

Proportionnalité

I - Grandeurs proportionnelles

1 - Définition

Deux grandeurs sont **proportionnelles** lorsque l'on peut obtenir les valeurs de l'une en **multipliant** les valeurs de l'autre par **un même nombre**.

Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité**.

2 - Exemple

Longueurs de la figure initiale	5	4	6	10
Longueurs de la figure agrandie	12,5	10	15	25

× 2,5

$\frac{12,5}{5}$

$$12,5 \div 5 = 2,5 = \frac{12,5}{5}$$

$$4 \times 2,5 = 10$$

$$6 \times 2,5 = 15$$

$$10 \times 2,5 = 25$$

Les longueurs de la figure initiale et les longueurs de la figure agrandie sont donc des grandeurs proportionnelles.

2,5 est le coefficient de proportionnalité.

3 - Calculer la quatrième proportionnelle

Exemple : La prime annuelle d'un vendeur est proportionnelle au montant des ventes qu'il a réalisées pendant l'année.

Méthode n°1 : Coefficient de proportionnalité

÷ 0,0625	→	Ventes (en €)	2 000	8 000	16 000	←	× 0,0625
		Primes (en €)	125	500	1 000		

$$500 \div 8000 = 0,0625 = \frac{500}{8000} \quad \text{coefficient de proportionnalité}$$

$$2000 \times 0,0625 = 125$$

$$1000 \div 0,0625 = 16\,000$$

Méthode n°2 : Produits en croix

Ventes (en €)	4000	18 000	y
Primes (en €)	250	x	1 750

$$4000 \times x = 250 \times 18000$$

$$4000 \times x = 4500000$$

$$x = \frac{4500000}{4000}$$

$$x = 1125$$

$$250 \times y = 4000 \times 1750$$

$$250 \times y = 7000000$$

$$y = \frac{7000000}{250}$$

$$y = 28000$$

II - Quelques grandeurs composées

1 - Vitesse moyenne

Définition : La **vitesse moyenne** d'un mobile est le quotient de la distance parcourue par la durée du mouvement.

$$\begin{array}{c} \text{Vitesse} \longrightarrow v = \frac{d}{t} \\ \text{(en km/h)} \quad \text{(en m/s)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Distance} \\ \text{(en km)} \\ \text{(en m)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Durée} \\ \text{(en h)} \\ \text{(en s)} \end{array}$$

Application n°1 : Calculs de vitesse, distance et durée

Une voiture roule pendant 2h12min à la vitesse moyenne de 65 km/h.

Calculer la distance parcourue.

$$\begin{array}{l} \text{en km/h} \longrightarrow v = \frac{d}{t} \quad \begin{array}{l} \longleftarrow \text{en km} \\ \longleftarrow \text{en h} \end{array} \quad 12 \text{ min} = \frac{12}{60} \text{ h} = 0,2 \text{ h} \\ 65 = \frac{d}{2,2} \end{array}$$

D'après l'égalité du produit en croix,

$$d \times 1 = 65 \times 2,2$$

$$\underline{d = 143 \text{ km}} \quad \text{La distance parcourue est de 143 km.}$$

Application n°2 : Conversions d'unités

Convertir 72 km/h en m/s

$$72 \text{ km/h signifie que l'on parcourt : } \begin{array}{ccc} 72 \text{ km} & \text{en} & 1 \text{ h} \\ \div 3600 \quad \curvearrowright & 72\,000 \text{ m} & \text{en} & 3\,600 \text{ s} \\ & 20 \text{ m} & \text{en} & 1 \text{ s} \quad \curvearrowright \div 3600 \end{array}$$

$$\underline{72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}}$$

2 - Consommation d'énergie

Définition : L'**énergie consommée** par un appareil est le produit de la puissance de cet appareil par sa durée d'utilisation.

$$\begin{array}{c} \text{Energie} \\ \text{consommée} \longrightarrow E = P \times t \\ \text{(en kWh)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Puissance} \\ \text{(en kW)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Durée} \\ \text{(en h)} \end{array}$$

Application : Calculs d'énergie consommée, puissance et durée

Calculer l'énergie consommée par un gaufrier de puissance 700 W qui fonctionne pendant 1,3 h.

$$E = P \times t \quad 700 \text{ W} = 0,7 \text{ kW}$$

$$E = 0,7 \times 1,3$$

$$\underline{E = 0,91 \text{ kWh}} \quad \text{L'énergie consommée est de 0,91 kWh soit 910 Wh.}$$

3 - Masse volumique

Définition : La **masse volumique** d'un élément est le quotient de la masse de cet élément par son volume.

$$\begin{array}{c} \text{Masse} \longrightarrow \rho = \frac{m}{V} \\ \text{volumique} \\ \text{(en g/cm}^3\text{)} \\ \text{(en kg/m}^3\text{)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Masse} \\ \text{(en g)} \\ \text{(en kg)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Volume} \\ \text{(en cm}^3\text{)} \\ \text{(en m}^3\text{)} \end{array}$$

Application n°1 : Calculs de masse volumique, masse et volume

Une bille d'acier a une masse volumique de $7,85 \text{ g/cm}^3$ et une masse de $18,84 \text{ g}$.
Calculer le volume de cette bille.

$$\text{en g/cm}^3 \rightarrow \rho = \frac{m \leftarrow \text{en g}}{V \leftarrow \text{en cm}^3}$$

$$7,85 = \frac{18,84}{V}$$

D'après l'égalité du produit en croix,

$$7,85 \times V = 18,84 \times 1$$

$$V = \frac{18,84}{7,85}$$

$$V = 2,4 \text{ cm}^3 \quad \text{Le volume de la bille est de } 2,4 \text{ cm}^3.$$

Application n°2 : Changement d'unités

Convertir $19,3 \text{ g/cm}^3$ en kg/m^3 .

$$19,3 \text{ g/cm}^3 \text{ signifie : } \begin{array}{l} \times 1000000 \quad \left(\begin{array}{l} 19,3 \text{ g} \\ 19\,300\,000 \text{ g} \\ 19\,300 \text{ kg} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{pour } 1 \text{ cm}^3 \\ \text{pour } 1\,000\,000 \text{ cm}^3 \\ \text{pour } 1 \text{ m}^3 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \times 1000000 \\ \times 1000000 \\ \times 1000000 \end{array}$$

$$\underline{19,3 \text{ g/cm}^3 = 19\,300 \text{ kg/m}^3}$$

III - Réduction et agrandissement d'une figure

Définition : Réduire (ou agrandir) une figure revient à multiplier toutes ses dimensions par un nombre k avec $0 < k < 1$ (ou $k > 1$).

k est appelé **rapport** ou **coefficient de réduction** (ou d'agrandissement).

Exemple 1 : $A'B'C'D'$ est un agrandissement du quadrilatère $ABCD$. On sait que $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 2,5 \text{ cm}$ et $A'B' = 5,6 \text{ cm}$.

1) Calculer le coefficient k d'agrandissement.

$$k = \frac{A'B' \leftarrow \text{longueur agrandie}}{AB \leftarrow \text{longueur initiale}}$$

$$k = \frac{5,6}{4}$$

$$\underline{k = 1,4}$$

2) Calculer la longueur $B'C'$.

$$B'C' = BC \times k$$

$$B'C' = 2,5 \times 1,4$$

$$\underline{B'C' = 3,5 \text{ cm}}$$

Propriété 1 : Si les dimensions d'une figure sont multipliées par k alors l'aire est multipliée par k^2 .

Exemple 1 : Sachant que l'aire de $ABCD$ est de 12 cm^2 , quelle est l'aire de $A'B'C'D'$?

$$A_{A'B'C'D'} = A_{ABCD} \times k^2$$

$$A_{A'B'C'D'} = 12 \times 1,4^2$$

$$\underline{A_{A'B'C'D'} = 23,52 \text{ cm}^2}$$

Propriété 2 : Si les dimensions d'une figure sont multipliées par k alors le volume est multiplié par k^3 .

Exemple 2 : Le volume V d'un solide est de 235 cm^3 et le rapport de réduction est $0,7$.

Calculer le volume V' du solide réduit.

$$V' = V \times k^3$$

$$V' = 235 \times 0,7^3$$

$$\underline{V' = 80,605 \text{ cm}^3}$$