et [CD] et I le milieu de [AD].



Consigne 1 : La parallèle à (AB) passant par I coupe [BC] en J.

Démontre que J est le milieu de [BC].

Consigne 2 : Soit J le milieu de [BC].

Démontre que (IJ) est parallèle à (AB).

Ces deux consignes permettent d'énoncer deux théorèmes. Lesquels ?

N.B : Remarques que l'hypothèse de l'un est la conclusion de l'autre. Ces deux théorèmes sont dits *reciproques*.

V. THEOREME DE THALES ET SA RECIPROQUE

Activité 6

Consigne 1 : Soit (d) une droite de direction D et deux axes (Δ) et (Δ') n'appartenant pas à D.

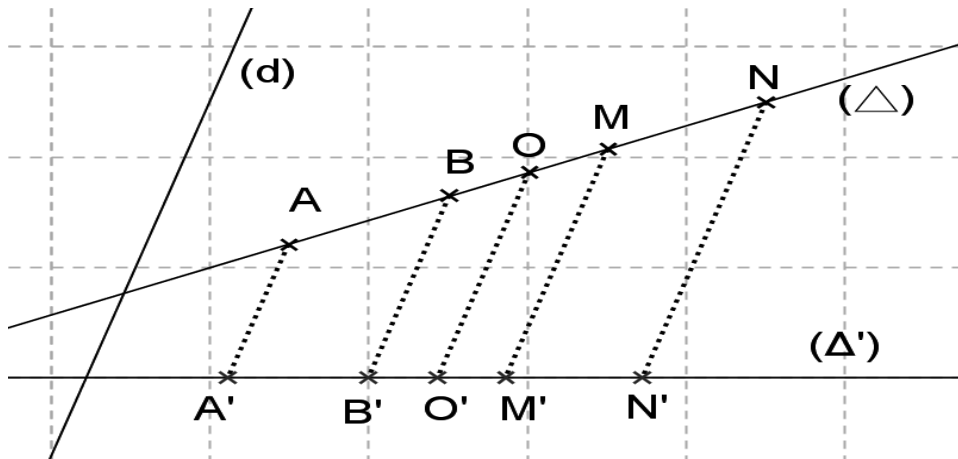
A, B, M et N sont quatre points de (Δ), tels que $\overline{MN} = \overline{AB}$ se projette sur (Δ') parallèlement à (d) en A', B', M' et N'.

a) Fais une figure.

b) Donne la relation entre $\overline{MN}$ et $\overline{AB}$.

Exemple de réponse

a)



- b) Soit O milieu de $[BM]$ et $\overline{MN} = \overline{AB}$ alors $[BM]$ et $[AN]$ ont même milieu O . Le point O se projette sur (Δ') en O' donc $[B'M']$ et $[A'N']$ ont même milieu O' .

Relation : Si $\overline{MN} = \overline{AB}$ alors $\overline{M'N'} = \overline{A'B'}$

Consigne 2 : Soit (d) une droite de direction D et deux axes (Δ) et (Δ') n'appartenant pas à D .

A, B, M et N sont quatre points de (Δ) , tels que $\overline{MN} = 3\overline{AB}$ se projette sur (Δ') parallèlement à (d) en A', B', M' et N' .

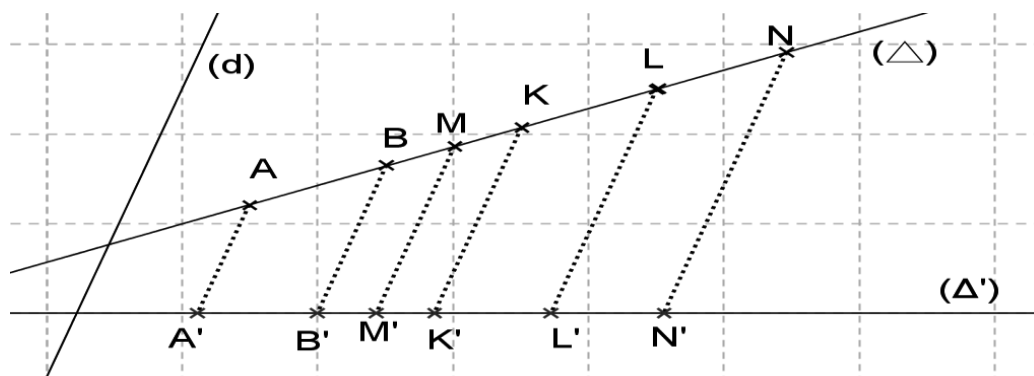
- a) Soient K et L les points du segment $[MN]$ tels que :

$$\overline{MK} = \overline{KL} = \overline{LN} = \overline{AB} . \text{ Fais une figure.}$$

- b) Donne la relation entre $\overline{MN}$ et $\overline{AB}$.

Exemple de réponse

a)



b) En désignant par K' et L' les projetés de K et L sur (Δ') parallèlement à (d), on démontre que :

Relation : Si $\overline{MN} = 3\overline{AB}$ alors $\overline{M'N'} = 3\overline{A'B'}$

1. Généralisation

En général, si k est nombre rationnel et les points A', B', M', N' les projetés respectifs des points A, B, M, N.

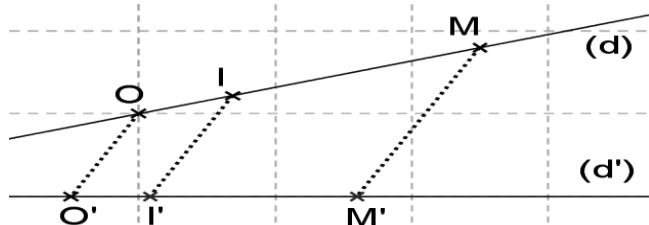
Si $\overline{MN} = k\overline{AB}$ alors $\overline{M'N'} = k\overline{A'B'}$

Ainsi, on peut écrire :

$$\left. \begin{array}{l} \overline{MN} = k\overline{AB} \text{ alors } k = \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} \\ \overline{M'N'} = k\overline{A'B'} \text{ alors } k = \frac{\overline{M'N'}}{\overline{A'B'}} \end{array} \right\} \text{ donc } \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{M'N'}}{\overline{A'B'}}$$

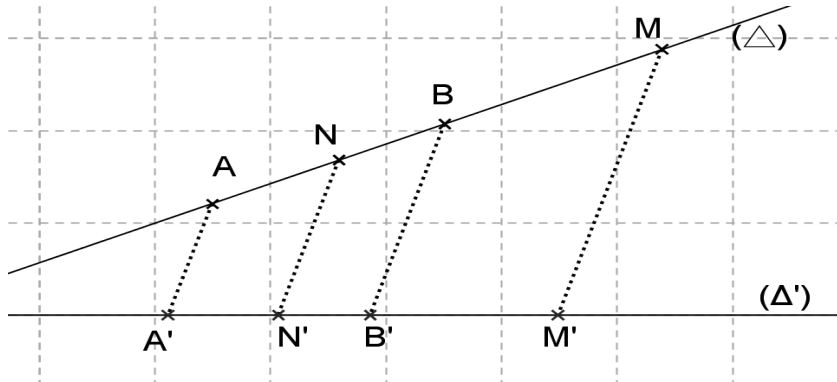
2. Enoncé du théorème de Thales

Enoncé 1: Si un repère (O, I) d'un axe (d) se projette parallèlement en un repère (O', I') d'un axe (d') et si dans cette projection un point M de (d) se projette en un point M' de (d') alors $\overline{OM} = \overline{O'M'}$.



Enoncé 2: Si dans une projection parallèle, quatre points A, B, M, N d'une droite (Δ) se projettent respectivement en quatre points A', B', M', N' d'une droite (Δ') alors on a :

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{M'N'}}{\overline{A'B'}}$$



3. Réciproque du théorème de Thales

Enoncé : Si quatre points A, B, M et N d'une droite (Δ) et quatre points A', B', M' et N' d'une droite (Δ') sont tels que :

- les droites (AA'), (BB') et (MM') soient parallèles ;

- $\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{M'N'}}{\overline{A'B'}}$

alors la droite (NN') appartient à la direction des droites (AA'), (BB') et (MM').

Cas particuliers

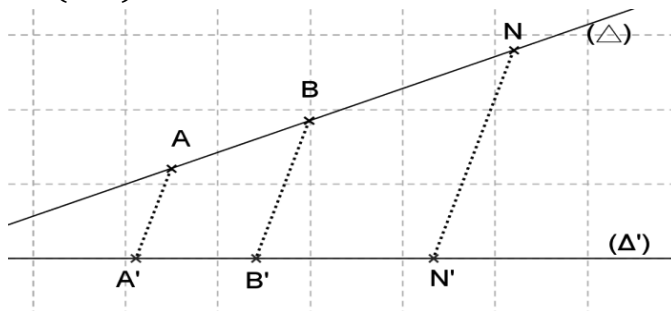
1) Si les droites (MM') et (AA') sont confondues, l'énoncé devient :

Si trois points A, B et N d'une droite (Δ) et trois points A', B' et N' d'une droite (Δ') sont tels que :

- les droites (AA') et (BB') soient parallèles ;

- $\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'N'}}{\overline{A'B'}}$

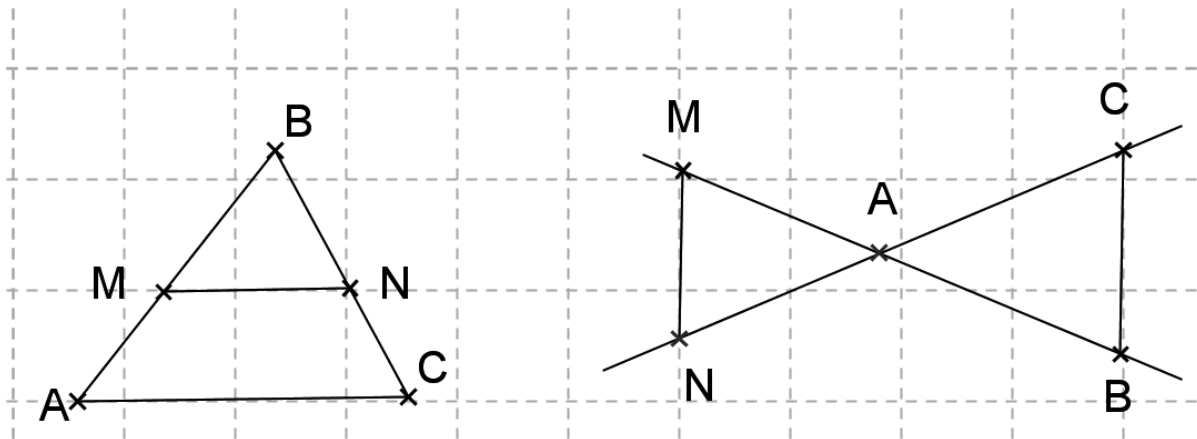
alors la droite (NN') appartient à la direction des droites (AA') et (BB').



2) Si de plus A et A' sont confondus alors on a :

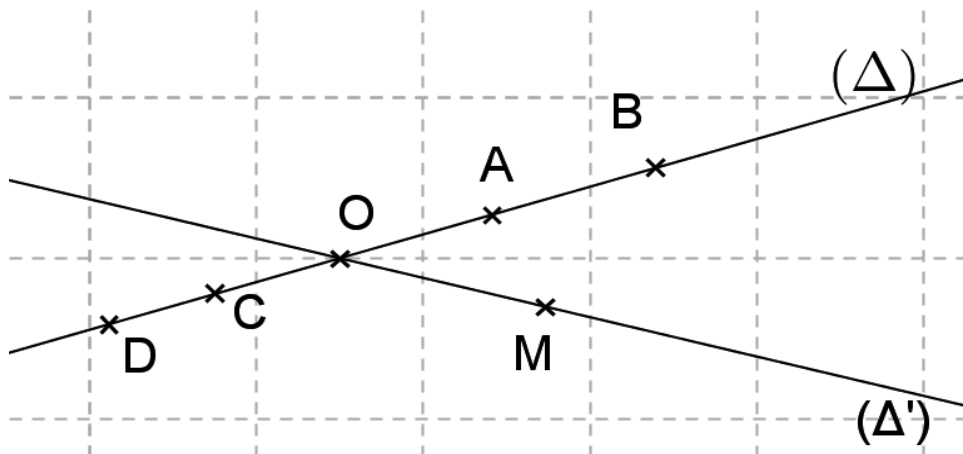
Etant donné un triangle ABC, si les points M et N appartiennent respectivement aux droites (AB) et (AC) sont tels que :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



EXERCICES

- 1) Trace (d) et (Δ) deux droites sécantes en un point I .
 - a) Place sur (Δ) deux points A et B . sur (d) place deux points C et D tels que I soit le milieu de $[CD]$, construis les points E et F tels que le quadrilatère $CDEF$ soit un parallélogramme de centre A .
 - b) On projette les points A, B, C, D, E, F, I sur (d) parallèlement à (Δ) .
Quels sont les projetés de ces points ? Justifie ta réponse.
- 2) Soit O et A deux points tels que $OA = 4\text{cm}$.
Construis une droite (d) passant par O telle que A' étant le projeté orthogonal de A sur (d) , on ait $OA' = 3\text{cm}$.
- 3) Construis un triangle ABC tel que $BC = 5\text{cm}$; $AB = 4\text{cm}$; $AC = 4,5\text{cm}$.
Soit I le milieu de $[AC]$, J le milieu de $[BC]$, K le milieu de $[AB]$.
On projette J et K sur (AC) parallèlement à (BI) . Soit J' le projeté de J et K' celui de K .
Démontre que $CJ' = J'I = IK' = K'A$.
- 4) Soit $ABCD$ un trapèze avec $(AB) // (CD)$.
On désigne par I, J, K, L les milieux respectifs des segments $[AD], [AC], [BD], [BC]$.
En projetant sur (BC) parallèlement à (AB) , démontre que I, J, K, L sont alignés.
- 5) Reproduis la figure ci-dessous



- a) En utilisant la règle et l'équerre, construis les droites passant par B, C et D appartenant à la direction de la droite (AM) ; ces droites coupent (Δ') en N, P et Q.

Donne ensuite les quotients égaux aux quotients suivants :

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AB}}, \frac{\overline{BO}}{\overline{OC}}, \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}, \frac{\overline{NQ}}{\overline{MO}} \text{ et } \frac{\overline{MQ}}{\overline{PN}}$$

- b) On projette (Δ) sur (Δ') parallèlement à la droite (CM) ; les points A, B et D ont pour image E, F et G.

Donne des rapports égaux à :

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AO}} \text{ et } \frac{\overline{AD}}{\overline{CB}}$$

- c) Compare les quotients :

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{EO}} \text{ et } \frac{\overline{NO}}{\overline{MO}} ; \frac{\overline{MO}}{\overline{PN}} \text{ et } \frac{\overline{EG}}{\overline{MF}}$$

- 6) Soit un triangle ABC et D, E, F les milieux respectifs de [AB], [AC], [BC].

Des points D et E, on mène les parallèles à la droite (AF) coupant la droite (BC) en G et H.

- a) Compare : $\overline{BG}$, $\overline{GF}$, $\overline{FH}$ et $\overline{HC}$.

- b) Evalue :

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{BC}}, \frac{\overline{GF}}{\overline{BH}}, \frac{\overline{BF}}{\overline{BM}}$$

- 7) Les points A, B, C et M d'un axe (d) sont tels que

$$\overline{AB} = 5, \overline{BC} = -12 \text{ et } \overline{CM} = x$$

Des parallèles (Δ_A), (Δ_B), (Δ_C) et (Δ_M) passant par A, B, C et M coupent l'axe (d') en A', B', C' et M' tels que

$$\overline{A'B'} = -7, \overline{B'C'} = y \text{ et } \overline{C'M'} = 3$$

- a) Calcule x et y.

- b) Fais un dessin approximatif.

VECTEURS

I. BIPOINTS EQUIPOLLENTS-VECTEURS

1. **Bipoint** : Un bipoint est un couple de points. On le note par exemple (A, B) et on lit « bipoint (A, B) »

A est l'origine et B l'extrémité du bipoint.

Remarque : $(A, B) \neq (B, A)$

2. **Bipoints équipollents**

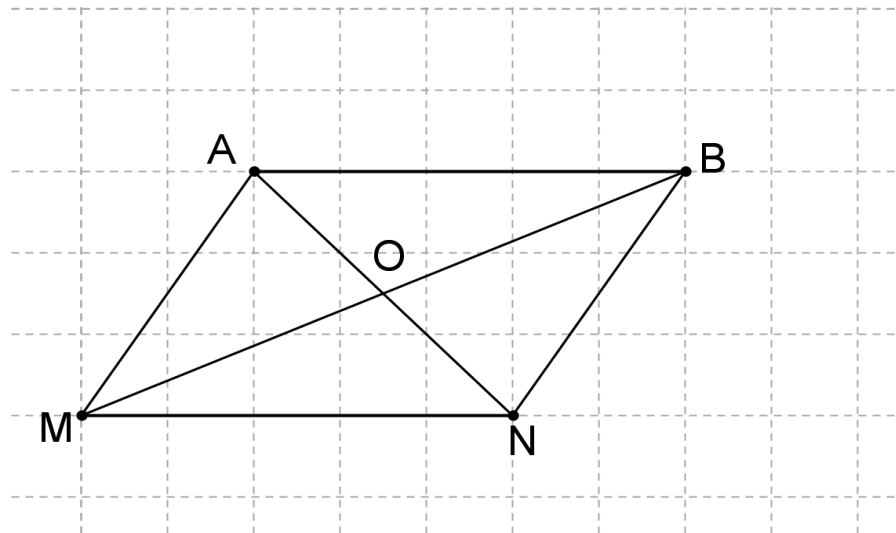
Activité 1

Consigne :

- Construis un parallélogramme ABNM de centre O.
- Les segments $[AN]$ et $[BM]$ ont même milieu, on dit que le bipoint (M, N) est équipollent au bipoint (A, B) . Trouve d'autres bipoints qui sont équipollents et définis deux bipoints équipollents.

Exemple de réponse

- a) Figure



- b) (M, N) équipollent à (A, B)
 (M, A) équipollent à (N, B)
 (A, M) équipollent à (B, N)
 (N, M) équipollent à (B, A)
- Deux bipoints (A, B) et (M, N) sont équipollents si et seulement si $[AN]$ et $[BM]$ ont même milieu.
 - Deux bipoints (A, B) et (M, N) sont équipollents si et seulement si ABNM est un parallélogramme.
 - Sur un axe $(A ; B)$ et $(C ; D)$ sont équipollents lorsque $\overline{AB} = \overline{CD}$

3. Vecteur

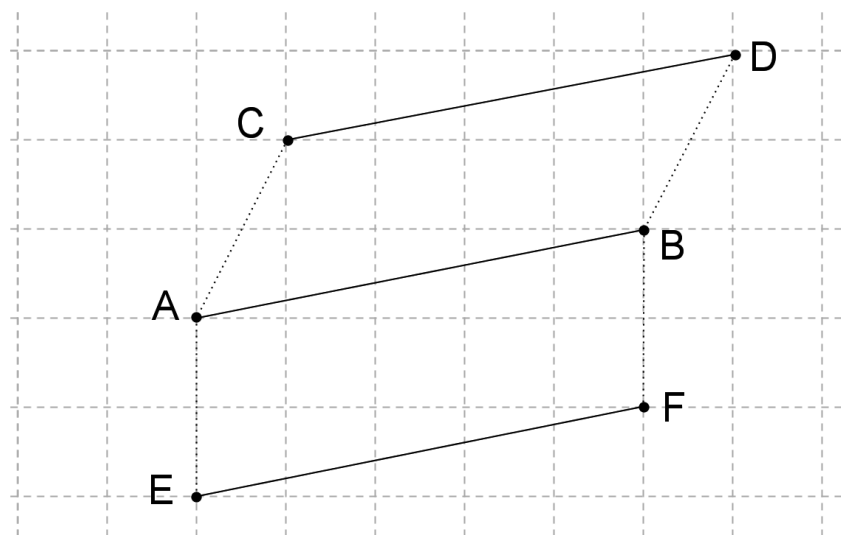
Activité 2

Consigne : Soit (A, B) un bipoint du plan.

- Construis les bipoints (C, D) et (E, F) tous équipollents à (A, B) . peux-tu en construire d'autres ?
- Utilise cette figure pour compléter avec « est équipollent à » ou « n'est pas équipollent à »
 $(A, B) \dots (A, B)$; $(C, D) \dots (C, D)$; $(E, F) \dots (E, F)$;
 $(A, B) \dots (C, D)$; $(C, D) \dots (A, B)$; $(C, D) \dots (E, F)$; $(A, B) \dots (E, F)$.

Exemple de réponse

a)



- (A, B) est équipollent à (A, B) ; (C, D) est équipollent à (C, D) ; (E, F) est équipollent à (E, F) ;
 (A, B) est équipollent à (C, D) ; (C, D) est équipollent à (A, B) ;
 (C, D) est équipollent à (E, F) ; (A, B) est équipollent à (E, F) .

Propriétés:

- Tout bipoint est équipollent à lui-même : (A, B) équipollent à (A, B) .
- Si (A, B) équipollent à (C, D) alors (C, D) équipollent à (A, B) .
- Si (A, B) équipollent à (C, D) et (C, D) équipollent à (E, F) alors (A, B) équipollent à (E, F) .

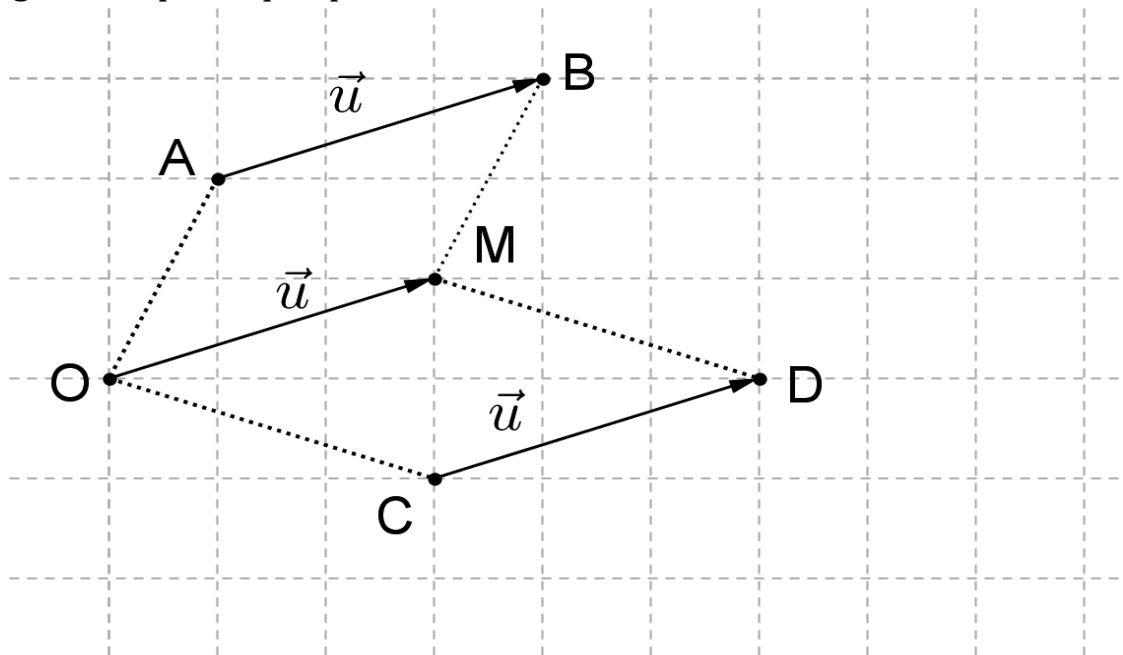
L'ensemble des bipoints équipollents à un bipoint (A, B) est une classe d'équivalence appelé **vecteur**.

Définition : On appelle **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ l'ensemble de tous les bipoints équipollents à (A, B) . Dans la pratique, on note aussi un vecteur par une lettre minuscule surmonté d'une flèche, par exemple : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

Quatre règles à retenir

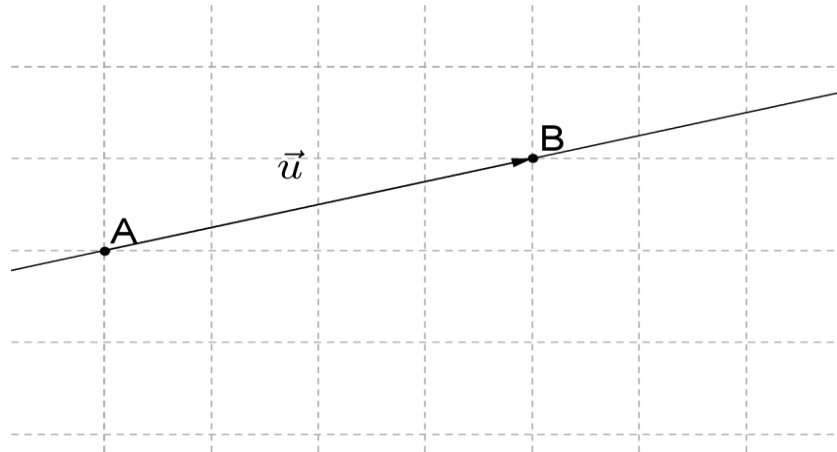
- 1) Tout bipoint équipollent à (A, B) détermine un vecteur et un seul noté $\overrightarrow{AB}$. Tout bipoint (C, D) équipollent à (A, B) détermine le même vecteur que (A, B) et l'on écrit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- 2) Tout bipoint dont l'origine est égale à l'extrémité, par exemple (A, A) détermine le vecteur que l'on appelle **vecteur nul** et que l'on note : $\vec{0}$. Réciproquement si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, alors $A = B$.
- 3) Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un bipoint (A, B) tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On dit que le bipoint (A, B) est un **représentant de $\vec{u}$** . Ainsi tout bipoint équipollent à (A, B) est aussi un représentant de $\vec{u}$.
- 4) Pour tout point A et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Représentation : Pour représenter un vecteur il est permis de choisir pour origine n'importe quel point.



$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{CD}$$

Caractéristiques d'un vecteur :



Un vecteur est caractérisé par :

- son origine : ici le point A ;
- sa direction : ici la direction de la droite (AB) ;
- son sens : ici de A vers B ;
- sa longueur : ici $d(A ; B) = AB$.

Egalité de deux vecteurs : Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur.

Activité 3

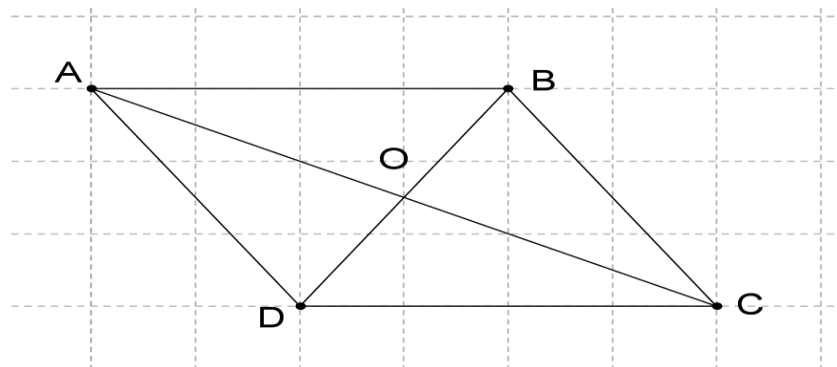
Consigne : Dessine un parallélogramme ABCD de centre O.

a) Donne deux vecteurs de :

- de même direction ;
- de même sens ;
- de directions différentes ;
- de même direction mais de sens contraires.

b) Ecris tous les vecteurs égaux de la figure.

Exemple de réponse



II. NORME D'UN VECTEUR

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur de représentant (A, B).

On appelle norme du vecteur $\vec{u}$ la distance AB.

On note $\|\vec{u}\|$ la norme du vecteur $\vec{u}$.

Si l'on a : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors : $\|\vec{u}\| = d(A; B) = AB$

La norme d'un vecteur est la longueur de ce vecteur.

Activité 4

Consigne : Sur un axe de repère (O ; I), marque les points A(-3), B(-1), C(2) et D(4).

1) Montre que les bipoints (A ; B) et (C ; D) sont équipollents.

2) Calcule les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OC}$

III. OPERATIONS SUR LES VECTEURS

1. Addition de vecteurs

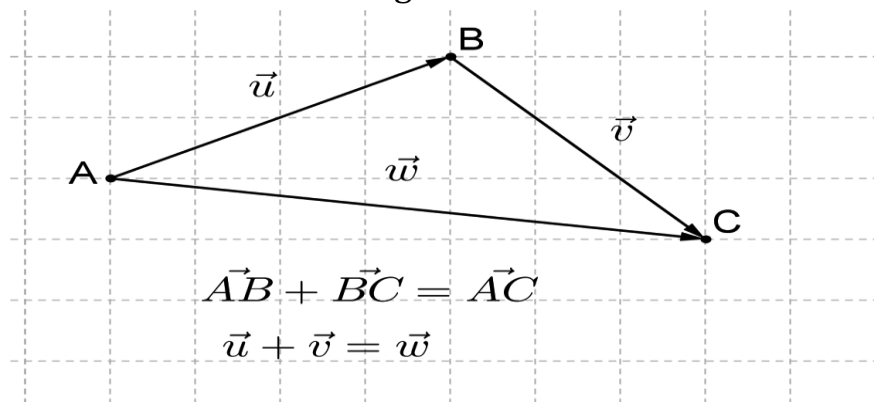
Relation de Chasles : Soient A, B, C trois points du plan.

L'égalité : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelé *relation de Chasles*.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ équivaut à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

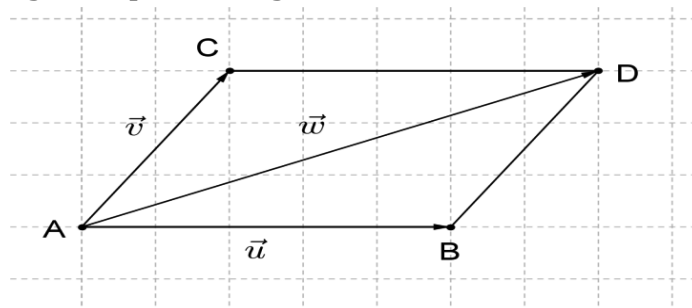
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

1^{er} cas : L'extrémité de l'un est l'origine de l'autre



2^{ème} cas : Les deux vecteurs ont même origine :

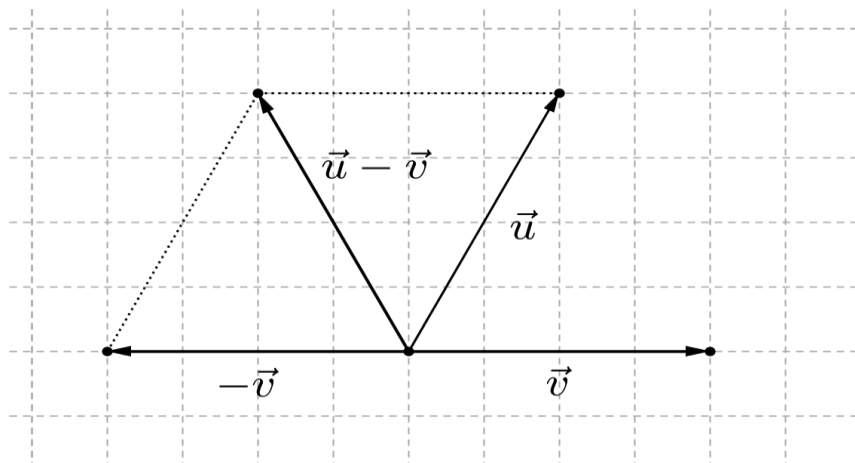
On applique la règle du parallélogramme.



Propriétés

- Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- Tout vecteur $\vec{u}$ admet un unique opposé $-\vec{u}$
- L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Construction de $\vec{u} - \vec{v}$



Activité 5

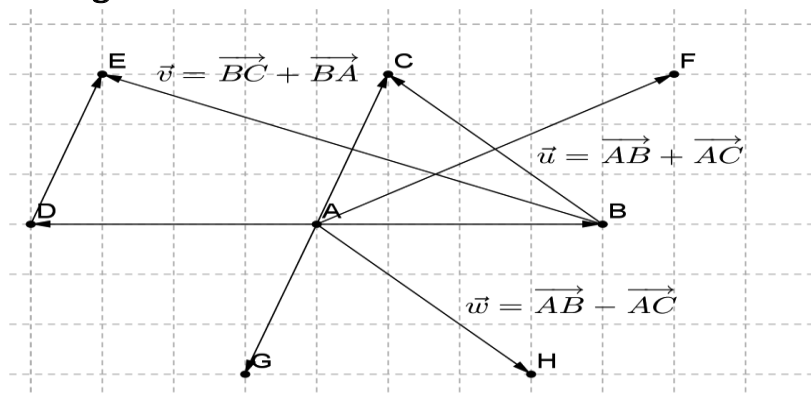
Consigne 1 : Dessine un triangle ABC puis construis les vecteurs suivants :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}; \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}; \quad \vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

Consigne 2 : M, N, P, Q sont des points du plan. En utilisant la relation de Chasles, montre que : $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ}$

Exemple de réponse

Consigne 1 :



Consigne 2 :

La relation de Chasles permet d'écrire :

$$\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$\text{sachant que } \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ}$$

2. Multiplication par un vecteur

Tout vecteur $\vec{u}$ peut être multiplié par tout nombre rationnel k : le résultat est un vecteur noté $k\vec{u}$.

Propriété fondamentale : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout nombre rationnel k : $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

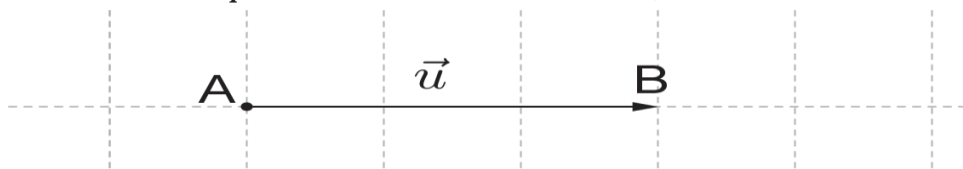
Activité 6

Consigne 1 : Simplifie l'écriture

$$2\vec{u} + 3(2\vec{v} - \vec{u}) - 3\left(\frac{2}{3}\vec{u} + \vec{v}\right)$$

Consigne 2 : Reproduis la figure suivante puis dessine les vecteurs

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ tel que : $\overrightarrow{AC} = 2\vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = -1,5\vec{u}$

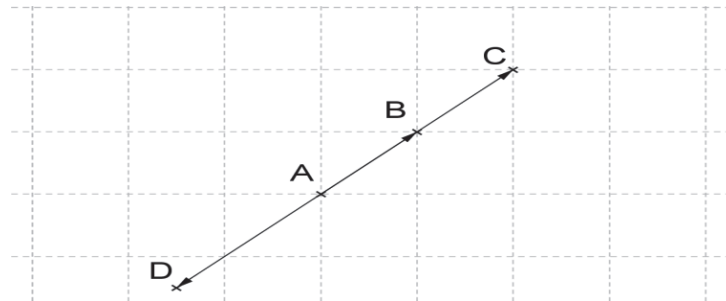


Exemple de réponse

Consigne 1 :

$$2\vec{u} + 3(2\vec{v} - \vec{u}) - 3\left(\frac{2}{3}\vec{u} + \vec{v}\right) = 2\vec{u} + 6\vec{v} - 3\vec{u} - 2\vec{u} - 3\vec{v} = -3\vec{u} + 3\vec{v}$$

Consigne 2 :



3. Colinéarité-Alignement-Parallélisme

- **Colinéarité :** Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou un nombre k' tel que $\vec{u} = k'\vec{v}$.

Remarque :

- ✚ Si k est positif, $\vec{u}$ et $k\vec{v}$ ont même sens ;
- ✚ Si k est négatif, $\vec{u}$ et $k\vec{v}$ sont de sens contraires.

Exemples :

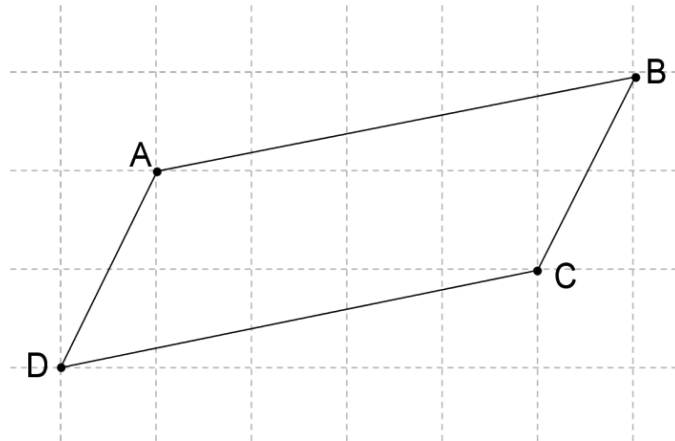
Si $\vec{u} = 2\vec{v}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{u}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

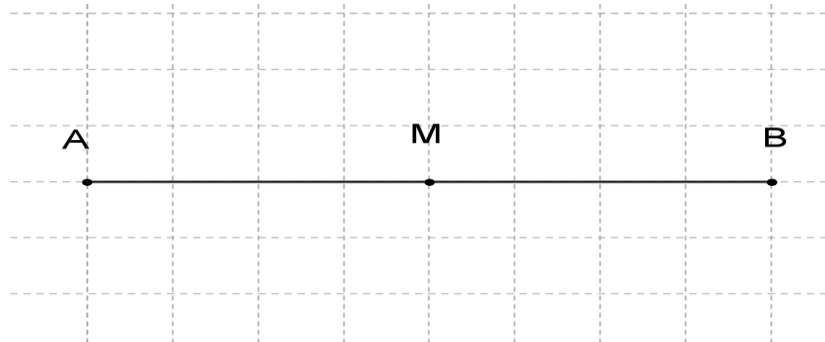
- **Alignement de points** : Les points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont *colinéaires*
- **Parallélisme de droites** : Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont *colinéaires*

IV. LANGAGE VECTORIEL LANGAGE GEOMETRIQUE

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme.
- Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



- Si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ alors M est le milieu [AB].
Si M est le milieu [AB] alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$



EXERCICES

- 1) On donne trois points A, B, C non alignés et un point A' distinct de A.
 - a) Construis le point B' tel que les bipoints (A ; A') et (B ; B') soient équipollents.
 - b) C étant tel que (A ; A') et (C ; C') représentent le même vecteur, trouve tous les couples de bipoints équipollents dont l'origine et l'extrémité sont chacune un des points A, B, C, A', B' et C'.
- 2) Sur un axe (Δ) de repère (O ; I), on donne les points A, B, C et D.
 - a) On pose $x_A = -4$; $x_B = -1$; $x_C = 2$ et $x_D = 5$
Place les points A, B, C et D puis montre que les bipoints (A ; B) et (C ; D) sont équipollents.
 - b) On suppose maintenant que: $x_A = a$; $x_B = b$; $x_C = c$; $x_D = d$ et que $a - c = b - d$.
Montre que (A ; B) et (C ; D) sont équipollents
- 3) A, B, C sont trois points non alignés.
 - a) Construis le point E tel que : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$
 - b) Les égalités suivantes sont-elles vraies ?
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{EB}$
- 4) Soit un triangle ABC.
Construis les points D, E, F tels que :
 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC}$
Démontre que C est le milieu de (D, F).
- 5) Soient A, B, C trois points non alignés et D le milieu de [BC]. Construis un représentant des vecteurs :
 $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$; $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; $\vec{x} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$
 $\vec{y} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$; $\vec{z} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$
- 6) Effectue
 - a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QA}$
 - c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$; d) $\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{GI}$; e) $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP}$
 - f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$; g) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$
 - h) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{ED}$; i) $\overrightarrow{FD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{CB}$

7) Dans les cas suivants, montre que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

a) $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$

b) $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = 6\vec{i} - \vec{j}$

c) $\vec{u} = 12\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

d) $\vec{u} = -4\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 8\overrightarrow{AB} - 8\overrightarrow{BD}$

e) $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$

f) $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$

8) Sur un axe d'origine O, place les points A(2), B(-3), C(5) et M(-4)

a) Calcule $\overline{AM}$ et $\overline{BC}$

b) Calcule les abscisses des points I et J milieux respectifs des segments [BC] et [AM].

c) Calcule : $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$, $\|\overrightarrow{AM}\|$, $\|\overrightarrow{MB}\|$, $\|\overrightarrow{CM}\|$, $\|\overrightarrow{OM}\|$.

POLYEDRES ET CORPS RONDS**I. UNITES DE VOLUME****Activité 1****Consigne 1 :**

1) Nomme l'unité principale de volume et donne son symbole.

2) Complète

$$1\text{m}^3 = \dots \text{cm}^3; \quad 1\text{m}^3 = \dots \text{dm}^3; \quad 1\text{m}^3 = \dots \text{mm}^3$$

$$1\text{dm}^3 = \dots \text{m}^3; \quad 1\text{cm}^3 = \dots \text{m}^3; \quad 1\text{mm}^3 = \dots \text{m}^3$$

Consigne 2 :

1) Définis la capacité d'un récipient et donne l'unité principale de capacité.

2) Complète : $434,47\text{cm}^3 = \dots \text{L}$; $0,013\text{m}^3 = \dots \text{L}$

1) Unité de longueur et unité de volume

L'unité principale de volume est le **mètre cube**. Symbole (m^3).

Le tableau suivant donne les unités de longueur et les unités de volume correspondantes

	Unité de longueur		Unité de volume correspondant	
Unité principale	mètre	m	Mètre cube	m^3
Sous-multiples	décimètre	dm	Décimètre cube	dm^3
	centimètre	cm	Centimètre cube	cm^3
	millimètre	mm	Millimètre cube	mm^3

Les unités de longueur sont de 10 en 10 fois plus grande ou plus petite les une que les autres alors que les unités de volume sont 1000 en 1000 fois plus grande ou plus petite les unes que les autres.

$$1\text{m}^3 = 1000\text{dm}^3$$

$$1\text{dm}^3 = 1000\text{cm}^3$$

$$1\text{cm}^3 = 1000\text{mm}^3$$

2) Changement d'unité de volume

Pour passer d'une unité de volume à l'unité immédiatement supérieure, on déplace la virgule de trois rangs vers la gauche :

Exemple :

$$23,48\text{dm}^3 = 0,02348\text{m}^3$$

$$5791\text{cm}^3 = 5,791\text{dm}^3$$

Pour passer d'une unité de volume à l'unité immédiatement inférieure, on déplace la virgule de trois rangs vers la droite :

Exemple :

$$6,04m^3 = 6040dm^3$$

$$0,072cm^3 = 72mm^3$$

3) Mesure de capacité

Le volume intérieur d'un récipient est appelé la *capacité* de ce récipient.

Multiples	kilolitre	kL	1kL = 1000L
	hectolitre	hL	1hL = 100L
	décalitre	daL	1daL = 10L
Unité principale	litre	L	1L = 1dm ³
Sous-multiples	décilitre	dL	1dL = 0,1L
	centilitre	cL	1cL = 0,01L
	millilitre	mL	1mL = 0,001L

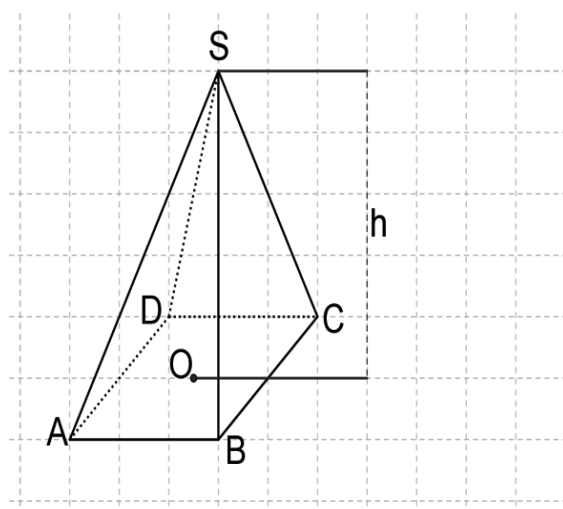
II. LA PYRAMIDE REGULIERE A BASE CARREE :

1) Définitions

Activité 2

La figure suivante est la représentation géométrique d'un solide.

Observe cette figure.



Consigne 1 : Nomme les triangles de cette figure.

Consigne 2 : La base de ce solide est un quadrilatère, nomme-le.

Consigne 3 : Trouve une relation entre le nombre de triangle et le nombre de coté de la base.

Conclusion :

- Le solide ainsi observé est une pyramide régulière à base carrée de sommet S.
- Les triangles SAB, SBC, SCD et SDA sont appelés les faces latérales de la pyramide, le carré ABCD es la base de la pyramide.
- Le nombre de faces latérales d'une pyramide est égal au nombre de cotés de sa base
- La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan de la base en un point H. La longueur du segment [SH] est appelé la hauteur de la pyramide.

Consigne 4 : Fais un développement (ou le patron) d'une pyramide.

2) Aire et volume

- Aire d'une pyramide est la somme des aires des faces latérale et de celle de la base.

$$\mathcal{A}_{pyramide} = \text{somme des aires des faces latérales} + \text{aire } \mathcal{B}_{base}$$

- Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire $\mathcal{B}$ de la base par la hauteur h de la pyramide.

$$V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$$

Activité 3

Consigne : On donne une pyramide dont la base est un carré de 28 cm de coté et 30 cm de hauteur.

Calcule l'aire de sa base et en déduis son volume.

Exemple de réponse

L'aire de la base : $\mathcal{B} = c^2$

$$\mathcal{B} = 28 \times 28 = 784 \text{ cm}^2$$

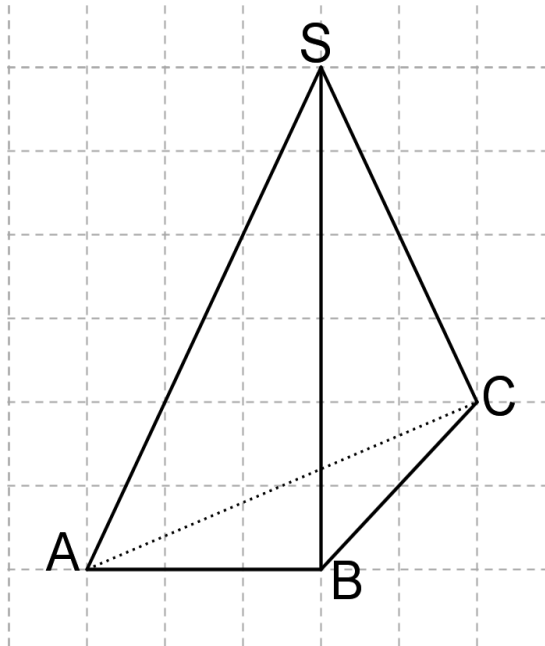
Le volume :

$$V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{784 \times 30}{3} = 7,84 \text{ cm}^2$$

III. TETRAEDRE REGULIER

1) Définition

Si la base d'une pyramide est un triangle, la pyramide triangulaire obtenue est aussi appelée tétraèdre. Un tétraèdre est donc un solide limité par quatre faces qui sont des triangles.



Remarque : Si ces quatre triangles sont équilatéraux, on dit que le tétraèdre est un tétraèdre régulier.

Activité 4

Consigne : Fais un développement (ou le patron) d'un tétraèdre.

2) Aire et Volume

- Aire d'un tétraèdre est la somme des aires des faces latérales et de celle de la base.

$$\mathcal{A}_{\text{tétraèdre}} = \text{somme des aires des faces latérales} + \text{aire } \mathcal{B}_{\text{base}}$$

- Le volume d'un tétraèdre est égal au tiers du produit de l'aire $\mathcal{B}$ de la base par la hauteur h du tétraèdre.

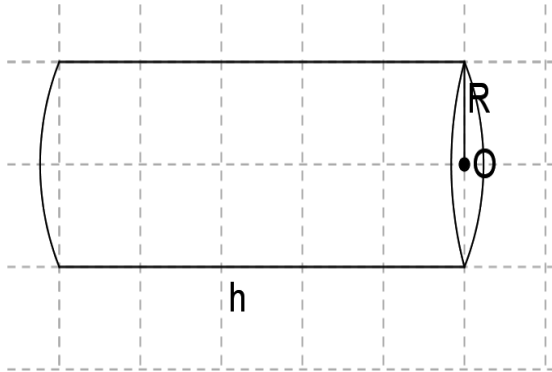
$$V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$$

IV. CYLINDRE

1) Définition

Activité 5

Voici un cylindre



Consigne 1 :

- Ce cylindre a combien de bases ? Quelle est leur forme ?
- Le cylindre a-t-il plusieurs faces latérales ?

Définition : Le cylindre de révolution est un solide composé :

- de deux bases en forme de disques identiques (superposable) ;
- d'une seule face latérale, non plane.

Consigne 2 : Fais un développement (ou le patron) d'un cylindre.

2) Aire et volume

R : rayon de la base ; **h :** hauteur

Aire latérale : $\mathcal{A} = 2\pi R h$

Aire de la base : $\mathcal{B} = \pi R^2$

Volume : $V = \pi R^2 h$

Activité 6

Consigne : une tige de fer a la forme d'un cylindre de révolution ; sa longueur est 2m ; le rayon de la base est 15mm. Calcule :

- Son aire latérale en dm^2 .
- L'aire de la base en dm^2 .
- Son volume.

Exemple de réponse

a) Aire latérale : $\mathcal{A} = 2\pi Rh$

$\mathcal{A} = 2 \times 3,14 \times 0,15 \times 20 = 18,84 \text{ dm}^3$

b) Aire de la base : $\mathcal{B} = \pi R^2$

$\mathcal{B} = 3,14 \times (0,15)^2 = 0,07065 \text{ dm}^2$

c) Volume : $V = \pi R^2 h$

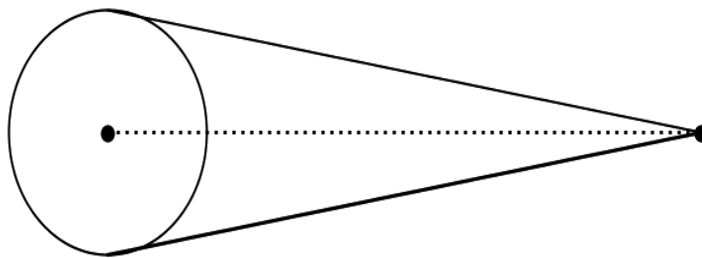
$V = 0,07065 \times 20 = 1,413 \text{ dm}^3$

V. CONE DE REVOLUTION

1) Définition

Activité 7

Voici un cône de révolution



Consigne 1 :

- c) Donne la forme de sa base.
- d) Le cône a-t-il plusieurs faces latérales ?

Définition : Un cône de révolution est un solide composé :

- d'une base en forme de disque ;
- d'un sommet situé sur la perpendiculaire en son centre au disque de base ;
- d'une seule face latérale, non plane.

Exemple : La pointe d'un crayon, bien taillée à l'aide d'un taille-crayons, nous donne l'image d'un cône de révolution.

Consigne 2 : Fais un développement (ou le patron) d'un cône.

2) Aire et volume

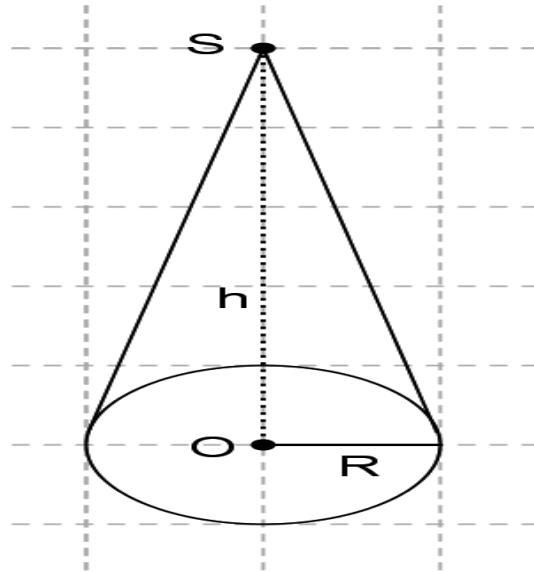
R : rayon du disque de base ;

h : hauteur ;

$\mathcal{B}$: aire de la base : $\mathcal{B} = \pi \times R^2$

$$V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3} \quad \text{ou}$$

$$V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$$



Activité 8

Consigne : Un cône de révolution a une hauteur de 30cm et la base est un disque de rayon 18cm. ($\pi = 3,14$).

Calcule :

- L'aire de la base.
- Le volume du cône.

Exemple de réponse

Aire de la base : $\mathcal{B} = \pi \times R^2$

$$\mathcal{B} = 3,14 \times (18)^2 = 1017,36 \text{ cm}^2$$

$$\text{Volume du cône : } V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$$

$$V = \frac{1017,36 \times 30}{3} = 10173,6 \text{ cm}^3$$

VI. SPHERE

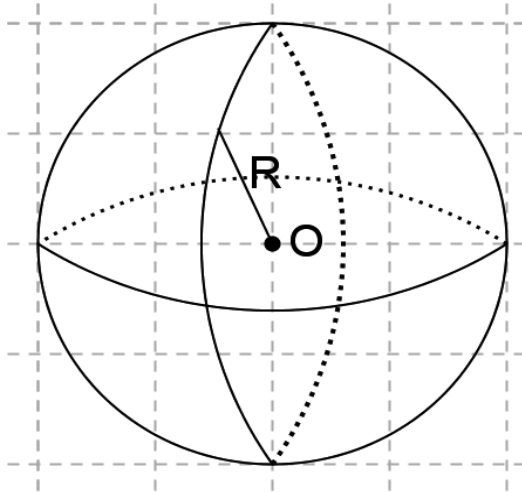
1) Définitions

Observations : Un ballon de football, une bulle de savon sont des images approchées d'une surface géométrique appelée *sphère*.

Définitions : Soient un point O et un nombre non nul R.

- On appelle sphère de centre O et de rayon R l'ensemble des points de l'espace dont la distance au point O égale à R.

- On appelle boule de centre O et de rayon R le solide géométrique limité par la sphère de centre O et de rayon R.



2) Aire et volume

Aire d'une sphère : $\mathcal{A} = 4\pi R^2$

Volume d'une boule : $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

Activité 9

Consigne : Le rayon d'une sphère est $\frac{7}{2}m$. Calcule (prendre $\pi = \frac{22}{7}$) :

- Son aire.
- Le volume de la boule délimitée par cette sphère.

Exemple de réponse

Aire de la sphère : $\mathcal{A} = 4\pi R^2$

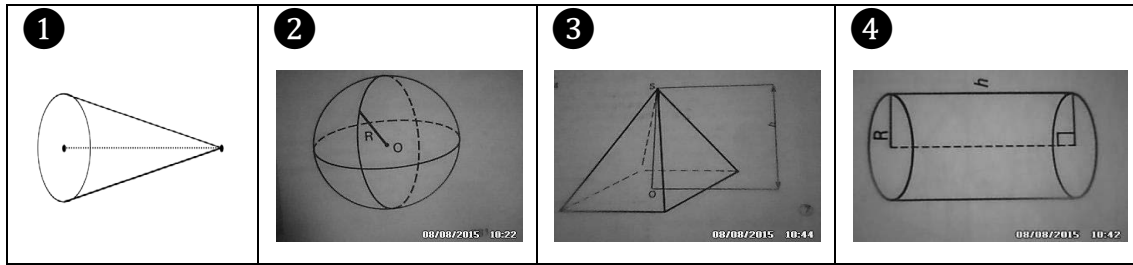
$$\mathcal{A} = 4 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{4 \times 22 \times 49}{7 \times 4} = 22 \times 7 = 154 m^2$$

Volume d'une boule : $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

$$V = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^3 = 154 \times \frac{7}{2} = 539 m^3$$

EXERCICES

1) Voici la représentation de certains solides.



Pour chacune de ces représentations, indique :

- le nom du solide ;
- le nombre de base ;
- le nombre de faces latérales.

2) Exprime en cm^3 , puis en mm^3 les volumes suivants :

38,584 dm^3 ; 0,001356 m^3 ; 4,312 m^3 ;
38,584 dm^3 ; 0,142641 dm^3 ; 1,583 dm^3 .

3) Exprime en m^3 , puis en dm^3 les volumes suivants :

40253 cm^3 ; 258683 mm^3 ; 683,48 cm^3 ;
72481 mm^3 ; 842731 cm^3 ; 842,81 cm^3 .

4) Transforme en cm^3 , puis en mm^3 les capacités suivantes :

2348cL ; 18,45dL ; 3,81L ; 9,83dL ;
35,41dL ; 4,17L ; 2357cL ; 287mL.

5) Transforme en dL, puis en L les volumes suivants :

431,47 cm^3 ; 317250 mm^3 ; 1,243 dm^3 ;
481,23 dm^3 ; 0,013 m^3 ; 431281 cm^3 .

6) Calcule le volume d'un cylindre dont la hauteur est 2,52m et dont le rayon des bases est 89cm.

7) La hauteur d'une pyramide est 146m ; la base est un carré dont le côté mesure 233m.

Calcule le volume cette pyramide.

- 8) Une meule de blé a la forme d'un cylindre de révolution surmonté d'un cône de révolution qui a, avec le cylindre, une base commune. Le rayon cette base commune est 7m, la hauteur du cylindre est 2,30m et la hauteur totale de la meule est 5,30m.
Calcule le volume de cette meule.
- 9) Une boule de pétanque mesure 74mm de diamètre.
a) Calcule l'aire de la sphère qui délimite cette boule.
b) Calcule le volume de la boule.
- 10) Une montgolfière de forme sphérique mesure 11,80m de diamètre.
a) Calcule son volume.
b) Calcule l'aire du tissu nécessaire à sa fabrication si l'on compte 5% de plus pour les coutures.
c) Ce tissu se vend par coupons de 140cm de largeur.
Quel métrage de tissu faut-il acheter.
- 11) Une pyramide a base carrée de 5cm de côté et de 6cm de hauteur, a le même volume qu'un cône de révolution dont le disque de base a 2,5cm de rayon.
Calcule la hauteur du cône à 10^{-1} près.