Les systèmes de deux équations à deux inconnues.

Activité de découverte

Deux entreprises de déménagement affichent les tarifs suivants :

- CASSERIEN : 10€ par kilomètre.
- PORTELOIN : 400€ au départ + 5€ par kilomètre

Quelle distance dois-tu parcourir pour payer le même prix pour les deux entreprises ?
Résous le problème selon tes connaissances. Tu peux travailler avec ton voisin de banc.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Mise en commun :

.....

.....

.....

.....

.....

Les systèmes de deux équations à deux inconnues.

Fiche 1 : Comment traduire un problème français en mathématique ?

.....

.....

.....

1) Que contient un problème ?

Un problème **renferme deux informations**, dans le cas que l'on vient de voir :

- *le tarif de l'entreprise CASSERIEN.*
- *le tarif de l'entreprise PORTELOIN.*

Un problème **renferme deux inconnues**, dans le cas que l'on vient de voir :

- *le prix.*
- *le nombre de kilomètre, la distance.*

Nous avons affaire à un **système de deux équations du 1er à deux inconnues**.

2) Etape pour traduire un problème en mathématique :

A. Nommer les deux inconnues et les désigner par x et y
   - *Dans le cas qu'on vient de voir :*
     → *Soit x représente la distance parcourue, le nombre de km.*
     → *Soit y représente le prix à payer*

B. Traduire le premier renseignement par une équation du premier degré à deux inconnues
   - *Dans le cas que l'on vient de voir : y = 10x*

Les systèmes de deux équations à deux inconnues.

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

C. Traduire le deuxième renseignement par une équation du 1er degré à deux inconnues.

- *Dans le cas que l'on vient de voir : y = 5x + 400*

D. Ecrire ces deux équations l'une sous l'autre en les associant à l'aide d'une accolade.
   - *Dans le cas que l'on vient de voir :* $\begin{cases} y = 10x \\ y = 5x + 400 \end{cases}$
     L'accolade montre le lien entre les deux équations, elle signifie «et»

Ensemble, nous venons d'arriver à une écriture des deux équations dans le problème de l'activité de découverte. Tente de résoudre ce système de deux équations à deux inconnues.

$\begin{cases} y = 10x \\ y = 5x + 400 \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Les systèmes de deux équations à deux inconnues.

Découverte de la 1ère méthode : méthode de substitution.

Complète

Pour déterminer la valeur des deux inconnues, il faut déterminer une valeur pour x et une valeur pour y qui vérifient .....
On dit qu'il faut résoudre le ..... formé par les deux équations trouvées.
Découvrons ensemble les différentes méthodes pour résoudre ce type de système.

Première méthode : la méthode de substitution

Résous le système d'équation suivant en suivant les indications.

Résolution	Explication, justification
$\begin{cases} y = 10x \\ y = 5x + 400 \end{cases}$	On recopie les deux équations trouvées ou données sous forme de système.
$\Leftrightarrow$ {	On exprime une des inconnues en fonction de l'autre en utilisant une des deux équations (Au choix). On recopie la deuxième équation.
	On remplace cette inconnue

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$	par l'expression trouvée, dans l'autre équation.
$\Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$	On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue.
$\Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$	
$\Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$	

Résolution	**Explication, justification**
$\Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$	On introduit la valeur trouvée dans l'autre équation et on déterminer ainsi la valeur de l'autre inconnue.
$\Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$	
$S = \{ \left(\quad , \quad \right) \}$	Ecriture de la solution : $S = \{(x\,;y)\}$

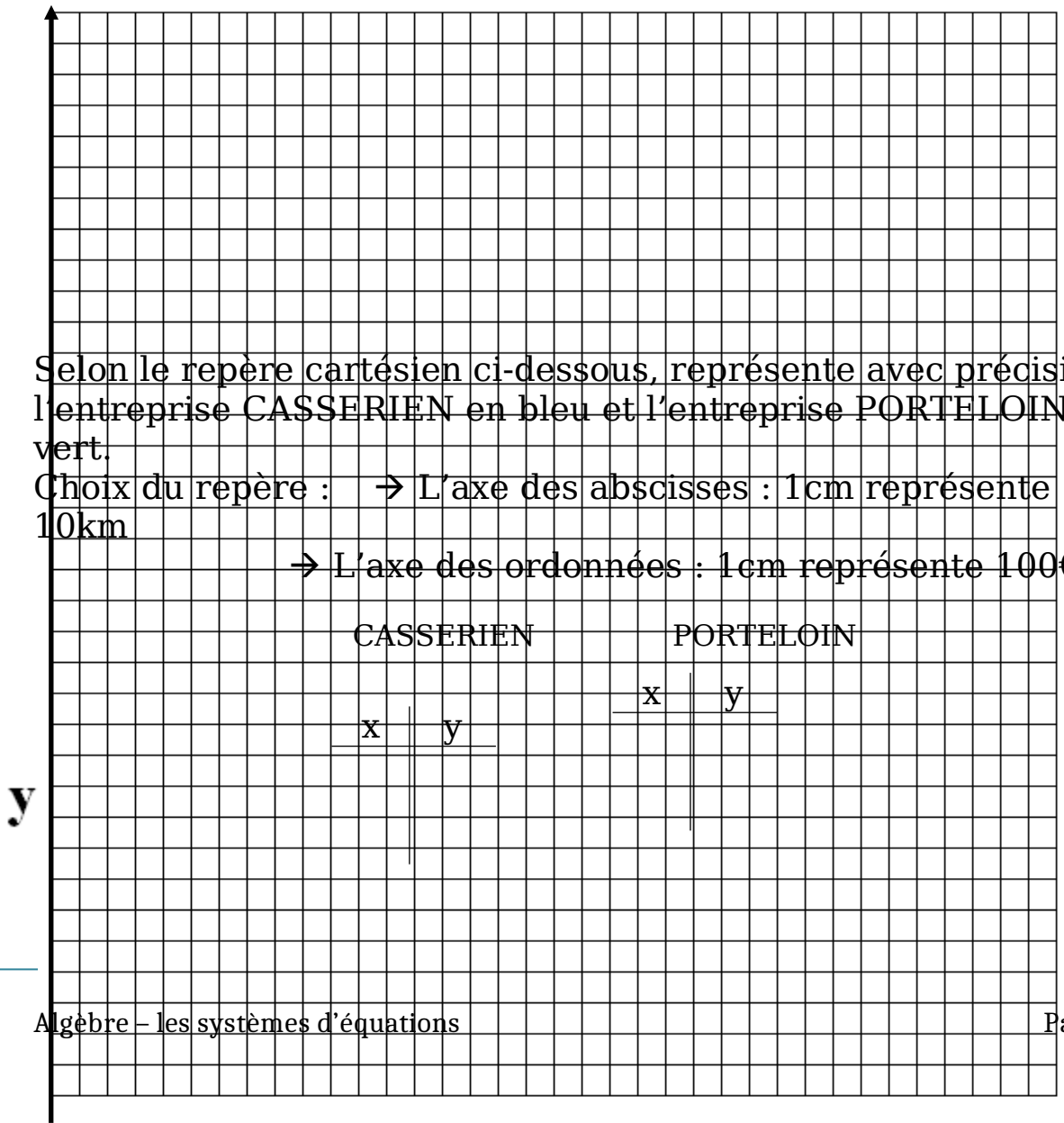
Vérifie que le couple (x, y) trouvé est bien la solution des deux équations de départ du problème en remplaçant x et y dans les équations.

Première équation :	Deuxième équation : .....
....	....

Les systèmes de deux équations à deux inconnues.

Représentation graphique du problème.

.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....
.....	.....



Selon le repère cartésien ci-dessous, représente avec précision l'entreprise CASSERIEN en bleu et l'entreprise PORTELOIN en vert.

Choix du repère : → L'axe des abscisses : 1cm représente 10km

→ L'axe des ordonnées : 1cm représente 100€

CASSERIEN	
x	y

PORTELOIN	
x	y

x

~~Quel est le point d'intersection de ces deux droites ? Donne la~~ coordonnée de ce point.

.....
.....

Que représente le point d'intersection sur le graphique ?

.....
.....

Complète

Le .....de ces deux droites est la représentation graphique de la solution du problème de départ.
La coordonnée de ce point vérifie les deux équations et est donc bien la solution de ce système.
x représente la ..... et y le .....

Les systèmes de deux équations à deux inconnues.

Quelques exercices sur la méthode de substitution.

On note S = { (,) }

<u>Remarque</u> : la représentation graphique n'est pas considérée comme une méthode de résolution car lorsque la solution n'est plus composée de nombres entiers, celle-ci n'est pas suffisamment précise.
Elle sert de vérification de sa réponse, solution.

En lisant le graphique, détermine l'entreprise la plus avantageuse en fonction du nombre de kilomètres (Sois complet et justifie) :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1) Résous les systèmes d'équations suivants avec la méthode de substitution.

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 7x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ x - 9y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 2y = 0 \\ 4x + 3y = -1 \end{cases}$$

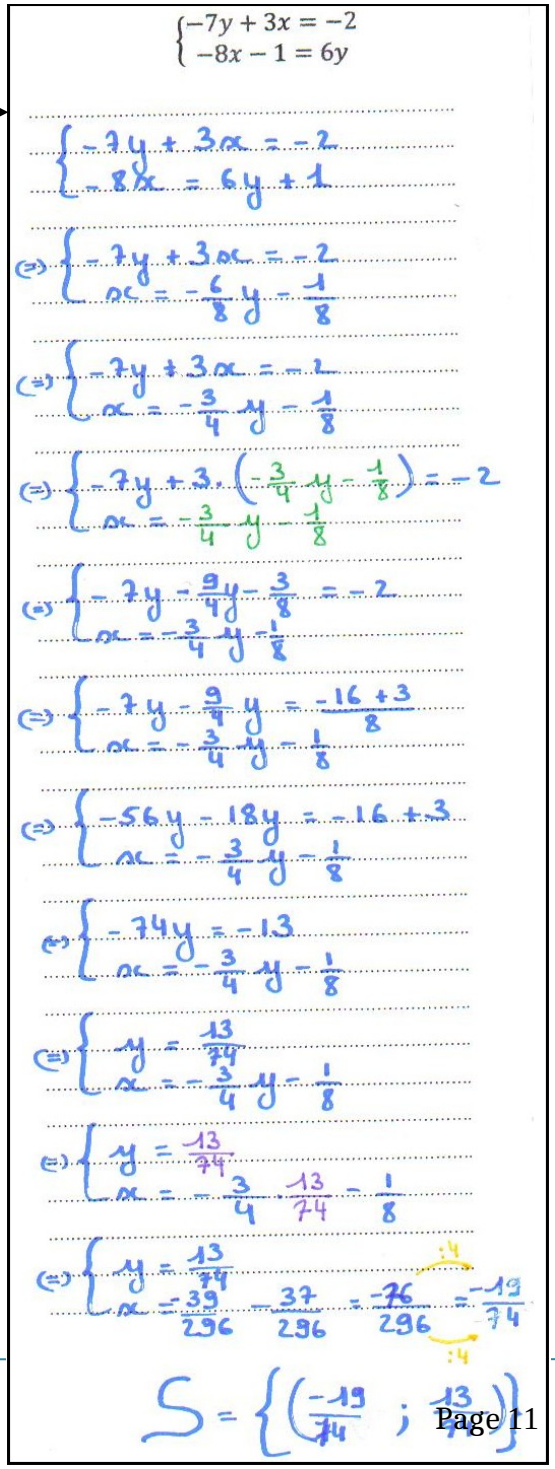
$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 4x + 8y = 8 \end{cases}$$

Les systèmes de deux équations à deux inconnues.

Deuxième méthode : méthode d'addition.

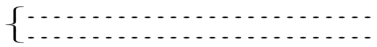
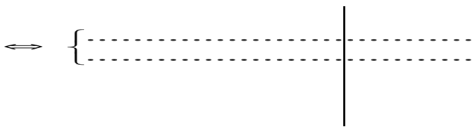
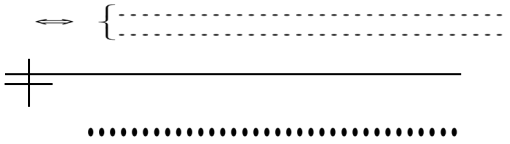
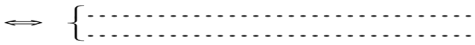
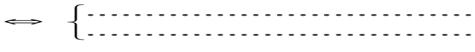
Nous avons remarqué que l'utilisation de la méthode de substitution n'est pas toujours pratique dans certains cas, le calcul est long et la probabilité de faire des erreurs est plus élevée dû au remplacement d'inconnue parfois trop complexe (Utilisation de fraction,...).
Voici l'exemple d'un système que j'ai résolu qui comporte onze étapes... que c'~~est fastidieux...pfff~~

C'est pour cette raison que nous allons apprendre à appliquer une autre méthode : la <u>méthode d'addition</u> appelée aussi <u>méthode de Gauss</u> ou <u>combinaison linéaire</u>.



Deuxième méthode : la méthode d'addition (combinaison linéaire)

Résous le système d'équation que tu viens de résoudre précédement (le dernier)

Résolution	Explication, justification
	On recopie les deux équations trouvé ou donné sous forme de système.
	On ré-écrit les deux équations sous la forme ax - y = b si nécessaire puis on multiplie une ou les deux équations par un nombre pour que les coefficients d'une des inconnues soient opposés.
	On recopie les deux équations multiplié par ce nombre. On les additionne entre elles. On obtient ainsi une nouvelle équation à une inconnue.
	On recopie une des deux équations de départ et la nouvelle équation trouvée en dessous.
	On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue.
	

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$	On introduit la valeur trouvée dans l'autre équation.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$	On détermine la valeur de la seconde inconnue.
$\Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$	
La solution du système est le couple	
On note S = $\{ \left(\quad , \quad \right) \}$	

Vérifie ta réponse algébriquement puis graphiquement.

Vérification algébrique :

.....

.....

.....

.....

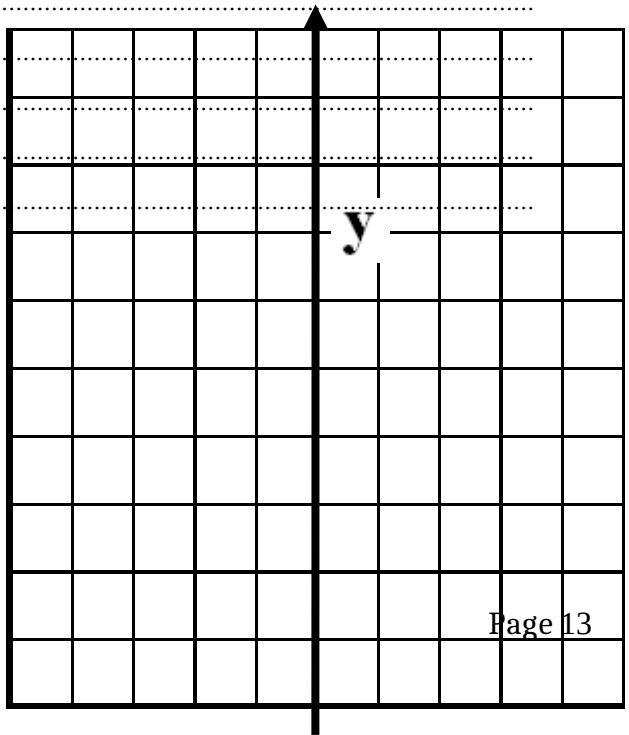
.....

.....

.....

Vérification graphique :

x	y



Les systèmes de deux équations à deux inconnues.

Si on appliquait ces deux méthodes ?

x	y



Dans les exercices suivants, tu utiliseras la méthode de ton choix, cependant, essayes d'être judicieux dans le choix de celle-ci car cela peut te permettre de sacré raccourci !!

Résous les systèmes suivants.

1) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$ méthode la plus judicieuse :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) $\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$ méthode la plus judicieuse :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) $\begin{cases} x = 4y - 2 \\ -y + 5 = x \end{cases}$ méthode la plus judicieuse : ………………………………………………

……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………

4) $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ -x - 4y = 7 \end{cases}$ méthode la plus judicieuse : ………………………………………………

……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………
……………………………………………………………… ………………………………………………………………

....
....
....

5) $\begin{cases} 3x+6y=0 \\ x+3y=2 \end{cases}$ méthode la plus judicieuse :

.....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

6) $\begin{cases} y=4x-2 \\ -3x+2y=0 \end{cases}$ méthode la plus judicieuse :

.....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....

7) $\begin{cases} 11y + 4x - 6 = 0 \\ 3y - 1 = -x \end{cases}$ méthode la plus judicieuse :

.....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

8) $\begin{cases} 5x - 2y - 5 = 0 \\ -4x + 3y = 3 \end{cases}$ méthode la plus judicieuse :

.....

....
....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....

9) $\begin{cases} -4x + 6y = 8 \\ -3x + 5y = 0 \end{cases}$ méthode la plus judicieuse :

.....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

10) $\begin{cases} -5x + 2y = 10 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$ méthode la plus judicieuse :

.....

....
....
....
....

Les systèmes de deux équations à deux inconnues.

Y-a-t-il toujours un point d'intersection ?

Jusqu'ici, nous avons eu affaire à des systèmes de deux équations à deux inconnues dont la solution était un couple de point appartenant aux deux droites, c'est-à-dire le point d'intersection de ces deux droites. En est-il toujours comme ça pour tous les systèmes ?

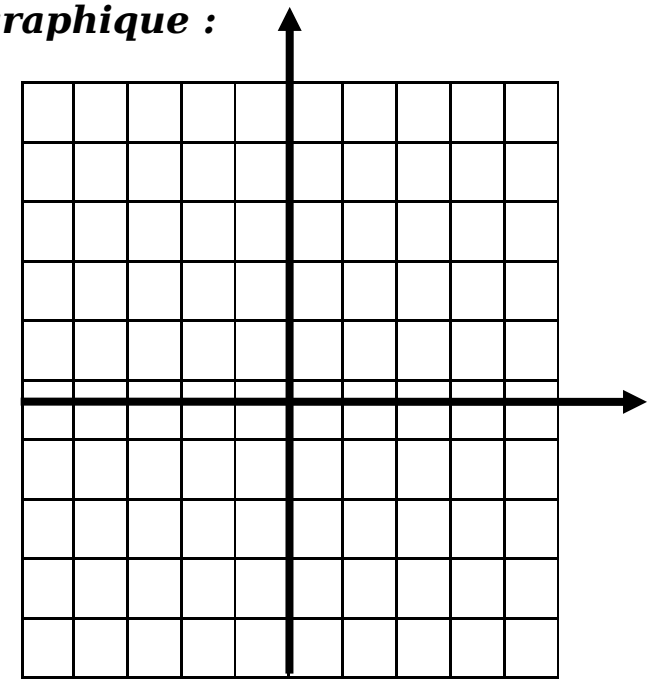
Résous le système suivant par la méthode de ton choix puis fais en une représentation graphique dans le repère cartésien ci-dessous.

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 6x - 3y = -12 \end{cases}$$

Résolution algébrique :

.....

Résolution graphique :



Complète la phrase suivante :

Si deux droites sont ..... alors le système n'a pas de .....
On dit que le système est ..... S = ...

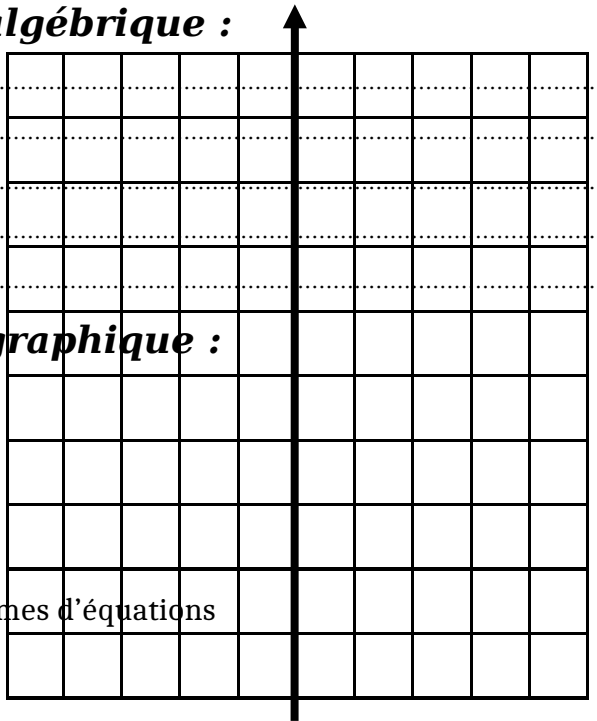
Résous le système suivant par la méthode de ton choix puis fais en une représentation graphique dans le repère cartésien ci-dessous.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Résolution algébrique :

.....
.....
.....
.....
.....

Résolution graphique :



Les systèmes de deux équations à deux inconnues.

Fiche 2 : une fiche pratique pour résoudre des problèmes



Complète la phrase suivante :

Si deux droites sont ..... alors le système possède une infinité de .....
On dit que le système est .....

Nous allons maintenant résoudre quelques problèmes tels que celui qui nous a permis d'introduire ce chapitre. Pour cela, voici une fiche décrivant les différentes étapes pour résoudre n'importe quel problème. Pratique non ?

Les différentes étapes pour résoudre un problème :

1) Lire le problème attentivement et repérer les inconnues.

2) Nommer les deux inconnues et les désigner par x et y.

3) Mettre en équation le problème.

→ Forme canonique : $y = ax + b$ → *Exemple :* $y = 3x + 4$

→ Autres formes : $b = ax - y$,… → *Exemple :* $3x - 2y = 4$ *ou* $4 = 3x - 2y$

4) Ecrire les deux équations sous forme de système.

$\begin{cases} y = ax + b \\ y = ax + b \end{cases}$ ou $\begin{cases} ax - y = b \\ ax - y = b \end{cases}$

5) Choisir une méthode en fonction du système présenté.

→ *Méthode de substitution* (Souvent utilisée pour des systèmes composés d'équations écrites sous leur forme canonique y = ax + b)
→ *Méthode d'addition*, combinaison linéaire ou méthode de Gauss (Souvent utilisée pour des systèmes composés d'équations n'étant pas écrites sous leur forme canonique y = ax + b)

6) Résoudre le système algébriquement en respectant les étapes de la méthode et les notations (Accolade, signe d'équivalence, notation de la solution)

7) Vérifier le système algébriquement en remplaçant la valeur du x et du y trouvée dans les deux équations.

8) Vérifier le système graphiquement (Cette étape n'est pas obligatoire) en traçant les deux équations de droites. Si les deux droites se coupent en un point et que ce couple représente la solution trouvé, c'est correct.

9) Ecrire en français la réponse au problème de départ.

Les systèmes de deux équations à deux inconnues.

Des problèmes pour s'entraîner…

Voici différents problèmes. Résous-les. Attention, passe bien par toutes les étapes de résolution d'un problème. Tu peux bien sur t'aider de ta fiche de théorie (page précédente).

PROBLÈME N°1 : À la boulangerie, Paul paye $8€$ pour quatre pains et quatre croissants. Anaïs, avec deux pains et dix croissants elle paie également $8€$. Quel est le prix d'un pain et quel est le prix d'un croissant ?

a) Choix des inconnues

Soit x est .....
Soit y est .....

b) Mise en équations

$\begin{cases} \end{cases}$

c) Résolution algébrique du système

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

d) Vérification

.....
.....
.....
.....

e) Solution du problème

Le prix d'un pain est de .....
Le prix d'un croissant est de .....

PROBLÈME N°2 : À la mer, Charlotte et ses amies achètent trois glaces et cinq gâteaux pour $11{,}35€$. Le lendemain, elle achète cinq glaces et trois gâteaux pour $10{,}65€$. Quel est le prix d'une glace ? Quel est le prix d'un gâteau ?

a) Choix des inconnues

Soit x est .....
Soit y est .....

b) Mise en équations

$\begin{cases}$

c) Résolution algébrique du système

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

d) Vérification

.....
.....
.....
.....

e) Solution du problème

Le prix d'une glace est de .....
Le prix d'un gâteau est de .....

PROBLÈME N°3 : Je viens de sortir d'une soirée et il est vraiment tard. Je n'ai pas le choix, je dois prendre un taxi pour rentrer. Le premier chauffeur de taxi me propose le tarif suivant : la prise en charge coûte $5€$ et il demande $3€$ du kilomètre. Le deuxième chauffeur me propose un tarif à 5€ du kilomètre. Détermine la distance pour laquelle les deux prix à payer sont les mêmes.

Détermine ensuite la société de taxi la plus avantageuse.

a) Choix des inconnues

Soit x est .....
Soit y est .....

b) Mise en équations

$\begin{cases} \\ \end{cases}$

c) Résolution algébrique du système

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

d) Vérification

.....
.....

…… ……

…… ……

e) Représentation graphique

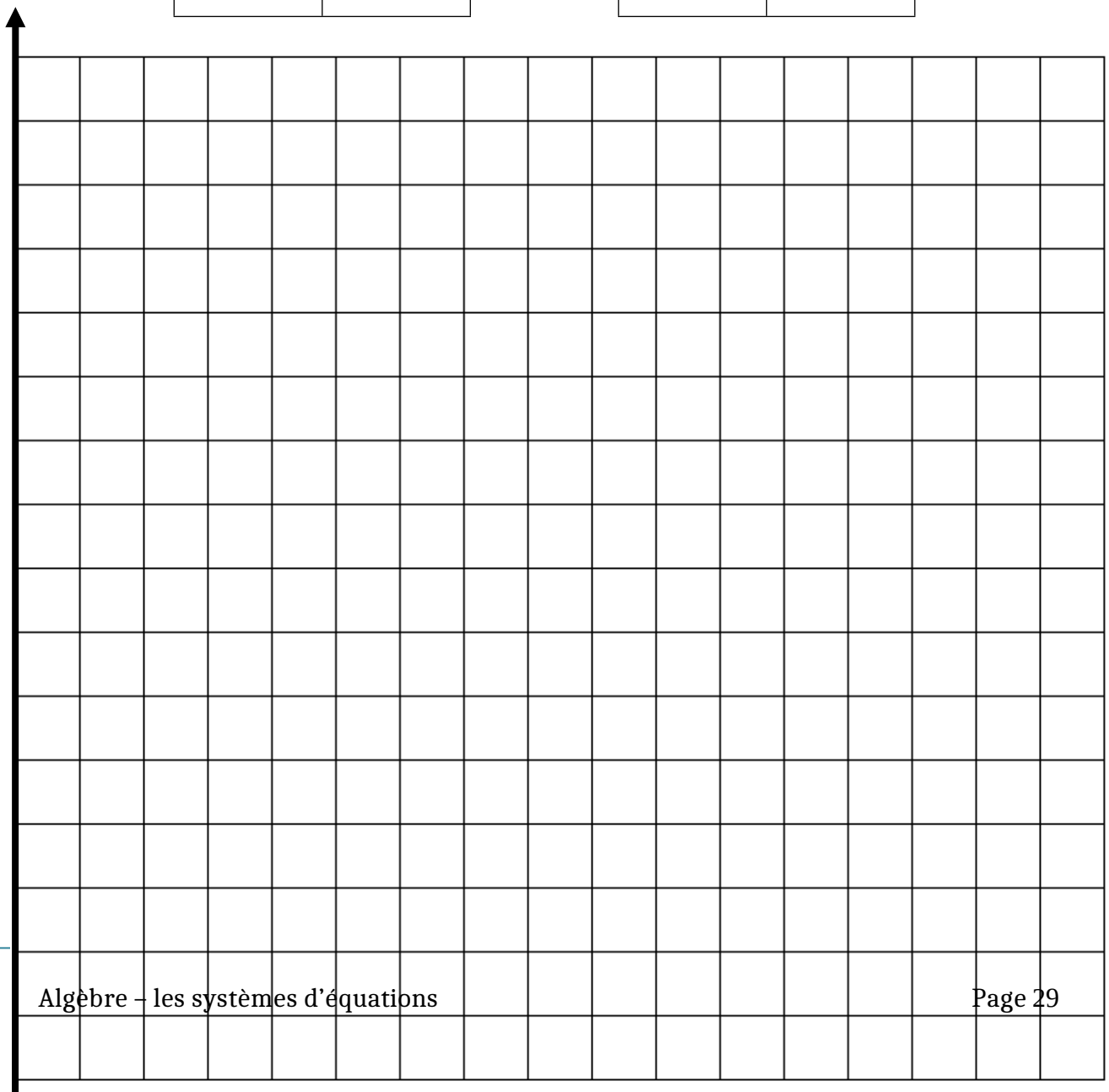
Choisis un repère cartésien adéquat et représente le premier chauffeur en bleu et le deuxième en vert

Choix du repère : Axe des abscisses : 1 carré = ……

Axe des ordonnées : 1 carré = ……

Premier chauffeur	
x	y

Deuxième chauffeur	
x	y



f) Solution du problème

……

……

g) Conclusion

En lisant le graphique, détermine la société de taxi la plus avantageuse en fonction du nombre de kilomètre (sois complet) :

……

……

……

……

……

……

……

PROBLÈME N°4 : Au cirque Bouglione, un adulte paie $x€$ et un enfant $y€$. Lundi dernier, pour 20€ adultes et 10 enfants, la recette était de $340€$. Le lendemain, pour 30 adultes et 60 enfants, la recette était de $870€$. Mais combien paie donc un adulte. Et un enfant ?

a) Choix des inconnues

Soit x est .....
Soit y est .....

b) Mise en équations

$\begin{cases} \end{cases}$

c) Résolution algébrique du système

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

d) Vérification

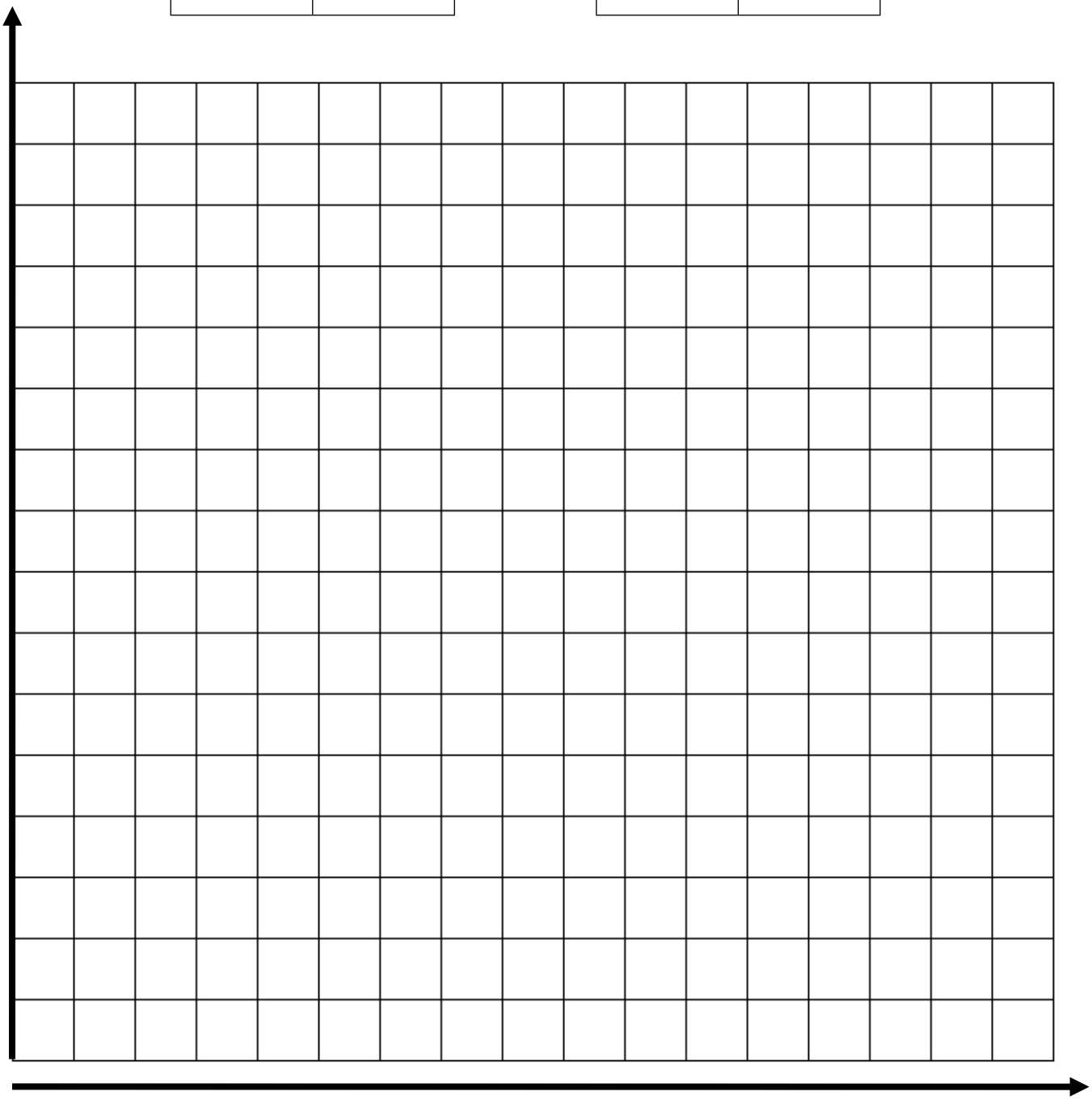
.....
.....
.....
.....

e) Représentation graphique

Trace les deux droites d'équations (1) en vert et (2) en bleu

(1)	
x	y

(2)	
x	y



f) Solution du problème

.....

.....

PROBLÈME N°5 : Lors d'un achat de CD à la FNAC, la caissière distraite a confondu le nombre de CD simples et le nombre de CD albums. Au lieu de payer $60€$, j'ai payé $96€$. Si tu sais que j'ai acheté deux albums et quatre CD simples, détermine le prix de chaque CD.

a) Choix des inconnues

Soit x est .....
Soit y est .....

b) Mise en équations

{

c) Résolution algébrique du système

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

d) Vérification

....
....
....
....

e) Représentation graphique

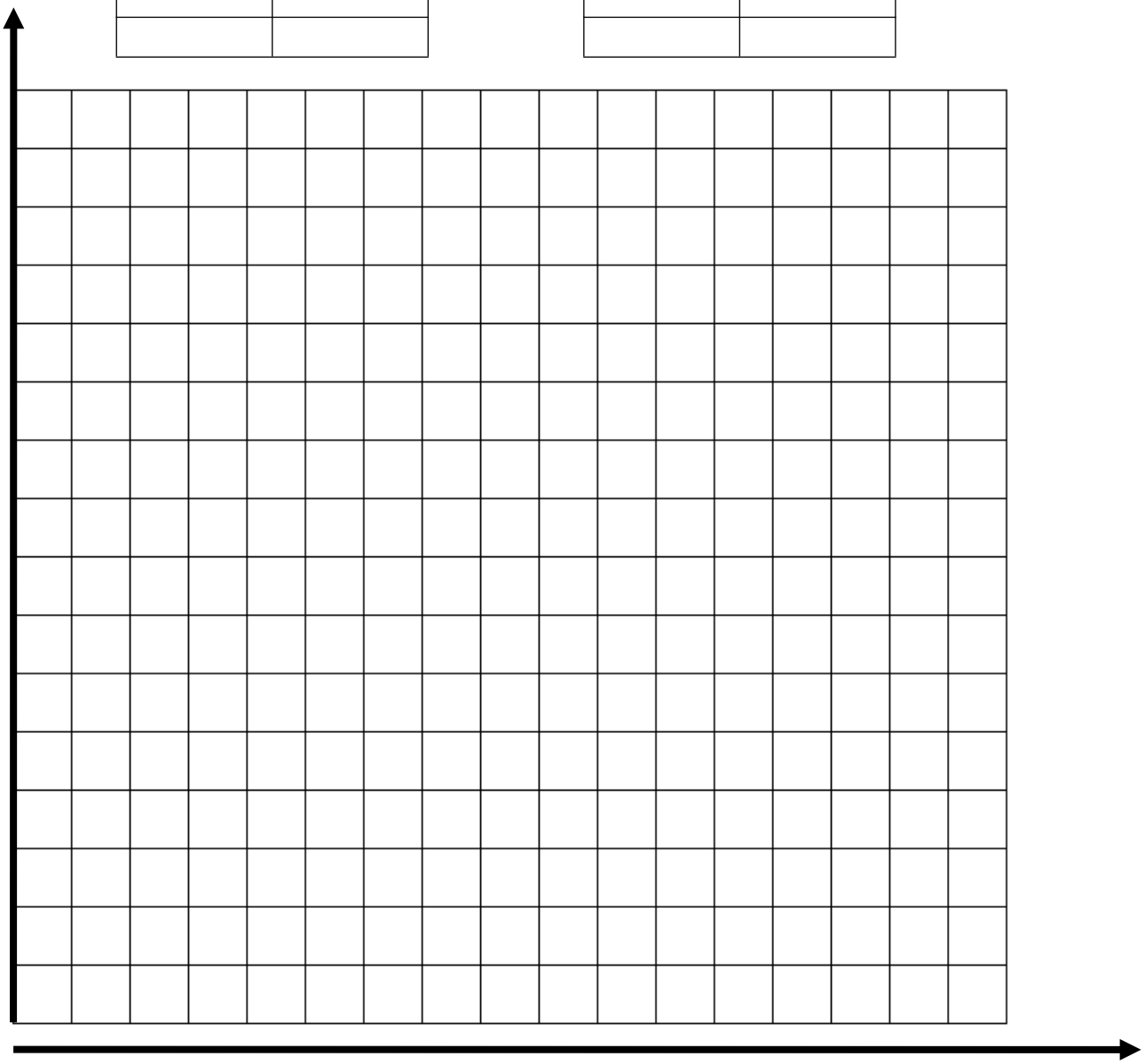
Choisis un repère cartésien adéquat et représente la première équation (1) en bleu et la deuxième équation (2) en vert

Choix du repère : Axe des abscisses : 1 carré = ...

Axe des ordonnées : 1 carré = ...

(1)	
x	y

(2)	
x	y



f) Solution du problème

Le prix d’un CD album est de .....
Le prix d’un CD simple est de .....