

MATHÉMATIQUES

2A PIC

Cours essentiel · Méthodes & astuces
Exercices gradués · Défis olympiades
Corrigés détaillés

16 chapitres

127 exercices corrigés

32 défis olympiades

2 sujets : contrôle type et épreuve olympiade

Auteur



Maths Olympiad

Réussir ses contrôles
et préparer les olympiades de mathématiques

Comment utiliser ce livret ?

Ce livret couvre **tout le programme de mathématiques de la 2APIC** en 16 chapitres. Il est conçu pour **comprendre, s'entraîner et réussir ses contrôles**, tout en donnant aux plus curieux le goût des **olympiades**. Chaque chapitre suit toujours le même parcours en quatre étapes :

- | | |
|--|--|
| 1 L'essentiel du cours : définitions, propriétés et exemples, sans bavardage. | 2 Méthodes & astuces : les savoir-faire pas à pas, les raccourcis et les pièges. |
| 3 Exercices : du plus simple au plus exigeant, dont des exercices type contrôle. | 4 Défis olympiades : des problèmes astucieux pour aller plus loin. |

► Les encadrés

DÉFINITION	Le vocabulaire à connaître par cœur.	MÉTHODE	La démarche à suivre, étape par étape.
PROPRIÉTÉ	Une règle de calcul ou de raisonnement.	★ ASTUCE DU PROF	Le raccourci qui fait gagner du temps.
THÉORÈME	Un résultat important et sa condition d'emploi.	✗ PIÈGE À ÉVITER	L'erreur la plus fréquente sur les copies.
EXEMPLE	Une application commentée du cours.	LE SAVAIS-TU ?	Un peu d'histoire et de culture mathématique.

► Les niveaux de difficulté

- ☆☆☆ Application directe du cours : à réussir sans hésiter.
- ☆☆☆ Approfondissement : plusieurs étapes ou une petite idée.
- ☆☆☆ Niveau contrôle exigeant ou exercice de réflexion.
- DÉFI OLYMPIADE** Problème de concours : il faut chercher, essayer, se tromper... et trouver l'astuce !

► Bien travailler avec ce livret

- 1. Lis le cours, puis refais les exemples seul**, sans regarder la solution.
- 2. Cherche chaque exercice au moins 10 à 15 minutes** avant d'ouvrir les corrigés (à partir de la page 69). Un exercice cherché, même raté, s'apprend beaucoup mieux qu'un exercice lu.
- 3. Note tes erreurs** dans un petit carnet : relis-le avant chaque contrôle.
- 4. Avant un contrôle**, révise avec le formulaire (page 64). En fin d'année, traite le contrôle type et l'épreuve type olympiade en conditions réelles, sans corrigé.

► Une progression conseillée

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1^{er} semestre | Chapitres 1 à 4 (rationnels, puissances, calcul littéral) et chapitres 9 à 12 (droites remarquables, cercle, Pythagore, cosinus). |
| 2^e semestre | Chapitres 5 à 8 (ordre, équations, proportionnalité, statistiques) et chapitres 13 à 16 (milieux, projection, translation, espace). |
| Mai – juin | Formulaire, contrôle type et épreuve type olympiade, puis les défis pour le plaisir ! |

La progression exacte peut varier selon l'établissement : suis l'ordre de ton professeur, chaque chapitre se lit de façon indépendante.

► Pour les parents et les enseignants

Les exercices sont classés par difficulté et leurs corrigés sont séparés des énoncés : le livret se prête aussi bien au travail autonome qu'aux séances de soutien, aux devoirs à la maison ou à la préparation des contrôles. Le contrôle type (sur 20 points) reprend tout le programme de l'année et l'épreuve type olympiade permet de repérer et d'encourager les élèves passionnés.

Sommaire

Partie A — Nombres et calcul	4
1 Les nombres rationnels : addition et soustraction	4
2 Multiplication et division des nombres rationnels	8
3 Les puissances	12
4 Développement, factorisation et identités remarquables	16
5 Ordre et opérations	20
6 Les équations du premier degré	23
7 La proportionnalité	27
8 Statistiques	31
Partie B — Géométrie	34
9 Les droites remarquables d'un triangle	34
10 Triangle rectangle et cercle	38
11 Le théorème de Pythagore et sa réciproque	42
12 Le cosinus d'un angle aigu	46
13 La droite des milieux dans un triangle	49
14 La projection sur une droite	53
15 La translation et les vecteurs	56
16 Géométrie dans l'espace : positions relatives, sections et volumes	60
Partie C — Se tester	64
F Formulaire : l'essentiel à retenir	64
S1 Contrôle type — fin d'année	65
S2 Épreuve type olympiade	67
Corrigés détaillés	69

Rappel des repères. Les corrigés de tous les exercices, des défis et des sujets types sont regroupés à la fin du livret, chapitre par chapitre : chaque exercice porte un numéro (par exemple **Exercice 7.3** = chapitre 7, exercice 3) qui permet de retrouver immédiatement sa solution.

Les nombres rationnels : addition et soustraction

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Reconnaître un nombre rationnel, connaître la règle des signes d'une écriture fractionnaire et simplifier.
- ✓ Additionner et soustraire des nombres rationnels en réduisant au même dénominateur positif.
- ✓ Supprimer des parenthèses, calculer astucieusement une somme algébrique et résoudre des problèmes.

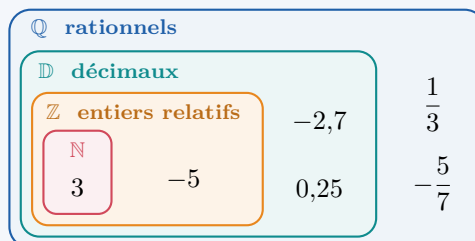
1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Nombre rationnel

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des **entiers relatifs** avec $b \neq 0$. L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$.

Exemples : $\frac{-3}{4}$; $\frac{5}{-2}$; $-7 = \frac{-7}{1}$; $-1,3 = \frac{-13}{10}$.

Tout entier relatif et tout décimal est un rationnel ; mais $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ est un rationnel qui **n'est pas décimal**.



PROPRIÉTÉ — Signe d'une écriture fractionnaire

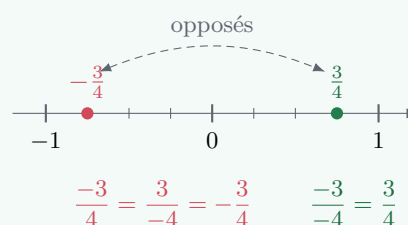
Pour tous entiers relatifs a et b , avec $b \neq 0$:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Une écriture fractionnaire est **positive** si son numérateur et son dénominateur ont le **même signe**, **négative** sinon. On donne toujours le résultat avec un **dénominateur positif** :

$$\frac{5}{-8} = -\frac{5}{8} ; \quad \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4} ;$$

$$-\frac{2}{7} = \frac{2}{-7}.$$



PROPRIÉTÉ — Égalité et simplification

On ne change pas un rationnel en multipliant (ou en divisant) son numérateur et son dénominateur par un même nombre **non nul** k : $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$. Une fraction est **irréductible** quand on ne peut plus la simplifier.

$$\frac{-18}{24} = \frac{-3 \times 6}{4 \times 6} = -\frac{3}{4} ; \quad \frac{35}{-21} = -\frac{5 \times 7}{3 \times 7} = -\frac{5}{3} ; \quad \frac{-0,6}{-1,5} = \frac{0,6 \times 10}{1,5 \times 10} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

PROPRIÉTÉ — Addition et soustraction de deux nombres rationnels

Rappel (1APIC) : deux relatifs de **même signe** : on garde le signe et on additionne les distances à zéro ($-4 - 7 = -11$); de **signes contraires** : signe du plus éloigné de zéro, on soustrait les distances à zéro ($-9 + 4 = -5$); **soustraire, c'est ajouter l'opposé** : $2 - (-6) = 2 + 6 = 8$.

Même dénominateur : on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \quad \text{ex. : } \frac{-7}{9} + \frac{4}{9} = \frac{-7+4}{9} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}; \quad \frac{2}{5} - \frac{9}{5} = \frac{2-9}{5} = -\frac{7}{5}.$$

Dénominateurs différents : on réduit d'abord au **même dénominateur positif** (de préférence le plus petit multiple commun des dénominateurs) :

$$-\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{-10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{-10+9}{12} = -\frac{1}{12} \quad \frac{2}{3} - \left(-\frac{5}{9}\right) = \frac{6}{9} + \frac{5}{9} = \frac{11}{9} \quad -3 - \frac{7}{4} = -\frac{12}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{19}{4}.$$

PROPRIÉTÉ — Somme algébrique et suppression des parenthèses

Une **somme algébrique** est une suite d'additions et de soustractions. Des parenthèses précédées d'un signe + se suppriment **sans changer** les signes : $a + (b - c) = a + b - c$. Précédées d'un signe -, on les supprime en **changeant tous les signes** à l'intérieur : $a - (b - c + d) = a - b + c - d$.

Exemple : $\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{6-9+4}{12} = \frac{1}{12}.$

2 Méthodes & astuces**MÉTHODE — Calculer une somme de rationnels en 3 étapes**

1. Rendre les dénominateurs positifs (et simplifier chaque fraction). 2. Réduire au même dénominateur. 3. Calculer le numérateur avec les règles des relatifs, puis simplifier.

$$\frac{7}{-12} - \frac{-5}{18} \stackrel{①}{=} -\frac{7}{12} + \frac{5}{18} \stackrel{②}{=} \frac{-21}{36} + \frac{10}{36} \stackrel{③}{=} \frac{-21+10}{36} = -\frac{11}{36}.$$

Dénominateur commun : on parcourt les multiples du plus grand, 18 : 18; **36** ✓ (divisible par 12).

Contrôle : $\frac{7}{12} > \frac{5}{18}$ (car $\frac{21}{36} > \frac{10}{36}$), donc le résultat devait être **négatif** ✓.

MÉTHODE — Calcul astucieux : regrouper les termes

Dans une somme algébrique, on peut **changer l'ordre** des termes, à condition que chacun garde **son** signe. On élimine les opposés et on regroupe les fractions de même dénominateur :

$$A = \frac{3}{7} - \frac{5}{8} + \frac{11}{13} + \frac{4}{7} + \frac{1}{8} - \frac{11}{13} = \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\right) + \left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{8}\right) + \underbrace{\left(\frac{11}{13} - \frac{11}{13}\right)}_{=0} = 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

❌ PIÈGE À ÉVITER

• $-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \neq -\frac{3}{3}$: on calcule le numérateur avec les relatifs, $\frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3}.$

- $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \neq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$: le $-$ change **tous** les signes, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.
- On n'additionne jamais les dénominateurs : $-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = -\frac{5}{6}$, et non $-\frac{2}{5}$.

LE SAVAIS-TU ?

La barre de fraction horizontale vient du **Maghreb** : on la trouve chez **al-Hassâr** (XII^e s.) puis chez **Ibn al-Bannâ** de Marrakech (XIII^e–XIV^e s.). « Rationnel » vient du latin *ratio*, « rapport » : un rationnel est le quotient de deux entiers.

3 Exercices**EXERCICE 1.1** ★☆☆

Écrire chaque nombre avec un dénominateur positif, puis sous forme irréductible.

- a) $\frac{6}{-9}$ b) $\frac{-14}{-21}$ c) $-\frac{-8}{12}$ d) $\frac{-45}{60}$ e) $\frac{0}{-7}$ f) $-\frac{36}{-48}$ g) $\frac{-1,2}{-0,9}$ h) $\frac{72}{-120}$

EXERCICE 1.2 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

- a) $\frac{-3}{5} = \frac{3}{-5}$. c) $\frac{-10}{15}$ et $\frac{14}{-21}$ sont égaux. e) 0,75 est un rationnel.
 b) $-\frac{4}{-7}$ est négatif. d) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{5}$. f) $\frac{2}{3} - \frac{5}{3} = -1$.

EXERCICE 1.3 ★☆☆

Calculer et donner le résultat sous forme irréductible.

- a) $-\frac{5}{7} + \frac{3}{7}$ c) $-\frac{1}{6} - \frac{5}{6}$ e) $-\frac{2}{5} - \frac{3}{10}$ g) $-2 + \frac{5}{3}$
 b) $\frac{4}{9} - \frac{13}{9}$ d) $\frac{2}{3} + \left(-\frac{7}{8}\right)$ f) $\frac{7}{12} - \left(-\frac{1}{8}\right)$ h) $\frac{1}{-4} - \frac{5}{-6}$

EXERCICE 1.4 ★☆☆

Type contrôle. Calculer en détaillant les étapes (résultats irréductibles).

- a) $A = \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right)$ c) $C = 5 - \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{2}\right)$
 b) $B = -\frac{2}{3} + \frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{6}\right)$ d) $D = \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{15}\right) - \left(\frac{4}{-5} + \frac{2}{3}\right)$

EXERCICE 1.5 ★☆☆

Calculer astucieusement, sans réduire tout au même dénominateur.

a) $E = \frac{7}{9} - \frac{3}{11} + \frac{2}{9} - \frac{8}{11} + 1$

c) $G = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}$

b) $F = \frac{13}{17} - \frac{5}{6} - \frac{13}{17} + \frac{1}{3}$

d) $H = \left(\frac{2025}{2026} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2025}{2026} - \frac{1}{2}\right)$

EXERCICE 1.6 ★★☆☆

Le bassin d'irrigation. Près de Béni Mellal, on note chaque jour la variation (en m) du niveau d'eau d'un bassin d'irrigation. Lundi matin, l'eau est à 2 m de hauteur.

Jour	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi
Variation (m)	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

- Calculer la variation totale du lundi au vendredi. En déduire la hauteur d'eau vendredi soir.
- Calculer la hauteur d'eau chaque soir. Quel soir le niveau a-t-il été le plus bas ?

EXERCICE 1.7 ★★☆☆

- Nombre mystère.** Je suis un nombre rationnel. Si l'on me retranche $-\frac{2}{3}$, puis qu'on ajoute $-\frac{5}{4}$ au résultat, on obtient $-\frac{1}{6}$. Qui suis-je ?
- Sur une droite graduée, A a pour abscisse $-\frac{5}{6}$ et B a pour abscisse $\frac{3}{4}$. Calculer la distance AB .
- Le point C est situé à gauche de B , à la distance $\frac{2}{3}$ de B . Quelle est l'abscisse de C ? Le point C est-il entre A et B ?

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 1.1 — La somme qui fond

- Vérifier que $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$, $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ et $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. (Plus généralement, $\frac{2n+1}{n \times (n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$.)
- En déduire, **sans réduire au même dénominateur**, la valeur de

$$S = \frac{3}{2} - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \dots - \frac{37}{342} + \frac{39}{380}.$$

- Que vaut cette somme si l'on ajoute encore le terme $-\frac{41}{420}$?

○ DÉFI OLYMPIADE 1.2 — Les signes cachés

Dans chaque case $\square$, on place un signe $+$ ou un signe $-$.

- Peut-on obtenir 0 avec $\frac{1}{2} \square \frac{1}{3} \square \frac{1}{4}$? (Indice : tout écrire en douzièmes.)
- Trouver **toutes** les façons d'obtenir 0 avec $\frac{1}{2} \square \frac{1}{3} \square \frac{1}{4} \square \frac{1}{6} \square \frac{1}{12}$.
- Avec ces cinq fractions, peut-on obtenir $\frac{1}{12}$? Justifier.

Multiplication et division des nombres rationnels

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Appliquer la règle des signes à un produit ou un quotient de plusieurs nombres relatifs.
- ✓ Multiplier, inverser et diviser des nombres rationnels; simplifier une écriture fractionnaire « étagée ».
- ✓ Respecter les priorités opératoires et utiliser la distributivité pour calculer astucieusement.

1 L'essentiel du cours

PROPRIÉTÉ — Produit et quotient de nombres relatifs : la règle des signes

Pour multiplier (ou diviser) deux nombres relatifs, on multiplie (ou on divise) leurs distances à zéro et on applique la **règle des signes** : **même signe** $\Rightarrow$ résultat **positif**; **signes contraires** $\Rightarrow$ résultat **négatif**.

$$(-4) \times (-2,5) = 10 ; (-6) \times 7 = -42 ; \frac{-18}{-3} = 6 ; (-35) \div 5 = -7.$$

Plusieurs facteurs non nuls : le produit est **positif** si le nombre de facteurs négatifs est **pair**, **négatif** s'il est **impair**. Si un facteur est nul, le produit est nul.

$$(-2) \times (-1) \times (-5) \times 3 = -30 \quad (3 \text{ négatifs}) \quad (-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) = 24 \quad (4 \text{ négatifs})$$

×	+	-
+	+	-
-	-	+

La table des signes

PROPRIÉTÉ — Produit de deux nombres rationnels

Pour tous rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ ($b \neq 0, d \neq 0$) : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$. On détermine d'abord le **signe**, puis on **simplifie avant** de multiplier :

$$-\frac{3}{4} \times \frac{10}{-9} = +\frac{3 \times 10}{4 \times 9} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 5}{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 3} = \frac{5}{6}$$

$$(-6) \times \frac{-5}{8} \times \left(-\frac{2}{15}\right) = -\frac{6 \times 5 \times 2}{8 \times 15} = -\frac{1}{2}.$$

DÉFINITION — Inverse d'un nombre non nul

Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre si leur produit est égal à 1. Tout nombre x **non nul** a un inverse, noté $\frac{1}{x}$; l'inverse de $\frac{a}{b}$ ($a \neq 0, b \neq 0$) est $\frac{b}{a}$. Un nombre et son inverse ont le **même signe**.

Inverses : de $5 : \frac{1}{5}$; de $-\frac{2}{3} : -\frac{3}{2}$; de $\frac{1}{7} : 7$; de $-1 : -1$; de $0,25 = \frac{1}{4} : 4$; **0 n'a pas d'inverse**.

PROPRIÉTÉ — Quotient de deux rationnels : diviser, c'est multiplier par l'inverse

 Pour $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

soit, en écriture « étagée » :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

$$\frac{5}{6} \div \left(-\frac{10}{9}\right) = \frac{5}{6} \times \left(-\frac{9}{10}\right) = -\frac{45}{60} = -\frac{3}{4}$$

$$-8 \div \frac{4}{5} = -8 \times \frac{5}{4} = -10.$$

PROPRIÉTÉ — Priorités opératoires et distributivité
Priorités : ① parenthèses (les plus intérieures d'abord) ; ② $\times$ et $\div$; ③ $+$ et $-$.

Distributivité : pour tous rationnels k, a, b : $k(a + b) = ka + kb$ $k(a - b) = ka - kb$.

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$-12 \times \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) = -12 \times \frac{3}{4} + 12 \times \frac{5}{6} = -9 + 10 = 1.$$

2 Méthodes & astuces
MÉTHODE — Multiplier ou diviser des rationnels en 3 étapes
1. Le signe d'abord : on compte les facteurs négatifs. **2.** On transforme chaque division en multiplication par l'inverse. **3.** On décompose et on **simplifie avant** de multiplier.

$$\frac{-14}{15} \div \frac{21}{-10} \times \left(-\frac{9}{4}\right) \stackrel{\text{①②}}{=} -\frac{14}{15} \times \frac{10}{21} \times \frac{9}{4} \stackrel{\text{③}}{=} -\frac{2 \times 7 \times 2 \times 5 \times 3 \times 3}{3 \times 5 \times 3 \times 7 \times 2 \times 2} = -1.$$

MÉTHODE — Simplifier une écriture fractionnaire « étagée »

 On calcule **séparément** le numérateur et le dénominateur (chacun en une seule fraction), puis on multiplie le numérateur par l'inverse du dénominateur :

$$\frac{1 - \frac{1}{4}}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = -\frac{1}{6} \times \frac{12}{5} = -\frac{2}{5}.$$

★ ASTUCE DU PROF — La distributivité « à l'envers » pour calculer vite

Quand un même facteur apparaît dans plusieurs produits, on le met en facteur :

$$\frac{7}{5} \times 13 - \frac{7}{5} \times 8 = \frac{7}{5} \times (13 - 8) = \frac{7}{5} \times 5 = 7$$

$$-\frac{4}{9} \times \frac{11}{3} - \frac{4}{9} \times \frac{16}{3} = -\frac{4}{9} \times \frac{27}{3} = -\frac{4}{9} \times 9 = -4.$$

✗ PIÈGE À ÉVITER

- **Inverse $\neq$ opposé !** L'opposé de $-\frac{2}{3}$ est $\frac{2}{3}$; son inverse est $-\frac{3}{2}$ (le signe ne change pas).
- La règle des signes concerne $\times$ et $\div$, **pas** l'addition : $-3 - 5 = -8$ alors que $(-3) \times (-5) = 15$.
- $\frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ mais $\frac{2}{\frac{3}{5}} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$: bien repérer la barre principale !

LE SAVAIS-TU ?

Enfant, l'écrivain **Stendhal** (1783–1842) enrageait que personne ne sache lui expliquer pourquoi « moins par moins donne plus ». Voici pourquoi : $(-3) \times (-5) + (-3) \times 5 = (-3) \times (-5 + 5) = 0$, donc $(-3) \times (-5)$ est l'opposé de -15 : c'est 15. La distributivité **impose** la règle des signes !

3 Exercices

EXERCICE 2.1 ★☆☆

- Calculer : a) $(-7) \times (-8)$ b) $(-0,5) \times 24$ c) $(-63) \div (-9)$ d) $(-2) \times 5 \times (-3) \times (-1)$
e) $(-1,5) \times (-4) \times (-0,5) \times (-2)$
- Sans calculer, donner le signe de : $A = (-3,7) \times (-2,1) \times (-9)$; $B = \frac{-12 \times (-4,5)}{-7}$; $C = (-1) \times (-2) \times \dots \times (-10)$.

EXERCICE 2.2 ★☆☆

Calculer en simplifiant avant de multiplier (résultats irréductibles).

- a) $-\frac{3}{5} \times \frac{10}{9}$ b) $\frac{-7}{12} \times \frac{-8}{21}$ c) $-15 \times \frac{4}{-25}$ d) $\frac{5}{-6} \times \left(-\frac{9}{10}\right) \times \frac{-4}{3}$

EXERCICE 2.3 ★☆☆

QCM. Pour chaque ligne, une seule réponse est exacte.

- L'inverse de $-\frac{4}{7}$ est
a) $\frac{4}{7}$ b) $-\frac{7}{4}$ c) $\frac{7}{4}$
- $-\frac{2}{3} \div \frac{4}{9} =$
a) $-\frac{8}{27}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) $-\frac{2}{3}$
- Le produit de 7 nombres négatifs est
a) positif b) négatif c) nul
- $\frac{-3}{\frac{1}{2}} =$
a) $-\frac{3}{2}$ b) -6 c) $-\frac{1}{6}$

EXERCICE 2.4 ★☆☆

Type contrôle. Calculer en respectant les priorités (résultats irréductibles).

- a) $A = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{-2}{9}$ c) $C = 2 - \frac{3}{4} \div \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\right)$
b) $B = \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) \div \left(-\frac{3}{8}\right)$ d) $D = \frac{\frac{3}{5} - 1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{2}}$

EXERCICE 2.5 ★☆☆

Calculer astucieusement, en utilisant la distributivité.

a) $E = -\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} - \frac{5}{8} \times \frac{4}{7}$

c) $G = -24 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{8} + \frac{5}{6}\right)$

b) $F = \frac{2}{3} \times (-29) + \frac{2}{3} \times (-1)$

d) $H = \frac{13}{11} \times \frac{7}{5} - \frac{13}{11} \times \frac{2}{5} + \frac{9}{11}$

EXERCICE 2.6 ★★☆☆

Une nuit à Ifrane. À 18 h, le thermomètre indique 2,5 °C. Ensuite, la température baisse régulièrement de $\frac{3}{4}$ °C par heure, jusqu'à 2 h du matin.

1. Calculer la variation totale de température entre 18 h et 2 h (produit d'un nombre positif par un nombre négatif). Quelle température fait-il à 2 h ?
2. À quelle heure la température est-elle passée à 0 °C ? (Calculer $2,5 \div \frac{3}{4}$ et l'écrire en heures et minutes.)

EXERCICE 2.7 ★★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier. (a, b, c désignent des nombres non nuls.)

- | | |
|---|--|
| a) Si a et b sont négatifs, alors $\frac{a}{b}$ est positif. | d) Diviser un nombre positif par $\frac{1}{2}$ le rend plus petit. |
| b) L'inverse d'un nombre négatif est positif. | |
| c) Si $a \times b < 0$ et $b \times c < 0$, alors $a \times c > 0$. | |

EXERCICE 2.8 ★★★

1. **Programme de calcul.** Je pense à un nombre. Je le multiplie par $-\frac{2}{3}$, j'ajoute $\frac{1}{2}$ au résultat, puis je divise par $-\frac{5}{6}$. J'obtiens 1. À quel nombre ai-je pensé ?
2. Trouver le nombre x tel que $-\frac{3}{4} \times x = \frac{9}{10}$, puis le nombre y tel que $y \div \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{4}{15}$.

4 Défis olympiades**○ DÉFI OLYMPIADE 2.1 — Le signe avant tout**

1. Sans calculer, donner le signe de $A = (-1) \times (-2) \times (-3) \times \dots \times (-25)$ et de $B = (-1) \times 2 \times (-3) \times 4 \times \dots \times (-49) \times 50$.
2. Calculer $C = (7-1) \times (7-2) \times (7-3) \times \dots \times (7-50)$. Attention au piège !
3. On écrit 2026 nombres, chacun égal à 1 ou à -1. Leur somme est nulle. Quel est leur produit ?

○ DÉFI OLYMPIADE 2.2 — Les produits qui s'effondrent

1. Calculer $P = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right)$ et $Q = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{99}\right)$.
2. En déduire $R = \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100} - 1\right)$ (attention au signe).
3. Vérifier que $1 - \frac{1}{9} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)$, puis calculer $T = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right)$.

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Calculer une puissance d'exposant entier relatif et connaître le signe d'une puissance d'un nombre négatif.
- ✓ Utiliser les règles de calcul sur les puissances pour simplifier une expression.
- ✓ Utiliser les puissances de 10, les préfixes et l'écriture scientifique pour convertir et comparer des grandeurs.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Puissance d'exposant entier relatif

Soit a un nombre et n un entier naturel non nul : $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ ($a^1 = a$).

Si $a \neq 0$: $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (a^{-n} est l'inverse de a^n).

Exemples : $2^5 = 32$; $(-3)^2 = 9$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$; $7^0 = 1$; $5^{-2} = \frac{1}{25}$; $(-2)^{-3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

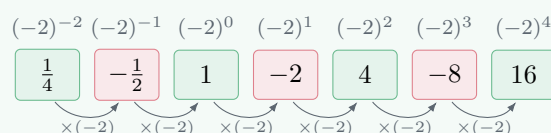
PROPRIÉTÉ — Signe d'une puissance

Une puissance d'un nombre **positif** est positive.

Pour un nombre **négatif** a :

- si n est **pair**, a^n est **positif** ;
- si n est **impair**, a^n est **négatif**.

En particulier : $(-1)^n = 1$ si n est pair, -1 si n est impair.



Les signes alternent : pair $\rightarrow +$, impair $\rightarrow -$

PROPRIÉTÉ — Règles de calcul

Pour tous nombres a et b non nuls et tous entiers relatifs m et n :

Produit de puissances	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$; $5^6 \times 5^{-8} = 5^{-2}$
Quotient de puissances	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^7}{3^2} = 3^5$; $\frac{10^{-4}}{10^3} = 10^{-4-3} = 10^{-7}$
Puissance d'une puissance	$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$(7^2)^3 = 7^2 \times 7^2 \times 7^2 = 7^6$; $(2^{-3})^2 = 2^{-6}$
Puissance d'un produit	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$(3x)^2 = 9x^2$; $2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$
Puissance d'un quotient	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{5^3} = -\frac{8}{125}$

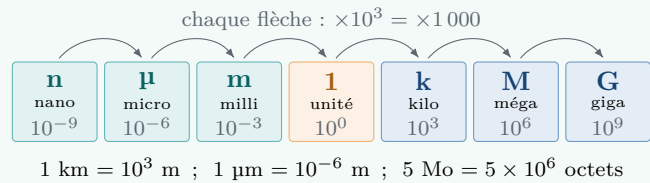
PROPRIÉTÉ — Puissances de 10 et préfixes

Pour tout entier naturel n :

$$10^n = \underbrace{100 \dots 0}_{n \text{ zéros}} \quad 10^{-n} = \underbrace{0,0 \dots 01}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^6 = 1\,000\,000 ; \quad 10^{-3} = 0,001.$$

Multiplier par 10^n décale la virgule de n rangs vers la droite ; par 10^{-n} , vers la gauche : $3,7 \times 10^4 = 37\,000$; $52 \times 10^{-3} = 0,052$.

**DÉFINITION — Écriture scientifique**

Tout décimal positif non nul s'écrit de façon unique : $a \times 10^p$ avec $1 \leq a < 10$ et p entier relatif.

Terre-Soleil : $150\,000\,000\,000 \text{ m} = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$; une bactérie : $0,000\,002 \text{ m} = 2 \times 10^{-6} \text{ m}$.

Comparer : on compare d'abord les **exposants** ; à exposants égaux, on compare les nombres a : $9,8 \times 10^4 < 1,2 \times 10^5$; $3 \times 10^{-5} < 4 \times 10^{-5}$.

**2 Méthodes & astuces****MÉTHODE — Simplifier une expression : tout écrire avec les mêmes bases**

On décompose chaque nombre en produit de puissances de nombres premiers ($4 = 2^2$, $6 = 2 \times 3$, $9 = 3^2 \dots$), puis on applique les règles base par base :

$$A = \frac{6^3 \times 2^{-4}}{9^2 \times 4^{-1}} = \frac{2^3 \times 3^3 \times 2^{-4}}{3^4 \times 2^{-2}} = 2^{3-4-(-2)} \times 3^{3-4} = 2^1 \times 3^{-1} = \frac{2}{3}.$$

MÉTHODE — Passer en écriture scientifique

On place la virgule après le premier chiffre non nul, puis on compense avec une puissance de 10 :

$$0,000\,47 = 4,7 \times 10^{-4} \quad 3\,520\,000 = 3,52 \times 10^6 \quad 245 \times 10^{-7} = 2,45 \times 10^2 \times 10^{-7} = 2,45 \times 10^{-5}.$$

Pour un calcul, on regroupe les nombres d'un côté et les puissances de 10 de l'autre :

$$\frac{6 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^7}{1,5 \times 10^2} = \frac{6 \times 5}{1,5} \times 10^{-3+7-2} = 20 \times 10^2 = 2 \times 10^3.$$
❌ PIÈGE À ÉVITER

- $-3^2 = -9$ (seul 3 est au carré) mais $(-3)^2 = 9$. $10^{-2} = 0,01$ est **positif** : l'exposant négatif ne rend pas le nombre négatif !
- $2^3 \times 2^4 = 2^7$ et non 2^{12} ; $3^2 \times 5^2 = 15^2$ mais **aucune règle pour les sommes** : $2^3 + 2^4 = 24 \neq 2^7$.

LE SAVAIS-TU ?

En informatique, tout se compte en puissances de 2. Comme $2^{10} = 1\,024 \approx 10^3$, on a longtemps appelé « kilo-octet » un paquet de 1 024 octets. Aujourd'hui, une clé USB de 64 Go contient environ $6,4 \times 10^{10}$ octets, soit plus de 5×10^{11} chiffres binaires 0 ou 1 !

3 Exercices

EXERCICE 3.1 ★☆☆

Calculer (résultats sous forme d'entier, de décimal ou de fraction).

- | | | | | | |
|-------------|------------------|------------------------------------|----------------|----------------------------------|----------------------|
| a) $(-2)^5$ | c) $(-1)^{2027}$ | e) $(-5)^0$ | g) $(-0,1)^3$ | i) 10^{-5} | k) $-(-3)^3$ |
| b) -2^4 | d) 3^{-2} | f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ | h) $(-4)^{-2}$ | j) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$ | l) $2^{-1} + 2^{-2}$ |

EXERCICE 3.2 ★☆☆

Écrire sous la forme d'une seule puissance.

- | | | | |
|----------------------|------------------------|---------------------------|--------------------------|
| a) $7^3 \times 7^5$ | c) $(3^2)^4$ | e) $\frac{10^4}{10^{-9}}$ | g) $3^5 \times 2^5$ |
| b) $\frac{5^8}{5^3}$ | d) $2^{-3} \times 2^7$ | f) $(6^{-2})^3$ | h) $\frac{(-12)^4}{3^4}$ |

EXERCICE 3.3 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $(-7)^{10}$ est un nombre négatif. | d) $10^{-3} = -1\,000$. |
| b) $2^3 + 2^3 = 2^4$. | e) $(-5)^{-2} = \frac{1}{25}$. |
| c) $3^2 \times 3^3 = 9^5$. | f) $0,25 \times 10^{-3}$ est en écriture scientifique. |

EXERCICE 3.4 ★☆☆

Type contrôle. Écrire chaque nombre sous la forme 2^n , 3^n , 5^n ou d'une fraction simple.

- | | |
|--|--|
| a) $A = \frac{(2^3)^2 \times 2^{-4}}{2^5}$ | c) $C = (-3)^3 \times (-3)^{-5} \times 9$ |
| b) $B = \frac{5^{-2} \times 25^3}{125}$ | d) $D = \frac{6^4 \times 2^{-3}}{3^4 \times 4^{-2}}$ |

EXERCICE 3.5 ★☆☆

- Donner l'écriture scientifique de : $45\,000\,000$; $0,000\,082$; 725×10^5 ; $0,036 \times 10^{-4}$.
- Convertir en mètres, en écriture scientifique : $3,5\text{ km}$; $250\text{ }\mu\text{m}$; 8 nm ; $0,4\text{ mm}$.
- Ranger dans l'ordre croissant : 3×10^{-2} ; 8×10^{-3} ; $1,2 \times 10^{-2}$; $0,5 \times 10^{-1}$.
- Donner le résultat en écriture scientifique :

$$E = 4 \times 10^{-3} \times 2,5 \times 10^8 \qquad F = \frac{1,2 \times 10^5}{4 \times 10^{-2}} \qquad G = \frac{3 \times 10^4 \times 8 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-5}}$$

EXERCICE 3.6 ★★☆☆

Depuis l'observatoire de l'Oukaïmeden. La lumière parcourt environ 3×10^5 km par seconde. La distance Terre-Soleil est d'environ $1,5 \times 10^8$ km.

- Combien de temps la lumière du Soleil met-elle pour nous parvenir ? (en s, puis en min et s)
- Une **année-lumière** est la distance parcourue par la lumière en un an ($\approx 3,2 \times 10^7$ s). Calculer cette distance en km, en écriture scientifique.
- L'étoile la plus proche (après le Soleil) est à environ 4×10^{13} km. Combien d'années-lumière cela fait-il, environ ?

EXERCICE 3.7 ★★☆☆

Au laboratoire de SVT. Un globule rouge a un diamètre d'environ $7 \mu\text{m}$. Le corps humain en contient environ $2,5 \times 10^{13}$.

- Écrire le diamètre d'un globule rouge en mètres, en écriture scientifique.
- Si l'on alignait tous les globules rouges d'un corps humain, quelle longueur obtiendrait-on, en km ?
- Le tour de la Terre mesure environ 4×10^4 km. Combien de fois cette chaîne ferait-elle le tour de la Terre ?

EXERCICE 3.8 ★★★

L'échiquier de Sissa. Selon la légende, l'inventeur des échecs demanda au roi 1 grain de riz sur la 1^{re} case, 2 sur la 2^e, 4 sur la 3^e, et ainsi de suite en doublant jusqu'à la 64^e case.

- Combien de grains y a-t-il sur la 10^e case ? sur la 64^e (sous forme de puissance) ?
- On note $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63}$. Calculer $2S - S$ et en déduire que $S = 2^{64} - 1$.
- En utilisant $2^{10} \approx 10^3$, donner un ordre de grandeur de S . Un grain pèse environ 2×10^{-2} g : quelle masse de riz (en tonnes) le roi devrait-il donner ?

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 3.1 — Le dernier chiffre

- Donner le chiffre des unités de $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$. Que remarque-t-on ? En déduire le chiffre des unités de 3^{2026} .
- Montrer que $7^{2026} - 3^{2026}$ est divisible par 10.
- Quel est le chiffre des unités de 2026^{2026} ? et de 2027^{2027} ?
- Montrer que $1^{2026} + 2^{2026} + 3^{2026} + 4^{2026}$ est divisible par 10.

○ DÉFI OLYMPIADE 3.2 — Géants et poussières

- Sans calculatrice, comparer 2^{100} et 10^{30} . (Indice : $2^{10} = 1\,024$.)
- Comparer 5^{-20} et 2^{-50} . (Indice : écrire 5^{20} et 2^{50} comme des puissances d'exposant 10.)
- Combien de chiffres le nombre $N = 4^{1013} \times 5^{2030}$ a-t-il ? Quelle est la somme de ses chiffres ?
- Lequel est le plus grand : 3^{40} ou 4^{30} ? (Indice : exposant commun 10.)

Développement, factorisation et identités remarquables

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Développer et réduire une expression avec la distributivité simple et double.
- ✓ Connaître les trois identités remarquables, les illustrer par des aires et les utiliser pour développer et calculer mentalement.
- ✓ Factoriser une expression : facteur commun, différence de deux carrés, carré parfait.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION – Développer, factoriser, réduire

Développer un produit, c'est l'écrire sous forme d'une somme ; **factoriser** une somme, c'est l'écrire sous forme d'un produit :

$$\underbrace{5(x+3)}_{\text{produit}} \xrightarrow{\text{développer}} \underbrace{5x+15}_{\text{somme}} \quad \underbrace{5x+15}_{\text{somme}} \xrightarrow{\text{factoriser}} \underbrace{5(x+3)}_{\text{produit}}$$

Réduire, c'est regrouper les termes semblables (en x^2 , en x , constants) : $3x^2 - 5x + 2x^2 + 7x - 1 = 5x^2 + 2x - 1$.

PROPRIÉTÉ – Distributivité simple et suppression des parenthèses

Pour tous nombres k, a, b : $k(a+b) = ka + kb$; $k(a-b) = ka - kb$.

Règle des signes pour **chaque** produit : $-3(2x-5) = -6x + 15$; $-x(4-x) = -4x + x^2$.

Parenthèses précédées de $-$: on change tous les signes $-(a-b+c) = -a+b-c$; $7x-(3x-4) = 4x+4$.

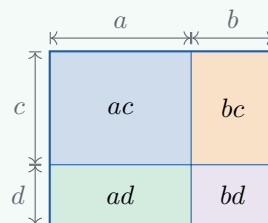
PROPRIÉTÉ – Double distributivité

Pour tous nombres a, b, c, d :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde : **4 produits**, en faisant attention aux signes.

$$(2x-3)(x+4) = 2x^2 + 8x - 3x - 12 = 2x^2 + 5x - 12.$$



EXEMPLE – double distributivité avec des signes $(x-5)(3-2x) = 3x - 2x^2 - 15 + 10x = -2x^2 + 13x - 15$
 $(a+2)(a-3) = a^2 - 3a + 2a - 6 = a^2 - a - 6$

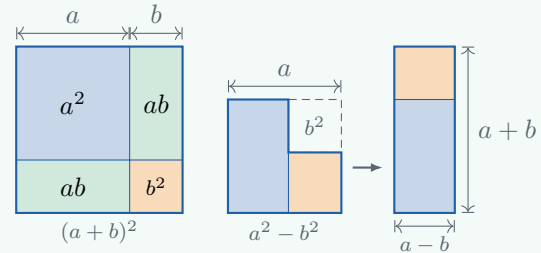
PROPRIÉTÉ — Les trois identités remarquables

Pour tous nombres a et b :

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ carré d'une somme
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ carré d'une différence
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ somme $\times$ différence

Preuve de 1 : $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Preuve de 3 : $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.



On découpe et on recolle : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

PROPRIÉTÉ — Factoriser : trois outils

Facteur commun $ka + kb = k(a + b)$

$$6x^2 - 15x = 3x(2x - 5) ; -4x + 8 = -4(x - 2)$$

Différence de carrés $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x - 5)(3x + 5)$$

Carré parfait $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = (x - 4)^2$$

2 Méthodes & astuces**MÉTHODE — Développer avec une identité : repérer a et b**

On écrit l'identité, on identifie a et b (qui peuvent être des expressions), on remplace, puis on calcule :

$$(3x - 2)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4 \quad \left(\frac{1}{2}x + 4\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 16.$$

Devant un signe $-$, on développe **d'abord** dans des crochets : $-(2x + 1)^2 = -[4x^2 + 4x + 1] = -4x^2 - 4x - 1$.

MÉTHODE — Factoriser : les trois réflexes, dans cet ordre

1. **Facteur commun ?** Même « caché » : $(2x + 1)(x - 3) - (2x + 1)(4x + 5) = (2x + 1)[(x - 3) - (4x + 5)] = (2x + 1)(-3x - 8)$.
2. **Deux carrés séparés par un $-$?** $(x + 2)^2 - 9 = (x + 2 - 3)(x + 2 + 3) = (x - 1)(x + 5)$.
3. **Trois termes ?** Chercher un carré parfait et **vérifier le double produit** : $4x^2 + 12x + 9$: $a = 2x$, $b = 3$, $2ab = 12x$ ✓ $\Rightarrow (2x + 3)^2$.

Contrôle express : on remplace x par une valeur simple (0, 1 ou 2) dans les deux écritures : on doit trouver le même nombre.

★ ASTUCE DU PROF — Calcul mental avec les identités

$$\begin{aligned} 102^2 &= (100 + 2)^2 \\ &= 10\,000 + 400 + 4 \\ &= \mathbf{10\,404} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 98^2 &= (100 - 2)^2 \\ &= 10\,000 - 400 + 4 \\ &= \mathbf{9\,604} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 99 \times 101 &= (100 - 1)(100 + 1) \\ &= 10\,000 - 1 = \mathbf{9\,999} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 47 \times 53 &= (50 - 3)(50 + 3) \\ &= 2\,500 - 9 = \mathbf{2\,491} \end{aligned}$$

❌ PIÈGE À ÉVITER

- $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$: $(3 + 4)^2 = 49$ alors que $3^2 + 4^2 = 25$. On a oublié le **double produit** $2ab = 24$!
- $(2x)^2 = 4x^2$ et non $2x^2$; $-(x - 3)^2 = -x^2 + 6x - 9$ et non $-x^2 - 6x + 9$ (développer d'abord !).

LE SAVAIS-TU ?

Le mot « algèbre » vient du livre *al-jabr* du savant **al-Khwârizmî** (Bagdad, IX^e siècle), dont le nom a aussi donné le mot « algorithme ». Il démontrait ses règles de calcul... avec des carrés et des rectangles, exactement comme nos figures !

3 Exercices

EXERCICE 4.1 ★☆☆

Développer et réduire.

a) $A = -5(2x - 3)$

c) $C = 3(x - 2) - 2(5 - x)$

e) $E = \frac{1}{2}(4x - 6) - (x + 1)$

b) $B = 4x - (7 - 3x)$

d) $D = -x(2x - 1) + 3x^2$

f) $F = 2(x^2 - x) - x(x - 2)$

EXERCICE 4.2 ★☆☆

Développer et réduire à l'aide de la double distributivité.

a) $(x + 4)(x - 2)$

b) $(3x - 1)(2x + 5)$

c) $(2 - x)(4x - 3)$

d) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

EXERCICE 4.3 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier (par un calcul ou un contre-exemple).

a) $(x + 5)^2 = x^2 + 25$

c) $(2x)^2 = 2x^2$

e) $-(x - 1) = -x - 1$

b) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

d) $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$

f) $49 - x^2 = (7 - x)(7 + x)$

EXERCICE 4.4 ★☆☆

Développer et réduire à l'aide des identités remarquables.

a) $(x + 7)^2$

c) $(3x + 4)(3x - 4)$

e) $(5 - 2x)(5 + 2x)$

b) $(2x - 5)^2$

d) $\left(\frac{1}{2}x - 6\right)^2$

f) $(-x - 3)^2$

EXERCICE 4.5 ★☆☆

Factoriser.

a) $12x - 18$

b) $7x^2 - 14x$

c) $x^2 - 81$

d) $4x^2 - 9$

e) $x^2 + 12x + 36$

f) $25x^2 - 20x + 4$

g) $(x - 3)(2x + 1) + (x - 3)(x + 4)$

h) $(2x + 1)^2 - 16$

EXERCICE 4.6 ★★☆☆

Type contrôle. On considère l'expression $E = (2x - 1)^2 - (2x - 1)(x + 3)$.

1. Développer et réduire E .
2. Factoriser E .
3. Calculer E pour $x = 0$, pour $x = \frac{1}{2}$ et pour $x = -1$, en choisissant à chaque fois la forme la plus adaptée.

EXERCICE 4.7 ★★☆☆

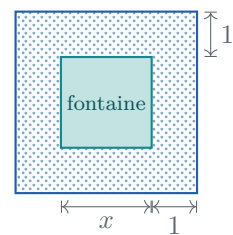
Calcul mental. Calculer sans calculatrice, en utilisant une identité remarquable.

- a) 101^2 b) 199^2 c) 51×49 d) 65^2 e) $1\,002 \times 998$ f) $2026^2 - 2025^2$

EXERCICE 4.8 ★★☆☆

La fontaine du riad. Dans un riad de Fès, une fontaine carrée de côté x mètres est entourée d'une bordure de zellige de 1 m de large.

1. Exprimer en fonction de x l'aire du grand carré (fontaine + bordure).
2. Montrer que l'aire de la bordure est $\mathcal{A} = 4x + 4$, puis factoriser $\mathcal{A}$.
3. La fontaine mesure 2,5 m de côté et le zellige coûte 450 DH le m^2 . Quel est le prix de la bordure ?

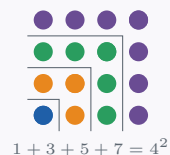
**EXERCICE 4.9** ★★☆☆

Le programme de Salma. « Choisir un nombre. Lui ajouter 5. Multiplier le résultat par le nombre de départ diminué de 5. Ajouter 25. »

1. Appliquer ce programme à 3, puis à -7 . Quelle conjecture peut-on faire ?
2. Démontrer cette conjecture en appelant x le nombre de départ.
3. Salma obtient 144. Quels nombres a-t-elle pu choisir ?

4 Défis olympiades**○ DÉFI OLYMPIADE 4.1 – Impairs et carrés**

1. Développer et réduire $n^2 - (n - 1)^2$. Que remarque-t-on ?
2. En déduire la somme $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 99$ des 50 premiers nombres impairs. (La figure ci-contre peut aider.)
3. On additionne des nombres impairs consécutifs à partir de 1 et on obtient 2025. Combien de nombres a-t-on additionnés ? Quel est le dernier ?
4. Calculer $T = 51 + 53 + 55 + \dots + 99$.

**○ DÉFI OLYMPIADE 4.2 – La puissance de $a^2 - b^2$**

1. Calculer sans calculatrice : $A = 123\,456\,789^2 - 123\,456\,788 \times 123\,456\,790$.
2. Trouver tous les couples d'entiers naturels $(x; y)$ tels que $x^2 - y^2 = 45$.
3. Montrer que 2026 ne peut pas s'écrire comme la différence des carrés de deux entiers. (Indice : $x - y$ et $x + y$ ont la même parité.)

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Comparer deux nombres rationnels : même dénominateur, réduction au même dénominateur, signe de la différence.
- ✓ Utiliser l'ordre avec l'addition et la multiplication ; encadrer une somme, une expression.
- ✓ Ranger des nombres ; donner une valeur approchée ou un arrondi.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Comparer par le signe de la différence

Pour comparer deux nombres a et b , on étudie le **signe de leur différence** $a - b$:

$$\text{si } a - b > 0, \text{ alors } a > b$$

$$\text{si } a - b < 0, \text{ alors } a < b$$

$$\text{si } a - b = 0, \text{ alors } a = b$$

Exemple : $\frac{3}{4} - \frac{5}{7} = \frac{21}{28} - \frac{20}{28} = \frac{1}{28} > 0$, donc $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$.

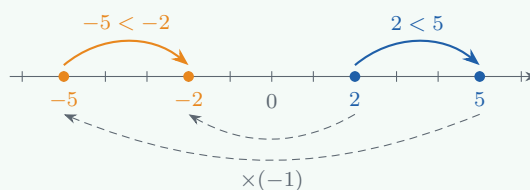
PROPRIÉTÉ — Comparer deux nombres rationnels

- Un nombre négatif est **inférieur** à un nombre positif : $-\frac{9}{2} < \frac{1}{100}$.
- Deux fractions de **même dénominateur positif** sont rangées comme leurs numérateurs : $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$; $-\frac{5}{7} < -\frac{3}{7}$.
- Sinon, on les **réduit au même dénominateur** positif, puis on compare les numérateurs.
- Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre **inverse** de leurs opposés : $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$, donc $-\frac{3}{4} < -\frac{5}{7}$.

PROPRIÉTÉ — Ordre et addition, ordre et multiplication

Soient a, b, c et d des nombres.

- **Addition** : $a \leq b \iff a + c \leq b + c$: ajouter (ou soustraire) un même nombre aux deux membres **conserve** l'ordre.
- **Si** $c > 0$: $a \leq b \iff ac \leq bc$ (ordre **conservé**).
- **Si** $c < 0$: $a \leq b \iff ac \geq bc$ (ordre **inverse**).
Il en est de même pour la division par $c \neq 0$.
- **Somme** : si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$ (on additionne membre à membre deux inégalités de même sens).



$2 < 5$, mais $(-1) \times 2 > (-1) \times 5$: prendre l'opposé « retourne » la droite graduée.

DÉFINITION — Valeur approchée, arrondi

Si $a \leq x < a + 0,01$ (a ayant 2 chiffres après la virgule), a est la **valeur approchée par défaut** de x à 0,01 près et $a + 0,01$ la **valeur approchée par excès**. L'**arrondi** au centième est la plus proche des deux (chiffre des millièmes de 0 à 4 : on garde ; de 5 à 9 : on augmente).

Ex. : $\frac{22}{7} = 3,142857\dots$: $3,14 < \frac{22}{7} < 3,15$; arrondi au centième : 3,14 ; au millième : 3,143.

2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Comparer deux fractions sans se tromper

1. Regarder les **signes** : un négatif est plus petit qu'un positif.
2. Écrire les deux fractions avec un **même dénominateur positif** (le plus petit possible).
3. Comparer les numérateurs et **conclure**.

Comparer $-\frac{7}{12}$ et $-\frac{5}{8}$: $\text{ppcm}(12; 8) = 24$.

$$-\frac{7}{12} = -\frac{14}{24} \quad \text{et} \quad -\frac{5}{8} = -\frac{15}{24}.$$

Or $-14 > -15$, donc $-\frac{7}{12} > -\frac{5}{8}$.

MÉTHODE — Encadrer une expression étape par étape

On sait que $2 \leq x \leq 3$. Encadrer $A = 5 - 2x$.

On construit A **étape par étape** en se demandant, à chaque multiplication : « ce nombre est-il positif ou négatif ? » On multiplie par $-2 < 0$: le sens **change**. On ajoute 5 : le sens est conservé.

$$2 \leq x \leq 3$$

$$-6 \leq -2x \leq -4$$

$$-1 \leq 5 - 2x \leq 1$$

★ ASTUCE DU PROF — Le nombre-repère

Pour comparer $\frac{13}{27}$ et $\frac{15}{29}$, inutile de réduire au même dénominateur : $\frac{13}{27} < \frac{1}{2}$ (car $13 < 13,5$) et $\frac{15}{29} > \frac{1}{2}$ (car $15 > 14,5$), donc $\frac{13}{27} < \frac{15}{29}$. De même, $\frac{19}{20} < 1 < \frac{17}{16}$. Les repères $\frac{1}{2}$ et 1 font gagner beaucoup de temps !

✗ PIÈGE À ÉVITER — Deux erreurs classiques

Oublier de changer le sens : $x \leq 4$ donne $-3x \geq -12$ (et non $-3x \leq -12$).

Soustraire deux encadrements : $2 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 3$ ne donnent **pas** $1 \leq x - y \leq 2$. On encadre $-y$ ($-3 \leq -y \leq -1$), puis on additionne : $-1 \leq x - y \leq 4$.

3 Exercices

EXERCICE 5.1 ★☆☆

Comparer les nombres suivants.

a) $\frac{7}{9}$; $\frac{5}{9}$

b) $-\frac{3}{8}$; $-\frac{5}{8}$

c) $\frac{4}{7}$; $\frac{4}{9}$

d) $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}$

e) $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{9}$

f) $-\frac{3}{4}$; $-\frac{7}{10}$

EXERCICE 5.2 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier.

a) Si $x < y$, alors $x - 7 < y - 7$.

c) Si $x \leq 3$, alors $-x \geq -3$.

b) Si $a < b$, alors $-2a < -2b$.

d) $\frac{13}{12} < \frac{12}{13}$.

EXERCICE 5.3 ★☆☆

Ranger dans l'ordre croissant : $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{5}{8}$; 0 ; $-\frac{5}{12}$; $\frac{2}{3}$.

EXERCICE 5.4 ★★☆☆

(Type contrôle) On sait que $a < b$. Comparer :

- | | | |
|---|-------------------|-------------------------|
| a) $a + \frac{5}{3}$ et $b + \frac{5}{3}$ | c) $3a$ et $3b$ | e) $2a - 1$ et $2b - 1$ |
| b) $a - 2,7$ et $b - 2,7$ | d) $-4a$ et $-4b$ | f) $5 - 3a$ et $5 - 3b$ |

EXERCICE 5.5 ★★☆☆

On sait que $2,3 \leq x \leq 2,4$ et $1,5 \leq y \leq 1,6$. Encadrer :

- | | | |
|------------|--------------|--------------------------|
| a) $x + y$ | c) $x - y$ | e) $2x + 3y - 1$ |
| b) $3x$ | d) $10 - 5y$ | f) $x + y + \frac{1}{2}$ |

EXERCICE 5.6 ★★☆☆

Amina part au souk de Meknès avec 100 DH. Selon le marchandage, les olives lui coûteront entre 18 et 21 DH, les épices entre 15,5 et 18 DH et le thé entre 32 et 36 DH.

- Encadrer la dépense totale D , puis la somme R qui lui restera.
- Est-elle sûre de pouvoir s'offrir ensuite un jus d'orange à 12 DH ? Un foulard à 30 DH ?

EXERCICE 5.7 ★★☆☆

- À la calculatrice, $\frac{17}{7} = 2,428\,571\dots$. Donner les valeurs approchées par défaut et par excès de $\frac{17}{7}$ à 0,01 près, puis ses arrondis au dixième, au centième et au millième.
- Un nombre x a pour arrondi au dixième 4,7. Entre quelles valeurs x est-il compris ?

EXERCICE 5.8 ★★☆☆

- Développer et réduire $(x - 1)(x + 1) - x \times x$.
- En déduire, **sans calculatrice**, la comparaison de 2024×2026 et de 2025×2025 .
- Comparer de même $99,9 \times 100,1$ et 100×100 .

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 5.1 — 2025/2026 ou 2026/2027?

- Calculer $1 - \frac{2025}{2026}$ et $1 - \frac{2026}{2027}$. En déduire, sans réduire au même dénominateur, le plus grand des deux nombres $\frac{2025}{2026}$ et $\frac{2026}{2027}$.
- Comparer de même $\frac{2026}{2025}$ et $\frac{2027}{2026}$, puis ranger dans l'ordre croissant :
 $-\frac{2025}{2026}$; $-\frac{2026}{2027}$; $\frac{2026}{2025}$; $\frac{2027}{2026}$.

○ DÉFI OLYMPIADE 5.2 — Un encadrement astucieux

On pose $S = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{20}$ (10 termes).

- Justifier que chaque terme est compris entre $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{11}$. En déduire que $\frac{1}{2} < S < 1$.
- En coupant S en deux paquets de 5 termes, montrer que $\frac{7}{12} < S < \frac{135}{176}$, puis que $0,58 < S < 0,77$.

Les équations du premier degré

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Tester si un nombre est solution d'une équation ; connaître les règles de transformation.
- ✓ Résoudre $ax + b = 0$, $ax + b = cx + d$, puis des équations avec parenthèses ou dénominateurs.
- ✓ Mettre un problème en équation en 4 étapes, le résoudre et conclure.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Équation, inconnue, solution

Une **équation** est une égalité dans laquelle figure un nombre inconnu désigné par une lettre (l'**inconnue**). Elle a deux **membres**, de part et d'autre du signe $=$.

Une **solution** est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est **vraie**. **Résoudre** l'équation, c'est trouver **toutes** ses solutions.

Exemple : -2 est-il solution de $5x + 4 = x - 4$? Et 1 ? $5 \times 1 + 4 = 9$ et $1 - 4 = -3$.
 $5 \times (-2) + 4 = -6$ et $-2 - 4 = -6$: **oui**. $9 \neq -3$: **1 n'est pas** solution.

PROPRIÉTÉ — Règles de transformation d'une équation

Une équation est comme une **balance en équilibre**.

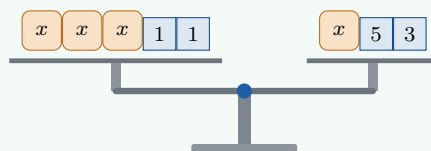
On obtient une équation qui a **les mêmes solutions**

si :

- on **ajoute** ou on **soustrait** un même nombre (ou une même expression, comme x) aux deux membres ;
- on **multiplie** ou on **divise** les deux membres par un même nombre **non nul**.

En pratique, un terme qui « change de membre »

change de signe : $3x + 7 = 19 \iff 3x = 19 - 7$.



$3x + 2 = x + 8$: on retire un sac et 2 kg de chaque côté : $2x = 6$, donc $x = 3$ kg.

PROPRIÉTÉ — L'équation $ax = b$ et l'équation $ax + b = 0$

Si $a \neq 0$, l'équation $ax = b$ a une **unique**

solution : $x = \frac{b}{a}$

Donc $ax + b = 0 \iff ax = -b \iff x = -\frac{b}{a}$.

Ex. : $-4x + 10 = 0 \iff -4x = -10$
 $\iff x = \frac{-10}{-4} = 2,5$.

Cas particuliers ($a = 0$) :

- $0x = 0$: **tout nombre** est solution ;
- $0x = 5$: **aucune** solution, car $0 \times x$ vaut toujours 0.

On les rencontre quand les x

« disparaissent » : $2x + 1 = 2x + 1$ ou $2x + 1 = 2x + 3$.

EXEMPLE — résoudre $ax + b = cx + d$: on regroupe les x d'un côté, les nombres de l'autre

$$7x - 5 = 3x + 11$$

$$7x - 3x = 11 + 5$$

$$4x = 16$$

$$x = 4$$

$$\text{Vérif. : } 23 = 23 \checkmark$$

$$2x + 9 = 5x - 3$$

$$2x - 5x = -3 - 9$$

$$-3x = -12$$

$$x = 4$$

Attention au signe en divisant par -3 .

$$\frac{2}{3}x + 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{3} - 1$$

$$\frac{1}{6}x = -\frac{4}{3}$$

$$x = -\frac{4}{3} \times 6 = -8$$

2 Méthodes & astuces**MÉTHODE — Équation avec parenthèses : développer d'abord**

1. On **développe** et on **réduit** chaque membre (attention au signe $-$ devant une parenthèse).

2. On se ramène à $ax + b = cx + d$ et on résout.

3. On vérifie.

$$3(2x - 1) - (x + 4) = 2(x + 5)$$

$$6x - 3 - x - 4 = 2x + 10$$

$$5x - 7 = 2x + 10$$

$$3x = 17 \quad \text{donc} \quad x = \frac{17}{3}$$

MÉTHODE — Équation avec dénominateurs : on « chasse » les dénominateurs

1. On cherche le **dénominateur commun** (le ppcm).

2. On multiplie **chaque terme** des deux membres par ce nombre : il n'y a plus de fractions.

3. On résout l'équation obtenue.

$$\frac{x+1}{4} - \frac{x}{6} = \frac{1}{3} \quad (\times 12)$$

$$3(x+1) - 2x = 4$$

$$3x + 3 - 2x = 4$$

$$x = 1$$

MÉTHODE — Mettre un problème en équation : les 4 étapes

Au souk de Taroudant, Hamza achète 3 kg d'amandes et 2 kg de dattes ; le kilogramme de dattes coûte 25 DH de moins que celui d'amandes. Il paie 400 DH. Quel est le prix d'un kilogramme d'amandes ?

1. **Choix de l'inconnue** : soit x le prix d'un kg d'amandes (en DH) ; un kg de dattes coûte $x - 25$.

2. **Mise en équation** : $3x + 2(x - 25) = 400$.

3. **Résolution** : $3x + 2x - 50 = 400$, $5x = 450$, $x = 90$.

4. **Vérification et conclusion** : $3 \times 90 + 2 \times 65 = 270 + 130 = 400 \checkmark$. Les amandes coûtent **90 DH le kg**.

★ ASTUCE DU PROF — Choisir le bon côté

Dans $2x + 9 = 5x - 3$, regroupe les x du côté où il y en a **le plus** : $9 + 3 = 5x - 2x$, soit $12 = 3x$, donc $x = 4$. On évite ainsi les coefficients négatifs et les erreurs de signe !

❌ PIÈGE À ÉVITER — Trois erreurs fréquentes

• $-3x = 12$ donne $x = \frac{12}{-3} = -4$, et **non** $x = 12 + 3$ ni $x = 4$.

• $5 - (x - 2) = 1$: le signe $-$ change **tous** les signes de la parenthèse : $5 - x + 2 = 1$ (et non $5 - x - 2$).

- En chassant les dénominateurs, on multiplie **tous** les termes, même ceux sans fraction : $\frac{x}{2} + 3 = x$ devient $x + 6 = 2x$.

LE SAVAIS-TU ?

Vers 820, à Bagdad, **al-Khwârizmî** résolvait les équations avec deux opérations : *al-jabr* (« remettre en place » un terme soustrait en l'ajoutant aux deux membres, qui a donné le mot « algèbre ») et *al-muqâbala* (« mise en face » : simplifier les termes semblables des deux membres). C'est exactement ce que tu fais aujourd'hui !

3 Exercices**EXERCICE 6.1** ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier par un calcul.

- | | |
|---|--|
| a) -3 est solution de $2x + 11 = 5$. | c) $\frac{1}{2}$ est solution de $6x - 1 = 4x$. |
| b) 4 est solution de $3x - 5 = x + 2$. | d) -1 est solution de $x^2 - 3x = 4$. |

EXERCICE 6.2 ★☆☆

Résoudre les équations suivantes.

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------------|------------------------|
| a) $x + 7 = -3$ | c) $4x - 9 = 0$ | e) $\frac{x}{3} = -6$ | g) $6x + 15 = 0$ |
| b) $-5x = 35$ | d) $-x = 8$ | f) $-2x + 7 = 1$ | h) $-\frac{3}{4}x = 9$ |

EXERCICE 6.3 ★☆☆

Résoudre, puis vérifier.

- | | | |
|-----------------------|--------------------------|--------------------------------------|
| a) $5x - 4 = 2x + 11$ | c) $x - 6 = -3x + 2$ | e) $9 - 4x = x + 24$ |
| b) $3x + 8 = 7x - 4$ | d) $2,5x + 1 = 0,5x - 7$ | f) $\frac{1}{2}x + 3 = \frac{5}{4}x$ |

EXERCICE 6.4 ★☆☆

Résoudre (développer d'abord).

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| a) $4(x - 3) = 2x + 6$ | c) $2(3x + 1) - 3(x - 2) = 5x$ |
| b) $5 - (2x - 1) = 3(x + 7)$ | d) $3(2x - 4) = 2(3x + 1)$ |

EXERCICE 6.5 ★☆☆

Résoudre (chasser les dénominateurs).

- | | | |
|-------------------------------------|---|--|
| a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$ | b) $\frac{2x - 1}{3} = \frac{x + 4}{2}$ | c) $\frac{x - 1}{4} - \frac{x + 1}{6} = 1$ |
|-------------------------------------|---|--|

EXERCICE 6.6 ★☆☆

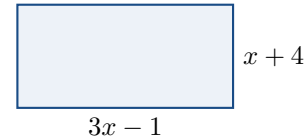
QCM. Choisir la bonne réponse et justifier.

1. L'équation $2(x + 3) = 2x + 6$ a : **A** : aucune solution **B** : une seule solution **C** : une infinité de solutions.

2. L'équation $3x - 1 = 3(x - 1)$ a : **A** : aucune solution **B** : une seule solution **C** : une infinité de solutions.
3. La solution de $\frac{x}{5} = \frac{x}{2} + 3$ est : **A** : 10 **B** : -10 **C** : $-\frac{10}{3}$.

EXERCICE 6.7 ★★☆☆

1. Le rectangle ci-contre (longueurs en cm) a un périmètre de 46 cm. Calculer x , puis l'aire du rectangle.
2. Un triangle isocèle a deux côtés égaux de longueur $2x + 1$ et une base de longueur $x + 3$ (en cm). Son périmètre est 34 cm. Calculer les longueurs des côtés.

**EXERCICE 6.8** ★★★

(Type contrôle) Appliquer les 4 étapes.

- Yasmine a 13 ans et son père 41 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de celui de Yasmine ?
- Trois frères se partagent un héritage de 56 000 DH : Omar reçoit 4 000 DH de plus que Saad, et Ilyas reçoit le double de Saad. Combien reçoit chacun ?
- Un club de Marrakech propose deux formules : A : 60 DH la séance ; B : abonnement de 300 DH puis 35 DH la séance. Pour combien de séances les deux formules coûtent-elles le même prix ?

EXERCICE 6.9 ★★★

Au départ de Fès, un car contient des passagers. À Meknès, la moitié des passagers descend et 14 montent. À Khémisset, le tiers des passagers présents descend et 6 montent. Il arrive à Rabat avec 30 passagers. Combien y avait-il de passagers au départ ? (Indication : appeler x ce nombre et exprimer le nombre de passagers après chaque arrêt.)

4 Défis olympiades**○ DÉFI OLYMPIADE 6.1 — Le nombre à deux chiffres**

Un nombre de deux chiffres a pour chiffre des unités le triple de son chiffre des dizaines. Quand on échange ses deux chiffres, on obtient un nombre plus grand de 54.

- On note x le chiffre des dizaines. Écrire le nombre et le nombre « retourné » en fonction de x .
- Trouver ce nombre.
- Montrer que, pour **tout** nombre de deux chiffres $\overline{ab}$ (chiffre des dizaines a , des unités b), la différence $\overline{ba} - \overline{ab}$ est un multiple de 9. Pourquoi ne pouvait-on pas avoir une différence de 50 ?

○ DÉFI OLYMPIADE 6.2 — Une équation à paramètre

Soit m un nombre. On considère l'équation $(E) : m(x - 2) = 3x - 6$.

- Résoudre (E) pour $m = 5$, puis pour $m = -1$.
- Montrer que 2 est solution de (E) **quel que soit** m .
- Pour quelle valeur de m l'équation a-t-elle une infinité de solutions ? Justifier que pour toute autre valeur, 2 est la seule solution.

La proportionnalité

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Reconnaître une situation de proportionnalité (tableau, graphique) et calculer une quatrième proportionnelle.
- ✓ Appliquer des pourcentages, des augmentations et des diminutions successives ; utiliser une échelle.
- ✓ Calculer et convertir des grandeurs quotients : vitesse, débit, masse volumique ; reconnaître des grandeurs inversement proportionnelles.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Grandeurs proportionnelles, coefficient

Deux grandeurs sont **proportionnelles** si l'on obtient les valeurs de l'une en **multipliant** celles de l'autre par un même nombre k , le **coefficient de proportionnalité**.

Masse (kg)	2	5	0,5	7,5
Prix (DH)	13	32,5	3,25	48,75

$\times 6,5$

Clémentines de Berkane à 6,5 DH le kg.

Tous les quotients sont égaux :

$$\frac{13}{2} = \frac{32,5}{5} = \dots = 6,5.$$

Produits en croix : si a, b (1^{re} colonne) et c, d (2^e colonne) sont proportionnels, alors

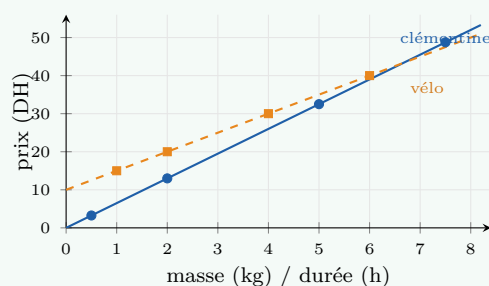
$$a \times d = b \times c.$$

Ex. : $2 \times 32,5 = 13 \times 5 = 65$.

PROPRIÉTÉ — Représentation graphique

Une situation de proportionnalité est représentée par des **points alignés avec l'origine** du repère, et réciproquement.

Location de vélo à Essaouira : 10 DH de frais fixes plus 5 DH par heure. Les points sont alignés, mais la droite **ne passe pas par l'origine** : le prix n'est **pas** proportionnel à la durée (2 h : 20 DH, 4 h : 30 DH et non 40 DH).



PROPRIÉTÉ — Pourcentages et coefficients multiplicateurs

- Prendre $t\%$ d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$: 35% de 240 DH = $240 \times 0,35 = 84$ DH.
- Une part p d'un total T représente $\frac{p}{T} \times 100$ pour cent : 9 élèves sur 36 : $\frac{9}{36} \times 100 = 25\%$.
- **Augmenter** de $t\%$, c'est multiplier par $1 + \frac{t}{100}$; **diminuer** de $t\%$, c'est multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.
Ex. : $+15\%$: $\times 1,15$; -30% : $\times 0,7$. Pour des évolutions **successives**, on **multiplie** les coefficients.
- *Exemple* : une djellaba à 480 DH augmente de 15% : $480 \times 1,15 = 552$ DH. Soldée ensuite à -30% : $552 \times 0,7 = 386,40$ DH.

PROPRIÉTÉ — Échelle et grandeurs quotients

Échelle (même unité) :

$$e = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}$$

 $e = \frac{1}{200}$: 1 cm sur le plan représente 200 cm = 2 m.

Vitesse moyenne :

$$v = \frac{d}{t}$$

$$d = v \times t \text{ et } t = \frac{d}{v}$$

$$1 \text{ m/s} = \frac{3\,600 \text{ m}}{1 \text{ h}} = 3,6 \text{ km/h} :$$

$$\text{km/h} \xrightarrow{\div 3,6} \text{m/s}$$

$$\text{m/s} \xrightarrow{\times 3,6} \text{km/h}$$

Débit : $D = \frac{V}{t}$ (L/min, m³/h).Masse volumique : $\rho = \frac{m}{V}$ (g/cm³ ou kg/m³). Eau : 1 g/cm³ = 1 000 kg/m³ : 1 L d'eau pèse 1 kg.

DÉFINITION — Grandeurs inversement proportionnelles

Deux grandeurs x et y sont **inversement proportionnelles** si leur **produit** $x \times y$ est **constant** : quand l'une est multipliée par 2, 3... l'autre est divisée par 2, 3...

Ex. : pour parcourir 120 km, la durée est inversement proportionnelle à la vitesse : $v \times t = 120$.

v (km/h)	30	40	60	120
t (h)	4	3	2	1
$v \times t$	120	120	120	120

2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Calculer une quatrième proportionnelle avec le produit en croix

Pour 750 g de farine, on prépare 18 msemens. Combien de farine pour 30 msemens ?

On place les données dans un tableau de proportionnalité, puis on écrit l'égalité des produits en croix :

$$18 \times x = 750 \times 30.$$

msemens	18	30
farine (g)	750	x

$$x = \frac{750 \times 30}{18} = \mathbf{1\,250 \text{ g}}$$

MÉTHODE — Évolutions successives et prix initial

Un téléphone à 2 400 DH augmente de 10 %, puis baisse de 25 %.

Prix final : $2\,400 \times 1,1 \times 0,75 = \mathbf{1\,980 \text{ DH}}$.

Coefficient global : $1,1 \times 0,75 = 0,825$, soit une **baisse de 17,5 %** (et non de 15 %!).

Après une remise de 20 %, un caftan coûte 1 200 DH. Prix initial ?

$$P \times 0,8 = 1\,200, \text{ donc } P = \frac{1\,200}{0,8} = \mathbf{1\,500 \text{ DH}}.$$

On **divise** par le coefficient (on n'ajoute pas 20 % de 1 200!).

★ ASTUCE DU PROF — Proportionnel ou inversement proportionnel ?

« Si je double l'une, l'autre **double-t-elle** ou est-elle **divisée par 2** ? » Deux fois plus de kilos : deux fois plus cher (proportionnel) ; deux fois plus d'ouvriers : deux fois moins de jours (inversement proportionnel).

❌ PIÈGE À ÉVITER — Les pièges classiques

- +20 % puis -20 % ne ramène **pas** au prix de départ : $\times 1,2 \times 0,8 = \times 0,96$ (baisse de 4 %).
- 1 h 30 min $\neq$ 1,30 h, mais 1,5 h. La vitesse moyenne n'est pas la moyenne des vitesses (défi 2).

3 Exercices

EXERCICE 7.1 ★☆☆

Ces tableaux sont-ils des tableaux de proportionnalité ? Si oui, donner le coefficient ; sinon, le produit $x \times y$ est-il constant ?

a)

3	5	8	12
4,2	7	11,2	16,8

b)

2	4	5	10
30	15	12	6

c)

4	6	9	15
10	15	22,5	36

EXERCICE 7.2 ★☆☆

Proportionnel (P), inversement proportionnel (I) ou ni l'un ni l'autre (N) ? Justifier.

- a) Le périmètre d'un carré et son côté.
- b) L'aire d'un carré et son côté.
- c) Le nombre de parts égales d'une pastilla et la masse d'une part.
- d) L'âge et la taille d'un enfant.

EXERCICE 7.3 ★☆☆

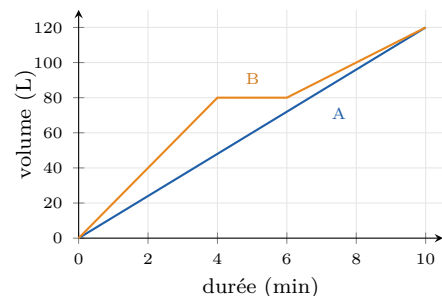
- Compléter ce tableau de proportionnalité à l'aide des produits en croix :

14	21	x	4,2
10	y	25	z
- Une recette de *chebakia* pour 40 pièces demande 600 g de farine, 250 g de sésame et 120 g de miel. Quelles quantités faut-il pour 100 pièces ? Avec 1 kg de sésame, combien de pièces peut-on préparer ?

EXERCICE 7.4 ★☆☆

Le graphique donne la quantité d'eau versée par deux robinets A et B pour remplir un bassin de riad.

- Pour quel robinet le volume est-il proportionnel à la durée ? Justifier.
- Quel est le débit du robinet A (en L/min) ?
- Combien de temps faut-il à A pour verser 150 L ? Que se passe-t-il pour B entre 4 et 6 min ?



EXERCICE 7.5 ★☆☆

(Type contrôle)

- Au Maroc, la TVA est de 20 %. Un vélo coûte 1850 DH hors taxes : calculer son prix TTC. Un casque coûte 414 DH TTC : calculer son prix hors taxes.
- Le prix d'un litre d'huile d'argan passe de 250 DH à 290 DH. Calculer le pourcentage d'augmentation.
- Pendant les soldes à Tanger, un article subit une baisse de 30 %, puis une seconde baisse de 10 %. Quel est le pourcentage de baisse global ?

EXERCICE 7.6 ★☆☆

- Sur le plan d'un riad à l'échelle $\frac{1}{150}$, le patio mesure 6 cm sur 4,8 cm. Quelles sont ses dimensions réelles ?

2. Sur une carte au $\frac{1}{2\,000\,000}$, Rabat et Fès sont à 8,5 cm. Quelle est la distance réelle à vol d'oiseau ?
3. Une maquette de la Koutoubia (hauteur réelle 77 m) mesure 38,5 cm. Quelle est son échelle ?

EXERCICE 7.7 ★★☆☆

1. Convertir en m/s : 54 km/h ; 108 km/h. Convertir en km/h : 15 m/s ; 340 m/s (vitesse du son).
2. Un athlète court 100 m en 10 s. Quelle est sa vitesse en km/h ?
3. Un car part de Marrakech à 8 h 40 min et arrive à Agadir (environ 250 km) à 12 h 00. Calculer sa vitesse moyenne.

EXERCICE 7.8 ★★☆☆

1. Un bloc de marbre de Taza a un volume de $0,4 \text{ m}^3$ et une masse de 1 080 kg. Calculer sa masse volumique en kg/m^3 , puis en g/cm^3 .
2. L'huile d'argan a une masse volumique de $0,92 \text{ g/cm}^3$. Quelle est la masse de 1,5 L d'huile ? Quel volume occupent 460 g d'huile ?
3. Une citerne de 6 m^3 est remplie par une pompe de débit 25 L/min. Combien de temps faut-il (en h et min) ?

EXERCICE 7.9 ★★☆☆

Pour poser le zellige d'une cour, 6 artisans travaillant au même rythme mettent 10 jours.

1. Combien de jours faudrait-il à 4 artisans ? À 15 artisans ? Justifier que le nombre d'artisans et la durée sont inversement proportionnels.
2. Après 4 jours de travail à 6, deux artisans partent. Combien de jours faut-il en tout pour finir la cour ?

4 Défis olympiades**○ DÉFI OLYMPIADE 7.1 — Monter puis descendre du même pourcentage**

1. Un tapis de Taznakht coûte 2 000 DH. Son prix augmente de 20 %, puis le nouveau prix baisse de 20 %. Prix final ?
2. Développer $(1 + \frac{t}{100})(1 - \frac{t}{100})$. En déduire qu'une hausse de $t\%$ suivie d'une baisse de $t\%$ donne toujours une **baisse**. Pour quelle valeur de t la baisse globale est-elle de 1 % ?
3. Après une hausse de 25 %, quel pourcentage de baisse faut-il appliquer pour revenir au prix initial ?

○ DÉFI OLYMPIADE 7.2 — L'aller-retour Rabat-Casablanca

Karim va de Rabat à Casablanca (90 km) à 60 km/h de moyenne (embouteillages).

1. Il revient à 90 km/h. Calculer sa vitesse moyenne sur l'aller-retour. Est-ce $\frac{60+90}{2}$?
2. À quelle vitesse doit-il revenir pour avoir 80 km/h de moyenne ? Peut-il obtenir 120 km/h de moyenne ?

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Connaître le vocabulaire : population, caractère, effectif, fréquence ; regrouper en classes, calculer des effectifs cumulés.
- ✓ Calculer une moyenne (simple ou pondérée) et déterminer le mode d'une série.
- ✓ Lire, construire et interpréter un diagramme en bâtons, un diagramme circulaire et un histogramme.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION – Vocabulaire

On étudie un **caractère** (note, taille, sport préféré...) sur une **population** formée d'**individus**.

- L'**effectif** d'une valeur : nombre d'individus ayant cette valeur ; l'**effectif total** N est leur somme.
- La **fréquence** d'une valeur : $f = \frac{\text{effectif}}{N}$ (fraction, décimal ou %) ; leur somme vaut 1 (100 %).
- L'**effectif cumulé** d'une valeur : somme des effectifs des valeurs **inférieures ou égales** à celle-ci.
- Si les valeurs sont nombreuses (tailles, durées), on les regroupe en **classes** : $150 \leq t < 155$, etc.

DÉFINITION – Moyenne et mode

Moyenne simple : $\bar{x} = \frac{\text{somme des valeurs}}{\text{nombre de valeurs}}$

pondérée : $\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{N}$

Le **mode** est la valeur qui a le plus grand effectif (pour des classes : la **classe modale**).

EXEMPLE – notes sur 20 d'une classe de 2APIC à Settat

Note	8	10	12	15	18	Total
Effectif	3	5	6	4	2	20
Fréquence	15 %	25 %	30 %	20 %	10 %	100 %
Eff. cumulé	3	8	14	18	20	
Angle	54°	90°	108°	72°	36°	360°

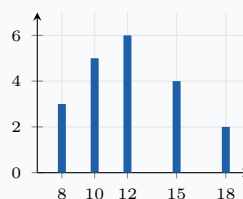


Diagramme en bâtons

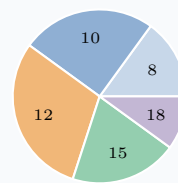


Diagramme circulaire

Moyenne : $\bar{x} = \frac{3 \times 8 + 5 \times 10 + 6 \times 12 + 4 \times 15 + 2 \times 18}{20} = \frac{242}{20} = 12,1$ **Mode** : 12.

Diagramme circulaire : les angles sont proportionnels aux effectifs : $\text{angle} = f \times 360^\circ$ (ex. : $30\% \times 360^\circ = 108^\circ$).

REMARQUE – Interpréter

D'après les effectifs cumulés, 14 élèves sur 20, soit 70 %, ont 12 ou moins ; 6 élèves (30 %) ont 15 ou plus. La moyenne (12,1) n'est pas forcément une note obtenue par un élève. *Pour aller plus loin (3APIC) : la médiane partage la série rangée en deux moitiés de même effectif.*

2 Méthodes & astuces

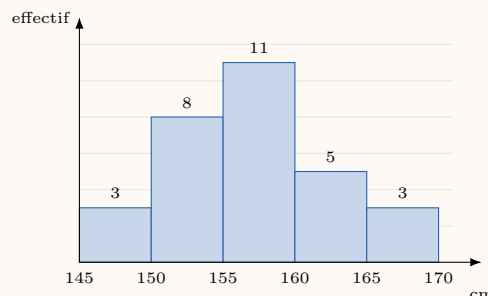
MÉTHODE — Regrouper en classes et tracer un histogramme

Tailles (en cm) de 30 élèves d'un collège d'Oujda. Pour des classes de même amplitude, on trace des rectangles **accollés** dont les hauteurs sont proportionnelles aux effectifs.

Pour une moyenne approchée, on remplace chaque classe par son **centre** ($145 \leq t < 150$: 147,5) :

$$\bar{x} \approx \frac{3 \times 147,5 + 8 \times 152,5 + \dots + 3 \times 167,5}{30} = \frac{4710}{30} = 157 \text{ cm.}$$

Classe modale : $155 \leq t < 160$ (11 élèves).



★ ASTUCE DU PROF — Moyenne astucieuse : les écarts

Pour 498 ; 503 ; 501 ; 497 ; 506, on calcule la moyenne des écarts à 500 : $\frac{-2+3+1-3+6}{5} = 1$, donc $\bar{x} = 500 + 1 = 501$.

✗ PIÈGE À ÉVITER — Pas de moyenne de moyennes !

20 élèves ont 12 de moyenne et 30 autres ont 13. La moyenne des 50 élèves est $\frac{20 \times 12 + 30 \times 13}{50} = \frac{630}{50} = 12,6$, et **non** $\frac{12+13}{2} = 12,5$: le groupe le plus nombreux « pèse » plus.

3 Exercices

EXERCICE 8.1 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier.

- La série 4 ; 7 ; 7 ; 10 ; 12 a pour moyenne 8 et pour mode 7.
- Dans une classe de 32 élèves, 8 font du judo : la fréquence des judokas est 25 %.
- Si l'on ajoute 1 point à chaque note, la moyenne augmente de 1 point.

EXERCICE 8.2 ★☆☆

Températures maximales (en °C) relevées à Ifrane pendant une semaine de janvier : 3 ; -1 ; 5 ; 4 ; -2 ; 0 ; 5. **1.** Calculer la température moyenne et donner le mode. **2.** Combien de jours la température a-t-elle dépassé la moyenne ? Quel pourcentage cela représente-t-il (au % près) ?

EXERCICE 8.3 ★★☆☆

(Type contrôle) Nombre de frères et sœurs des 25 élèves d'une classe de Safi :

Frères et sœurs	0	1	2	3	4
Effectif	2	7	9	5	2

- Quelle est la population étudiée ? le caractère ? Calculer les fréquences (en %) et les effectifs cumulés.
- Calculer la moyenne et donner le mode. Combien d'élèves ont au plus 2 frères et sœurs ?
- Construire le diagramme en bâtons.

EXERCICE 8.4 ★★☆☆

Masses (en g) de 20 grenades récoltées à Sefrou :

212 ; 245 ; 198 ; 263 ; 231 ; 207 ; 254 ; 239 ; 226 ; 271 ; 218 ; 243 ; 205 ; 236 ; 259 ; 222 ; 248 ; 215 ; 233 ; 241.

1. Regrouper ces masses en classes d'amplitude 20 g : $190 \leq m < 210$, $210 \leq m < 230$, etc. Dresser le tableau des effectifs et des effectifs cumulés.
2. Quel pourcentage des grenades pèse moins de 230 g ? Quelle est la classe modale ?
3. Calculer la masse moyenne exacte, puis la moyenne approchée à l'aide des centres des classes. Comparer.

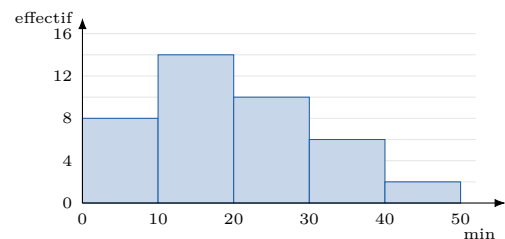
EXERCICE 8.5 ★★☆☆

On a demandé à 120 élèves d'un collège d'Agadir leur sport préféré : football 48, basket-ball 30, natation 18, athlétisme 15, tennis 9. **1.** Calculer la fréquence de chaque sport en %. **2.** Calculer l'angle de chaque secteur, puis construire le diagramme circulaire.

EXERCICE 8.6 ★★☆☆

L'histogramme ci-contre donne la durée (en min) du trajet domicile-collège de 40 élèves de Tétouan.

1. Dresser le tableau des effectifs par classes. Quelle est la classe modale ?
2. Calculer une valeur approchée de la durée moyenne.
3. Quel pourcentage d'élèves met moins de 20 minutes ?

**EXERCICE 8.7** ★★★

Au 1^{er} semestre, Rim a obtenu : 14 en maths (coef. 4), 11 en français (coef. 3), 16 en SVT (coef. 2) et 9 en physique (coef. 2).

1. Calculer sa moyenne pondérée (arrondir au centième). La comparer à la moyenne simple des quatre notes.
2. Quelle note doit-elle obtenir en physique pour avoir exactement 13 de moyenne ?

4 Défis olympiades**○ DÉFI OLYMPIADE 8.1 — La note manquante**

1. Dans une classe de 30 élèves, la moyenne est 12. Les 18 filles ont 13 de moyenne. Quelle est la moyenne des garçons ?
2. Youssef a 11,5 de moyenne après 4 contrôles. Quelle note lui faut-il au 5^e contrôle pour atteindre 12 ? Peut-il atteindre 14 ?

○ DÉFI OLYMPIADE 8.2 — L'élève qui change de classe

La classe A (20 élèves) a 11 de moyenne, la classe B (25 élèves) a 13. Ilyas (12 de moyenne) passe de A à B.

1. Calculer les nouvelles moyennes des deux classes. Que remarque-t-on ?
2. Calculer la moyenne de tous les élèves avant et après. Expliquer ce paradoxe apparent.

Les droites remarquables d'un triangle

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Connaître les médiatrices, hauteurs, médianes et bissectrices d'un triangle et leurs points de concours O , H , G , I .
- ✓ Utiliser l'équidistance (médiatrices, bissectrices) et la propriété $AG = \frac{2}{3}AA'$ du centre de gravité.
- ✓ Reconnaître les cas du triangle isocèle et équilatéral ; rédiger une démonstration courte.

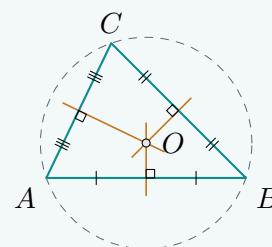
1 L'essentiel du cours

THÉORÈME — Médiatrices et cercle circonscrit

Les trois **médiatrices** d'un triangle ABC sont **concurrentes** en un point O tel que $OA = OB = OC$: O est le **centre du cercle circonscrit** (qui passe par les trois sommets).

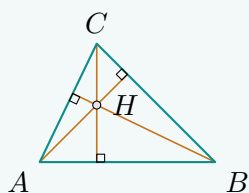
Démonstration. O est sur la médiatrice de $[AB]$, donc $OA = OB$; il est sur la médiatrice de $[BC]$, donc $OB = OC$. Ainsi $OA = OC$: O est équidistant de A et C , il est donc **aussi** sur la médiatrice de $[AC]$.

Position de O : à l'intérieur si les trois angles sont aigus, au milieu de l'hypoténuse si le triangle est rectangle (chapitre 10), à l'extérieur s'il a un angle obtus.

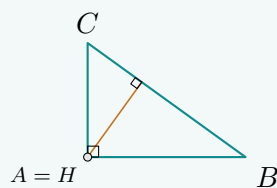


THÉORÈME — Hauteurs et orthocentre

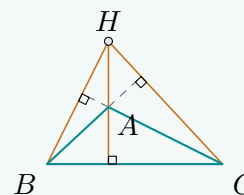
Les trois **hauteurs** d'un triangle sont **concurrentes** en un point H appelé **orthocentre** du triangle.



Trois angles aigus : H est à l'intérieur.



Rectangle en A : $[AB]$ et $[AC]$ sont deux hauteurs, donc $H = A$.



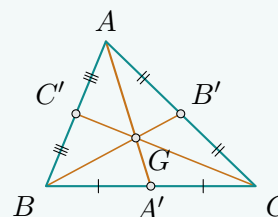
Angle obtus en A : on prolonge les côtés ; H est à l'extérieur.

THÉORÈME — Médianes et centre de gravité

Les trois **médianes** d'un triangle sont **concurrentes** en un point G , le **centre de gravité**. Si A' est le milieu de $[BC]$, G est situé **aux deux tiers** de la médiane $[AA']$ en partant du sommet :

$$AG = \frac{2}{3} AA' \quad GA' = \frac{1}{3} AA' \quad AG = 2 GA'$$

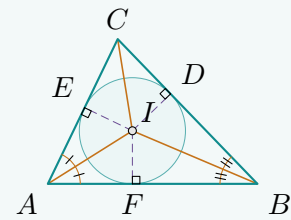
et de même sur $[BB']$ et $[CC']$. (Propriété admise ; une preuve astucieuse est proposée au défi 9.1.)



THÉORÈME — Bissectrices et cercle inscrit

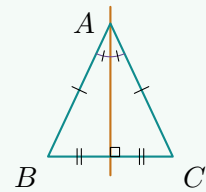
Bissectrice d'un angle : tout point de la bissectrice est à **égale distance des deux côtés** de l'angle (c'est son axe de symétrie).

Les trois **bissectrices** d'un triangle sont **concurrentes** en un point I équidistant des trois **côtés** : $ID = IE = IF$. I est le **centre du cercle inscrit**, qui touche chaque côté en un seul point. I est toujours à l'intérieur du triangle.


PROPRIÉTÉ — Triangle isocèle, triangle équilatéral

Si ABC est **isocèle en A**, la médiatrice de $[BC]$, la hauteur et la médiane issues de A et la bissectrice de $\widehat{BAC}$ sont **confondues** : c'est l'**axe de symétrie** du triangle, il contient O , H , G et I . Si ABC est **équilatéral**, c'est vrai pour les trois sommets : O , H , G et I sont **confondus**.

Réciproque utile. Si la hauteur issue de A est aussi la médiane issue de A , c'est la médiatrice de $[BC]$; comme elle passe par A , on a $AB = AC$: le triangle est **isocèle en A**.

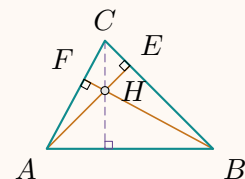

2 Méthodes & astuces
MÉTHODE — Reconnaître une droite remarquable : lire le codage

Droite	Codage à repérer	Point de concours	À retenir
Médiatrice	milieu d'un côté + angle droit	O	$OA = OB = OC$: cercle circonscrit
Hauteur	sommet + angle droit sur le côté opposé	H (orthocentre)	prouver des perpendiculaires
Médiane	sommet + milieu du côté opposé	G (centre de gravité)	$AG = \frac{2}{3}AA'$
Bissectrice	sommet + deux angles égaux	I	équidistant des côtés : cercle inscrit

MÉTHODE — Démontrer une perpendicularité grâce à l'orthocentre

Énoncé : dans le triangle ABC , les hauteurs $[AE]$ et $[BF]$ se coupent en H . Montrer que $(CH) \perp (AB)$.

Rédaction. Dans le triangle ABC , H est le point d'intersection des hauteurs issues de A et de B : c'est l'**orthocentre**. Les trois hauteurs étant concurrentes, (CH) est la **hauteur issue de C**. Donc $(CH) \perp (AB)$.


★ ASTUCE DU PROF — Deux droites suffisent, et la règle des tiers

Pour placer O , H , G ou I , **deux** droites suffisent : la troisième passe forcément par leur intersection (excellent contrôle de précision !). Pour G : « chaque médiane est coupée en 3 parts égales, 2 côté sommet, 1 côté milieu ». Ex. $AA' = 7,5$ cm : $GA' = 7,5 \div 3 = 2,5$ cm et $AG = 5$ cm.

❌ PIÈGE À ÉVITER

- Ne pas confondre **médiane** (sommet + milieu) et **médiatrice** (perpendiculaire en un milieu, qui en général ne passe par aucun sommet).
- O et H peuvent être **à l'extérieur** du triangle ; G et I sont **toujours** à l'intérieur.
- O est équidistant des **sommets**, I est équidistant des **côtés** (distance mesurée perpendiculairement).

LE SAVAIS-TU ? — La droite d'Euler

En 1765, **Leonhard Euler** découvre que, dans tout triangle non équilatéral, O , G et H sont **alignés**, avec toujours $GH = 2GO$. Et G mérite son nom : un triangle de carton tient en équilibre sur la pointe d'un crayon placée en G !

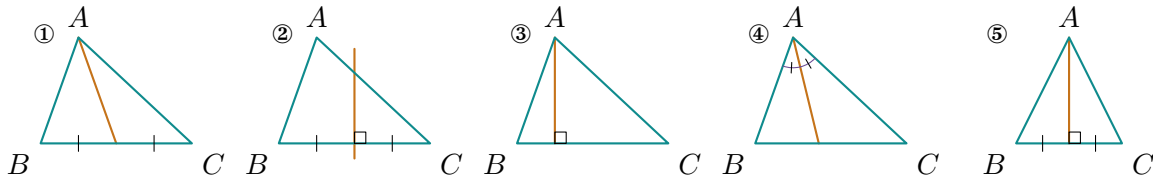
3 Exercices
EXERCICE 9.1 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

- Le centre du cercle circonscrit à un triangle est toujours à l'intérieur du triangle.
- Dans un triangle rectangle, l'orthocentre est le sommet de l'angle droit.
- Le point de concours des bissectrices est à égale distance des trois sommets.
- Si G est le centre de gravité de ABC et si la médiane $[AA']$ mesure 12 cm, alors $GA' = 4$ cm.

EXERCICE 9.2 ★☆☆

Dans chaque figure, la droite orange est-elle une médiatrice, une hauteur, une médiane ou une bissectrice du triangle ABC ? Justifier par le codage. Que dire de la figure ⑤ ?

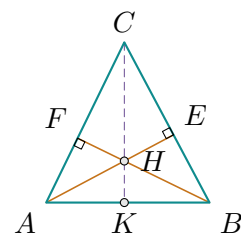

EXERCICE 9.3 ★☆☆

Les médianes $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ d'un triangle ABC se coupent en G . On sait que $AA' = 9$ cm, $BG = 5$ cm et $GC' = 1,6$ cm. Calculer AG , GA' , GB' , BB' , CG et CC' .

EXERCICE 9.4 ★☆☆

(Type contrôle) Dans le triangle ABC ci-contre, E et F sont les pieds des hauteurs issues de A et de B ; (AE) et (BF) se coupent en H , et (CH) coupe (AB) en K . On donne $\widehat{ABC} = 62^\circ$ et $\widehat{ACB} = 54^\circ$.

- Que représente H pour le triangle ABC ? Démontrer que $(CK) \perp (AB)$.
- Calculer $\widehat{BCK}$, puis $\widehat{CAE}$.



EXERCICE 9.5 ★★☆☆

Le puits des trois douars. Trois douars de la région d'Azilal sont situés en A , B et C , avec $\widehat{BAC} = 110^\circ$. On veut creuser un puits P à égale distance des trois douars.

1. Quelles droites faut-il tracer pour trouver P ? Justifier que $PA = PB = PC$.
2. Le puits sera-t-il situé entre les trois douars (à l'intérieur du triangle)? Expliquer.
3. On veut plutôt construire une école à égale distance des trois routes droites (AB) , (BC) et (CA) , à l'intérieur du triangle. Quel point faut-il choisir?

EXERCICE 9.6 ★★☆☆

L'atelier de Fès. Youssef, maroquinier, dispose d'un morceau de cuir en forme de triangle ABC rectangle en A , avec $AB = 30$ cm, $AC = 40$ cm et $BC = 50$ cm.

1. Il veut y découper le **plus grand disque** possible. Quel point I doit-il prendre pour centre?
2. On note r le rayon du disque. En découpant ABC en trois triangles IAB , IBC et ICA de hauteur r , montrer que l'aire de ABC vaut $60 \times r$. En déduire r .

EXERCICE 9.7 ★★☆☆

I est le centre du cercle inscrit dans un triangle ABC .

1. On suppose $\widehat{BAC} = 70^\circ$ et $\widehat{ABC} = 50^\circ$. Calculer $\widehat{ACB}$, $\widehat{IBC}$, $\widehat{ICB}$ puis $\widehat{BIC}$.
2. Démontrer que, dans tout triangle, $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2}$. L'angle $\widehat{BIC}$ peut-il être aigu?

EXERCICE 9.8 ★★☆☆

ABC est un triangle dont les trois angles sont aigus et H est son orthocentre.

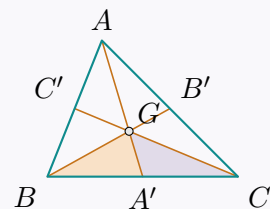
1. Justifier que $(AH) \perp (BC)$ et que $(BA) \perp (HC)$. En déduire que A est l'orthocentre du triangle HBC .
2. Sans nouveau calcul, quel est l'orthocentre du triangle HAB ?

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 9.1 — Six triangles de même aire

Les médianes $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ du triangle ABC se coupent en G et le découpent en six petits triangles.

1. Pourquoi GBA' et $GA'C$ ont-ils la même aire x ? De même, on note y l'aire de GCB' et de $GB'A$, et z celle de GAC' et de $GC'B$.
2. En comparant les aires de ABA' et $AA'C$, montrer que $y = z$. En déduire que les six triangles ont la même aire.
3. Comparer les aires de ABG et GBA' , et en déduire que $AG = 2GA'$.



○ DÉFI OLYMPIADE 9.2 — Bissectrice et médiane à la fois

Dans un triangle ABC , la bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en son milieu M . On veut démontrer que ABC est isocèle en A . On place E tel que M soit le milieu de $[AE]$.

1. Montrer que $ABEC$ est un parallélogramme; en déduire que $CE = AB$ et $(CE) \parallel (AB)$.
2. Montrer que $\widehat{CEA} = \widehat{BAE}$, puis que le triangle ACE est isocèle en C . Conclure.

Triangle rectangle et cercle

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Connaître le cercle circonscrit à un triangle rectangle et la propriété de la médiane relative à l'hypoténuse.
- ✓ Utiliser les réciproques pour démontrer qu'un triangle est rectangle (cercle de diamètre donné, médiane).
- ✓ Construire des perpendiculaires et des angles droits avec un cercle ; résoudre des problèmes.

1 L'essentiel du cours

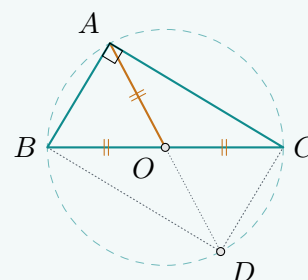
THÉORÈME — Cercle circonscrit à un triangle rectangle

Si un triangle ABC est rectangle en A , alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu O de l'hypoténuse $[BC]$:

$$OA = OB = OC = \frac{BC}{2}$$

L'hypoténuse est un **diamètre** du cercle circonscrit, de rayon $\frac{BC}{2}$. Autrement dit : la **médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de l'hypoténuse** ($BC = 9 \text{ cm} \Rightarrow AO = 4,5 \text{ cm}$).

Démonstration. Soit D le symétrique de A par rapport à O . Les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ de $ABDC$ ont le même milieu O : c'est un parallélogramme. Il a un angle droit en A : c'est un **rectangle**. Ses diagonales ont donc la même longueur : $AD = BC$, d'où $OA = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2} = OB = OC$.

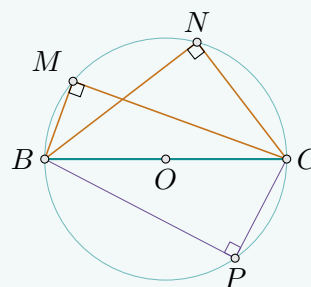


THÉORÈME — Les deux réciproques

Réciproque 1 (cercle). Si un triangle est inscrit dans un cercle et si l'un de ses côtés est un **diamètre**, alors il est rectangle, et ce côté est l'hypoténuse.

Réciproque 2 (médiane). Si, dans un triangle ABC , la médiane issue de A mesure la **moitié** de BC , alors ABC est rectangle en A .

Démonstration. O milieu de $[BC]$ et $OA = OB = OC$: les triangles OAB et OAC sont isocèles en O , donc $\widehat{OAB} = \widehat{B}$ et $\widehat{OAC} = \widehat{C}$. Dans ABC : $\widehat{B} + \widehat{C} + (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ$, donc $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ et $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

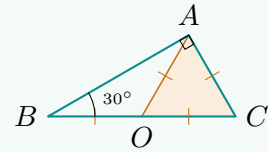


Tous les triangles BMC , BNC , BPC sont rectangles (en M , N , P).

PROPRIÉTÉ — Lieu des sommets de l'angle droit

A et B sont deux points distincts. L'ensemble des points M tels que le triangle AMB soit **rectangle en M** est le **cercle de diamètre $[AB]$** , privé des points A et B .

Conséquence (triangle « $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ »). Si ABC est rectangle en A avec $\widehat{B} = 30^\circ$, alors $AC = \frac{BC}{2}$. En effet $\widehat{C} = 60^\circ$ et $OA = OC$: le triangle OAC est isocèle avec un angle de 60° , il est donc **équilatéral** et $AC = OC = \frac{BC}{2}$.


2 Méthodes & astuces
MÉTHODE — Démontrer qu'un triangle est rectangle

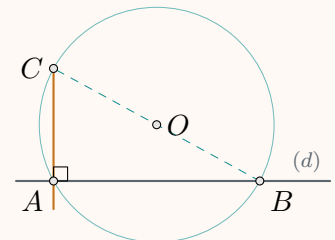
1. **Avec un cercle** : « Le triangle AMB est inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$, donc il est rectangle en M . »
2. **Avec une médiane** : « O est le milieu de $[BC]$ et $OA = \frac{BC}{2}$: la médiane issue de A mesure la moitié de $[BC]$, donc ABC est rectangle en A . »

Dans les deux cas, l'angle droit est au sommet **opposé** au diamètre (ou au côté $[BC]$).

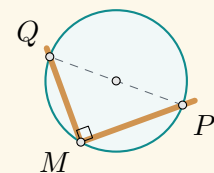
MÉTHODE — Tracer une perpendiculaire grâce à un cercle

On veut la perpendiculaire à la droite (d) passant par le point A de (d) .

1. Choisir un point O hors de (d) et tracer le cercle de centre O passant par A ; il recoupe (d) en B .
2. Tracer le diamètre $[BC]$ (la droite (BO) recoupe le cercle en C).
3. Le triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre $[BC]$: il est rectangle en A , donc $(AC) \perp (d)$.


★ ASTUCE DU PROF — Trouver le centre d'un plateau rond avec une équerre

On pose le sommet de l'angle droit de l'équerre **sur le bord** du disque : ses deux côtés recoupent le cercle en deux points P et Q , et $[PQ]$ est un **diamètre** (l'angle $\widehat{PMQ}$ est droit). On recommence ailleurs : les deux diamètres se coupent au **centre**. Les menuisiers de Salé utilisent cette technique pour percer le centre d'un plateau en thuya.


❌ PIÈGE À ÉVITER

- Le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'**hypoténuse**, jamais le milieu d'un côté de l'angle droit.
- Pour la réciproque 1, il faut que le côté soit un **diamètre** : être inscrit dans un cercle ne suffit pas (tout triangle l'est!).
- Pour la réciproque 2, il faut parler de la médiane **issue du sommet opposé** au côté : l'angle droit est en ce sommet.

LE SAVAIS-TU ?

Ce théorème est attribué à **Thalès de Milet** (VI^e siècle av. J.-C.) ; on raconte qu'il sacrifia un bœuf pour fêter sa découverte. Les anglophones l'appellent encore « *Thales' theorem* », alors qu'en français ce nom désigne un autre théorème (que tu verras en 3APIC).

3 Exercices

EXERCICE 10.1 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier.

- Si ABC est rectangle en B , le centre de son cercle circonscrit est le milieu de $[AC]$.
- Si EFG est rectangle en E et $FG = 11$ cm, la médiane issue de E mesure 5,5 cm.
- Si O est le milieu de $[KL]$ et $OJ = OK$, alors le triangle JKL est rectangle en J .
- Un triangle inscrit dans un cercle de rayon 4 cm, dont un côté mesure 8 cm, est rectangle.

EXERCICE 10.2 ★☆☆

- ABC est rectangle en A avec $BC = 13$ cm. Où est le centre O de son cercle circonscrit ? Quel est son rayon ? Calculer AO .
- RST est un triangle tel que $ST = 7,2$ cm ; I est le milieu de $[ST]$ et $RI = 3,6$ cm. Démontrer que RST est rectangle. Calculer $\widehat{RTS}$ sachant que $\widehat{RST} = 35^\circ$.

EXERCICE 10.3 ★☆☆

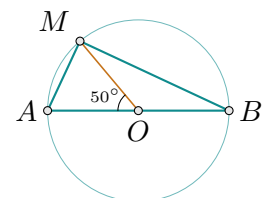
QCM. Choisir la bonne réponse et justifier.

- ABC est rectangle en C et $AB = 10$ cm. Le rayon de son cercle circonscrit est :
a) 10 cm b) 5 cm c) 20 cm.
- Dans le triangle MNP , $MN = 8$ cm et la médiane issue de P mesure 4 cm. Alors :
a) MNP est rectangle en P b) MNP est rectangle en M c) on ne peut pas conclure.
- E est sur le cercle de diamètre $[FG]$ et $\widehat{EFG} = 58^\circ$. Alors $\widehat{EGF}$ mesure :
a) 58° b) 32° c) 122° .

EXERCICE 10.4 ★☆☆

$[AB]$ est un diamètre d'un cercle de centre O et M est un point de ce cercle tel que $\widehat{AOM} = 50^\circ$.

- Quelle est la nature des triangles OAM et OMB ? Calculer $\widehat{OMA}$.
- Calculer $\widehat{MOB}$, puis $\widehat{OMB}$.
- En déduire $\widehat{AMB}$. Retrouver ce résultat sans calcul.



EXERCICE 10.5 ★☆☆

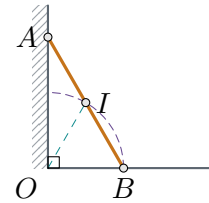
(Type contrôle) Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ avec $AB = 8$ cm, et M un point de (C) tel que $\widehat{MAB} = 30^\circ$.

- Faire une figure. Démontrer que le triangle AMB est rectangle.
- Calculer $\widehat{ABM}$. Quelle est la nature du triangle OMB ? En déduire la longueur MB .
- La perpendiculaire à (AB) passant par O coupe $[AM]$ en E . Démontrer que les points O, B, M, E sont sur un même cercle dont on précisera un diamètre.

EXERCICE 10.6 ★★☆☆

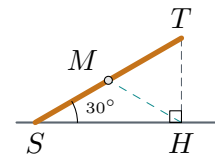
L'échelle qui glisse. Dans un riad de Marrakech, Hamza appuie une échelle $[AB]$ de 4 m contre un mur vertical : A est sur le mur, B sur le sol horizontal et O est le pied du mur. Un chat est assis sur le barreau du milieu I de l'échelle.

1. Calculer la distance OI .
2. L'échelle glisse : A descend le long du mur et B s'éloigne. Quelle ligne le chat décrit-il ?


EXERCICE 10.7 ★★☆☆

Le toboggan d'Agadir. Dans un parc d'Agadir, un toboggan rectiligne $[ST]$ de 3,6 m de long fait un angle de 30° avec le sol horizontal. H est le pied de la verticale issue du sommet T .

1. Calculer la hauteur TH du toboggan. Justifier.
2. Un enfant est assis au milieu M du toboggan. Quelle est la distance HM ?


EXERCICE 10.8 ★★☆☆

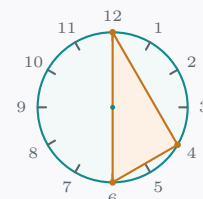
ABC est un triangle dont les angles sont aigus ; H est le pied de la hauteur issue de A , K celui de la hauteur issue de B , et I le milieu de $[AB]$.

1. Démontrer que les points A , B , H et K sont sur un même cercle dont on précisera le centre.
2. En déduire que le triangle IHK est isocèle.

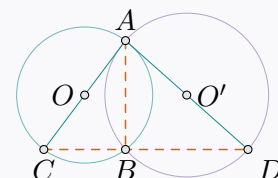
4 Défis olympiades
○ DÉFI OLYMPIADE 10.1 – Les triangles de l'horloge

On choisit 3 des 12 graduations des heures d'une horloge (régulièrement réparties sur un cercle) et on les relie, comme le triangle « 12 h – 4 h – 6 h » ci-contre.

1. Ce triangle est-il rectangle ? Pourquoi ?
2. Combien de triangles **rectangles** peut-on obtenir ainsi ?
3. Et si le cadran ne portait que 7 graduations régulièrement réparties ?


○ DÉFI OLYMPIADE 10.2 – Deux cercles, trois points alignés

Deux cercles de centres O et O' se coupent en A et B . On trace le diamètre $[AC]$ du premier cercle et le diamètre $[AD]$ du second. Démontrer que les points C , B et D sont alignés.



Le théorème de Pythagore et sa réciproque

OBJECTIFS DU CHAPITRE

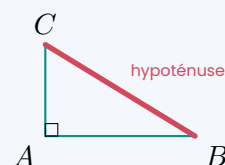
- ✓ Connaître et utiliser le théorème de Pythagore pour calculer une longueur (valeur exacte ou approchée).
- ✓ Démontrer qu'un triangle est rectangle (réciproque) ou qu'il ne l'est pas (contraposée).
- ✓ Résoudre des problèmes concrets : échelle, écran, terrain, corde à 13 nœuds...

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Hypoténuse

Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté **opposé à l'angle droit**. C'est le **plus long** des trois côtés. Les deux autres côtés sont les **côtés de l'angle droit**.

Ci-contre : ABC est rectangle en A ; son hypoténuse est $[BC]$.



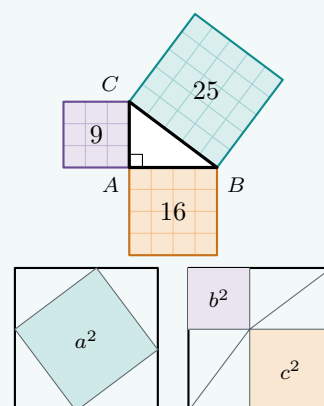
THÉORÈME — de Pythagore

Si un triangle ABC est **rectangle en A** , alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Interprétation : l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés. Ci-contre : $9 + 16 = 25$, soit $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Pourquoi ? Dans un carré de côté $b + c$, on place 4 copies du triangle de deux façons. Ce qui reste est un carré a^2 , ou bien deux carrés $b^2 + c^2$: donc $a^2 = b^2 + c^2$.



PROPRIÉTÉ — Calculer une longueur : racine carrée et calculatrice

Si $BC^2 = 74$, alors BC est le nombre positif dont le carré vaut 74 ; on le note $\sqrt{74}$ (touche $\sqrt{\quad}$ de la calculatrice).

- Si le nombre est un **carré parfait**, on donne la **valeur exacte** : $BC^2 = 100$, donc $BC = 10$.
- Sinon, on écrit la valeur exacte **puis** une valeur **approchée** avec le signe « $\approx$ » : $BC = \sqrt{74} \approx 8,6$ (au dixième).

THÉORÈME — Réciproque et contraposée

Soit ABC un triangle dont le **plus long côté** est $[BC]$.

- **Réciproque** : si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est **rectangle en A** .
- **Contraposée** : si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC **n'est pas rectangle**.

2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Calculer une longueur avec le théorème de Pythagore

L'hypoténuse. ABC rectangle en A , $AB = 5$, $AC = 7$.

Le triangle ABC est rectangle en A , donc d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 25 + 49 = 74$$

$$BC = \sqrt{74} \approx 8,6 \text{ cm.}$$

Un côté de l'angle droit. DEF rectangle en D , $EF = 13$, $DE = 5$.

D'après le théorème de Pythagore :

$$EF^2 = DE^2 + DF^2, \text{ donc } DF^2 = EF^2 - DE^2$$

$$DF^2 = 169 - 25 = 144, \text{ donc } DF = 12 \text{ cm.}$$

MÉTHODE — Le triangle est-il rectangle ?

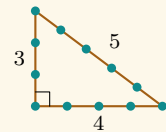
- Repérer le **plus long** côté et calculer **séparément** son carré et la somme des carrés des deux autres.
- Égalité** $\Rightarrow$ rectangle (réciproque), l'angle droit est **en face** du plus long côté. **Pas d'égalité** $\Rightarrow$ non rectangle (contraposée).

Ex. $RS = 20$, $ST = 29$, $RT = 21$: $ST^2 = 841$ et $RS^2 + RT^2 = 400 + 441 = 841$. Égalité : RST est rectangle en R .

★ ASTUCE DU PROF — Les triplets pythagoriciens et la corde à 13 nœuds

Retenir quelques triplets $(a; b; c)$ avec $a^2 + b^2 = c^2$: $(3; 4; 5)$, $(5; 12; 13)$, $(8; 15; 17)$, $(7; 24; 25)$, $(20; 21; 29)$ et leurs multiples : $(6; 8; 10)$, $(9; 12; 15)$, $(30; 40; 50)$...

Les maçons utilisent depuis l'Antiquité une **corde à 13 nœuds** (12 intervalles égaux) : tendue en triangle 3-4-5, elle donne un angle droit parfait !



✗ PIÈGE À ÉVITER

- On n'additionne pas les longueurs : $3 + 4 \neq 5$, ce sont les **carrés** qui s'additionnent : $9 + 16 = 25$.
- Le théorème ne s'utilise que dans un triangle **rectangle** ; bien repérer l'hypoténuse (en face de l'angle droit).
- $\sqrt{25 + 49} \neq 5 + 7$! Et une valeur approchée s'écrit avec « $\approx$ », jamais avec « $=$ ».

LE SAVAIS-TU ? — Bien avant Pythagore

Pythagore (VI^e siècle av. J.-C.) n'est pas le premier à connaître cette relation : la tablette babylonienne **Plimpton 322**, gravée vers 1800 av. J.-C., contient déjà une liste de triplets comme $(119; 120; 169)$! En revanche, on lui attribue (avec son école) la première **démonstration**. Il existe aujourd'hui plus de 300 démonstrations différentes du théorème.

3 Exercices

EXERCICE 11.1 ★☆☆

Vrai ou faux ? Les triangles dont on donne les côtés (en cm) sont rectangles. Justifier.

a) 9 ; 12 ; 15

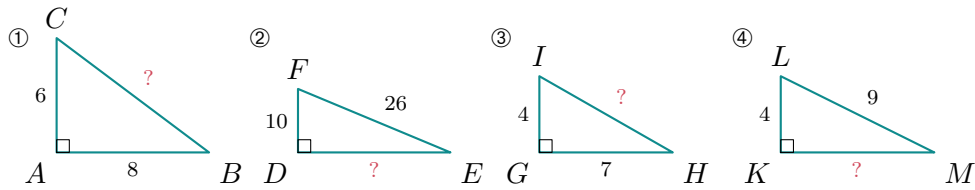
b) 6 ; 7 ; 9

c) 2,5 ; 6 ; 6,5

d) 6 ; 8 ; 11

EXERCICE 11.2 ★☆☆

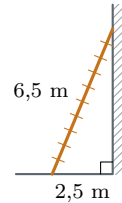
Calculer la longueur marquée « ? » (en cm ; valeur exacte, puis arrondi au dixième si nécessaire).



EXERCICE 11.3 ★☆☆

L'échelle. Pour décorer la façade d'une maison à Chefchaouen, Amine pose une échelle de 6,5 m contre le mur vertical ; le pied de l'échelle est à 2,5 m du mur, sur un sol horizontal.

1. À quelle hauteur le haut de l'échelle touche-t-il le mur ?
2. Amine rapproche le pied de l'échelle à 1,6 m du mur. De combien le haut de l'échelle monte-t-il ?



EXERCICE 11.4 ★☆☆

Écran et pouces. La taille d'un écran se donne par la longueur de sa **diagonale**, en pouces (1 pouce = 2,54 cm).

1. L'écran rectangulaire d'un téléviseur mesure 88,6 cm de large et 49,8 cm de haut. Calculer sa diagonale au mm près, puis sa taille en pouces (à l'unité).
2. Un vendeur de Derb Ghallef affirme que son écran de 36 cm sur 27 cm est un « 18 pouces ». A-t-il raison ?

EXERCICE 11.5 ★☆☆

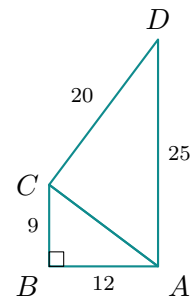
Au stade. Un terrain de football rectangulaire mesure 105 m sur 68 m. Pour aller d'un coin au coin opposé, Ayoub longe deux côtés, tandis que Reda traverse en ligne droite.

1. Calculer la longueur de la diagonale du terrain (au dixième de mètre).
2. Combien de mètres Reda économise-t-il ?

EXERCICE 11.6 ★☆☆

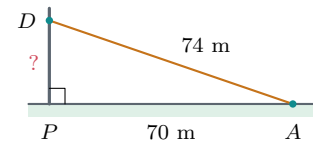
(Type contrôle) Sur la figure ci-contre (qui n'est pas en vraie grandeur), ABC est rectangle en B avec $AB = 12$ cm et $BC = 9$ cm ; on donne aussi $CD = 20$ cm et $AD = 25$ cm.

1. Calculer AC .
2. Démontrer que le triangle ACD est rectangle.
3. Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.



EXERCICE 11.7 ★★☆☆

La tyrolienne d'Akchour. Près des cascades d'Akchour, une tyrolienne relie le haut d'un pylône D au point d'arrivée A , au sol. Le pied P du pylône est à 70 m de A (sol horizontal) et le câble $[DA]$, bien tendu, mesure 74 m.



1. Calculer la hauteur DP du pylône.
2. Un touriste glisse à la vitesse moyenne de 18,5 km/h. Combien de secondes dure la descente ?

EXERCICE 11.8 ★★☆☆

Le contrôle du maçon. Pour vérifier qu'un angle de mur est droit, un maçon de Meknès mesure 60 cm sur un mur, 80 cm sur l'autre (à partir du coin), puis la distance entre les deux marques.

1. Quelle distance doit-il trouver si l'angle est droit ? Justifier.
2. À un autre coin, il mesure 1,2 m et 1,6 m sur les murs, et 1,98 m entre les marques. L'angle est-il droit ?
3. Avec sa corde à 13 nœuds de 6 m de long, quelles longueurs donne-t-il aux trois côtés du triangle ?

EXERCICE 11.9 ★★☆☆

ABC est un triangle isocèle en A avec $AB = AC = 13$ cm et $BC = 10$ cm ; H est le milieu de $[BC]$.

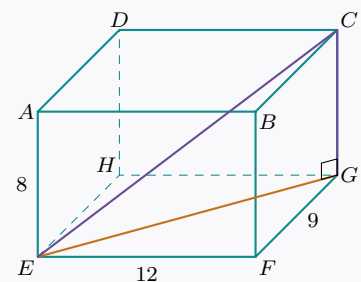
1. Pourquoi $(AH) \perp (BC)$? Calculer AH , puis l'aire de ABC .
2. En déduire la longueur de la hauteur issue de B (au mm près).

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 11.1 — La plus longue baguette dans la boîte

Une boîte en forme de pavé droit mesure 12 cm de long, 9 cm de large et 8 cm de haut.

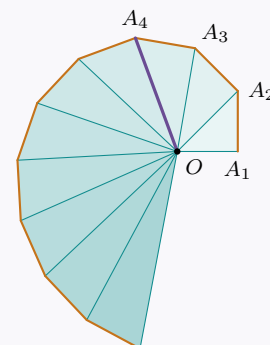
1. Calculer la diagonale EG du fond de la boîte.
2. Le triangle EGC est rectangle en G . Calculer la grande diagonale EC de la boîte.
3. Une baguette de 16,5 cm peut-elle tenir **entièrement** dans la boîte, alors qu'elle est plus longue que EG ? Et une baguette de 17,5 cm ?



○ DÉFI OLYMPIADE 11.2 — La spirale de Théodore

On part d'un segment $[OA_1]$ de 1 cm. On construit le triangle OA_1A_2 rectangle en A_1 avec $A_1A_2 = 1$ cm, puis OA_2A_3 rectangle en A_2 avec $A_2A_3 = 1$ cm, et ainsi de suite.

1. Calculer OA_2^2 , OA_3^2 et OA_4^2 . Quelle est la longueur OA_4 ?
2. Exprimer OA_n^2 en fonction de n . Justifier.
3. Quelles sont les longueurs OA_n entières lorsque $n \leq 50$? Combien de triangles faut-il construire pour que OA_n dépasse 5 cm ?



Le cosinus d'un angle aigu

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Repérer l'hypoténuse et le côté adjacent à un angle aigu d'un triangle rectangle ; connaître la définition du cosinus.
- ✓ Calculer un cosinus, une longueur (côté adjacent ou hypoténuse) et un angle à la calculatrice.
- ✓ Résoudre des problèmes concrets : rampe, échelle, toit...

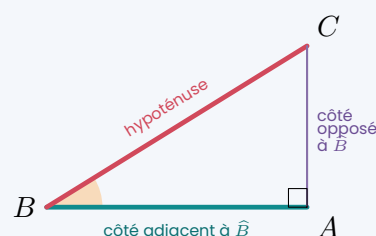
1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Côté adjacent, hypoténuse et cosinus

Soit ABC un triangle rectangle en A . L'hypoténuse est $[BC]$ (opposée à l'angle droit). Pour l'angle aigu $\widehat{ABC}$, le **côté adjacent** est $[AB]$: il forme l'angle $\widehat{B}$ avec l'hypoténuse ; le troisième côté, $[AC]$, est le **côté opposé** à $\widehat{B}$.

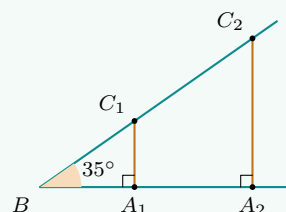
Le **cosinus** de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ est le quotient :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$



PROPRIÉTÉ — Ce qu'il faut savoir du cosinus

- Le cosinus d'un angle aigu ne dépend **que de sa mesure** (propriété admise) : ci-contre, $\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \cos 35^\circ \approx 0,82$.
- L'hypoténuse est le plus long côté, donc pour tout angle aigu x : $0 < \cos x < 1$. Un cosinus n'a **pas d'unité**.
- Plus un angle aigu est grand, plus son cosinus est petit** (valeurs au millième ; $\cos 60^\circ = 0,5$ exactement, voir le défi 12.1) :



Angle x	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°	70°	80°
$\cos x \approx$	0,985	0,940	0,866	0,766	0,707	0,643	0,5	0,342	0,174

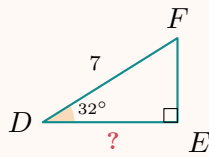
2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Utiliser la calculatrice (en mode degrés)

Angle connu → **cosinus**. Pour $\cos 42^\circ$, on tape $\cos 42 =$; affichage 0,743 14..., donc $\cos 42^\circ \approx 0,743$.

Test du mode : $\cos 60$ doit afficher 0,5 ; sinon, passer la calculatrice en **degrés** (« D » ou « DEG »).

Cosinus connu → **angle**. Si $\cos x = 0,4$: $\text{SHIFT} \cos 0,4 =$ (touche $\cos^{-1}$ ou « Arccos ») ; affichage 66,42..., donc $x \approx 66,4^\circ$.

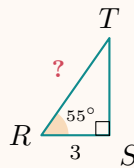
MÉTHODE — Calculer avec le cosinus : les trois situations
Un côté adjacent


DEF rectangle en E :

$$\cos \hat{D} = \frac{DE}{DF}$$

donc $DE = DF \times \cos \hat{D}$

$$DE = 7 \times \cos 32^\circ \approx \mathbf{5,9 \text{ cm.}}$$

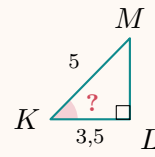
L'hypoténuse


RST rectangle en S :

$$\cos \hat{R} = \frac{RS}{RT}$$

donc $RT = RS \div \cos \hat{R}$

$$RT = 3 \div \cos 55^\circ \approx \mathbf{5,2 \text{ cm.}}$$

Un angle


KLM rectangle en L :

$$\cos \hat{K} = \frac{KL}{KM} = \frac{3,5}{5} = 0,7$$

donc $\hat{K} \approx \mathbf{45,6^\circ}$ (touche $\cos^{-1}$).

★ ASTUCE DU PROF — « CAH » et le contrôle de vraisemblance

Retenir « **CAH** » : **C**osinus = **A**djoint $\div$ **H**ypoténuse. Puis contrôler : l'hypoténuse est le plus long côté ; pour RT , $3 \times \cos 55^\circ \approx 1,7 < RS$ serait **absurde**.

✗ PIÈGE À ÉVITER

- Cosinus : seulement dans un triangle **rectangle**, pour un angle **aigu**. Le côté adjacent **dépend de l'angle** : dans ABC rectangle en A , $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$ mais $\cos \hat{C} = \frac{AC}{BC}$.
- Le cosinus n'est **pas proportionnel** à l'angle : $\cos 60^\circ = 0,5$ alors que $2 \times \cos 30^\circ \approx 1,73$. On n'arrondit qu'à la fin.

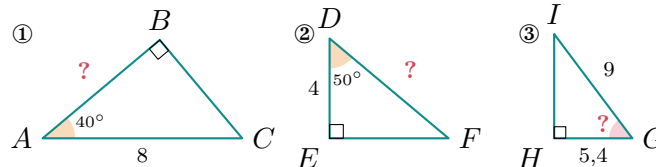
3 Exercices
EXERCICE 12.1 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier (x désigne un angle aigu).

- Il existe x tel que $\cos x = 1,2$.
- $\cos 40^\circ > \cos 50^\circ$.
- $\cos 60^\circ = 2 \times \cos 30^\circ$.
- Agrandir le triangle augmente les cosinus.

EXERCICE 12.2 ★☆☆

Calculer la mesure marquée « ? » (longueurs en cm au dixième ; angle au dixième de degré).


EXERCICE 12.3 ★☆☆

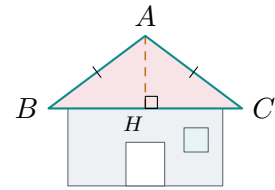
(Type contrôle) ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = 12 \text{ cm}$ et $\widehat{ABC} = 35^\circ$.

- Calculer AB (arrondir au mm).
- Calculer $\widehat{ACB}$, puis AC à l'aide de $\cos \widehat{ACB}$ (au mm). Vérifier avec le théorème de Pythagore.
- Calculer l'aire du triangle ABC , arrondie au cm^2 .

EXERCICE 12.4 ★★☆☆

Le toit d'Ifrane. À Ifrane, les toits sont pentus pour que la neige glisse. La coupe du toit d'un chalet est un triangle ABC isocèle en A : $AB = AC = 5$ m, $BC = 8$ m ; H est le milieu de $[BC]$.

- Pourquoi le triangle ABH est-il rectangle en H ?
- Calculer $\cos \widehat{ABC}$, puis $\widehat{ABC}$ au degré près. En déduire $\widehat{BAC}$.
- Calculer la hauteur AH du toit.


EXERCICE 12.5 ★★☆☆

L'échelle de sécurité. À Essaouira, Karim repeint un riad avec une échelle de 5 m. Pour sa sécurité, l'angle α entre l'échelle et le sol horizontal doit être compris entre 65° et 75° .

- Le pied de l'échelle est à 1,6 m du mur vertical. Calculer α au dixième de degré. Est-ce sûr ?
- Entre quelles distances du mur (au cm près) peut-on placer le pied de l'échelle ?

EXERCICE 12.6 ★★★

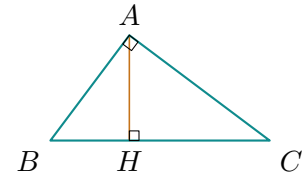
La rampe. À l'entrée d'une bibliothèque de Rabat, une rampe rectiligne $[AB]$ de 3,5 m mène au haut B d'un perron vertical $[HB]$; son pied A est à 3,46 m de H sur le sol horizontal.

- Calculer $\widehat{BAH}$ au dixième de degré. La norme « fauteuil roulant » (5° au plus) est-elle respectée ?
- Calculer la hauteur BH du perron, au cm près.

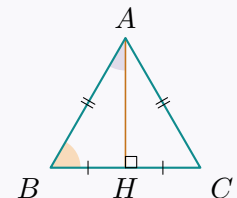
EXERCICE 12.7 ★★★

ABC est rectangle en A , de hauteur $[AH]$; $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm.

- Écrire $\cos \widehat{ABC}$ dans le triangle ABC , puis dans ABH .
- En déduire BH **sans calculer d'angle**, puis HC et AH .
- Démontrer que $AB^2 = BH \times BC$ dans **tout** triangle de ce type.


4 Défis olympiades
○ DÉFI OLYMPIADE 12.1 — Trois valeurs exactes

- ABC est équilatéral de côté 6 cm et H est le milieu de $[BC]$. En calculant $\cos \widehat{ABC}$ dans le triangle ABH , trouver la valeur **exacte** de $\cos 60^\circ$.
- Calculer AH^2 , puis montrer que $(\cos 30^\circ)^2 = \frac{3}{4}$ (sans calculer AH).
- À l'aide de la diagonale d'un carré, montrer que $(\cos 45^\circ)^2 = \frac{1}{2}$.


○ DÉFI OLYMPIADE 12.2 — Le classement sans calculatrice

Trois tremplins de skate sont des triangles rectangles de côtés de l'angle droit (en dm) : ① 5 et 12 ; ② 8 et 15 ; ③ 7 et 24. L'angle α_k est formé par le sol (le plus grand de ces côtés) et la piste. Écrire chaque $\cos \alpha_k$ en fraction, puis **sans calculatrice**, ranger $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (Comparer chaque fraction à 1.)

La droite des milieux dans un triangle

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Connaître et utiliser les trois théorèmes de la droite des milieux.
- ✓ Démontrer un parallélisme, calculer une longueur, démontrer qu'un point est un milieu.
- ✓ Rédiger une démonstration courte et l'appliquer aux quadrilatères (parallélogramme des milieux, trapèze).

1 L'essentiel du cours

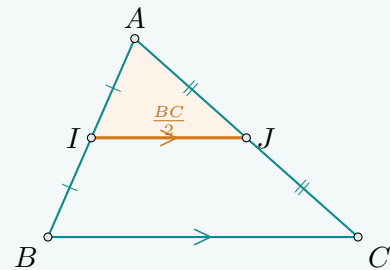
THÉORÈME — Théorèmes 1 et 2 — la droite des milieux

Dans un triangle ABC , si I est le **milieu** de $[AB]$ et J le **milieu** de $[AC]$, alors :

Théorème 1. La droite (IJ) est **parallèle** au troisième côté : $(IJ) \parallel (BC)$

Théorème 2. Le segment $[IJ]$ mesure la **moitié** du troisième côté : $IJ = \frac{BC}{2}$

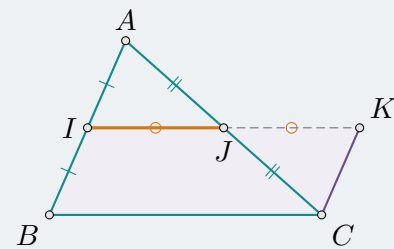
Exemple : si $BC = 9$ cm, alors $IJ = 9 \div 2 = 4,5$ cm.



REMARQUE — Pourquoi est-ce vrai? Une preuve avec la symétrie centrale

Soit K le symétrique de I par rapport à J .

- Les diagonales $[AC]$ et $[IK]$ de $AICK$ ont le même milieu J : $AICK$ est un **parallélogramme**, donc $(CK) \parallel (AB)$ et $CK = AI = IB$.
- $IBCK$ a deux côtés opposés $[IB]$ et $[KC]$ **parallèles et de même longueur** : c'est un **parallélogramme**.
- Donc $(IK) \parallel (BC)$ et $IK = BC$; or $IJ = \frac{IK}{2}$, d'où $(IJ) \parallel (BC)$ et $IJ = \frac{BC}{2}$.

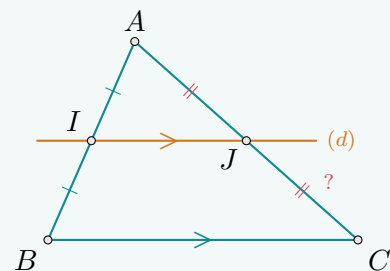


THÉORÈME — Théorème 3 — pour démontrer qu'un point est un milieu

Dans un triangle ABC , la droite qui passe par le **milieu** I d'un côté $[AB]$ et qui est **parallèle** à un deuxième côté (BC) coupe le troisième côté $[AC]$ **en son milieu** J .

En résumé : I milieu de $[AB]$ et $(d) \parallel (BC) \Rightarrow J$ milieu de $[AC]$

On a alors aussi $IJ = \frac{BC}{2}$ (théorème 2).



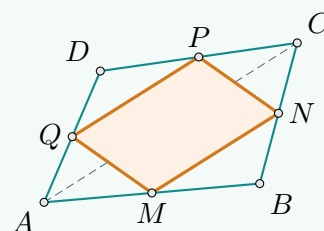
► Une application à connaître

PROPRIÉTÉ — Le parallélogramme des milieux (théorème de Varignon)

Si on joint dans l'ordre les **milieux** M, N, P, Q des côtés d'un quadrilatère **quelconque** $ABCD$, on obtient toujours un **parallélogramme** $MNPQ$.

Preuve. Dans le triangle ABC : $(MN) \parallel (AC)$ et $MN = \frac{AC}{2}$. Dans le triangle ADC : $(QP) \parallel (AC)$ et $QP = \frac{AC}{2}$. Donc $[MN]$ et $[QP]$ sont parallèles et de même longueur.

Bonus : périmètre de $MNPQ = AC + BD$.



2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Choisir le bon théorème

Je sais que ...	Je veux démontrer ...	J'utilise ...
I et J sont les milieux de deux côtés	que (IJ) est parallèle au 3 ^e côté	le théorème 1
I et J sont les milieux de deux côtés	une longueur (IJ ou le 3 ^e côté)	le théorème 2 : $IJ = \frac{BC}{2}$, $BC = 2 \times IJ$
I milieu d'un côté et (d) parallèle à un 2 ^e côté	qu'un point J est le milieu du 3 ^e côté	le théorème 3

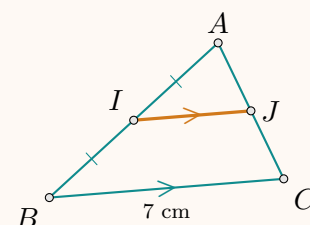
MÉTHODE — Rédiger une démonstration en trois temps

Énoncé. ABC est un triangle, I est le milieu de $[AB]$. La parallèle à (BC) passant par I coupe $[AC]$ en J ; $BC = 7$ cm. Calculer IJ .

① **Les données** : dans le triangle ABC , I est le milieu de $[AB]$ et $(IJ) \parallel (BC)$.

② **Le théorème** : d'après le théorème 3, J est le milieu de $[AC]$.

③ **La conclusion** : I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, donc d'après le théorème 2, $IJ = \frac{BC}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$ cm.



★ ASTUCE DU PROF — le réflexe « milieux »

Dès qu'un énoncé contient **deux milieux**, cherche le triangle dont ce sont les milieux de deux côtés. S'il n'y en a qu'un **seul**, cherche une parallèle : c'est le théorème 3. Et s'il n'y a pas de triangle ... **trace une diagonale** pour en fabriquer un (parallélogramme de Varignon, trapèze) !

✗ PIÈGE À ÉVITER

Les milieux doivent être ceux de deux côtés **du même triangle**. Et au théorème 3, la droite doit passer par un **milieu** et être **parallèle** à un côté : une droite parallèle à (BC) quelconque ne coupe pas $[AC]$ en son milieu ! Enfin, $IJ = \frac{BC}{2}$ ne suffit pas pour dire que J est un milieu.

LE SAVAIS-TU ?

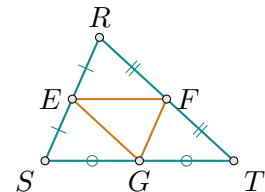
Le parallélogramme des milieux porte le nom du mathématicien français **Pierre Varignon** (1654–1722) ; son théorème a été publié en 1731, après sa mort, dans un manuel destiné aux élèves. Il reste vrai pour un quadrilatère « croisé », et même pour quatre points qui ne sont pas dans un même plan (comme quatre sommets bien choisis d'un cube) !

3 Exercices

EXERCICE 13.1 ★☆☆

Vrai ou faux ? E, F, G sont les milieux des côtés du triangle RST , et $ST = 12$ cm. Justifier.

- a) $(EF) \parallel (ST)$.
 b) $EF = 24$ cm.
 c) $(FG) \parallel (RS)$.
 d) $SEFG$: parallélogramme.



EXERCICE 13.2 ★☆☆

ABC est un triangle tel que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 11$ cm. I, J, K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

- Calculer IJ, JK et IK , puis le périmètre du triangle IKJ . Comparer avec celui de ABC .
- Dans un triangle EFG , M et N sont les milieux de $[EF]$ et $[EG]$, et $MN = 4,3$ cm. Calculer FG .

EXERCICE 13.3 ★☆☆

ABC est un triangle tel que $AB = 7$ cm, $AC = 9$ cm et $BC = 10$ cm. La parallèle à (BC) passant par le milieu I de $[AB]$ coupe $[AC]$ en J . Calculer AJ et IJ , puis le périmètre du trapèze $IBCJ$.

EXERCICE 13.4 ★☆☆

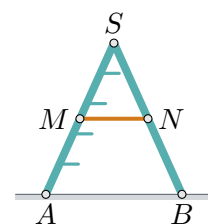
Type contrôle. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm. I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$.

- Calculer BC , puis montrer que $(IJ) \parallel (BC)$ et calculer IJ .
- La parallèle à (AB) passant par J coupe $[BC]$ en K . Montrer que K est le milieu de $[BC]$ et calculer JK .
- Montrer que $(IK) \parallel (AC)$. Quelle est la nature de $AIKJ$? Calculer son périmètre et son aire.

EXERCICE 13.5 ★☆☆

L'escabeau du peintre. À Marrakech, Yassine utilise un escabeau dont les montants $[SA]$ et $[SB]$ mesurent 2 m. Une sangle $[MN]$ relie les **milieux** des deux montants pour limiter l'ouverture.

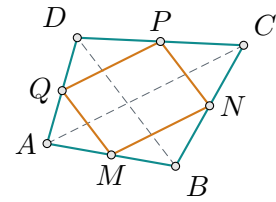
- La sangle tendue mesure 55 cm. Quel est l'écartement AB des pieds ? Pourquoi la sangle est-elle parallèle au sol ?
- Yassine veut un écartement de 1,3 m. Quelle longueur de sangle doit-il prévoir ?



EXERCICE 13.6 ★★☆☆

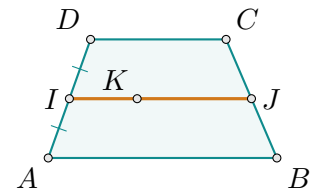
Varignon. $ABCD$ est un quadrilatère dont les diagonales mesurent $AC = 9$ cm et $BD = 7$ cm. M, N, P, Q sont les milieux de $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

1. Calculer MN et NP , puis le périmètre de $MNPQ$.
2. Que dire de $MNPQ$ lorsque $ABCD$ est un **rectangle**? un **losange**? Justifier.


EXERCICE 13.7 ★★☆☆

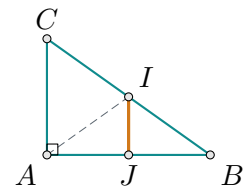
La droite des milieux d'un trapèze. $ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$, avec $AB = 10$ cm et $DC = 6$ cm. I est le milieu de $[AD]$; la parallèle à (AB) passant par I coupe $[AC]$ en K et $[BC]$ en J .

1. Montrer que K est le milieu de $[AC]$ et calculer IK .
2. Montrer que J est le milieu de $[BC]$; calculer KJ puis IJ . Vérifier que $IJ = \frac{AB+DC}{2}$.


EXERCICE 13.8 ★★★

Le milieu de l'hypoténuse. ABC est un triangle rectangle en A . I est le milieu de $[BC]$ et J celui de $[AB]$.

1. Montrer que $(IJ) \perp (AB)$, puis que $IA = IB = IC$.
2. Application : $BC = 13$ cm. Calculer AI . Quel est le centre du cercle qui passe par A, B et C ?


4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 13.1 — les triangles emboîtés

On part d'un triangle T_0 de périmètre 96 cm et d'aire 384 cm². T_1 a pour sommets les milieux des côtés de T_0 ; T_2 a pour sommets les milieux des côtés de T_1 , et ainsi de suite.

1. Montrer que T_0 est découpé en quatre triangles superposables à T_1 . Calculer le périmètre et l'aire de T_1 , puis de T_2 .
2. Quel est le premier triangle de la chaîne dont l'aire est inférieure à 1 cm²? Quel est son périmètre?
3. Montrer que la somme des périmètres de $T_1, T_2, T_3 \dots$ reste toujours inférieure à 96 cm.

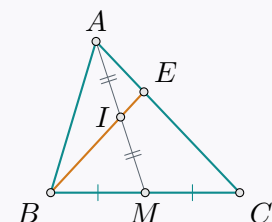
○ DÉFI OLYMPIADE 13.2 — le point au tiers

ABC est un triangle, M est le milieu de $[BC]$ et I le milieu de $[AM]$.

La droite (BI) coupe $[AC]$ en E . Démontrer que $AE = \frac{AC}{3}$.

Piste : introduire le milieu N de $[EC]$.

Bonus : montrer que $BE = 4 \times IE$.



La projection sur une droite

OBJECTIFS DU CHAPITRE

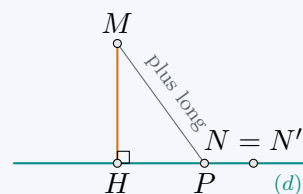
- ✓ Construire le projeté orthogonal d'un point sur une droite, et son projeté sur une droite parallèlement à une direction donnée.
- ✓ Construire le projeté d'un segment ; utiliser la conservation du milieu et des rapports de longueurs.
- ✓ Partager un segment en parties égales à la règle et à l'équerre.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Projection orthogonale sur une droite

(d) est une droite et M un point. La perpendiculaire à (d) passant par M coupe (d) en H : H est le **projeté orthogonal** de M sur (d) (le « pied de la perpendiculaire »). MH est la **distance de M à la droite (d)** : c'est la plus courte ($MP \geq MH$ pour tout P de (d)). Un point N de (d) est son propre projeté.

Construction : un côté de l'angle droit de l'équerre sur (d) , l'autre passant par M .

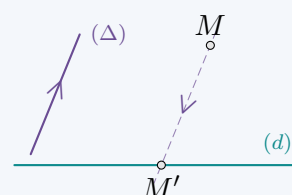


DÉFINITION — Projection sur (d) parallèlement à (Δ)

(d) et (Δ) sont deux droites **sécantes**. Le **projeté** de M sur (d) **parallèlement à (Δ)** est le point M' où la **parallèle à (Δ) passant par M** coupe (d) . Si $M \in (d)$, alors $M' = M$; si $(\Delta) \perp (d)$, on retrouve la projection orthogonale.

Construction : équerre contre (Δ) , règle contre l'équerre ; glisser l'équerre jusqu'à M .

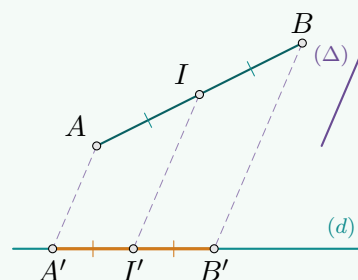
Image concrète : l'ombre d'un objet au soleil (rayons parallèles).



PROPRIÉTÉ — Projeté d'un segment et conservation du milieu

On projette sur (d) parallèlement à (Δ) .

- Le projeté du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- **Le milieu est conservé** : si I est le milieu de $[AB]$, alors I' est le milieu de $[A'B']$ (preuve : théorème 3 de la droite des milieux).
- **Les rapports de longueurs sur une même droite sont conservés** : si A, B, C sont alignés et $AC = 3 \times AB$, alors $A'C' = 3 \times A'B'$.



2 Méthodes & astuces

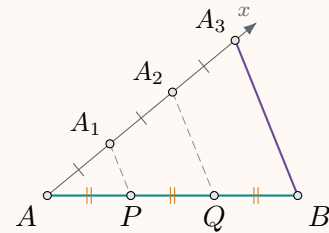
★ ASTUCE DU PROF — le milieu sur une droite graduée

Si A' et B' ont pour abscisses 3 et 11, le projeté du milieu de $[AB]$ a pour abscisse leur **moyenne** : $(3 + 11) \div 2 = 7$.

MÉTHODE — Partager un segment $[AB]$ en 3 parties égales (règle et équerre)

1. Tracer une demi-droite $[Ax)$ quelconque.
2. Au compas, reporter 3 fois une même longueur : $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$.
3. Tracer (A_3B) , puis les parallèles à (A_3B) passant par A_1 et A_2 : elles coupent $[AB]$ en P et Q .

Pourquoi ? On projette A_1, A_2, A_3 sur (AB) parallèlement à (A_3B) : les rapports sont conservés, donc $AP = PQ = QB$. Idéal si $AB = 10$ cm ($10 \div 3$ ne tombe pas juste).



✗ PIÈGE À ÉVITER

« Projection **sur** (d) **parallèlement** à (Δ) » : les points arrivent **sur** (d) en suivant des parallèles à (Δ) , et non l'inverse ! Et la projection conserve le milieu et les rapports, mais **pas les longueurs**.

3 Exercices

EXERCICE 14.1 ★☆☆

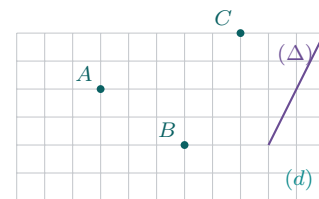
Vrai ou faux ? On projette sur (d) parallèlement à (Δ) . Justifier.

- a) Le projeté d'un segment de 5 cm mesure 5 cm.
- b) Si $(AB) \parallel (\Delta)$, A et B ont le même projeté.
- c) Le projeté d'un milieu est un milieu.
- d) I milieu de $[AB]$ et $A'B' = 6$ cm, alors $A'I' = 3$ cm.

EXERCICE 14.2 ★☆☆

Reproduire la figure sur un quadrillage.

1. Placer les projetés orthogonaux de A, B, C sur (d) .
2. Placer leurs projetés sur (d) parallèlement à (Δ) . Que remarque-t-on pour B et C ?
3. Sans construire le milieu I de $[AC]$, placer son projeté orthogonal sur (d) .



EXERCICE 14.3 ★☆☆

La ferme et la route. Une ferme près de Meknès est en F ; H est son projeté orthogonal sur une route droite (d) , et $FH = 300$ m. 1. Où faut-il rejoindre la route pour que le chemin droit depuis F soit le plus court ? 2. P est sur la route, avec $HP = 400$ m. Calculer FP et la longueur économisée en rejoignant la route en H .

EXERCICE 14.4 ★★☆☆

Type contrôle. A et B sont du même côté d'une droite (d) et I est le milieu de $[AB]$. A' , B' , I' sont leurs projetés orthogonaux sur (d) , avec $AA' = 3$ cm et $BB' = 7$ cm.

- Justifier que $(AA') \parallel (BB')$ et donner la nature de $AA'B'B$.
- Montrer que I' est le milieu de $[A'B']$, puis calculer II' (chapitre 13).

EXERCICE 14.5 ★★☆☆

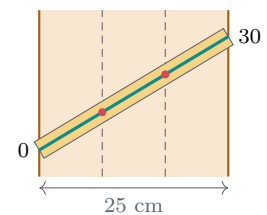
A , B , C sont alignés dans cet ordre, avec $AB = 2$ cm et $BC = 6$ cm. On les projette sur (d) parallèlement à (Δ) et on obtient $A'B' = 1,4$ cm.

- Calculer $B'C'$ et $A'C'$.
- M est le milieu de $[AC]$. Calculer $A'M'$.

EXERCICE 14.6 ★★☆☆

L'astuce du menuisier de Salé. Pour découper une planche de 25 cm de large en 3 bandes égales, Karim pose son mètre en biais, la graduation 0 sur un bord et 30 sur l'autre. Il marque 10 et 20, puis trace par ces points des parallèles aux bords.

- Expliquer avec une projection pourquoi les bandes ont la même largeur.
- Quelle est cette largeur ? Pourquoi est-elle difficile à mesurer ?


EXERCICE 14.7 ★★★

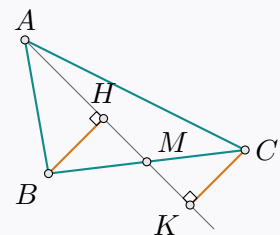
$ABCD$ est un parallélogramme de centre O . On projette ses sommets sur une droite graduée (d) parallèlement à une direction (Δ) : A' , B' , C' ont pour abscisses 2, 7 et 10.

- Montrer que O' est le milieu de $[A'C']$ et de $[B'D']$. Donner l'abscisse de O' .
- En déduire l'abscisse de D' .

4 Défis olympiades
○ DÉFI OLYMPIADE 14.1 — deux pieds, un milieu

ABC est un triangle et M est le milieu de $[BC]$. H et K sont les projetés orthogonaux de B et C sur la droite (AM) .

- Démontrer que M est le milieu de $[HK]$.
- En déduire que $BHCK$ est un parallélogramme, puis que $BH = CK$.


○ DÉFI OLYMPIADE 14.2 — le cahier à lignes

Les lignes d'un cahier sont parallèles et espacées de 8 mm. Salma pose une baguette de 10 cm en travers, une extrémité sur une ligne et l'autre sur la 5^e ligne suivante. 1. Montrer que les lignes partagent la baguette en 5 parties égales ; quelle est leur longueur ? 2. En combien de parties égales, au maximum, peut-on partager la baguette de cette façon ?

La translation et les vecteurs

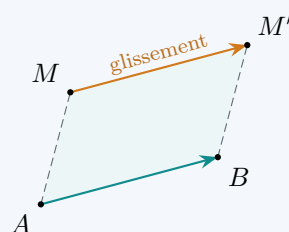
OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Construire l'image d'un point, d'un segment, d'une droite, d'un cercle et d'une figure par une translation.
- ✓ Utiliser les propriétés de conservation de la translation.
- ✓ Caractériser un vecteur, reconnaître deux vecteurs égaux et additionner deux vecteurs (relation de Chasles).

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — La translation qui transforme A en B

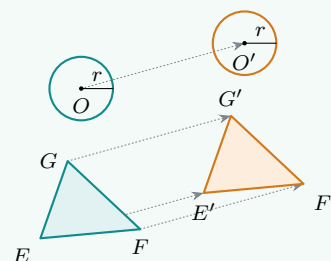
A et B sont deux points distincts. L'**image** d'un point M par la **translation qui transforme A en B** est le point M' tel que $ABM'M$ est un parallélogramme (un parallélogramme « aplati » si M est sur la droite (AB)).
Image concrète : une translation fait **glisser** les figures dans une direction, sans les tourner ni les retourner, comme un tiroir qu'on ouvre ou une cabine de téléphérique.



PROPRIÉTÉ — Ce que conserve une translation

Une translation conserve les **longueurs**, les **angles**, l'**alignement**, le **parallélisme**, les **milieux**, les **périmètres** et les **aires**. De plus :

- l'image d'un segment $[EF]$ est un segment $[E'F']$ **parallèle** et de **même longueur** ;
- l'image d'une droite est une droite qui lui est **parallèle** ;
- l'image du cercle de centre O et de rayon r est le cercle de centre O' (image de O) et de **même rayon** r .

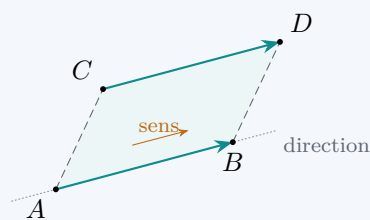
DÉFINITION — Vecteur $\overrightarrow{AB}$ et vecteurs égaux

La translation qui transforme A en B s'appelle aussi la **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** . Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ($A \neq B$) est caractérisé par :

- sa **direction** : celle de la droite (AB) ;
- son **sens** : de l'**origine** A vers l'**extrémité** B ;
- sa **longueur** : la distance AB .

$\overrightarrow{BA}$ est le vecteur **opposé** (sens contraire) ; $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**.

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même longueur :



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC \text{ est un parallélogramme} \iff D \text{ est l'image de } C \text{ par la translation de vecteur } \overrightarrow{AB}$$

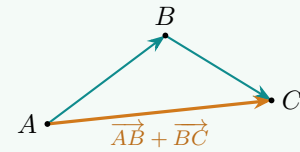
Cas utile : I est le milieu de $[AB]$ $\iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

PROPRIÉTÉ — Somme de deux vecteurs : la relation de Chasles

Appliquer la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis celle de vecteur $\overrightarrow{BC}$, revient à appliquer la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ (aller de Rabat à Meknès, puis de Meknès à Fès, revient à aller de Rabat à Fès).

On écrit : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de **Chasles**).

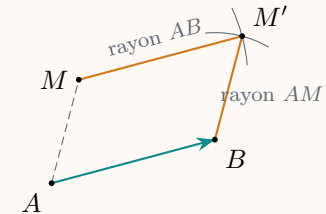
Exemple : si $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.


2 Méthodes & astuces
MÉTHODE — Construire l'image M' d'un point M par la translation qui transforme A en B

Au compas (parallélogramme $ABM'M$) : arc de centre M et de rayon AB , arc de centre B et de rayon AM ; M' est leur intersection **opposée** à A par rapport à (BM) (sinon $ABM'M$ serait croisé).

Sur un quadrillage : compter le trajet de A à B (par exemple 4 carreaux à droite, 1 vers le haut) et faire **le même trajet** à partir de M .

Pour une figure : image de chaque sommet, puis relier dans le **même ordre**. Droite : image d'un point, puis la parallèle. Cercle : image du centre, même rayon.


★ ASTUCE DU PROF — Chasles, c'est des dominos

Dans $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, la lettre du milieu « s'emboîte » comme dans un domino : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ}$. Et pour démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme, **une seule** égalité suffit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

✗ PIÈGE À ÉVITER

L'ordre des lettres compte ! $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que $ABDC$ (et non $ABCD$) est un parallélogramme. Et $AB = CD$ ne suffit pas pour avoir $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$: il faut aussi la même direction et le même sens.

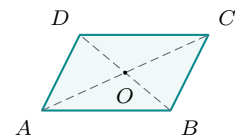
LE SAVAIS-TU ?

Les artisans du zellige répètent un motif en le faisant glisser : c'est une **frise**. Il n'existe que 7 sortes de frises et 17 sortes de pavages du plan ; les palais marocains en contiennent beaucoup !

3 Exercices
EXERCICE 15.1 ★☆☆

QCM. $ABCD$ est un parallélogramme de centre O . Choisir la bonne réponse.

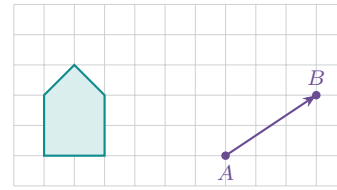
- a) Image de A par la translation qui transforme B en C : $\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{OC}$ $\overrightarrow{CO}$
 b) $\overrightarrow{AO} =$ $\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{OC}$ $\overrightarrow{OD}$
 c) Image de (AB) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$: (AB) (AD) (DC)
 d) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} =$ $\overrightarrow{DB}$ $\overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{AC}$



EXERCICE 15.2 ★☆☆

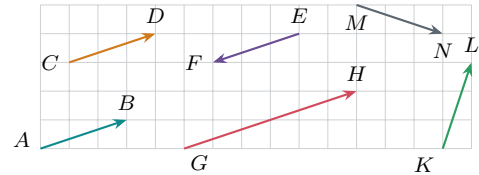
Reproduire la figure sur un quadrillage.

1. Construire l'image de la « maison » par la translation qui transforme A en B .
2. Le côté d'un carreau mesure 1 cm. Calculer l'aire de la maison. Quelle est l'aire de son image ? Pourquoi ?


EXERCICE 15.3 ★☆☆

On considère les vecteurs tracés sur le quadrillage.

1. Quel vecteur est égal à $\overrightarrow{AB}$? Justifier.
2. Quel vecteur est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$?
3. $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{MN}$ ont la même longueur que $\overrightarrow{AB}$. Lui sont-ils égaux ?
4. Comparer $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{AB}$ (direction, sens, longueur).


EXERCICE 15.4 ★☆☆

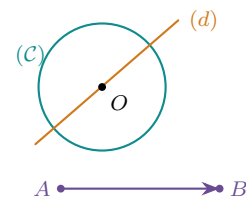
Type contrôle. ABC est un triangle tel que $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 6$ cm.

1. Construire D , image de C par la translation qui transforme B en A , et E , image de B par la translation qui transforme C en A .
2. Quelle est la nature des quadrilatères $BADC$ et $CAEB$? En déduire les longueurs CD et BE .
3. Montrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}$. En déduire que A est le milieu de $[DE]$, puis calculer DE et le périmètre de $BCDE$.

EXERCICE 15.5 ★☆☆

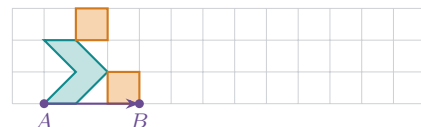
$AB = 5$ cm ; (C) est le cercle de centre O et de rayon 2 cm, et (d) une droite passant par O . La translation qui transforme A en B transforme (C) en (C') et (d) en (d') .

1. Construire (C') et (d') ; préciser le centre et le rayon de (C') . Position relative de (d) et (d') ?
2. Calculer OO' . Les cercles (C) et (C') ont-ils des points communs ? Et si $AB = 3$ cm ?


EXERCICE 15.6 ★☆☆

La frise du riad. Pour décorer un riad de Tétouan, un artisan reproduit un motif de zellige par la translation qui transforme A en B .

1. Reproduire le motif, puis construire son image, l'image de cette image, et ainsi de suite (trois fois).
2. Un carreau mesure 2 cm de côté. Calculer l'aire colorée d'un motif.
3. La frise mesure 1,80 m de long. Combien de motifs contient-elle ? Quelle est l'aire colorée totale ?



EXERCICE 15.7 ★★☆☆

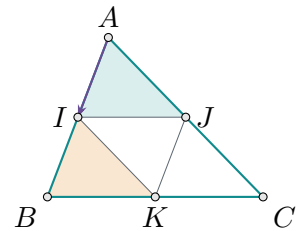
Compléter avec un seul vecteur (relation de Chasles).

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \dots$ c) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE} = \dots$ e) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \dots$
 b) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} = \dots$ d) $\overrightarrow{K\dots} + \overrightarrow{\dots R} = \overrightarrow{KR}$ f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \dots$

EXERCICE 15.8 ★★★

Les quatre petits triangles. ABC est un triangle; I, J, K sont les milieux de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. On note t la translation qui transforme A en I .

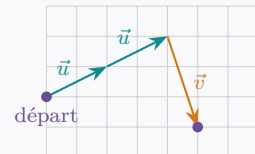
- Montrer que t transforme I en B .
- À l'aide du chapitre 13, montrer que $AIKJ$ est un parallélogramme, puis que t transforme J en K .
- En déduire l'image du triangle AIJ par t . L'aire de ABC est 36 cm^2 : calculer l'aire de AIJ .


4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 15.1 — le robot du club de robotique

Sur un quadrillage, un robot ne connaît que deux déplacements : $\vec{u}$ (« 2 carreaux à droite et 1 vers le haut ») et $\vec{v}$ (« 1 carreau à droite et 3 vers le bas »). Ci-contre, il a effectué $\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}$, puis $\vec{v}$.

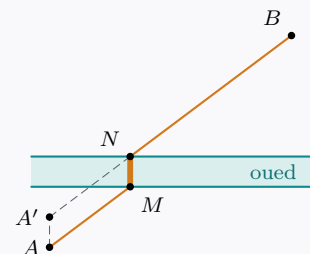
- Le robot fait $\vec{u}$ puis $\vec{v}$, ou bien $\vec{v}$ puis $\vec{u}$. Arrive-t-il au même point ? Expliquer avec un parallélogramme.
- Il effectue 5 fois $\vec{u}$ et 2 fois $\vec{v}$, dans un ordre quelconque. Où arrive-t-il ?
- Montrer qu'il peut atteindre le point situé 7 carreaux à droite de son départ. En combien de déplacements ? Peut-il atteindre le point situé 1 carreau à droite de son départ ?



○ DÉFI OLYMPIADE 15.2 — le pont le plus court

Deux douars A et B sont séparés par un oued aux rives parallèles, large de 100 m. On veut construire un pont $[MN]$ **perpendiculaire** aux rives pour que le trajet $AM + MN + NB$ soit le plus court possible. A est à 200 m de sa rive, B à 400 m de la sienne, et leurs projetés sur une rive sont distants de 800 m.

- A' est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$. Montrer que $AM = A'N$.
- Où placer le pont ? Calculer la longueur du trajet le plus court.



Géométrie dans l'espace : positions relatives, sections et volumes

OBJECTIFS DU CHAPITRE

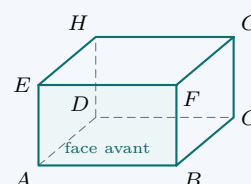
- ✓ Reconnaître les positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan ; reconnaître une droite perpendiculaire à un plan.
- ✓ Calculer des aires et des volumes (pavé droit, prisme droit, cylindre) ; convertir des volumes et des contenances.
- ✓ Décrire la section d'un pavé droit ou d'un cylindre par un plan ; utiliser Pythagore dans l'espace.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Points, droites et plans de l'espace

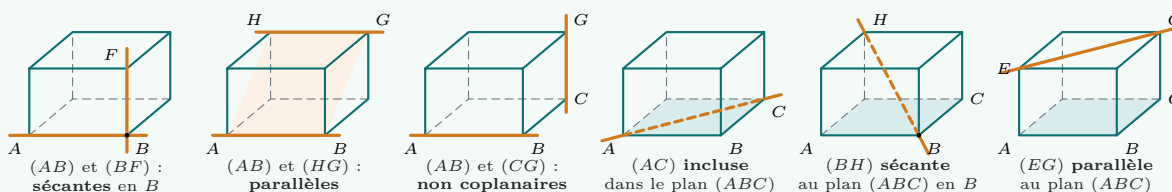
Dans l'espace, on retrouve des **points**, des **droites** et des **plans** (surfaces planes illimitées : le sol, un mur, une face prolongée). Par deux points distincts passe **une seule droite** ; par trois points **non alignés** passe **un seul plan**, noté par exemple (ABC) . Si deux points d'une droite sont dans un plan, toute la droite est dans ce plan.

Perspective cavalière : face avant en vraie grandeur, arêtes fuyantes obliques et raccourcies, arêtes parallèles dessinées parallèles, arêtes cachées en pointillés.



PROPRIÉTÉ — Positions relatives

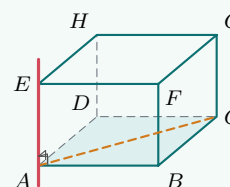
Deux droites sont soit **coplanaires** (dans un même plan) : **sécantes** ou **parallèles** ; soit **non coplanaires** : elles ne se coupent pas et ne sont pas parallèles. Une droite et un plan : la droite est **incluse** dans le plan, **sécante** au plan (un seul point commun) ou **parallèle** au plan (aucun point commun).



PROPRIÉTÉ — Droite perpendiculaire à un plan

Une droite est **perpendiculaire** à un plan (P) en A si elle est perpendiculaire à **deux droites sécantes** de (P) passant par A ; elle est alors perpendiculaire à **toutes** les droites de (P) passant par A (comme un fil à plomb et le sol).

Exemple : $(AE) \perp (AB)$ et $(AE) \perp (AD)$, donc (AE) est perpendiculaire au plan (ABC) . En particulier $(AE) \perp (AC)$: le triangle EAC est **rectangle en A**, même si l'angle ne « paraît » pas droit.

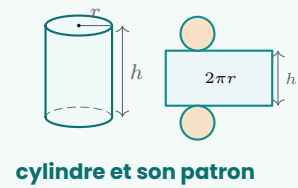


PROPRIÉTÉ — Rapports : aires et volumes

Solide	Aire latérale	Volume
Pavé droit de dimensions L, ℓ, h	$2 \times (L + \ell) \times h$	$L \times \ell \times h$
Prisme droit (base d'aire $\mathcal{B}$ et de périmètre p , hauteur h)	$p \times h$	$\mathcal{B} \times h$
Cylindre de rayon r et de hauteur h	$2 \times \pi \times r \times h$	$\pi \times r^2 \times h$

Aire totale = aire latérale + $2 \times$ aire d'une base. Dans le **patron**, la surface latérale est un rectangle : **périmètre de la base** $\times$ **hauteur**.

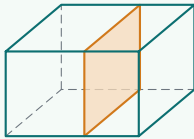
Exemple : une citerne cylindrique de rayon 1 m et de hauteur 2,5 m contient $3,14 \times 1^2 \times 2,5 = 7,85 \text{ m}^3 = 7\,850 \text{ L}$.



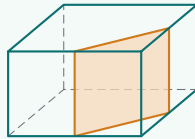
cylindre et son patron

PROPRIÉTÉ — Sections planes

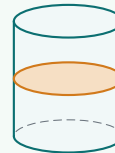
Couper un solide par un plan (comme on coupe une tranche de pain) donne une figure plane : sa **section**.



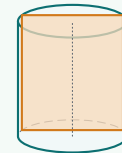
Pavé, plan parallèle à une face : **rectangle** superposable à la face



Pavé, plan parallèle à une arête : **rectangle**



Cylindre, plan parallèle à la base : **disque** de même rayon



Cylindre, plan parallèle à l'axe : **rectangle** dont un côté est h

2 Méthodes & astuces

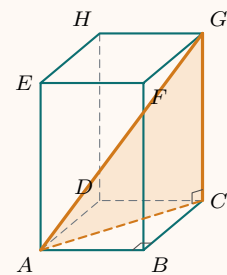
MÉTHODE — Calculer une longueur dans un solide avec Pythagore

- Repérer un **triangle rectangle** dans une face, ou dans un plan de coupe grâce à une droite perpendiculaire à un plan.
- Appliquer le théorème de Pythagore, éventuellement **deux fois**.

Exemple : $ABCDEFGH$ est un pavé droit avec $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$ et $CG = 12 \text{ cm}$. Calculer la diagonale AG .

① Dans la face $ABCD$, ABC est rectangle en B : $AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, donc $AC = 5 \text{ cm}$.

② (CG) est perpendiculaire au plan (ABC) , donc $(CG) \perp (AC)$: ACG est rectangle en C et $AG^2 = 5^2 + 12^2 = 169$, d'où $AG = 13 \text{ cm}$.



★ ASTUCE DU PROF — unités de volume et de contenance

m^3	dm^3			cm^3		
	hL	daL	L	dL	cL	mL
1	0	0	0			

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L} \quad 1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL} \quad 1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$$

D'une unité de volume à la suivante, la virgule se déplace de **3 rangs** : $2,5 \text{ m}^3 = 2\,500 \text{ dm}^3 = 2\,500 \text{ L}$; $750 \text{ cm}^3 = 0,75 \text{ L} = 75 \text{ cL}$.

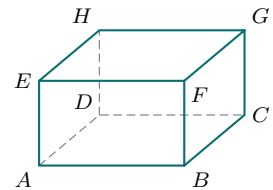
❌ PIÈGE À ÉVITER

Dans l'espace, deux droites qui ne se coupent pas ne sont **pas forcément parallèles** : (AB) et (CG) sont non coplanaires. Et sur un dessin en perspective, un angle droit n'est pas toujours dessiné droit ($\widehat{EAD} = 90^\circ$), et deux droites peuvent sembler se couper sans se couper.

3 Exercices
EXERCICE 16.1 ★☆☆

Vrai ou faux ? $ABCDEFGH$ est un pavé droit. Justifier.

- | | |
|---|---|
| a) (AB) et (EF) sont parallèles. | d) (FB) est perpendiculaire au plan (ABC) . |
| b) (AB) et (GC) sont sécantes. | e) (AF) et (DG) sont parallèles. |
| c) (EH) est parallèle au plan (ABC) . | f) (EC) est incluse dans le plan (ABF) . |


EXERCICE 16.2 ★☆☆

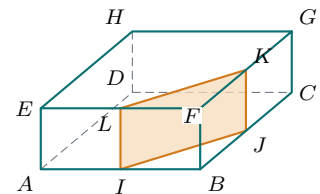
Convertir.

- | | | |
|--|---|---|
| a) $3,2 \text{ m}^3 = \dots \text{ L}$ | c) $1,5 \text{ L} = \dots \text{ cm}^3$ | e) $8\,000 \text{ L} = \dots \text{ m}^3$ |
| b) $450 \text{ cm}^3 = \dots \text{ dm}^3$ | d) $25 \text{ cL} = \dots \text{ cm}^3$ | f) $0,06 \text{ m}^3 = \dots \text{ cL}$ |

EXERCICE 16.3 ★☆☆

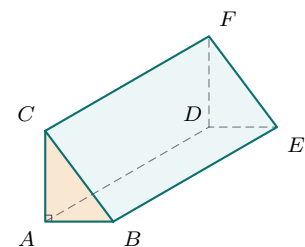
Sections. $ABCDEFGH$ est un pavé droit avec $AB = 8 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$ et $AE = 3 \text{ cm}$.

- On le coupe par un plan parallèle à la face $ABFE$. Nature, dimensions et aire de la section ?
- On le coupe par le plan parallèle à (AE) qui passe par les milieux I de $[AB]$ et J de $[BC]$. Montrer que la section $IJKL$ est un rectangle de côtés IJ et 3 cm , puis calculer son aire.


EXERCICE 16.4 ★☆☆

Type contrôle. $ABCDEF$ est un prisme droit dont les bases ABC et DEF sont des triangles rectangles en A et D , avec $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$ et $AD = 10 \text{ cm}$.

- Calculer BC .
- Donner la position relative de : a) (AD) et (BE) ; b) (AB) et (CF) ; c) (DE) et le plan (ABC) ; d) (AD) et le plan (ABC) .
- Calculer l'aire latérale, l'aire totale et le volume du prisme.


EXERCICE 16.5 ★☆☆

La piscine de l'hôtel à Agadir. Une piscine a la forme d'un pavé droit de 12 m de long, 6 m de large et $1,5 \text{ m}$ de profondeur.

- Calculer son volume en m^3 , puis sa contenance en litres.

2. Une pompe débite 18 m^3 par heure. Combien de temps faut-il pour remplir la piscine ?
3. On carrelle le fond et les quatre parois. Quelle est l'aire à carrelé ? Quel est le prix si le carrelage coûte 85 DH le m^2 ?

EXERCICE 16.6 ★★☆☆

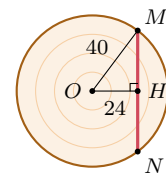
La boîte de conserve. Une boîte de tomates de Safi est un cylindre de 8 cm de diamètre et de 11 cm de hauteur ($\pi \approx 3,14$).

1. Calculer son volume en cm^3 , puis sa contenance arrondie au cL.
2. Calculer l'aire de l'étiquette qui recouvre toute la surface latérale.
3. On range 12 boîtes debout dans un carton (pavé droit) de 32 cm sur 24 cm et de 11 cm de haut. Quel pourcentage du volume du carton reste vide ?

EXERCICE 16.7 ★★☆☆

Le cèdre d'Azrou. Une scierie reçoit un tronc de cèdre assimilé à un cylindre de rayon 40 cm et de longueur 3 m. On le coupe par un plan parallèle à l'axe, situé à 24 cm de l'axe.

1. Quelle est la nature de la section ? Quelle est l'une de ses dimensions ?
2. Ci-contre, la coupe vue de bout : O est sur l'axe, $[MN]$ est la largeur de la section et H le milieu de $[MN]$. Calculer MN .
3. Calculer l'aire de la section en m^2 .

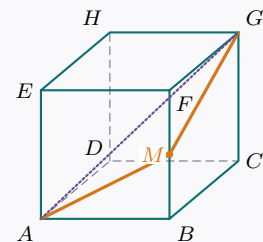


4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 16.1 — la baguette et la fourmi

$ABCDEFGH$ est une boîte cubique de 30 cm d'arête.

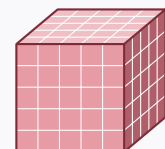
1. Calculer AC^2 , puis AG^2 (sans calculer de racine carrée).
2. Une baguette rigide de 50 cm peut-elle entrer dans la boîte fermée ? Et une baguette de 52 cm ?
3. Une fourmi va de A à G en marchant sur les faces, par le milieu M de $[BF]$. En dépliant les faces $ABFE$ et $BCGF$, montrer que son trajet mesure entre 67 et 68 cm.



○ DÉFI OLYMPIADE 16.2 — le cube peint

Un grand cube de 5 cm d'arête est peint en rouge, puis découpé en petits cubes de 1 cm d'arête.

1. Combien de petits cubes ont 3 faces peintes ? 2 faces ? 1 face ? Aucune ? Vérifier le total.
2. On recommence avec un grand cube de n cm d'arête ($n \geq 3$). Pour quelle valeur de n y a-t-il autant de petits cubes sans peinture que de petits cubes ayant exactement une face peinte ?



Formulaire : l'essentiel à retenir

NOMBRES RATIONNELS ($b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$)

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

$$\text{Inverse de } \frac{c}{d} : \frac{d}{c} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

RÈGLE DES SIGNES

$(+) \times (+) = (+)$ $(-) \times (-) = (+)$ $(+) \times (-) = (-)$
 Produit : nombre **pair** de facteurs négatifs $\Rightarrow$ positif;
impair $\Rightarrow$ négatif.

PUISSANCES ($a \neq 0, b \neq 0; m, n$ entiers relatifs)

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (-a)^n : \text{positif si } n \text{ pair, négatif si } n \text{ impair.}$$

Écriture scientifique : $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$.

CALCUL LITTÉRAL

$$k(a+b) = ka + kb \quad -(a-b) = -a + b$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

ORDRE ET OPÉRATIONS

$$a \leq b \iff a - b \leq 0 \quad a \leq b \iff a + c \leq b + c$$

Si $c > 0$: $a \leq b \iff ac \leq bc$; si $c < 0$:

$$a \leq b \iff ac \geq bc.$$

ÉQUATIONS

On peut ajouter, soustraire, multiplier ou diviser (par un nombre **non nul**) les deux membres.

$$ax + b = 0 \ (a \neq 0) \iff x = -\frac{b}{a} \quad 0x = 0 : \text{tout nombre} ; 0x = 5 : \text{aucun.}$$

PROPORTIONNALITÉ ET STATISTIQUES

Hausse de $t\%$: $\times (1 + \frac{t}{100})$; baisse : $\times (1 - \frac{t}{100})$

Vitesse $v = \frac{d}{t}$ $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$

Produit en croix : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = b \times c$

Fréquence = $\frac{n_i}{N}$ Moyenne = $\frac{n_1 x_1 + \dots + n_p x_p}{N}$

Angle = $f \times 360^\circ$

DROITES REMARQUABLES D'UN TRIANGLE

Médiatrices : centre O du cercle circonscrit ($OA = OB = OC$).
 Hauteurs : orthocentre H . Bissectrices : centre du cercle inscrit.
 Médianes : centre de gravité G , $AG = \frac{2}{3} AA'$.

TRIANGLE RECTANGLE ET CERCLE

ABC rectangle en $A \iff A$ est sur le cercle de diamètre $[BC]$.
 Médiane issue de A : $AI = \frac{BC}{2}$ (I milieu de $[BC]$).

THÉORÈME DE PYTHAGORE

ABC rectangle en $A \implies BC^2 = AB^2 + AC^2$.
 Réciproque : si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A .
 Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ ($[BC]$ plus grand côté) : pas rectangle.

COSINUS D'UN ANGLE AIGU

$$\cos \hat{B} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad 0 < \cos \hat{B} < 1$$

$$\text{adjacent} = \text{hyp.} \times \cos \hat{B} \quad \text{hypoténuse} = \frac{\text{adjacent}}{\cos \hat{B}}$$

DROITE DES MILIEUX

I milieu de $[AB]$, J milieu de $[AC] \implies (IJ) \parallel (BC)$ et $IJ = \frac{BC}{2}$.
 La droite qui passe par le milieu d'un côté parallèlement à un 2^e côté coupe le 3^e en son milieu.

PROJECTION

La projection sur une droite **conserve le milieu** (et les rapports de longueurs sur une même droite).

TRANSLATION ET VECTEURS

M' image de M par la translation qui transforme A en $B \iff ABM'M$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.
 Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Conserve longueurs, angles, aires, parallélisme.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Pavé : $V = L \times \ell \times h$ Prisme : $V = B \times h$
 Cylindre : $V = \pi r^2 h$
 Aire latérale = périmètre de la base $\times$ hauteur
 $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$

Calculatrice autorisée. Soigne la rédaction et les figures : elles comptent dans la note.

EXERCICE 1 (2,5 points)

1. Calculer et donner le résultat sous forme irréductible :

$$A = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \text{ (0,5 pt)} \quad B = \frac{-7}{10} \times \frac{15}{14} \text{ (0,25 pt)} \quad C = \frac{-4}{9} \div \frac{-2}{3} \text{ (0,25 pt)} \quad D = \frac{1 - \frac{2}{5}}{1 + \frac{1}{5}} \text{ (0,5 pt)}$$

2. Au souk de Fès, Salma dépense les $\frac{2}{5}$ de son argent de poche pour des livres et le $\frac{1}{3}$ pour un cadeau. Il lui reste 48 DH.

- a) Quelle fraction de son argent de poche lui reste-t-il ? (0,5 pt)
b) De quelle somme disposait-elle au départ ? (0,5 pt)

EXERCICE 2 (2,5 points)

1. Calculer : $(-2)^4$; -2^4 ; $(-1)^{2027}$; $(-3)^{-2}$. (0,5 pt)

2. Écrire sous la forme d'une seule puissance :

$$E = \frac{7^5 \times 7^{-3}}{7^4} \text{ (0,25 pt)} \quad F = (3^2)^3 \times 3^{-4} \text{ (0,25 pt)} \quad G = 5^3 \times 2^3 \text{ (0,25 pt)}$$

3. Donner l'écriture scientifique de :

$$0,000\,052 \text{ (0,25 pt)} \quad 347 \times 10^6 \text{ (0,25 pt)} \quad Q = \frac{6 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-2}}{8 \times 10^{-3}} \text{ (0,25 pt)}$$

4. La lumière parcourt environ 3×10^5 km par seconde et la distance Terre-Soleil est d'environ $1,5 \times 10^8$ km. Combien de temps la lumière du Soleil met-elle pour nous parvenir ? (en s, puis en min et s) (0,5 pt)

EXERCICE 3 (3 points)

1. Développer et réduire : $H = (2x - 3)^2$ (0,5 pt) $K = (x + 4)(x - 4) - x(x + 2)$ (0,5 pt)

2. Factoriser :

$$L = 25x^2 - 9 \text{ (0,5 pt)} \quad M = x^2 + 6x + 9 \text{ (0,5 pt)} \quad P = (x + 1)(2x - 3) + (x + 1)(x + 5) \text{ (0,5 pt)}$$

3. Calculer astucieusement, sans poser l'opération : $1\,003^2 - 997^2$. (0,5 pt)

EXERCICE 4 (2,5 points)

1. Résoudre les équations :

$$\text{a) } 5x - 7 = 2x + 8 \text{ (0,5 pt)} \quad \text{b) } 3(x - 2) - (x + 4) = 4x + 2 \text{ (0,5 pt)} \quad \text{c) } \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10 \text{ (0,5 pt)}$$

2. Au marché de Meknès, le kilogramme d'oranges coûte 2 DH de plus que le kilogramme de pommes. Yassine achète 3 kg d'oranges et 2 kg de pommes ; il paie 41 DH. On note x le prix (en DH) d'un kilogramme de pommes.

- a) Montrer que x vérifie l'équation $5x + 6 = 41$. (0,5 pt)
b) Résoudre cette équation et donner le prix d'un kilogramme de chaque fruit. (0,5 pt)

EXERCICE 5 (1 point)

1. Comparer les nombres $\frac{-5}{7}$ et $\frac{-7}{10}$. (0,25 pt)
2. On sait que $2,3 < x < 2,4$. Encadrer a) $3x + 1$ (0,25 pt) b) $5 - 2x$. (0,5 pt)

EXERCICE 6 (2 points)

1. Un vélo coûte 800 DH. Son prix augmente de 15 %, puis baisse de 20 % pendant les soldes.
 - a) Calculer le prix final du vélo. (0,5 pt)
 - b) Au total, le prix a-t-il augmenté ou baissé ? De quel pourcentage ? (0,5 pt)
2. Un car relie Marrakech à Agadir, soit 250 km, en 3 h 20 min.
 - a) Calculer sa vitesse moyenne en km/h. (0,5 pt)
 - b) À cette vitesse, combien de temps met-il pour parcourir 100 km ? (0,5 pt)

EXERCICE 7 (2 points)

Voici les notes (sur 20) obtenues par les élèves d'une classe de 2APIC d'Oujda au dernier devoir :

Note	8	10	12	14	16
Effectif	3	7	8	5	2

1. Calculer l'effectif total, puis la fréquence (en %) de chaque note. (0,5 pt)
2. Calculer la moyenne de la classe. (0,5 pt)
3. Quel pourcentage des élèves a obtenu au moins 12 ? (0,5 pt)
4. Représenter cette série par un diagramme en bâtons. (0,5 pt)

EXERCICE 8 (3 points)

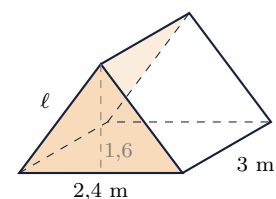
ABC est un triangle tel que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 10$ cm. O est le milieu de $[BC]$ et I celui de $[AB]$.

1. Faire une figure soignée (elle sera complétée au fur et à mesure). (0,25 pt)
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A . (0,5 pt)
3. Justifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , puis calculer AO . (0,5 pt)
4. Calculer $\cos \widehat{ABC}$, puis donner la mesure de $\widehat{ABC}$ arrondie au degré. (0,5 pt)
5. Montrer que $(OI) \parallel (AC)$ et calculer OI . En déduire que (OI) est la médiatrice de $[AB]$. (0,75 pt)
6. Construire le point D , image de B par la translation qui transforme A en C . Montrer que $ABDC$ est un rectangle. (0,5 pt)

EXERCICE 9 (1,5 point)

Une tente de camping, à Ifrane, a la forme d'un prisme droit de longueur 3 m. Sa base est un triangle isocèle de base 2,4 m et de hauteur 1,6 m.

1. Calculer le volume de la tente. (0,5 pt)
2. Calculer la longueur ℓ d'un pan incliné de la tente. (0,5 pt)
3. La toile recouvre les deux pans inclinés et les deux faces triangulaires (pas le sol). Calculer l'aire de la toile. (0,5 pt)



Calculatrice non autorisée. Toute réponse doit être justifiée ; une idée bien expliquée rapporte des points même si le calcul n'est pas fini.

EXERCICE 1 (4 points)

Chiffres et divisibilité.

- Calculer $7^1, 7^2, 7^3, 7^4$ et 7^5 . Que remarque-t-on pour leurs chiffres des unités ? (0,5 pt)
 - Quel est le chiffre des unités de 7^{2026} ? (0,5 pt)
 - En déduire le reste de la division euclidienne de 7^{2026} par 5. (0,5 pt)
- On pose $N = 2^{10} \times 5^{13}$. Combien de chiffres compte N ? Quelle est la somme de ses chiffres ? (0,75 pt)
- Trouver tous les chiffres a et b tels que le nombre $\overline{3a5b}$ (de chiffres 3, a , 5, b) soit divisible par 45. (0,75 pt)
- n désigne un entier naturel.
 - Factoriser $n^3 - n$. (0,25 pt)
 - Montrer que $n^3 - n$ est toujours divisible par 6. (0,75 pt)

EXERCICE 2 (3,5 points)

Calculs astucieux. Calculer le plus simplement possible, en expliquant l'astuce utilisée.

- $A = 2026^2 - 2025 \times 2027$. (0,5 pt)
- Les nombres a et b vérifient $a + b = 7$ et $ab = 10$. Calculer $a^2 + b^2$ (sans chercher a et b). (0,5 pt)
- $B = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$. (0,75 pt)
- $C = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$. (0,75 pt)
- $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$ (vérifier d'abord que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$). (0,5 pt)
- Sans calculer, comparer les nombres 2^{300} et 3^{200} . (0,5 pt)

EXERCICE 3 (3,5 points)

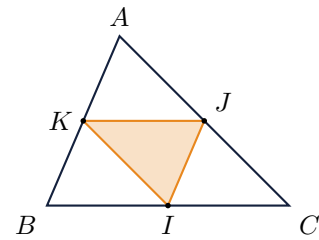
Logique et dénombrement.

- Amine, Badr, Chama et Dounia sont seuls dans la cuisine ; l'un d'eux a mangé la dernière corne de gazelle.
Amine : « C'est Badr. » Badr : « C'est Dounia. » Chama : « Ce n'est pas moi. » Dounia : « Badr ment. »
Un seul des quatre dit la vérité. Qui a mangé la corne de gazelle ? Justifier. (1 pt)
- Avec les chiffres 1, 2, 3 et 4, on écrit des nombres de trois chiffres *tous différents*.
 - Combien peut-on en écrire ? (0,5 pt)
 - Combien d'entre eux sont pairs ? (0,5 pt)
- Combien d'entiers compris entre 1 et 1 000 ne sont divisibles ni par 2, ni par 5 ? (0,75 pt)
- Dans une classe de 30 élèves de Tanger, 18 pratiquent le football, 15 le basket et 5 ne pratiquent aucun des deux sports. Combien d'élèves pratiquent les deux sports ? (0,75 pt)

EXERCICE 4 (3,5 points)

Le triangle des milieux. ABC est un triangle ; I , J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1. Montrer que $(KJ) \parallel (BC)$ et que $KJ = \frac{1}{2}BC$. (0,5 pt)
2. Montrer que $AKIJ$ est un parallélogramme. (0,5 pt)
3. Montrer que les triangles AKJ , KBI , JIC et IJK ont la même aire. Quelle fraction de l'aire de ABC chacun occupe-t-il ? (1 pt)
4. Dans cette question, ABC est rectangle en A avec $AB = 12$ cm et $AC = 16$ cm. Calculer BC , puis montrer que le périmètre (en cm) et l'aire (en cm^2) du triangle IJK s'expriment par le même nombre. (1 pt)
5. Toujours avec ABC rectangle en A : montrer que $AKIJ$ est un rectangle, puis en déduire la longueur AI sans calcul nouveau. (0,5 pt)

**EXERCICE 5 (2,5 points)**

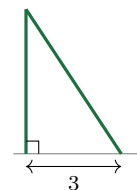
L'horloge de la place.

1. a) De combien de degrés tourne la grande aiguille en 1 minute ? Et la petite aiguille ? (0,5 pt)
b) Quelle est la mesure de l'angle formé par les deux aiguilles à 3 h 40 ? (0,75 pt)
2. Entre 3 h et 4 h, à quel instant les deux aiguilles sont-elles exactement superposées ? (0,75 pt)
3. Combien de fois par jour (de minuit à minuit, minuit compté une seule fois) les aiguilles sont-elles superposées ? (0,5 pt)

**EXERCICE 6 (3 points)**

Problèmes de la vie courante.

1. (*Problème chinois du 1^{er} siècle*) Un bambou vertical de 10 m de haut est cassé par le vent : sa partie supérieure, restée attachée, touche le sol à 3 m du pied du bambou. À quelle hauteur le bambou est-il cassé ? (1 pt)
2. Karim va de Fès à Meknès (60 km) à vélo électrique à 60 km/h, et revient à 40 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'aller-retour ? (Ce n'est pas 50 km/h !) (0,5 pt)
3. Après 5 contrôles, la moyenne de Rim est 12. Quelle note doit-elle obtenir au 6^e contrôle pour que sa moyenne passe à 13 ? Peut-elle atteindre une moyenne de 14 ? (0,5 pt)
4. Un escargot est au fond d'un puits de 10 m. Chaque jour il monte de 3 m, mais chaque nuit il redescend de 2 m. Quel jour atteint-il le haut du puits ? (Attention : la réponse n'est pas le 10^e jour !) (0,5 pt)
5. Hiba lit le tiers de son roman le premier jour, puis le quart de ce qui reste le deuxième jour. Il lui reste alors 120 pages à lire. Combien de pages compte ce roman ? (0,5 pt)



Corrigés détaillés

Les solutions sont rédigées de façon concise : les étapes essentielles y figurent, à toi de compléter les détails de calcul sur ta copie.

1 Les nombres rationnels : addition et soustraction

Exercice 1.1

a) $-\frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ d) $-\frac{3}{4}$ e) **0** f) $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$ g) $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ h) $-\frac{3}{5}$.

Exercice 1.2

a) **V** ($-\frac{3}{5}$) b) **F** : $\frac{4}{7} > 0$ c) **V** ($-\frac{2}{3}$) d) **F** : $-\frac{5}{6}$ e) **V** : $\frac{3}{4}$ f) **V** : $-\frac{3}{3} = -1$.

Exercice 1.3

a) $-\frac{2}{7}$ b) $-\frac{9}{9} = -1$ c) $-\frac{6}{6} = -1$ d) $\frac{16-21}{24} = -\frac{5}{24}$ e) $\frac{-4-3}{10} = -\frac{7}{10}$ f) $\frac{14+3}{24} = \frac{17}{24}$ g) $\frac{-6+5}{3} = -\frac{1}{3}$ h) $-\frac{1}{4} + \frac{5}{6} = \frac{-3+10}{12} = \frac{7}{12}$.

Exercice 1.4

a) $A = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6-9+10}{12} = \frac{7}{12}$ b) $B = \frac{-8+15+2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ c) $C = \frac{30-2-21}{6} = \frac{7}{6}$ d) $D = -\frac{2}{15} - \left(\frac{-12+10}{15}\right) = -\frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \mathbf{0}$.

Exercice 1.5

a) $E = \frac{9}{9} - \frac{11}{11} + 1 = \mathbf{1}$ b) $F = -\frac{5}{6} + \frac{2}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ c) Les opposés s'éliminent : $G = -\frac{1}{5}$ d) $H = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Exercice 1.6

1. $\frac{9-10-8+6-3}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$ m ; vendredi soir : $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ m.
2. Lun. $\frac{11}{4}$; mar. $\frac{23}{12}$; mer. $\frac{5}{4}$; jeu. $\frac{7}{4}$; ven. $\frac{3}{2}$. Le plus bas : **mercredi** ($\frac{5}{4} = 1,25$ m).

Exercice 1.7

1. On « remonte » les opérations : $x = -\frac{1}{6} + \frac{5}{4} - \frac{2}{3} = \frac{-2+15-8}{12} = \frac{5}{12}$. (Vérif. : $\frac{5}{12} + \frac{8}{12} - \frac{15}{12} = -\frac{2}{12}$ ✓.)
2. $AB = \frac{3}{4} - \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$ 3. $x_C = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$; et $-\frac{5}{6} < \frac{1}{12} < \frac{3}{4}$: **oui**.

Défi olympiade 1.1

1. $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$; $\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$ ✓.
2. $S = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \dots - \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{19} + \frac{1}{20}\right)$. Chaque fraction $\frac{1}{k}$ ($2 \leq k \leq 19$) apparaît une fois avec + et une fois avec - : il reste $S = 1 + \frac{1}{20} = \frac{21}{20}$.
3. On retranche $\frac{1}{20} + \frac{1}{21}$: il reste $1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$.

Défi olympiade 1.2

1. En douzièmes : $6 \pm 4 \pm 3$ vaut 13, 7, 5 ou -1 : jamais **0. Impossible**.
2. Numérateurs 6,4,3,2,1 (total 16) : il faut que les termes précédés de - totalisent 8, avec des nombres parmi 4,3,2,1. Seule possibilité : $4 + 3 + 1 = 8$. **Une seule solution** : $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = 0$.
3. Si les termes négatifs totalisent s , le numérateur vaut $16 - 2s$, toujours **pair** ; or $\frac{1}{12}$ demande le numérateur 1, impair : **impossible**.

2 Multiplication et division des nombres rationnels

Exercice 2.1

1. a) **56** b) **-12** c) **7** d) **-30** e) **6** (4 négatifs).
2. A : 3 négatifs, **négatif** ; B : 3 négatifs, **négatif** ; C : 10 négatifs, **positif**.

Exercice 2.2

a) $-\frac{30}{45} = -\frac{2}{3}$ b) $+\frac{56}{252} = \frac{2}{9}$ c) $+\frac{60}{25} = \frac{12}{5}$ d) 3 négatifs : $-\frac{5 \times 9 \times 4}{6 \times 10 \times 3} = -1$.

Exercice 2.3

1. b) 2. b) $-\frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = -\frac{18}{12}$ 3. b) (7 est impair) 4. b) -3×2 .

Exercice 2.4

a) $A = \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9+2}{12} = \frac{11}{12}$ b) $B = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$ c) $C = 2 - \frac{3}{4} \div \left(-\frac{3}{4}\right) = 2 + 1 = \mathbf{3}$ d) $D = \frac{-2/5}{7/10} = -\frac{2}{5} \times \frac{10}{7} = -\frac{4}{7}$.

Exercice 2.5

a) $E = -\frac{5}{8} \times \frac{7}{7} = -\frac{5}{8}$ b) $F = \frac{2}{3} \times (-30) = -20$ c) $G = -8 + 9 - 20 = -19$ d) $H = \frac{13}{11} \times 1 + \frac{9}{11} = \frac{22}{11} = \mathbf{2}$.

Exercice 2.6

1. $8 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -6$ °C ; à 2 h : $2,5 - 6 = -3,5$ °C.
2. $\frac{5}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$ h = 3 h 20 min : à **21 h 20**.

Exercice 2.7

a) **V** : même signe. b) **F** : même signe, ex. $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$.
c) **V** : a et b sont de signes contraires, b et c aussi, donc a et c ont le même signe. d) **F** : diviser par $\frac{1}{2}$, c'est multiplier par 2.

Exercice 2.8

1. On remonte : $1 \times \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{6}$; $-\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{3} \div \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2$.
 2. $x = \frac{9}{10} \div \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{10} \times \frac{4}{3} = -\frac{6}{5}$; $y = -\frac{4}{15} \times \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{2}{3}$.

Défi olympiade 2.1

1. A a 25 facteurs négatifs (impair) : **négatif**. Dans B , les facteurs négatifs sont $-1, -3, \dots, -49$: il y en a 25 : **négatif**.
 2. Parmi les facteurs figure $7 - 7 = 0$: $C = 0$.
 3. Somme nulle : autant de 1 que de -1 , soit 1013 fois -1 , nombre **impair** : le produit vaut -1 .

Défi olympiade 2.2

1. $P = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{99}{100}$: chaque numérateur se simplifie avec le dénominateur précédent : $P = \frac{1}{100}$. De même $Q = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{100}{99} = \frac{100}{2} = 50$.
 2. $\frac{1}{k} - 1 = -\left(1 - \frac{1}{k}\right)$: R a 99 facteurs négatifs, donc $R = -P = -\frac{1}{100}$.
 3. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$ ✓. Ainsi $T = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{10}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} \times \frac{11}{2} = \frac{11}{20}$.

3 Les puissances

Exercice 3.1

- a) -32 b) -16 c) -1 d) $\frac{1}{9}$ e) 1 f) $\frac{27}{8}$ g) $-0,001$ h) $\frac{1}{16}$ i) $0,000\,01$ j) $\frac{1}{16}$ k) $-(-27) = 27$ l) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Exercice 3.2

- a) 7^8 b) 5^5 c) 3^8 d) 2^4 e) 10^{13} f) 6^{-6} g) 6^5 h) $\left(\frac{-12}{3}\right)^4 = (-4)^4 = 4^4$.

Exercice 3.3

- a) F : exposant pair. b) $V : 2 \times 2^3 = 2^4$. c) $F : 3^5$. d) $F : 0,001$. e) V . f) $F : 0,25 < 1$; c'est $2,5 \times 10^{-4}$.

Exercice 3.4

- a) $A = 2^{6-4-5} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$ b) $B = 5^{-2+6-3} = 5$
 c) $C = (-3)^{-2} \times 9 = \frac{1}{9} \times 9 = 1$ d) $D = 2^{4-3+4} \times 3^{4-4} = 2^5 = 32$.

Exercice 3.5

1. $4,5 \times 10^7$; $8,2 \times 10^{-5}$; $7,25 \times 10^7$; $3,6 \times 10^{-6}$.
 2. $3,5 \times 10^3$ m ; $2,5 \times 10^{-4}$ m ; 8×10^{-9} m ; 4×10^{-4} m.
 3. $8 \times 10^{-3} < 1,2 \times 10^{-2} < 3 \times 10^{-2} < 0,5 \times 10^{-1}$ ($= 5 \times 10^{-2}$).
 4. $E = 10 \times 10^5 = 10^6$; $F = 0,3 \times 10^7 = 3 \times 10^6$; $G = 4 \times 10^3 = 4 \times 10^3$.

Exercice 3.6

1. $\frac{1,5 \times 10^8}{3 \times 10^5} = 0,5 \times 10^3 = 500$ s = **8 min 20 s**.
 2. $3 \times 10^5 \times 3,2 \times 10^7 = 9,6 \times 10^{12}$ km. 3. $\frac{4 \times 10^{13}}{9,6 \times 10^{12}} \approx 4,2$ années-lumière.

Exercice 3.7

1. 7×10^{-6} m. 2. $2,5 \times 10^{13} \times 7 \times 10^{-6} = 17,5 \times 10^7$ m = $1,75 \times 10^8$ m = **$1,75 \times 10^5$ km**.
 3. $\frac{1,75 \times 10^5}{4 \times 10^4} \approx 4,4$ fois.

Exercice 3.8

1. $2^9 = 512$ grains ; 64^e case : **2^{63}** .
 2. $2S = 2 + 2^2 + \dots + 2^{64}$; tous les termes s'éliminent sauf 2^{64} et 1 : $S = 2S - S = 2^{64} - 1$.
 3. $2^{64} = 2^4 \times (2^{10})^6 \approx 16 \times 10^{18} = 1,6 \times 10^{19}$ grains ; masse $\approx 3,2 \times 10^{17}$ g = **$3,2 \times 10^{11}$ t** (des centaines d'années de production mondiale!).

Défi olympiade 3.1

1. 3, 9, 7, 1, 3, 9 : le chiffre des unités ne dépend que du précédent, donc il se répète tous les 4 exposants. $2026 = 4 \times 506 + 2$: comme 3^2 , 3^{2026} se termine par **9**.
 2. Unités de 7^n : 7, 9, 3, 1 (cycle de 4) ; 7^{2026} se termine aussi par 9. La différence se termine par 0 : divisible par 10.
 3. Les puissances de 2026 se terminent comme celles de 6 : par **6**. Pour 2027 : comme 7^{2027} ; $2027 = 4 \times 506 + 3$, donc par **3**.
 4. Unités : 1 ; 4 (cycle 2, 4, 8, 6) ; 9 ; 6 (4^n pair finit par 6). $1 + 4 + 9 + 6 = 20$: se termine par 0 ✓.

Défi olympiade 3.2

1. $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} > 1000^{10} = 10^{30}$: **$2^{100} > 10^{30}$** .
 2. $5^{20} = 25^{10} < 32^{10} = 2^{50}$; leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire : **$5^{-20} > 2^{-50}$** .
 3. $4^{1013} = 2^{2026}$, donc $N = (2 \times 5)^{2026} \times 5^4 = 625 \times 10^{2026}$: $3 + 2026 = 2029$ chiffres ; somme des chiffres $6 + 2 + 5 = 13$.
 4. $3^{40} = 81^{10} > 64^{10} = 4^{30}$.

4 Développement, factorisation et identités remarquables

Exercice 4.1

$A = -10x + 15$; $B = 7x - 7$; $C = 3x - 6 - 10 + 2x = 5x - 16$; $D = -2x^2 + x + 3x^2 = x^2 + x$; $E = 2x - 3 - x - 1 = x - 4$; $F = 2x^2 - 2x - x^2 + 2x = x^2$.

Exercice 4.2

- a) $x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 + 2x - 8$ b) $6x^2 + 15x - 2x - 5 = 6x^2 + 13x - 5$ c) $8x - 6 - 4x^2 + 3x = -4x^2 + 11x - 6$
 d) $x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$.

Exercice 4.3

a) **F** : $x^2 + 10x + 25$ (pour $x = 1$: $36 \neq 26$). b) **V**. c) **F** : $4x^2$. d) **V**. e) **F** : $-x + 1$. f) **V** ($a = 7$, $b = x$).

Exercice 4.4

a) $x^2 + 14x + 49$ b) $4x^2 - 20x + 25$ c) $9x^2 - 16$ d) $\frac{1}{4}x^2 - 6x + 36$ e) $25 - 4x^2$ f) $(-x - 3)^2 = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

Exercice 4.5

a) $6(2x - 3)$ b) $7x(x - 2)$ c) $(x - 9)(x + 9)$ d) $(2x - 3)(2x + 3)$ e) $(x + 6)^2$ f) $(5x - 2)^2$ g) $(x - 3)(3x + 5)$ h) $(2x + 1 - 4)(2x + 1 + 4) = (2x - 3)(2x + 5)$.

Exercice 4.6

1. $E = 4x^2 - 4x + 1 - (2x^2 + 5x - 3) = 2x^2 - 9x + 4$.
 2. $E = (2x - 1)[(2x - 1) - (x + 3)] = (2x - 1)(x - 4)$.
 3. $x = 0$ (développée) : $E = 4$; $x = \frac{1}{2}$ (factorisée) : $E = 0$; $x = -1$: $E = (-3) \times (-5) = 15$.

Exercice 4.7

a) **10 201** b) $40\,000 - 400 + 1 = 39\,601$ c) $2\,500 - 1 = 2\,499$ d) $3\,600 + 600 + 25 = 4\,225$ e) **999 996** f) $1 \times 4\,051 = 4\,051$.

Exercice 4.8

1. Côté $x + 2$: aire $(x + 2)^2$. 2. $\mathcal{A} = (x + 2)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4 = 4(x + 1)$.
 3. $\mathcal{A} = 4 \times 3,5 = 14 \text{ m}^2$; prix : $14 \times 450 = 6\,300 \text{ DH}$.

Exercice 4.9

1. $8 \times (-2) + 25 = 9$; $(-2) \times (-12) + 25 = 49$. On obtient le **carré** du nombre choisi.
 2. $(x + 5)(x - 5) + 25 = x^2 - 25 + 25 = x^2$. 3. $12^2 = (-12)^2 = 144$: **12 ou -12**.

Défi olympiade 4.1

1. $n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$: c'est le n -ième nombre impair.
 2. $S = (1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + \dots + (50^2 - 49^2)$: tout s'élimine sauf 50^2 , donc $S = 2\,500$.
 3. La somme des n premiers impairs vaut n^2 et $2025 = 45^2$: **45 nombres**, le dernier est $2 \times 45 - 1 = 89$.
 4. $T = (1 + \dots + 99) - (1 + \dots + 49) = 50^2 - 25^2 = 1\,875$.

Défi olympiade 4.2

1. Avec $n = 123\,456\,789$: $A = n^2 - (n - 1)(n + 1) = n^2 - (n^2 - 1) = 1$.
 2. $(x - y)(x + y) = 45$ avec $x - y < x + y$: 1×45 , 3×15 ou 5×9 , d'où **(23; 22)**, **(9; 6)**, **(7; 2)**.
 3. $x + y = (x - y) + 2y$: même parité. Si les deux sont impairs, le produit est impair; s'ils sont pairs, il est multiple de 4. Or $2026 = 2 \times 1013$ est pair mais pas multiple de 4 : **impossible**.

5 Ordre et opérations**Exercice 5.1**

a) $>$ b) $>$ c) $>$ (même numérateur) d) $<$ e) $\frac{15}{18} > \frac{14}{18}$ f) $-\frac{15}{20} < -\frac{14}{20}$.

Exercice 5.2

a) **Vrai**. b) **Faux** : $-2 < 0$, donc $-2a > -2b$. c) **Vrai** ($\times(-1)$). d) **Faux** : $\frac{13}{12} > 1 > \frac{12}{13}$.

Exercice 5.3

En 24^e : -12 ; 18 ; -16 ; 15 ; 0 ; -10 ; 16 , d'où $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{2} < -\frac{5}{12} < 0 < \frac{5}{8} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

Exercice 5.4

a) $<$ b) $<$ c) $<$ d) $>$ ($-4 < 0$) e) $<$ f) $-3a > -3b$, donc $5 - 3a > 5 - 3b$.

Exercice 5.5

a) $3,8 \leq x + y \leq 4$ b) $6,9 \leq 3x \leq 7,2$ c) $-1,6 \leq -y \leq -1,5$, donc $0,7 \leq x - y \leq 0,9$ d) $-8 \leq -5y \leq -7,5$, donc $2 \leq 10 - 5y \leq 2,5$ e) $8,1 \leq 2x + 3y - 1 \leq 8,6$ f) $4,3 \leq x + y + \frac{1}{2} \leq 4,5$.

Exercice 5.6

1) $65,5 \leq D \leq 75$; $R = 100 - D$, donc **$25 \leq R \leq 34,5$ DH**.
 2) Jus : **oui** ($R \geq 25$). Foulard : **pas sûr** (si $R = 25$ DH).

Exercice 5.7

1) 2,42 et 2,43; arrondis : 2,4; 2,43; 2,429. 2) $4,65 \leq x < 4,75$.

Exercice 5.8

1) $x^2 + x - x - 1 - x^2 = -1$. 2) Avec $x = 2\,025$: différence $-1 < 0$, donc $2\,024 \times 2\,026 < 2\,025^2$. 3) $(100 - 0,1)(100 + 0,1) - 100^2 = -0,01 < 0$: $99,9 \times 100,1 < 100 \times 100$.

Défi olympiade 5.1

1) $\frac{1}{2026} > \frac{1}{2027}$: $\frac{2025}{2026}$ est plus loin de 1, donc $\frac{2025}{2026} < \frac{2026}{2027}$.
 2) $1 + \frac{1}{2025} > 1 + \frac{1}{2026}$: $\frac{2026}{2025} > \frac{2027}{2026}$. Les opposés inversent l'ordre : $-\frac{2026}{2027} < -\frac{2025}{2026} < \frac{2027}{2026} < \frac{2026}{2025}$.

Défi olympiade 5.2

1) Pour $11 \leq n \leq 20$: $\frac{1}{20} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{11}$. On additionne : $\frac{10}{20} < S < \frac{10}{11} < 1$.
 2) $\frac{1}{11}$ à $\frac{1}{15}$ sont entre $\frac{1}{15}$ et $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{16}$ à $\frac{1}{20}$ entre $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{16}$. Donc $\frac{5}{15} + \frac{5}{20} < S < \frac{5}{11} + \frac{5}{16}$: $\frac{7}{12} < S < \frac{135}{176}$, avec $\frac{7}{12} \approx 0,583$ et $\frac{135}{176} \approx 0,767$.

6 Les équations du premier degré

Exercice 6.1

a) $-6 + 11 = 5$: **Vrai**. b) $7 \neq 6$: **Faux**. c) $3 - 1 = 2$ et $4 \times \frac{1}{2} = 2$: **Vrai**. d) $1 + 3 = 4$: **Vrai**.

Exercice 6.2

a) -10 b) -7 c) $\frac{9}{4}$ d) -8 e) -18 f) 3 g) $-\frac{5}{2}$ h) $9 \times (-\frac{4}{3}) = -12$.

Exercice 6.3

a) $3x = 15$, $x = 5$ b) $12 = 4x$, $x = 3$ c) $4x = 8$, $x = 2$ d) $2x = -8$, $x = -4$ e) $-15 = 5x$, $x = -3$ f) $3 = \frac{3}{4}x$, $x = 4$.

Exercice 6.4

a) $4x - 12 = 2x + 6$, $x = 9$ b) $6 - 2x = 3x + 21$, $-15 = 5x$, $x = -3$ c) $3x + 8 = 5x$, $x = 4$ d) $6x - 12 = 6x + 2$, soit $0x = 14$: **aucune solution**.

Exercice 6.5

a) $\times 6$: $3x + 2x = 60$, $x = 12$ b) $\times 6$: $4x - 2 = 3x + 12$, $x = 14$ c) $\times 12$: $3x - 3 - 2x - 2 = 12$, $x = 17$.

Exercice 6.6

1) $2x + 6 = 2x + 6$, soit $0x = 0$: **C**. 2) $3x - 1 = 3x - 3$, soit $0x = -2$: **A**. 3) $\times 10$: $2x = 5x + 30$, $-3x = 30$, $x = -10$: **B**.

Exercice 6.7

1) $2(3x - 1) + 2(x + 4) = 46$, $8x + 6 = 46$, $x = 5$: 14 cm sur 9 cm, aire **126 cm²**.
2) $2(2x + 1) + x + 3 = 34$, $5x + 5 = 34$, $x = 5,8$: côtés **12,6 cm**, **12,6 cm**, base **8,8 cm**.

Exercice 6.8

1) $41 + x = 2(13 + x)$, $41 + x = 26 + 2x$, $x = 15$ ans (28 et 56 ans ✓).
2) Saad $x : x + (x + 4000) + 2x = 56\,000$, $4x = 52\,000$, $x = 13\,000$. Saad **13 000**, Omar **17 000**, Ilyas **26 000** DH.
3) $60x = 300 + 35x$, $25x = 300$, $x = 12$ séances (720 DH).

Exercice 6.9

Après Meknès : $\frac{x}{2} + 14$. Après Khémisset : $\frac{2}{3}(\frac{x}{2} + 14) + 6 = \frac{x}{3} + \frac{28}{3} + 6$.
 $\frac{x}{3} + \frac{46}{3} = 30$, $\times 3$: $x + 46 = 90$, $x = 44$ passagers (vérif. : $22 + 14 = 36$, $24 + 6 = 30$ ✓).

Défi olympiade 6.1

1) Nombre : $10x + 3x = 13x$; retourné : $10 \times 3x + x = 31x$.
2) $31x - 13x = 54$, $18x = 54$, $x = 3$: le nombre est **39** ($93 - 39 = 54$ ✓).

3) $(10b + a) - (10a + b) = 9b - 9a = 9(b - a)$. Or 50 n'est pas un multiple de 9.

Défi olympiade 6.2

1) $m = 5$: $5x - 10 = 3x - 6$, $x = 2$. $m = -1$: $-x + 2 = 3x - 6$, $8 = 4x$, $x = 2$.
2) $m(2 - 2) = 0$ et $3 \times 2 - 6 = 0$: égalité vraie pour tout m .
3) $mx - 2m = 3x - 6 \iff mx - 3x = 2m - 6 \iff (m - 3)x = 2(m - 3)$. Si $m = 3$: $0x = 0$, **tout nombre** est solution. Si $m \neq 3$: $x = \frac{2(m-3)}{m-3} = 2$, **seule solution**.

7 La proportionnalité

Exercice 7.1

a) Oui, $k = 1,4$. b) Non ; $x \times y = 60$ constant : **inversement proportionnel**. c) Non : $15 \times 2,5 = 37,5 \neq 36$; ni l'un ni l'autre.

Exercice 7.2

a) **P** : $P = 4c$. b) **N** : $c = 1 \rightarrow 1$, $c = 2 \rightarrow 4$. c) **I** : nombre $\times$ masse = masse totale. d) **N**.

Exercice 7.3

1) $k = \frac{10}{14}$: $y = \frac{21 \times 10}{14} = 15$; $x = \frac{14 \times 25}{10} = 35$; $z = \frac{4,2 \times 10}{14} = 3$.
2) $\times 2,5$: **1 500 g** de farine, **625 g** de sésame, **300 g** de miel. $\frac{1\,000 \times 40}{250} = 160$ pièces.

Exercice 7.4

1) **A** : droite passant par l'origine. 2) 120 L en 10 min : **12 L/min**. 3) $150 \div 12 = 12,5$ min = 12 min 30 s. Entre 4 et 6 min, le volume de B reste 80 L : le robinet B est **fermé**.

Exercice 7.5

1) $1\,850 \times 1,2 = 2\,220$ DH; $414 \div 1,2 = 345$ DH.
2) $\frac{40}{250} = 0,16$: **+16 %**. 3) $0,7 \times 0,9 = 0,63$: baisse de **37 %**.

Exercice 7.6

1) $6 \times 150 = 900$ cm = **9 m**; $4,8 \times 150 = 720$ cm = **7,2 m**. 2) $8,5 \times 2\,000\,000 = 17\,000\,000$ cm = **170 km**. 3) $\frac{38,5}{7\,700} = \frac{1}{200}$.

Exercice 7.7

1) 15 m/s; 30 m/s; 54 km/h; 1 224 km/h. 2) 10 m/s = **36 km/h**.
3) 3 h 20 min = $\frac{10}{3}$ h : $v = 250 \times \frac{3}{10} = 75$ km/h.

Exercice 7.8

1) $\frac{1\,080}{0,4} = 2\,700$ kg/m³ = **2,7 g/cm³**. 2) $1\,500 \times 0,92 = 1\,380$ g; $\frac{460}{0,92} = 500$ cm³ = **0,5 L**.
3) $6\,000 \div 25 = 240$ min = **4 h**.

Exercice 7.9

- 1) Travail total : $6 \times 10 = 60$ « journées-artisan » (produit constant). 4 artisans : $\frac{60}{4} = 15$ jours; 15 artisans : 4 jours.
 2) Fait : 24; reste 36 pour 4 artisans : 9 jours. Total : $4 + 9 = 13$ jours.

Défi olympiade 7.1

- 1) $2000 \times 1,2 \times 0,8 = 1\,920$ DH (baisse de 4%).
 2) $1 - \frac{t^2}{10\,000} < 1$ si $t \neq 0$: c'est une baisse de $\frac{t^2}{100}$ %. Baisse de 1% : $t^2 = 100$, $t = 10$.
 3) Il faut $1,25 \times c = 1$, $c = 0,8$: baisse de **20 %** (et non 25 %).

Défi olympiade 7.2

- 1) Aller 1,5 h, retour 1 h : $\frac{180}{2,5} = 72$ km/h $\neq 75$ (il roule plus longtemps lentement).
 2) À 80 km/h, 180 km prennent 2,25 h : retour en 0,75 h, soit $\frac{90}{0,75} = 120$ km/h. Moyenne de 120 : il faudrait 1,5 h au total, déjà utilisées à l'aller : **impossible**.

8 Statistiques**Exercice 8.1**

- a) **Vrai** : $\frac{40}{5} = 8$; 7 apparaît deux fois. b) **Vrai** : $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. c) **Vrai** : la somme augmente de N , donc $\bar{x}$ de 1.

Exercice 8.2

- 1) $\bar{x} = \frac{14}{7} = 2$ °C; mode : 5 °C. 2) 3; 5; 4; 5 : **4 jours**, $\frac{4}{7} \approx 57$ %.

Exercice 8.3

- 1) Les 25 élèves; le nombre de frères et sœurs. 8; 28; 36; 20; 8 (%). Cumulés : 2; 9; 18; 23; 25.
 2) $\bar{x} = \frac{0+7+18+15+8}{25} = \frac{48}{25} = 1,92$; mode **2; 18 élèves**.
 3) Bâtons de hauteurs 2; 7; 9; 5; 2.

Exercice 8.4

- 1) Effectifs : 3; 5; 8; 3; 1. Cumulés : 3; 8; 16; 19; 20.
 2) $\frac{8}{20} = 40$ %; classe modale : $230 \leq m < 250$.
 3) Exacte : $\frac{4\,666}{20} = 233,3$ g; approchée : $\frac{4\,680}{20} = 234$ g : très proches.

Exercice 8.5

- 1) 40; 25; 15; 12,5; 7,5 (%). 2) $\frac{360}{120} = 3^\circ$ par élève : **144°; 90°; 54°; 45°; 27°** (total 360°).

Exercice 8.6

- 1) Classes de 10 min à partir de 0 : effectifs 8; 14; 10; 6; 2 (total 40). Classe modale : $10 \leq t < 20$.
 2) $\bar{x} \approx \frac{8 \times 5 + 14 \times 15 + 10 \times 25 + 6 \times 35 + 2 \times 45}{40} = \frac{800}{40} = 20$ min.
 3) $\frac{22}{40} = 55$ %.

Exercice 8.7

- 1) $\frac{56+33+32+18}{11} = \frac{139}{11} \approx 12,64$; moyenne simple : $\frac{50}{4} = 12,5$ (la bonne note de maths compte plus).
 2) $\frac{121+2p}{11} = 13$, $121 + 2p = 143$, $p = 11$.

Défi olympiade 8.1

- 1) Total classe : 360; filles : 234; garçons : $\frac{126}{12} = 10,5$.
 2) Total : 46; il faut 60, soit **14**. Pour 14 : il faudrait $70 - 46 = 24 > 20$: **impossible**.

Défi olympiade 8.2

- 1) A : $\frac{220-12}{19} = \frac{208}{19} \approx 10,95$; B : $\frac{325+12}{26} = \frac{337}{26} \approx 12,96$. **Les deux moyennes baissent !**
 2) $\frac{545}{45} \approx 12,11$ avant et après : rien ne change. Ilyas est au-dessus de la moyenne de A et en dessous de celle de B.

9 Les droites remarquables d'un triangle**Exercice 9.1**

- a) **F** (angle obtus). b) **V** : les côtés de l'angle droit sont des hauteurs. c) **F** : des **côtés**. d) **V** : $\frac{1}{3} \times 12 = 4$.

Exercice 9.2

- ① médiane; ② médiatrice de $[BC]$; ③ hauteur; ④ bissectrice. ⑤ Hauteur **et** médiane : ABC est isocèle en A (les 4 droites sont confondues).

Exercice 9.3

- $AG = \frac{2}{3} \times 9 = 6$ cm; $GA' = 3$ cm; $GB' = \frac{BG}{2} = 2,5$ cm; $BB' = 7,5$ cm; $CG = 2 \times 1,6 = 3,2$ cm; $CC' = 4,8$ cm.

Exercice 9.4

1. Intersection de deux hauteurs : **orthocentre**; donc (CH) est la 3^e hauteur : $(CK) \perp (AB)$. 2. Dans BKC : $\widehat{BCK} = 90 - 62 = 28^\circ$; dans AEC : $\widehat{CAE} = 90 - 54 = 36^\circ$.

Exercice 9.5

1. Deux **médiatrices** : $P = O$, centre du cercle circonscrit. 2. **Non** : angle obtus, P est à l'extérieur (au-delà de $[BC]$). 3. Le point I (**bissectrices**).

Exercice 9.6

1. Le centre du **cercle inscrit**. 2. $\frac{30r+50r+40r}{2} = 60r$ et $A = \frac{30 \times 40}{2} = 600$ cm² : $r = 10$ cm.

Exercice 9.7

1. **60°, 25°, 30°, $\widehat{BIC} = 125^\circ$** . 2. $\widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$, donc $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$: **jamais aigu**.

Exercice 9.8

1. Hauteurs de ABC . Dans HBC , (HA) et (BA) sont les hauteurs issues de H et B : elles se coupent en A .
2. C'est C .

Défi olympiade 9.1

1. Bases égales, même hauteur issue de G .
2. $\mathcal{A}(ABA') = \mathcal{A}(AA'C) : 2z + x = 2y + x$, d'où $y = z$. Avec $[BB'] : y + 2z = y + 2x$, d'où $x = z$.
3. $\mathcal{A}(ABG) = 2z = 2\mathcal{A}(GBA')$, même hauteur issue de $B : AG = 2GA'$.

Défi olympiade 9.2

1. Diagonales de même milieu M .
2. Alternes-internes : $\widehat{CEA} = \widehat{BAE} = \widehat{CAE}$ (bissectrice), donc ACE est isocèle en $C : AC = CE = AB$, ABC est isocèle en A .

10 Triangle rectangle et cercle**Exercice 10.1**

- a) $V : [AC]$ est l'hypoténuse.
- b) $V : 11 \div 2 = 5,5$.
- c) $V : OJ = OK = OL = \frac{KL}{2}$ (réciproque 2).
- d) $V : une corde de 8 \text{ cm} = 2 \times 4 \text{ cm}$ est un diamètre ($OA + OB = AB$, donc $O \in [AB]$) ; réciproque 1.

Exercice 10.2

1. O milieu de $[BC]$, rayon $= AO = 13 \div 2 = 6,5 \text{ cm}$.
2. $RI = \frac{ST}{2}$: la médiane issue de R vaut la moitié de $[ST]$, RST est rectangle en R ; $\widehat{RTS} = 90 - 35 = 55^\circ$.

Exercice 10.3

1. b) : centre au milieu de l'hypoténuse $[AB]$, rayon $10 \div 2$.
2. a) : réciproque 2.
3. b) : FEG est rectangle en E , $90 - 58 = 32^\circ$.

Exercice 10.4

1. $OA = OM = OB$ (rayons) : OAM et OMB sont isocèles en O ; $\widehat{OMA} = (180 - 50) \div 2 = 65^\circ$.
2. $\widehat{MOB} = 180 - 50 = 130^\circ$; $\widehat{OMB} = (180 - 130) \div 2 = 25^\circ$.
3. $\widehat{AMB} = 65 + 25 = 90^\circ$: AMB est inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 10.5

1. M est sur le cercle de diamètre $[AB]$: AMB est rectangle en M .
2. $\widehat{ABM} = 90 - 30 = 60^\circ$; $OM = OB$ et un angle de 60° : OMB est équilatéral, donc $MB = OB = 4 \text{ cm}$.
3. $\widehat{EOB} = 90^\circ$ et $\widehat{EMB} = 90^\circ$: O et M sont sur le cercle de diamètre $[EB]$.

Exercice 10.6

1. AOB est rectangle en O et $[OI]$ est la médiane relative à l'hypoténuse : $OI = \frac{AB}{2} = 2 \text{ m}$.
2. OI reste égal à 2 m : le chat décrit un **quart de cercle** de centre O et de rayon 2 m .

Exercice 10.7

1. STH est rectangle en H avec $\widehat{S} = 30^\circ$: $TH = \frac{ST}{2} = 1,8 \text{ m}$.
2. $[HM]$ est la médiane relative à l'hypoténuse : $HM = \frac{ST}{2} = 1,8 \text{ m}$.

Exercice 10.8

1. $\widehat{AHB} = 90^\circ$ et $\widehat{AKB} = 90^\circ$: H et K sont sur le cercle de diamètre $[AB]$, de centre I .
2. $IH = IK = \frac{AB}{2}$ (rayons) : IHK est isocèle en I .

Défi olympiade 10.1

1. **Oui** : 12 h et 6 h sont diamétralement opposés, le côté $[12 \text{ h}; 6 \text{ h}]$ est un diamètre (angle droit à 4 h). Plus généralement, un triangle inscrit est rectangle si et seulement si l'un de ses côtés est un **diamètre**.
2. 6 diamètres (12 graduations opposées deux à deux) et, pour chacun, 10 choix du troisième sommet : $6 \times 10 = 60$ triangles.
3. Avec 7 graduations, aucune n'est diamétralement opposée à une autre : **aucun** triangle rectangle!

Défi olympiade 10.2

- B est sur le cercle de diamètre $[AC]$: $\widehat{ABC} = 90^\circ$. B est sur le cercle de diamètre $[AD]$: $\widehat{ABD} = 90^\circ$. Donc $\widehat{CBD} = \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = 180^\circ$: l'angle est plat, C , B , D sont alignés (sur la perpendiculaire à (AB) en B).

11 Le théorème de Pythagore et sa réciproque**Exercice 11.1**

- a) $V : 81 + 144 = 225 = 15^2$.
- b) $F : 36 + 49 = 85 \neq 81$.
- c) $V : 6,25 + 36 = 42,25 = 6,5^2$.
- d) $F : 36 + 64 = 100 \neq 121$.

Exercice 11.2

- ① $BC^2 = 36 + 64 = 100$, $BC = 10$.
- ② $DE^2 = 676 - 100 = 576$, $DE = 24$.
- ③ $HI^2 = 16 + 49 = 65$, $HI = \sqrt{65} \approx 8,1$.
- ④ $KM^2 = 81 - 16 = 65$, $KM = \sqrt{65} \approx 8,1$.

Exercice 11.3

1. $h^2 = 6,5^2 - 2,5^2 = 42,25 - 6,25 = 36$: $h = 6 \text{ m}$.
2. $h'^2 = 42,25 - 2,56 = 39,69$: $h' = 6,3 \text{ m}$ ($6,3^2 = 39,69$). Il monte de **0,3 m**.

Exercice 11.4

1. $d^2 = 88,6^2 + 49,8^2 = 7\,849,96 + 2\,480,04 = 10\,330$;
 $d = \sqrt{10\,330} \approx 101,6$ cm, et $101,6 \div 2,54 \approx 40$
pouces. 2. $d^2 = 1\,296 + 729 = 2\,025$, $d = 45$ cm ;
 $45 \div 2,54 \approx 17,7$: **oui**, environ 18 pouces (à l'unité).

Exercice 11.5

1. $d^2 = 105^2 + 68^2 = 11\,025 + 4\,624 = 15\,649$; $d = \sqrt{15\,649} \approx 125,1$ m. 2. $173 - 125,1 \approx 47,9$ m.

Exercice 11.6

1. $AC^2 = 144 + 81 = 225$, $AC = 15$ cm. 2. Plus long
côté $[AD]$: $AD^2 = 625$ et $AC^2 + CD^2 = 225 + 400 = 625$: ACD est **rectangle en C**. 3. $\frac{12 \times 9}{2} + \frac{15 \times 20}{2} = 54 + 150 = 204$ cm².

Exercice 11.7

1. DPA est rectangle en P : $DP^2 = 74^2 - 70^2 = 5\,476 - 4\,900 = 576$, $DP = 24$ m. 2. $18,5$ km/h = $18\,500$ m en $3\,600$ s ; $\frac{74 \times 3\,600}{18\,500} = 14,4$ s.

Exercice 11.8

1. $60^2 + 80^2 = 10\,000 = 100^2$: il doit trouver **1 m**
(Pythagore). 2. $1,2^2 + 1,6^2 = 4$ et $1,98^2 = 3,9204 \neq 4$:
non (contraposée). 3. Intervalles de $6 \div 12 = 0,5$ m :
côtés **1,5 m**, **2 m** et **2,5 m**.

Exercice 11.9

1. Dans un triangle isocèle, la médiane issue de A est
aussi la hauteur. $AH^2 = 169 - 25 = 144$: $AH = 12$ cm ;
aire = $\frac{10 \times 12}{2} = 60$ cm². 2. $\frac{AC \times h}{2} = 60$: $h = \frac{120}{13} \approx 9,2$
cm.

Défi olympiade 11.1

1. $EG^2 = 144 + 81 = 225$: $EG = 15$ cm. 2. $EC^2 = EG^2 + GC^2 = 225 + 64 = 289$: $EC = 17$ cm. 3. La plus longue baguette possible mesure 17 cm (la grande diagonale) : celle de 16,5 cm **tient** (inclinée), celle de 17,5 cm **non**.

Défi olympiade 11.2

1. $OA_2^2 = 1 + 1 = 2$, $OA_3^2 = 2 + 1 = 3$, $OA_4^2 = 4$: $OA_n = 2$ cm. 2. À chaque étape on ajoute 1^2 : $OA_n^2 = n$. 3. OA_n est entier quand n est un carré parfait : $OA_1 = 1$, $OA_4 = 2$, $OA_9 = 3$, $OA_{16} = 4$, $OA_{25} = 5$, $OA_{36} = 6$, $OA_{49} = 7$. $OA_n > 5$ dès $n = 26$: il faut **25 triangles**.

12 Le cosinus d'un angle aigu**Exercice 12.1**

a) **F** : $0 < \cos x < 1$. b) **V** : $0,766 > 0,643$ (plus petit angle, plus grand cosinus). c) **F** : $0,5 \neq 1,73$. d) **F** : les angles, donc les cosinus, ne changent pas.

Exercice 12.2

① $AB = AC \times \cos \hat{A} = 8 \times \cos 40^\circ \approx 6,1$ cm. ② $DF = \frac{DE}{\cos \hat{D}} = \frac{4}{\cos 50^\circ} \approx 6,2$ cm. ③ $\cos \hat{G} = \frac{5,4}{9} = 0,6$, donc $\hat{G} \approx 53,1^\circ$.

Exercice 12.3

1. $AB = 12 \times \cos 35^\circ \approx 9,8$ cm. 2. $\widehat{ACB} = 90 - 35 = 55^\circ$; $AC = 12 \times \cos 55^\circ \approx 6,9$ cm. Pythagore : $AC^2 = 144 - AB^2 \approx 47,37$, $AC \approx 6,9$ cm. 3. $\frac{AB \times AC}{2} \approx \frac{9,83 \times 6,88}{2} \approx 34$ cm².

Exercice 12.4

1. Dans un triangle isocèle en A , la médiane issue de A est aussi la hauteur. 2. $\cos \widehat{ABC} = \frac{BH}{AB} = \frac{4}{5} = 0,8$, donc $\widehat{ABC} \approx 37^\circ$; $\widehat{BAC} \approx 180 - 2 \times 37 = 106^\circ$. 3. $AH^2 = 25 - 16 = 9$, $AH = 3$ m.

Exercice 12.5

1. $\cos \alpha = \frac{1,6}{5} = 0,32$, $\alpha \approx 71,3^\circ$: **sûr**. 2. Distance $d = 5 \times \cos \alpha$; plus α est grand, plus $\cos \alpha$ est petit : $5 \cos 75^\circ \approx 1,29$ et $5 \cos 65^\circ \approx 2,11$. Entre **1,29 m** et **2,11 m**.

Exercice 12.6

1. AHB rectangle en H : $\cos \widehat{BAH} = \frac{3,46}{3,5} \approx 0,9886$, $\widehat{BAH} \approx 8,7^\circ > 5^\circ$: **non conforme**. 2. $BH^2 = 3,5^2 - 3,46^2 = 0,2784$, $BH \approx 0,53$ m.

Exercice 12.7

1. $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = 0,6$ et $\cos \widehat{ACB} = \frac{BH}{AB}$. 2. $BH = AB \times 0,6 = 3,6$ cm ; $HC = 6,4$ cm ; $AH^2 = 36 - 12,96 = 23,04$, $AH = 4,8$ cm. 3. $\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$; produits en croix : $AB^2 = BH \times BC$.

Défi olympiade 12.1

1. Médiane = hauteur : ABH est rectangle en H , $BH = 3$, donc $\cos 60^\circ = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. 2. $AH^2 = 36 - 9 = 27$; $\widehat{BAH} = 180 - 90 - 60 = 30^\circ$ et $\cos 30^\circ = \frac{AH}{AB}$, d'où $(\cos 30^\circ)^2 = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$. 3. Carré de côté a , diagonale d : $d^2 = 2a^2$ et $\cos 45^\circ = \frac{a}{d}$, donc $(\cos 45^\circ)^2 = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$. (Calculatrice : $0,866^2 \approx 0,75$; $0,707^2 \approx 0,5$.)

Défi olympiade 12.2

Hypoténuses (Pythagore) : 13, 17, 25 dm ; $\cos \alpha_1 = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha_2 = \frac{15}{17}$, $\cos \alpha_3 = \frac{24}{25}$. Or $\frac{12}{13} = 1 - \frac{1}{13}$, $\frac{15}{17} = 1 - \frac{2}{17} = 1 - \frac{1}{8,5}$, $\frac{24}{25} = 1 - \frac{1}{25}$. Or $\frac{1}{25} < \frac{1}{13} < \frac{1}{8,5}$, donc $\cos \alpha_3 > \cos \alpha_1 > \cos \alpha_2$; plus grand cosinus, plus petit angle : $\alpha_3 < \alpha_1 < \alpha_2$ ($\approx 16,3^\circ$, $22,6^\circ$, $28,1^\circ$).

13 La droite des milieux dans un triangle

Exercice 13.1

a) **Vrai** (th. 1). b) **Faux** : $EF = \frac{12}{2} = 6$ cm. c) **Vrai** (F, G milieux de $[TR], [TS]$). d) **Vrai** : côtés opposés parallèles.

Exercice 13.2

1. $IJ = 5,5$ cm, $JK = 3$ cm, $IK = 4$ cm ; périmètre **12,5** cm, la moitié de 25 cm. 2. $FG = 2 \times 4,3 = 8,6$ cm.

Exercice 13.3

Th. 3 : J milieu de $[AC]$, $AJ = 4,5$ cm ; th. 2 : $IJ = 5$ cm. Périmètre : $3,5 + 10 + 4,5 + 5 = 23$ cm.

Exercice 13.4

1. Pythagore : $BC^2 = 36 + 64 = 100$, $BC = 10$ cm ; th. 1 et 2 : $(IJ) \parallel (BC)$, $IJ = 5$ cm. 2. J milieu de $[AC]$ et $(JK) \parallel (AB)$: K milieu de $[BC]$ (th. 3), $JK = \frac{AB}{2} = 3$ cm. 3. Th. 1 dans BAC . Côtés opposés parallèles et angle droit en A : **rectangle** 3×4 ; périmètre **14** cm, aire **12** cm².

Exercice 13.5

1. Dans SAB , M et N sont des milieux : $AB = 2 \times 55 = 110$ cm (th. 2) et $(MN) \parallel (AB)$, le sol (th. 1). 2. $MN = \frac{130}{2} = 65$ cm.

Exercice 13.6

1. $MN = \frac{AC}{2} = 4,5$ cm, $NP = \frac{BD}{2} = 3,5$ cm ; périmètre **16** cm = $AC + BD$. 2. Rectangle : $AC = BD$ donc $MN = NP$: **losange**. Losange : $(AC) \perp (BD)$ et les côtés de $MNPQ$ sont parallèles aux diagonales : **rectangle**.

Exercice 13.7

1. Dans ADC : I milieu de $[AD]$, $(IK) \parallel (DC)$, donc K milieu de $[AC]$ (th. 3) et $IK = \frac{DC}{2} = 3$ cm. 2. Dans CAB : de même J milieu de $[CB]$, $KJ = \frac{AB}{2} = 5$ cm, $IJ = 8$ cm = $\frac{10+6}{2}$.

Exercice 13.8

1. Th. 1 dans BAC : $(IJ) \parallel (AC)$ et $(AC) \perp (AB)$, donc $(IJ) \perp (AB)$. (IJ) est la médiatrice de $[AB]$: $IA = IB$, et $IB = IC$. 2. $AI = \frac{13}{2} = 6,5$ cm ; centre : I , milieu de l'hypoténuse.

Défi olympiade 13.1

1. Les quatre triangles ont pour côtés les moitiés des côtés de T_0 (th. 2) : périmètre $\div 2$, aire $\div 4$. T_1 : **48** cm, **96** cm² ; T_2 : **24** cm, **24** cm². 2. 384, 96, 24, 6, 1,5, 0,375 : T_5 , périmètre $96 \div 32 = 3$ cm. 3. $48 + 24 = 96 - 24$, $48 + 24 + 12 = 96 - 12 \dots$: la somme vaut 96 moins le dernier terme, donc **reste** < 96.

Défi olympiade 13.2

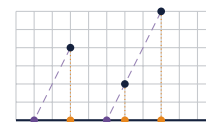
Dans BCE , M et N sont des milieux : $(MN) \parallel (BE)$. Dans AMN : I milieu de $[AM]$ et $(IE) \parallel (MN)$, donc E milieu de $[AN]$ (th. 3). Ainsi $AE = EN = NC$: $AE = \frac{AC}{3}$. *Bonus* (th. 2) : $MN = 2IE$ et $BE = 2MN$, donc $BE = 4IE$.

14 La projection sur une droite**Exercice 14.1**

a) **Faux** en général : si $(AB) \parallel (\Delta)$, le projeté est un point ! b) **Vrai** : (AB) est la parallèle à (Δ) par A et par B . c) **Vrai** (propriété du cours). d) **Vrai** : $6 \div 2 = 3$.

Exercice 14.2

1. Les points de (d) juste au-dessous. 2. Pas : 1 à gauche pour 2 vers le bas. B et C ont le **même projeté** : $(BC) \parallel (\Delta)$. 3. Au milieu des projetés orthogonaux de A et C : **2,5 carreaux** à droite de celui de A .

**Exercice 14.3**

1. En H (FH est la distance de F à (d)). 2. Pythagore dans FHP rectangle en H : $FP^2 = 300^2 + 400^2 = 250\,000$, $FP = 500$ m ; on économise **200** m.

Exercice 14.4

1. Deux droites perpendiculaires à (d) sont parallèles : $AA'B'B$ est un **trapèze rectangle** de bases $[AA']$ et $[BB']$. 2. La projection conserve le milieu ; $[II']$ joint les milieux des côtés non parallèles du trapèze : $II' = \frac{3+7}{2} = 5$ cm.

Exercice 14.5

1. $BC = 3 \times AB$, donc $B'C' = 3 \times 1,4 = 4,2$ cm et $A'C' = 5,6$ cm. 2. M' est le milieu de $[A'C']$: $A'M' = 2,8$ cm.

Exercice 14.6

1. Les marques 10 et 20 partagent le segment $[0; 30]$ du mètre en 3 parties égales. On les projette sur une perpendiculaire aux bords, parallèlement aux bords : la projection conserve les rapports, donc la largeur est partagée en 3 parties égales. 2. $25 \div 3 = 8,333 \dots$ cm : ce n'est pas une graduation du mètre.

Exercice 14.7

1. O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$; la projection conserve le milieu. $O' : \frac{2+10}{2} = 6$. 2. O' est le milieu de $[B'D']$: de 7 à 6 on recule de 1, donc D' a pour abscisse **5**.

Défi olympiade 14.1

1. On projette orthogonalement sur (AM) : $B \rightarrow H$, $C \rightarrow K$, et $M \rightarrow M$ ($M \in (AM)$). La projection conserve le milieu : M est le milieu de $[HK]$. 2. Les diagonales $[BC]$ et $[HK]$ ont le même milieu M : $BHCK$ est un **parallélogramme**, et ses côtés opposés sont égaux : $BH = CK$.

Défi olympiade 14.2

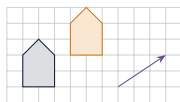
1. Sur une perpendiculaire aux lignes, les 6 lignes découpent 5 segments égaux de 8 mm. On les projette sur la baguette parallèlement aux lignes : la projection conserve les rapports, d'où 5 parties égales de **2 cm**. 2. Pour n parties, il faut franchir n intervalles : la distance entre les lignes extrêmes, $0,8 \times n$ cm, ne peut dépasser la longueur de la baguette. $0,8n \leq 10$ donne $n \leq 12,5$: au maximum **12 parties**.

15 La translation et les vecteurs**Exercice 15.1**

a) **D** ($\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$). b) **O** (O milieu de $[AC]$). c) (**DC**) : $A \mapsto D$ et $B \mapsto C$. d) $\overrightarrow{DB}$ (Chasles).

Exercice 15.2

1. Chaque sommet glisse de 3 carreaux à droite et 2 vers le haut. 2. Carré $2 \times 2 = 4$ et triangle $2 \times 1 \div 2 = 1$: **5 cm²**. Image : **5 cm²** (la translation conserve les aires).

**Exercice 15.3**

1. $\overrightarrow{CD}$: même trajet (3 à droite, 1 en haut), donc $ABDC$ est un parallélogramme. 2. $\overrightarrow{EF}$. 3. **Non** : leurs directions sont différentes. 4. Même direction, même sens, longueur **double**.

Exercice 15.4

1. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA}$. 2. $BADC$ et $CAEB$ sont des **parallélogrammes** : $CD = BA = 5$ cm, $BE = CA = 4$ cm. 3. Côtés opposés de ces parallélogrammes. $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont opposés : D, A, E alignés et $AD = AE = 6$ cm, d'où A milieu de $[DE]$, $DE = 12$ cm. Périmètre : $6 + 5 + 12 + 4 = 27$ cm.

Exercice 15.5

1. Centre O' (image de O), rayon **2 cm**. (d') est la parallèle à (d) par O' (confondue avec (d) si $(d) \parallel (AB)$). 2. $OO' = AB = 5$ cm. Un point commun M donnerait $OO' \leq OM + MO' = 4$: **non**. Si $AB = 3$ cm, $OO' = 3 < 4$: **deux points communs**.

Exercice 15.6

1. Chaque motif est décalé de 3 carreaux vers la droite. 2. Chevron : 2 carreaux, plus 2 carrés : 4 carreaux de 4 cm², soit **16 cm²**. 3. Un motif occupe $3 \times 2 = 6$ cm de long : $180 \div 6 = 30$ motifs ; $30 \times 16 = 480$ cm².

Exercice 15.7

a) $\overrightarrow{AC}$. b) $\overrightarrow{MQ}$. c) $\overrightarrow{EE} = \vec{0}$. d) N'importe quelle lettre, par exemple $\overrightarrow{KS} + \overrightarrow{SR}$. e) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$. f) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$.

Exercice 15.8

1. I milieu de $[AB]$: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$. 2. Th. 1 : $(IK) \parallel (AC)$, $(JK) \parallel (AB)$: $AIKJ$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JK}$. 3. $AIJ \mapsto IBK$. De même AIJ, JKC (vecteur $\overrightarrow{AJ}$) et KJI (symétrique par rapport au centre de $AIKJ$) : 4 triangles de même aire, $36 \div 4 = 9$ cm².

Défi olympiade 15.1

1. **Oui** : de M , $\vec{u}$ mène en N puis $\vec{v}$ en P ; $\vec{v}$ mène en Q . $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$: $MNPQ$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MN} = \vec{u}$. 2. L'ordre ne compte pas : $10 + 2 = 12$ à droite, $6 - 5 = 1$ vers le bas. 3. Avec a fois $\vec{u}$ et b fois $\vec{v}$: en hauteur $a - 3b = 0$, donc $a = 3b$, et à droite $2a + b = 7b$. $7b = 7$: $b = 1$, $a = 3$, soit **4 déplacements**. $7b = 1$ est impossible : **non**.

Défi olympiade 15.2

1. $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MN}$: $AA'NM$ est un parallélogramme, $AM = A'N$; et A' ne dépend pas de la position du pont. 2. Trajet = $A'N + NB + 100 \geq A'B + 100$: placer N sur $[A'B]$. Écart : $100 + 100 + 400 = 600$ m et 800 m ; Pythagore : $A'B^2 = 600^2 + 800^2 = 1\,000\,000$, $A'B = 1\,000$ m. Trajet minimal : **1 100 m**.

16 Géométrie dans l'espace : positions relatives, sections et volumes**Exercice 16.1**

a) **Vrai** (face $ABFE$). b) **Faux** : non coplanaires. c) **Vrai** : $(EH) \parallel (AD)$. d) **Vrai** : $(FB) \perp (BA)$ et $(FB) \perp (BC)$. e) **Vrai** : $ADGF$ est un rectangle. f) **Faux** : C n'est pas dans ce plan.

Exercice 16.2

a) **3 200 L**. b) **0,45 dm³**. c) **1 500 cm³**. d) **250 cm³**. e) **8 m³**. f) **60 L = 6 000 cL**.

Exercice 16.3

1. Rectangle superposable à $ABFE$: 8×3 , aire **24 cm²**. 2. $IJKL$ a deux côtés verticaux de 3 cm. IBJ est rectangle en B : $IJ^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, $IJ = 5$ cm ; aire $5 \times 3 = 15$ cm².

Exercice 16.4

1. Pythagore : $BC^2 = 9 + 16 = 25$, $BC = 5$ cm.
 2. a) **Parallèles**. b) **Non coplanaires**. c) **Parallèle** ($(DE) \parallel (AB)$). d) **Perpendiculaire** ($(AD) \perp (AB)$ et $(AD) \perp (AC)$). 3. $\mathcal{A}_\ell = (3+4+5) \times 10 = 120$ cm²; base $3 \times 4 \div 2 = 6$ cm², $\mathcal{A}_t = 132$ cm²; $V = 6 \times 10 = 60$ cm³.

Exercice 16.5

1. $12 \times 6 \times 1,5 = 108$ m³ = **108 000** L. 2. $108 \div 18 = 6$ h. 3. $72 + 2 \times 18 + 2 \times 9 = 126$ m²; $126 \times 85 = 10\,710$ DH.

Exercice 16.6

1. $3,14 \times 4^2 \times 11 = 552,64$ cm³ $\approx$ **55** cL. 2. $2 \times 3,14 \times 4 \times 11 = 276,32$ cm². 3. Carton : $32 \times 24 \times 11 = 8\,448$ cm³; boîtes : $12 \times 552,64 = 6\,631,68$ cm³; vide : $1\,816,32$ cm³, soit **21,5** %.

Exercice 16.7

1. Un **rectangle**; l'un de ses côtés mesure **3** m. 2. OHM est rectangle en H : $HM^2 = 40^2 - 24^2 = 1\,024$, $HM = 32$ cm, donc $MN = 64$ cm. 3. $0,64 \times 3 = 1,92$ m².

Défi olympiade 16.1

1. $AC^2 = 30^2 + 30^2 = 1\,800$; $(CG) \perp (ABC)$ donc ACG est rectangle en C : $AG^2 = 1\,800 + 900 = 2\,700$.
 2. La plus longue baguette possible va de A à G . $50^2 = 2\,500 < 2\,700$: **oui**. $52^2 = 2\,704 > 2\,700$: **non**, de justesse!
 3. Déplié, le trajet devient la diagonale d'un rectangle de 60 cm sur 30 cm : $\ell^2 = 60^2 + 30^2 = 4\,500$. Or $67^2 = 4\,489$ et $68^2 = 4\,624$: **67** < ℓ < **68** cm.

Défi olympiade 16.2

1. 3 faces : les **8** coins; 2 faces : 3 par arête, $12 \times 3 = 36$; 1 face : $3 \times 3 = 9$ par face, **54**; aucune : le cube intérieur $3 \times 3 \times 3 = 27$. Total : $8 + 36 + 54 + 27 = 125 = 5^3$.
 2. Avec $k = n - 2$: k^3 cubes intérieurs et $6 \times k^2$ cubes à une face. $k^3 = 6k^2$ donne $k = 6$, soit **n = 8** (216 et 216).

S1 Contrôle type — fin d'année**Contrôle type — fin d'année — Exercice 1**

1) $A = \frac{10-9+4}{12} = \frac{5}{12}$; $B = -\frac{3}{4}$; $C = \frac{-4}{9} \times \frac{3}{-2} = \frac{2}{3}$; $D = \frac{3}{5} \div \frac{6}{5} = \frac{1}{2}$. 2) a) $1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$. b) $\frac{1}{15}$ vaut 12 DH : **180** DH.

Contrôle type — fin d'année — Exercice 2

1) 16; -16; -1; $\frac{1}{9}$. 2) 7^{-2} ; 3^2 ; 10^3 . 3) $5,2 \times 10^{-5}$; $3,47 \times 10^8$; $Q = \frac{24 \times 10^3}{8 \times 10^{-3}} = 3 \times 10^6$. 4) $\frac{1,5 \times 10^8}{3 \times 10^5} = 500$ s = **8 min 20** s.

Contrôle type — fin d'année — Exercice 3

1) $H = 4x^2 - 12x + 9$; $K = x^2 - 16 - x^2 - 2x = -2x - 16$. 2) $(5x - 3)(5x + 3)$; $(x + 3)^2$; $P = (x + 1)(2x - 3 + x + 5) = (x + 1)(3x + 2)$. 3) $6 \times 2\,000 = 12\,000$.

Contrôle type — fin d'année — Exercice 4

1) a) $3x = 15$, $x = 5$. b) $2x - 10 = 4x + 2$, $x = -6$. c) $\frac{5x}{6} = 10$, $x = 12$. 2) a) $3(x + 2) + 2x = 41$. b) $x = 7$: pommes **7** DH, oranges **9** DH.

Contrôle type — fin d'année — Exercice 5

1) $\frac{-50}{70} < \frac{-49}{70}$, donc $\frac{-5}{7} < \frac{-7}{10}$. 2) a) $7,9 < 3x + 1 < 8,2$. b) En multipliant par -2 l'ordre change : $-4,8 < -2x < -4,6$, d'où **0,2** < $5 - 2x$ < **0,4**.

Contrôle type — fin d'année — Exercice 6

1) a) $800 \times 1,15 \times 0,8 = 736$ DH. b) $1,15 \times 0,8 = 0,92$: baisse de **8** %. 2) a) $250 \div \frac{10}{3} = 75$ km/h. b) $\frac{100}{75} = \frac{4}{3}$ h = **1 h 20** min.

Contrôle type — fin d'année — Exercice 7

1) $N = 25$; 12 %, 28 %, 32 %, 20 %, 8 %. 2) $\frac{292}{25} = 11,68$. 3) **60** %. 4) Bâtons de hauteurs 3, 7, 8, 5, 2.

Contrôle type — fin d'année — Exercice 8

2) $36 + 64 = 100 = BC^2$: réciproque de Pythagore, **rectangle en A**. 3) Triangle rectangle : le centre est le milieu de l'hypoténuse; $AO = \frac{BC}{2} = 5$ cm. 4) $\cos \widehat{ABC} = \frac{6}{10} = 0,6$; $\widehat{ABC} \approx 53^\circ$. 5) Droite des milieux : $(OI) \parallel (AC)$, $OI = \frac{AC}{2} = 4$ cm; $(AC) \perp (AB)$ donc $(OI) \perp (AB)$ en son milieu I : **médiatrice**. 6) $A \mapsto C$, $B \mapsto D$: $ABDC$ est un parallélogramme ayant un angle droit : **rectangle**.

Contrôle type — fin d'année — Exercice 9

1) $\frac{2,4 \times 1,6}{2} \times 3 = 1,92 \times 3 = 5,76$ m³. 2) $\ell^2 = 1,2^2 + 1,6^2 = 4$, $\ell = 2$ m. 3) $2 \times 2 \times 3 + 2 \times 1,92 = 15,84$ m².

S2 Épreuve type olympiade**Épreuve type olympiade — Exercice 1**

1) a) 7, 49, 343, 2 401, 16 807 : unités 7,9,3,1 répétées tous les 4. b) $2026 = 4 \times 506 + 2$: unités **9**. c) Reste **4**. 2) $N = 10^{10} \times 125$: **13** chiffres, somme **8**. 3) $45 = 5 \times 9$: $b \in \{0; 5\}$ et $8 + a + b$ multiple de 9 : **3 150** et **3 555**. 4) a) $(n - 1)n(n + 1)$. b) Parmi trois entiers consécutifs, l'un est pair et l'un est multiple de 3 : divisible par **6**.

Épreuve type olympiade — Exercice 2

1) $n = 2026$: $n^2 - (n^2 - 1) = 1$. 2) $(a + b)^2 - 2ab = 29$. 3) $(k + 1)^2 - k^2 = (k + 1) + k$: $B = 1 + 2 + \dots + 100 = 5\,050$. 4) $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k}$; les fractions se simplifient en

chaîne : $C = \frac{1}{10} \times \frac{11}{2} = \frac{11}{20}$. **5)** $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$. **6)** $2^{300} = 8^{100} < 9^{100} = 3^{200}$.

Épreuve type olympiade — Exercice 3

1) Badr et Dounia se contredisent : l'un des deux dit vrai, donc Amine et Chama mentent : **c'est Chama** (seule Dounia dit vrai). **2)** a) $4 \times 3 \times 2 = 24$. b) $2 \times 3 \times 2 = 12$. **3)** Ils finissent par 1, 3, 7 ou 9 : $4 \times 100 = 400$. **4)** 25 sportifs ; $18 + 15 - 25 = 8$.

Épreuve type olympiade — Exercice 4

1) Droite des milieux. **2)** $(KI) \parallel (AC)$ et $KI = \frac{AC}{2} = AJ$: parallélogramme. **3)** La diagonale $[KJ]$ coupe $AKIJ$ en deux triangles de même aire ; idem avec $KBIJ$ et $KICJ$: chacun vaut $\frac{1}{4}$ de ABC . **4)** $BC^2 = 400$, $BC = 20$ cm ; côtés 10, 8, 6 : $P = 24$; aire

$\frac{1}{4} \times 96 = 24$. **5)** Angle droit en A : rectangle ; diagonales égales : $AI = KJ = 10$ cm.

Épreuve type olympiade — Exercice 5

1) a) 6° et $0,5^\circ$ par min. b) Grande à 240° , petite à $90+20 = 110^\circ$: **130°** . **2)** $6t = 90+0,5t$, $t = \frac{180}{11} \approx 16,36$ min : **3 h 16 min 22 s**. **3)** La grande gagne $5,5^\circ/\text{min}$, un tour en $\frac{720}{11}$ min : $1\,440 \div \frac{720}{11} = 22$ fois.

Épreuve type olympiade — Exercice 6

1) $x^2 + 3^2 = (10 - x)^2$, $20x = 91$, $x = 4,55$ m. **2)** 120 km en $1+1,5 = 2,5$ h : **48 km/h**. **3)** $78 - 60 = 18$; pour 14 : $84 - 60 = 24 > 20$, **impossible**. **4)** Soir du jour k : $k + 2$ m ; $k + 2 \geq 10$: **8^e jour**. **5)** Jour 2 : $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$; reste $\frac{1}{2}$: **240** pages.

MATHÉMATIQUES 2APIC

Un livret complet pour **réussir les mathématiques de la 2e année du collège (2APIC)** et préparer sereinement la 3e année. Chaque notion est expliquée simplement, illustrée par des figures soignées et travaillée à travers des exercices de difficulté croissante, dans des situations de la vie au Maroc. Les élèves les plus curieux y trouveront aussi des **défis de type olympiade** pour développer leur raisonnement.

PARTIE A — NOMBRES ET CALCUL

1. Rationnels : addition et soustraction
2. Rationnels : multiplication et division
3. Les puissances
4. Identités remarquables
5. Ordre et opérations
6. Les équations
7. La proportionnalité
8. Statistiques

PARTIE B — GÉOMÉTRIE

9. Droites remarquables d'un triangle
10. Triangle rectangle et cercle
11. Le théorème de Pythagore
12. Le cosinus d'un angle aigu
13. La droite des milieux
14. La projection
15. Translation et vecteurs
16. Géométrie dans l'espace

PARTIE C — SE TESTER

Formulaire de révision · Contrôle type sur 20 points · Épreuve type olympiade · Corrigés détaillés de tous les exercices

16

chapitres

127

exercices

32

défis

2

sujets types

Auteur



Maths Olympiad

Programme marocain
2e année du collège (2APIC)