



INSTITUT MBACKÉ MATHS

COURS PRIVÉS EN LIGNE

(+221) 70 713 09 21

Matière : MATHÉMATIQUES

Niveau : Troisième

RACINE CARREE

I) Définition et propriétés :

1) Définition :

On appelle racine carrée d'un nombre rationnel positif a , le réel positif noté $\sqrt{a}$ dont le carré est égal à a .

- Le symbole $\sqrt{\quad}$ est appelé **radical**.
- Le nombre a est appelé **radicande**.

❖ Exemple :

$$\sqrt{0} = 0 ; \sqrt{1} = 1 ; \sqrt{4} = 2 ; \sqrt{9} = 3 ; \sqrt{16} = 4 ; \sqrt{25} = 5 ; \sqrt{121} = 11$$

☒ Attention :

- La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.
- La racine carrée d'un nombre n'est jamais négative.

❖ Exemple :

Les nombres $\sqrt{-1}$; $\sqrt{-3}$ et $\sqrt{-\pi}$ n'existent pas.

L'équation $\sqrt{x} = -3$ n'admet pas de solution donc $S = \emptyset$.

❖ Remarque :

Un **carré parfait** est un nombre dont la racine carrée est un **entier naturel**.

❖ Exemples :

$\sqrt{4} = 2$ donc 4 est un carré parfait.

$\sqrt{25} = 5$ donc 25 est un carré parfait.

$\sqrt{10} = 3,162277 \dots$ donc 10 n'est pas un carré parfait.

2) Propriétés (P) :

♥ **P1** — $(\sqrt{a})^2 = a$ (conséquence de la définition)

♥ **P2** — $\sqrt{a^2} = |a|$ En effet : $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$ (La valeur absolue d'un nombre n'est jamais négative.)

❖ Exemples :

$$(\sqrt{4})^2 = 4 ; (\sqrt{0,1})^2 = 0,1 ; (\sqrt{\pi})^2 = \pi$$

$$\sqrt{9^2} = |9| = 9 ; \sqrt{2,5^2} = |2,5| = 2,5 ; \sqrt{(-5)^2} = |-5| = -(-5) = 5$$

♥ **P3** — $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ($a \geq 0$ et $b \geq 0$)

♥ **P4** — $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($a \geq 0$ et $b > 0$)

❖ Exemples :

$$\sqrt{25 \times 64} = \sqrt{25} \times \sqrt{64} = 5 \times 8 = 40 ; \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5 ; \sqrt{\frac{18}{16}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{9 \times 2}}{4} = \frac{\sqrt{9} \times \sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

☒ **Attention :**

➤ $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} ; \forall a > 0 \text{ et } b > 0$

➤ $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b} ; \forall a > 0 \text{ et } b > 0$

❖ Exemples :

$$\begin{cases} \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \end{cases} \Rightarrow 5 \neq 7 \Rightarrow \sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\begin{cases} \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8 \\ \sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4 \end{cases} \Rightarrow 8 \neq 4 \Rightarrow \sqrt{100-36} \neq \sqrt{100} - \sqrt{36}$$

II) Nombres irrationnels — Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

1) Les nombres irrationnels :

◆ **Rappel :** ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.

❖ Exemples :

$$3 \in \mathbb{Q} \text{ car } 3 = \frac{3}{1} ; 2,5 \in \mathbb{Q} \text{ car } 2,5 = \frac{25}{10} ; -0,01 \in \mathbb{Q} \text{ car } -0,01 = \frac{-1}{100}$$

$$\sqrt{25} \in \mathbb{Q} \text{ car } \sqrt{25} = 5 = \frac{5}{1}$$

Ainsi un nombre irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel.

❖ Exemples :

$$\sqrt{2} = 1,414213562 \dots (\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}) ; \sqrt{3} = 1,732050807 \dots (\sqrt{3} \notin \mathbb{Q})$$

$$\pi = 3,141592653 \dots (\pi \notin \mathbb{Q})$$

2) L'ensemble des nombres réels :

Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$$

❖ Exemples :

$$2 ; -1,5 ; \sqrt{5} ; \frac{-3}{4} ; \pi ; -\sqrt{7} \text{ sont des nombres réels.}$$

◆ Remarque :

Avec la relation d'inclusion, les ensembles sont ainsi ordonnés :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

III) Calcul avec les radicaux :

1) Somme algébrique — Développement — Puissance :

◆ Propriétés :

Soient $(a ; c) \in \mathbb{R} ; (b ; d) \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{♥ — } a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a + c)\sqrt{b}$$

$$\text{♥ — } a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$$

$$\text{♥ — } \sqrt{a^{2n}} = a^n \quad \sqrt{a^{2n+1}} = a^n \sqrt{a}$$

❖ Exemples :

Simplifions les expressions suivantes :

$$\text{◆ } A = 7\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = (7 + 3 + 1)\sqrt{3} = 11\sqrt{3} \quad \boxed{A = 11\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{◆ } B &= \sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{80} = \sqrt{4 \times 5} - \sqrt{9 \times 5} + \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} - \sqrt{9} \times \sqrt{5} + \sqrt{16} \times \sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = (2 - 3 + 4)\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \quad \boxed{B = 3\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{◆ } C &= -5\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} = (-5 \times 2)\sqrt{3 \times 6} = -10\sqrt{18} = -10\sqrt{9 \times 2} \\ &= -10\sqrt{9} \times \sqrt{2} = -10 \times 3 \times \sqrt{2} = -30\sqrt{2} \quad \boxed{C = -30\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{◆ } D = \sqrt{4^6} = \sqrt{4^{2 \times 3}} = 4^3 = 48 \quad \boxed{D = 48}$$

$$\diamond E = \sqrt{9^9} = \sqrt{9^{2 \times 4 + 1}} = 9^4 \sqrt{9} = 19683 \quad \boxed{E = 19683}$$

2) Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient : expression conjuguée :

Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient revient à écrire le quotient sans radical au dénominateur.

Pour rendre rationnel le dénominateur d'un quotient, on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

a) Expression de la forme $\frac{a}{b\sqrt{c}}$ avec $b \in \mathbb{Q}^*$ et $c \in \mathbb{N}^*$:

◆ Règle :

Pour rendre rationnel le dénominateur d'une expression de la forme $\frac{a}{b\sqrt{c}}$, on multiplie les termes du quotient par $\sqrt{c}$.

❖ Exemples :

Rendons rationnel le dénominateur des quotients suivants :

$$\diamond A = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \quad \boxed{A = \frac{5\sqrt{3}}{3}}$$

$$\diamond B = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{(2 - 2\sqrt{3})\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2(\sqrt{2} - \sqrt{6})}{2} = \sqrt{2} - \sqrt{6} \quad \boxed{B = \sqrt{2} - \sqrt{6}}$$

$$\diamond C = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \times (\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \boxed{C = \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

b) Expression de la forme $\frac{a}{b + c\sqrt{d}}$ avec $b, c \in \mathbb{Q}^*$ et $d \in \mathbb{N}^*$:

◆ Règle :

Pour rendre rationnel le dénominateur d'une expression de la forme $\frac{a}{b + c\sqrt{d}}$, on multiplie les termes du quotient par $(b - c\sqrt{d})$, appelé expression conjuguée de $(b + c\sqrt{d})$.

❖ Exemple 1 :

Rendons rationnel le dénominateur des expressions suivantes :

$$\diamond A = \frac{-5}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{-5(3 - 2\sqrt{2})}{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})} = \frac{-15 + 10\sqrt{2}}{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{-15 + 10\sqrt{2}}{9 - 8} = -15 + 10\sqrt{2}$$

$$A = -15 + 10\sqrt{2}$$

$$\blacklozenge B = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 1^2}{5 - 1} = \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{4}$$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \boxed{B = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$\blacklozenge C = \frac{2\sqrt{2}}{3(-3 + 2\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{2}(-3 - 2\sqrt{3})}{3(-3 + 2\sqrt{3})(-3 - 2\sqrt{3})} = \frac{-6\sqrt{2} - 4\sqrt{6}}{3[(-3)^2 - (2\sqrt{3})^2]} = \frac{-6\sqrt{2} - 4\sqrt{6}}{3(9 - 12)}$$

$$= \frac{-6\sqrt{2} - 4\sqrt{6}}{3(-3)} = \frac{-6\sqrt{2} - 4\sqrt{6}}{-9} \quad \boxed{C = \frac{-6\sqrt{2} - 4\sqrt{6}}{-9}}$$

$$\blacklozenge D = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 5\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(4\sqrt{3} - 5\sqrt{2})}{(4\sqrt{3} + 5\sqrt{2})(4\sqrt{3} - 5\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{6} - 10 - 12 + 5\sqrt{6}}{(4\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{2})^2} = \frac{-22 + 9\sqrt{6}}{48 - 50}$$

$$= \frac{-22 + 9\sqrt{6}}{-2} = \frac{22 - 9\sqrt{6}}{2} \quad \boxed{D = \frac{22 - 9\sqrt{6}}{2}}$$

IV) Comparaison de réels comportant des radicaux :

1) Réels du type $a\sqrt{b}$:

◆ Règle 1 :

Pour comparer deux réels **positifs** du type $a\sqrt{b}$, on les élève au carré et celui qui aura le carré le plus grand sera le plus grand.

❖ Exemple 1 :

On donne les réels suivants : $a = 3\sqrt{2}$; $b = 2\sqrt{3}$; $c = 5$; $d = 2\sqrt{7}$

◆ Comparons les réels a et b :

$$\begin{cases} a^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18 \\ b^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow 18 > 12 \Rightarrow 3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}. \text{ Donc } \boxed{a > b}$$

◆ Comparons les réels c et d :

$$\begin{cases} c^2 = 5^2 = 25 \\ d^2 = (2\sqrt{7})^2 = 28 \end{cases} \Rightarrow 25 < 28 \Rightarrow 5 < 2\sqrt{7}. \text{ Donc } \boxed{c < d}$$

❖ Exemple 2 :

Trouvons le signe de l'expression $A = 3 - 2\sqrt{5}$.

$$\begin{cases} 3^2 = 9 \\ (2\sqrt{5})^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow 9 < 20 \Rightarrow 3 < 2\sqrt{5} \Rightarrow 3 - 2\sqrt{5} < 0. \text{ Donc } A \text{ est négatif.}$$

◆ **Règle 2 :**

Pour comparer deux réels **négatifs** du type $a\sqrt{b}$, on les élève au carré et celui qui aura le carré le plus petit sera le plus grand.

❖ **Exemples :**

On donne les réels suivants : $a = -3\sqrt{2}$; $b = -2\sqrt{3}$; $c = -4$; $d = -2\sqrt{5}$

◆ Comparons les réels a et b :

$$\begin{cases} a^2 = (-3\sqrt{2})^2 = 18 \\ b^2 = (-2\sqrt{3})^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow 18 > 12 \Rightarrow -3\sqrt{2} < -2\sqrt{3}. \text{ Donc } \boxed{a < b}$$

◆ Comparons les réels c et d :

$$\begin{cases} c^2 = (-4)^2 = 16 \\ d^2 = (-2\sqrt{5})^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow 16 < 20 \Rightarrow -4 > -2\sqrt{5}. \text{ Donc } \boxed{c > d}$$

2) Réels du type $a + b\sqrt{c}$ et $a' + b'\sqrt{c}$:

❖ **Exemples :**

Comparons les réels $2 - \sqrt{2}$ et $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$:

$$\begin{cases} 2^2 = 4 \\ (\sqrt{2})^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 4 > 2 \Rightarrow 2 > \sqrt{2}. \text{ Donc } 2 - \sqrt{2} > 0$$

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2} \\ \left(\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}\right)^2 = 6 - 4\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{Alors } \boxed{2 - \sqrt{2} = \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}}$$

V) Racine carrée et équation :

◆ **Propriétés :**

♥ $\boxed{x^2 = a \Rightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}} \text{ (avec } a \geq 0 \text{)}$

♥ — $\boxed{a^2 = b^2 \Rightarrow a = b \text{ ou } a = -b}$

❖ **Exemples :**

Réolvons les équations suivantes :

◆ $x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} \text{ ou } x = -\sqrt{25} \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = -5 \quad \boxed{S = \{-5 ; 5\}}$

$$\diamond 2x^2 - 16 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{2} \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8} \text{ ou } x = -\sqrt{8}$$

$$x = \sqrt{4 \times 2} \text{ ou } x = -\sqrt{4 \times 2} \Rightarrow x = \sqrt{4} \times \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$x = 2\sqrt{2} \text{ ou } x = -2\sqrt{2} \quad \boxed{S = \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}}$$

☒ **Attention :**

Le carré d'un nombre n'est jamais négatif.

❖ Exemples :

Réolvons les équations suivantes :

$$\diamond x^2 = -5 : \text{absurde.} \quad \boxed{S = \emptyset}$$

$$\diamond 2x^2 + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -6 \Rightarrow x^2 = -3 : \text{absurde.} \quad \boxed{S = \emptyset}$$

VI) Encadrement :

❖ Exemple 1 :

Encadrons le réel $Z = \sqrt{3} + 1$ sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.

$$1,732 < \sqrt{3} < 1,733$$

$$1,732 + 1 < \sqrt{3} + 1 < 1,733 + 1$$

$$2,732 < \sqrt{3} + 1 < 2,733$$

Ainsi :

— Un encadrement de Z à l'unité près est : $\boxed{2 < \sqrt{3} + 1 < 3}$

— Un encadrement de Z à 10^{-1} près (à 0,1 près) est : $\boxed{2,7 < \sqrt{3} + 1 < 2,8}$

— Un encadrement de Z à 10^{-2} près (à 0,01 près) est : $\boxed{2,73 < \sqrt{3} + 1 < 2,74}$

— Un encadrement de Z à 10^{-3} près (à 0,001 près) est : $\boxed{2,732 < \sqrt{3} + 1 < 2,733}$

❖ Exemple 2 :

Encadrons le réel $W = 7 - 3\sqrt{2}$ sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

$$-3 \times 1,414 > -3\sqrt{2} > -3 \times 1,415$$

$$-4,242 > -3\sqrt{2} > -4,245$$

$$-4,245 < -3\sqrt{2} < -4,242$$

$$7 - 4,245 < 7 - 3\sqrt{2} < 7 - 4,242$$

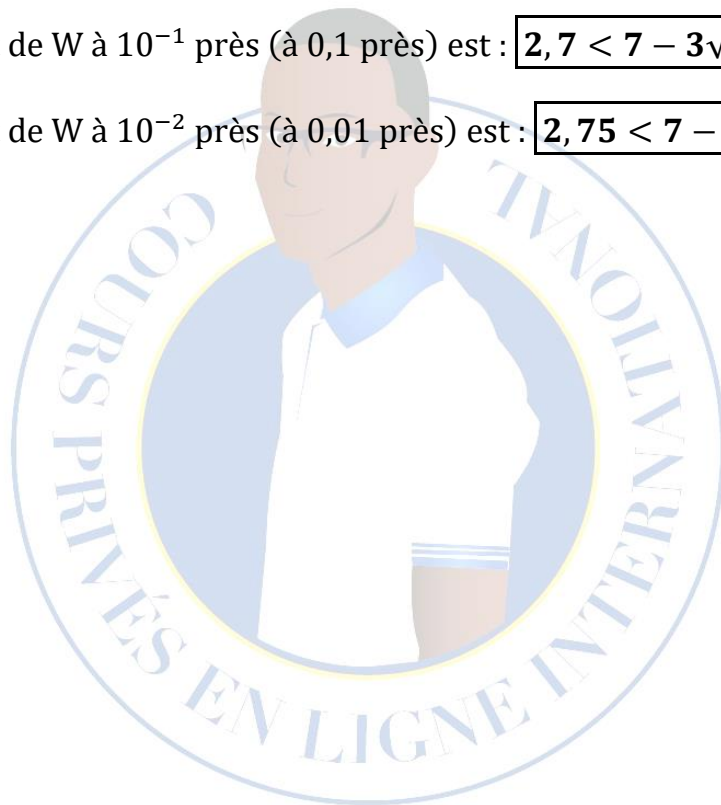
$$2,755 < 7 - 3\sqrt{2} < 2,758$$

Ainsi :

— Un encadrement de W à l'unité près est : $2 < 7 - 3\sqrt{2} < 3$

— Un encadrement de W à 10^{-1} près (à 0,1 près) est : $2,7 < 7 - 3\sqrt{2} < 2,8$

— Un encadrement de W à 10^{-2} près (à 0,01 près) est : $2,75 < 7 - 3\sqrt{2} < 2,76$



Institut

MBACKÉ MATHS

Plus vous vous exercez, plus vous vous améliorez



INSTITUT MBACKÉ MATHS

Cours privées en ligne International en MATHS, PC, SVT



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)$$

$$-b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$$V = Lwh$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Cours privés en ligne international

(Année 2023-2024)

Niveau

Terminale S2 // S1

Première S2 // S1

3eme

Seconde S

Options au choix

Option A Maths - PC -SVT

Option B Maths - PC

Option C Maths

Annales avec correction en vidéo réservés aux élèves des cours en ligne

Les cours débutent le 7 Novembre 2023.

Les inscriptions ont démarrées et se poursuivent

Inscrivez-vous maintenant au +221 70 713 09 21



Faites-vous encadrer par des **professeurs réputés au Sénégal**



Obtenez notre fascicule réservés aux membres des cours en ligne de l'Institut Mbacké Maths



Faites parti des **meilleurs de votre classe** et réussissez votre année avec distinction



Mbacké Maths

Visitez notre chaine Youtube



+221 70 713 09 21



mbaces883@gmail.com



Dakar, Sénégal