

DEVOIR COMMUNALÉPREUVE : MathématiquesCLASSE : T^{le} DDurée : 4 heuresContexte : Construction d'un restaurant

Kwegnon, un opérateur économique, décide de construire un restaurant dont la réalisation de la maquette est confiée à l'ingénieur Gounou. Sur le dessin de Gounou, la salle principale du restaurant est représentée par l'image du cercle circonscrit au triangle BAD par la similitude plane directe s de centre D qui transforme A en B dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm . Les points B, C et D ont respectivement pour affixes z_B, z_C et z_D solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$(E) : z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0 \text{ avec } \text{Im}(z_D) < \text{Im}(z_B) < \text{Im}(z_C)$$

et le point A a pour affixe $-3i$.

Un espace de jeux où les jeunes et adultes peuvent se divertir, est construit dans un domaine $(\mathcal{H})$.

Kwegnon souhaiterait obtenir une équation de la représentation de la salle principale puis connaître coût de la réalisation du restaurant.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Kwegnon en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

- (a) Justifie que $2i$ est une solution de l'équation (E) .
(b) Déduis-en les affixes des points B, C et D
- On suppose que $z_C = 2i, z_B = 1 - i$ et $z_D = -2 - 2i$
(a) Place les points A, B, C et D dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(b) Démontre que le triangle BAD est rectangle isocèle.
- (a) Justifie que l'écriture complexe de s est : $z' = (1+i)z - 2 + 2i$.
(b) Détermine l'image du triangle BAD par la similitude s puis donne sa nature.
(c) Déduis-en une équation cartésienne de la représentation de la salle principale sur le dessin.

Problème 2

Un des jeux que Kwegnon envisage présenter dans le restaurant, consiste à lancer successivement trois boules dans un panier à partir d'un point situé à une distance donnée du panier. Tout joueur qui réussit aux moins deux de ses lancers est déclaré gagnant du jeu. On suppose que les lancers des boules sont indépendants les uns des autres et que la probabilité qu'un joueur donné réussisse un lancer est égale à $\frac{3}{4}$.

- Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers réussis par un joueur donné à l'issue de l'épreuve des trois lancers successifs.
(a) Détermine les valeurs prises par X .

- (b) Détermine la loi de probabilité de X .
5. (a) Détermine l'espérance mathématique $E(X)$ de X .
- (b) Détermine puis représente la fonction F_X de répartition de X
6. Démontre que la probabilité de gagner le jeu est égale à $\frac{27}{32}$

Problème 3

Le domaine($\mathcal{H}$) est délimité par les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$; l'axe des abscisses et la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de la fonction numérique h à variable réelle définie par :

$h(x) = 2x - \ln(f(x) + 2)$ où f est la solution de l'équation différentielle (F) : $y'' - 3y' + 2y = 0$ vérifiant $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'unité graphique $6m$.

Par ailleurs, le coût total de construction du restaurant en centaine de millions de FCA est $\beta = \frac{2\alpha}{\ln 2}$ où α est la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$$

7. (a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{2x} - 2e^x$.
- (b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) + 2 > 0$ puis déduis-en que l'ensemble de définition D_h de h est $\mathbb{R}$.
- (c) Montre que h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
8. (a) Calcule les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
- (b) Montre que la droite $(\Delta) : y = 2x - \ln 2$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$
9. (a) Étudie les variations de h sur D_h .
- (b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $h(x) = x$
10. (a) Étudie la position relative de la droite (Δ) et la courbe $(\mathcal{C})$.
- (b) Trace la droite (Δ) et la courbe $(\mathcal{C})$.
- (c) Calcule en m^2 une valeur approchée de l'aire du domaine de l'espace de jeux par la méthode des trapèzes en subdivisant l'intervalle $[1, 2]$ en cinq (5) intervalles de même amplitude.
11. (a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq U_n \leq \ln 2$
- (b) Démontre par récurrence que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
- (c) Déduis-en que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
12. (a) Détermine la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- (b) Déduis-en le coût total construction du restaurant.

Bonne Composition !!