

ÉQUATIONS

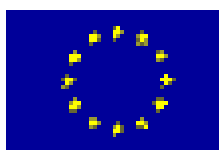
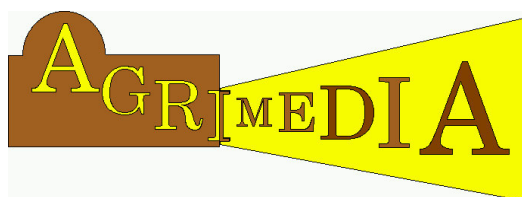
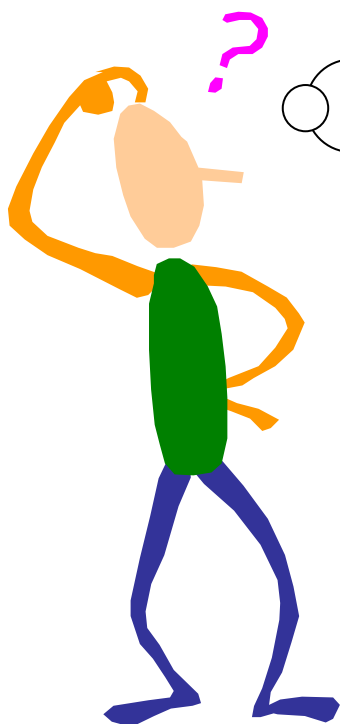
Les maths !!!



PROBLÈMES À DEUX INCONNUES :
- MISE EN ÉQUATIONS
- RÉSOLUTION

$$\begin{cases} 3x + 5y = 12 \\ 6x + 4y = 0 \end{cases}$$

Quel système !!!!



Dossier n°3
Juin 2005

Conçu et réalisé par :
Marie-Christine LIEFOOGHE
Bruno VANBAELINGHEM
Annie VANDERSTRAELE

Tous droits réservés au réseau AGRIMÉDIA

C. D. R. AGRIMEDIA	ÉQUATIONS Problèmes à deux inconnues : mise en équation, résolution.	Apprentissage
-----------------------	--	---------------

Objectifs :

- Mettre en équations un problème à deux inconnues
- Résoudre ce problème

Contenu :

- Méthode de résolution d'un problème à deux inconnues
- Exercices avec corrections

Pré-requis : (voir dossiers correspondants)

- Résoudre une équation du premier degré à une inconnue
- Mettre en équations un problème à une inconnue
- Calculer le périmètre et l'aire d'un rectangle

MISE EN ÉQUATIONS ET RÉOLUTION D'UN PROBLÈME

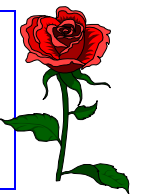
Nous avons vu dans le dossier 2, ÉQUATIONS les étapes de mise en équation et de résolution d'un problème à une inconnue.
Nous retrouvons ces quatre étapes dans la résolution d'un problème à deux inconnues.

Rappel des quatre étapes :

- ⊗ 1^{ère} étape : choix de l'inconnue (ou **des inconnues**)
- ⊗ 2^{ème} étape : mise en équations du problème
- ⊗ 3^{ème} étape : résolution de l'équation (ou **du système d'équations**)
- ⊗ 4^{ème} étape : vérification des résultats

Exemple 1 :

Chez mon fleuriste : un bouquet composé de 3 roses et de 5 iris coûte 14,50 €,
un bouquet composé de 7 roses et de 3 iris coûte 16,50 €.
Quel est le prix d'une rose et celui d'un iris ?



① 1^{ère} étape : CHOIX DES INCONNUES

Dans ce problème, les deux inconnues sont le **prix d'une rose** et le **prix d'un iris**.

On notera « ***r*** » le **prix d'une rose** (en euros) et « ***i*** » le **prix d'un iris** (en euros).

② 2^{ème} étape : MISE EN ÉQUATIONS DU PROBLÈME

Si le **prix d'une rose** s'écrit ***r*** alors, le **prix de trois roses** s'écrit **3 *r***
Si le **prix d'un iris** s'écrit ***i*** alors, le **prix de cinq iris** s'écrit **5 *i***

✿ le premier bouquet composé de 3 roses et de 5 iris coûte 14,50 €. Ce prix s'écrit :

$$\underbrace{3r}_{\text{prix de trois roses}} + \underbrace{5i}_{\text{prix de cinq iris}} = \underbrace{14,5}_{\text{prix du bouquet}}$$

✿ De même, le second bouquet composé de 7 roses et de 3 iris coûte 16,50 €.
Ce prix s'écrit :

$$\underbrace{7r}_{\text{prix de sept roses}} + \underbrace{3i}_{\text{prix de trois iris}} = \underbrace{16,5}_{\text{prix du bouquet}}$$

On obtient donc 2 équations à 2 inconnues (r et i).

$$\begin{cases} 3r + 5i = 14,5 & \text{équation n°1} \\ 7r + 3i = 16,5 & \text{équation n°2} \end{cases}$$

On dit que l'on doit résoudre un **système de deux équations à deux inconnues**.

③ 3^{ème} étape : RÉSOLUTION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Présentation de la méthode :

*on cherche à obtenir une équation à **une inconnue**, pour cela on élimine une des deux inconnues.*

Choisissons par exemple d'éliminer l'inconnue r .

Pour cela, multiplions l'équation n°1 **par 7** et l'équation n°2 **par 3** ; nous obtenons :

$$\begin{cases} 7 \times (3r + 5i = 14,5) \\ 3 \times (7r + 3i = 16,5) \end{cases} \text{ donne } \begin{cases} 21r + 35i = 101,5 & \text{équation n°1} \\ 21r + 9i = 49,5 & \text{équation n°2} \end{cases}$$

Soustrayons la *nouvelle* équation n°2 de la *nouvelle* équation n°1 :

$$\begin{array}{rcl} 21r + 35i & = & 101,5 \quad \text{nouvelle équation n°1} \\ - (21r + 9i & = & 49,5) \quad \text{nouvelle équation n°2} \\ \hline & + 26i & = 52,0 \end{array}$$

Nous obtenons une équation à une seule inconnue.

Résolvons cette équation (voir dossier 1, ÉQUATIONS).

$$i = \frac{52,0}{26}$$

$$i = 2$$

donc un iris coûte 2 €.
Calculons le prix d'une rose.

Reportons la valeur de i dans l'une des 2 équations de départ, par exemple l'équation n°1

$$\begin{aligned} 3r + 5i &= 14,5 \\ 3r + 5 \times 2 &= 14,5 \\ 3r + 10 &= 14,5 \\ 3r &= 14,5 - 10 = 4,5 \end{aligned}$$

$$r = \frac{4,5}{3} = 1,5$$

$$r = 1,5$$

donc une rose coûte 1,5 €.

④ 4^{ème} étape : VÉRIFICATION DES RÉSULTATS

Vérifions si ces résultats correspondent au problème posé.

Le prix du premier bouquet est-il bien 14,50 euros ?

prix de trois roses	+	prix de cinq iris	=	prix du bouquet
$3 \times 1,5$	+	5×2	=	prix du bouquet
4,5	+	10	=	prix du bouquet
14,50			=	prix du bouquet

Le prix du premier bouquet est bien 14,50 euros.

Le prix du deuxième bouquet est-il bien 16,50 euros ?

prix de sept roses	+	prix de trois iris	=	prix du bouquet
$7 \times 1,5$	+	3×2	=	prix du bouquet
10,5	+	6	=	prix du bouquet
16,50			=	prix du bouquet

Le prix du deuxième bouquet est bien 16,50 euros.

En conclusion :

- | | | |
|---|------------------------|----------|
| ✿ | le prix d'une rose est | 1,5 euro |
| ✿ | le prix d'un iris est | 2 euros |

Exemple 2 :

Antoine achète, à la foire aux vins un carton de 24 bouteilles de vin. Le prix de ce carton s'élève à 110 €. Il se compose de bouteilles de vin rouge à 5 € la bouteille et de bouteilles de vin blanc à 4 € la bouteille.

Combien Antoine a-t-il acheté de bouteilles de chaque sorte ?

① 1^{ère} étape : CHOIX DES INCONNUES

Dans ce problème, les deux inconnues sont :



le nombre de bouteilles de vin rouge noté « r »



et le nombre de bouteilles de vin blanc noté « b ».

② 2^{ème} étape : MISE EN ÉQUATIONS DU PROBLÈME

Le carton se compose de 24 bouteilles :

$$\underbrace{r}_{\text{nombre de bouteilles de vin rouge}} + \underbrace{b}_{\text{nombre de bouteilles de vin blanc}} = \underbrace{24}_{\text{nombre de bouteilles du carton}}$$

Si le prix d'une bouteille de vin rouge est 5 € alors, le prix des « r » bouteilles s'écrit $5r$

Si le prix d'une bouteille de vin blanc est 4 € alors, le prix des « b » bouteilles s'écrit $4b$

Le carton coûte 110 € donc :

$$\underbrace{5r}_{\text{prix des bouteilles de vin rouge}} + \underbrace{4b}_{\text{prix des bouteilles de vin blanc}} = \underbrace{110}_{\text{prix du carton}}$$

On obtient donc 2 équations à 2 inconnues (r et b).

$$\begin{cases} r + b = 24 & \text{équation n°1} \\ 5r + 4b = 110 & \text{équation n°2} \end{cases}$$

Réolvons ce **système de deux équations à deux inconnues**.

③ 3^{ème} étape : RÉSOLUTION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Choisissons, par exemple, d'éliminer l'inconnue b .

Pour cela, multiplions l'équation n°1 **par 4** ; nous obtenons :

$$\begin{cases} 4 \times (r + b = 24) \\ 5r + 4b = 110 \end{cases} \quad \text{donne} \quad \begin{cases} 4r + 4b = 96 & \text{nouvelle équation n°1} \\ 5r + 4b = 110 & \text{équation n°2} \end{cases}$$

Soustrayons la *nouvelle* équation n°1 de l'équation n°2 :

$$\begin{array}{rcl}
 5r & + & 4b = 110 \quad \text{équation n°2} \\
 - (4r & + & 4b = 96) \quad \text{nouvelle équation n°1} \\
 \hline
 r & & = 14
 \end{array}$$

$$r = 14$$

donc le nombre de bouteilles de vin rouge est 14.

Calculons alors le nombre de bouteilles de vin blanc.

Reportons la valeur de r dans l'équation n°1 :

$$\begin{array}{rcl}
 r & + & b = 24 \quad \text{équation n°1} \\
 14 & + & b = 24 \\
 & & b = 24 - 14 = 10
 \end{array}$$

$$b = 10$$

donc le nombre de bouteilles de vin blanc est 10.

④ 4^{ème} étape : VÉRIFICATION DES RÉSULTATS

Vérifions si ces résultats correspondent au problème posé.

Le carton contient-il 24 bouteilles ?

nombre de bouteilles de vin rouge	+	nombre de bouteilles de vin blanc	=	nombre de bouteilles du carton
14	+	10	=	nombre de bouteilles du carton
24			=	nombre de bouteilles du carton

Le carton contient bien 24 bouteilles :



14 bouteilles de vin rouge,



10 bouteilles de vin blanc.



Le prix de ce carton est-il bien de 110 euros ?

prix des bouteilles de vin rouge	+	prix des bouteilles de vin blanc	=	prix du carton
14 x 5	+	10 x 4	=	prix du carton
70	+	40	=	prix du carton
110			=	prix du carton

Le prix du carton est bien 110 euros.

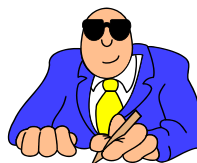
En conclusion :

Antoine a acheté un carton composé de :

14 bouteilles de vin rouge

10 bouteilles de vin blanc

Maintenant à vous !



EXERCICES

Exercice 1

6 kg de confiture sont répartis dans 14 pots.
Certains ont une contenance de 500 g, les autres ne contiennent que 375 g.
Quel est le nombre de pots de chaque sorte ?

Exercice 2

Un particulier veut tapisser son salon. Il choisit deux sortes de papier peint : du papier uni et du papier imprimé. Neuf rouleaux au total sont nécessaires.
Il peut choisir parmi les 2 solutions suivantes :

- 6 rouleaux de papier uni
- 3 rouleaux de papier imprimé.

La dépense est alors 48 €.

- 5 rouleaux de papier uni
- 4 rouleaux de papier imprimé.

La dépense est, dans ce cas, 50,50 €.

Quel est le prix d'un rouleau de papier uni et celui d'un rouleau de papier imprimé ?

Exercice 3

Chameau



Le cirque **AGRIMÉDIUS** se produit ce soir dans votre ville. Le clou du spectacle est un numéro de dressage de chameaux et de dromadaires. Dix animaux rivalisent de talent pour le plaisir des petits et des grands. Sur chaque bosse de ces animaux se trouve un ouistiti qui jongle avec des boules. On compte treize ouistitis.

Combien y a-t-il de chameaux et de dromadaires sur la piste du cirque **AGRIMÉDIUS** ?

Dromadaire



Exercice 4

Un arboriculteur achète un lot de 16 arbres fruitiers composé de pommiers et de cerisiers. Les pommiers valent 17 € pièce et les cerisiers 23 € pièce. Le lot d'arbres fruitiers coûte 308 €. Quel est le nombre de pommiers et de cerisiers qui constituent ce lot ?

Voir réponses pages 10 à 13

Exercice 5

Déterminer deux nombres entiers dont la somme est 39 et la différence 5.

Exercice 6



Pour un concert de l' *Académie des étoiles*, 1 500 billets ont été vendus. La vente de ces billets a rapporté 17 100 €.

Les billets plein tarif ont été vendus 15 €.

Les billets à tarif réduit ont été vendus 9 €.

Combien de billets plein tarif et de billets à tarif réduit ont-ils été vendus ?

Exercice 7

Un opérateur téléphonique propose deux forfaits aux tarifs suivants :

Forfait **LIBRIS** :

- 60 minutes d'appel
- 30 SMS

➤ Tarif 24 €



Forfait **MAJESTIC** :

- 100 minutes d'appel
- 100 SMS

➤ Tarif 45 €

Le prix d'une minute d'appel est le même pour ces deux forfaits et celui de l'envoi d'un SMS aussi. Calculez ces prix.

Exercice 8

Un rectangle a un périmètre de 60 cm. Si l'on augmente sa longueur de 5 cm et que l'on diminue sa largeur de 2 cm, son aire reste la même.

Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

Voir réponses page 14

RÉPONSES

Exercice 1

6 kg de confiture sont répartis dans 14 pots.

Certains ont une contenance de 500 g, les autres ne contiennent que 375 g.

Quel est le nombre de pots de chaque sorte ?

① 1^{ère} étape : CHOIX DES INCONNUES

Soit x le nombre de pots de 500 g. Soit y le nombre de pots de 375 g.

② 2^{ème} étape : MISE EN ÉQUATIONS DU PROBLÈME

Le nombre total de pots est 14, donc : $x + y = 14$

Le poids total de confiture est 6 kg soit 6 000 g donc : $500 \times x + 375 \times y = 6\,000$

On obtient donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y = 14 & \text{équation n°1} \\ 500x + 375y = 6\,000 & \text{équation n°2} \end{cases}$$

③ 3^{ème} étape : RÉOLUTION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Choisissons, par exemple, d'éliminer l'inconnue x

Pour cela, multiplions l'équation n°1 par 500 ; nous obtenons :

$$\begin{cases} 500x + 500y = 7\,000 & \text{nouvelle équation n°1} \\ 500x + 375y = 6\,000 & \text{équation n°2} \end{cases}$$

Soustrayons l'équation n°2 de la nouvelle équation n°1 :

$$125y = 1\,000$$

$$y = 1\,000 \div 125$$

$$y = 8 \quad \text{il y a 8 pots de 375 g}$$

Le nombre total de pots étant 14, il y a 6 pots de 500 g

④ 4^{ème} étape : VÉRIFICATION DES RÉSULTATS

Calculons le nombre total de pots : $x + y =$

$$6 + 8 = 14$$

Calculons le poids total de confiture : $500 \times x + 375 \times y =$

$$500 \times 6 + 375 \times 8 =$$

$$3\,000 + 3\,000 = 6\,000 \quad \text{soit 6 000 g}$$

Il y a donc : ❖ 8 pots de 375 g

❖ 6 pots de 500 g

Exercice 2

...Quel est le prix d'un rouleau de papier uni et celui d'un rouleau de papier imprimé ?

① 1^{ère} étape : CHOIX DES INCONNUES

Soit **u** le prix d'un rouleau de papier uni. Soit **i** le prix d'un rouleau de papier imprimé.

② 2^{ème} étape : MISE EN ÉQUATIONS DU PROBLÈME

Pour la première solution, la dépense totale est de 48 € en achetant 6 rouleaux de papier uni et 3 rouleaux de papier imprimé : $6u + 3i = 48$

Pour la seconde solution, la dépense totale est de 50,50 € en achetant 5 rouleaux de papier uni et 4 rouleaux de papier imprimé : $5u + 4i = 50,50$

On obtient donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 6u + 3i = 48 & \text{équation n°1} \\ 5u + 4i = 50,50 & \text{équation n°2} \end{cases}$$

③ 3^{ème} étape : RÉOLUTION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Choisissons, par exemple, d'éliminer l'inconnue **i**

Pour cela, multiplions l'équation n°1 par 4 ; et l'équation n°2 par 3. Nous obtenons :

$$\begin{cases} 24u + 12i = 192 & \text{nouvelle équation n°1} \\ 15u + 12i = 151,50 & \text{nouvelle équation n°2} \end{cases}$$

Soustrayons la nouvelle équation n°2 de la nouvelle équation n°1 :

$$24u - 15u = 192 - 151,50$$

$$9u = 40,50$$

$$u = 40,50 \div 9$$

$$u = 4,5$$

Le prix d'un rouleau de papier uni est 4,5 €.

d'après l'équation n°1 : $6u + 3i = 48$

$$6 \times 4,5 + 3i = 48$$

$$27 + 3i = 48$$

$$3i = 48 - 27 = 21$$

$$i = 21 \div 3 = 7$$

Le prix d'un rouleau de papier imprimé est 7 €.

④ 4^{ème} étape : VÉRIFICATION DES RÉSULTATS

Calculons la dépense totale pour la première solution : $6u + 3i =$

$$6 \times 4,5 + 3 \times 7 =$$

$$27 + 21 = 48$$

Calculons la dépense totale pour la deuxième solution : $5u + 4i =$

$$5 \times 4,5 + 4 \times 7 =$$

$$22,5 + 28 = 50,50$$

❖ Le rouleau de papier uni coûte 4,50 € pièce

❖ Le rouleau de papier imprimé coûte 7 € pièce

Exercice 3

...Combien y a-t-il de chameaux et de dromadaires sur la piste du cirque AGRIMÉDIUS ?

① 1^{ère} étape : CHOIX DES INCONNUES

Soit **c** le nombre de chameaux. Soit **d** le nombre de dromadaires.

② 2^{ème} étape : MISE EN ÉQUATIONS DU PROBLÈME

Sur la piste, il y a en tout 10 chameaux et dromadaires : $c + d = 10$

Il y a en tout 13 ouistitis, donc 13 bosses. Sachant qu'un chameau a 2 bosses et qu'un dromadaire n'a qu'une seule bosse, le nombre total de bosses pour ces dix animaux est : $2c + d = 13$

On obtient donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} c + d = 10 & \text{équation n°1} \\ 2c + d = 13 & \text{équation n°2} \end{cases}$$

③ 3^{ème} étape : RÉOLUTION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Choisissons, par exemple, d'éliminer l'inconnue **d**

Soustrayons l'équation n°1 de l'équation n°2 :

$$2c - c = 13 - 10$$

$$c = 3$$

il y a donc 3 chameaux dans le cirque AGRIMÉDIUS

d'après l'équation n°1 : $c + d = 10$

$$3 + d = 10$$

$$d = 10 - 3$$

$$d = 7$$

il y a donc 7 dromadaires dans le cirque AGRIMÉDIUS

④ 4^{ème} étape : VÉRIFICATION DES RÉSULTATS

Calculons le nombre total d'animaux : $c + d =$

$$3 + 7 = 10$$

Calculons le nombre total de bosses : $2c + d =$

$$2 \times 3 + 7 =$$

$$6 + 7 = 13$$

Dans le cirque AGRIMÉDIUS, il y a donc :

- ❖ 3 chameaux,
- ❖ et 7 dromadaires.

Exercice 4

... Quel est le nombre de pommiers et de cerisiers qui constituent ce lot ?

① 1^{ère} étape : CHOIX DES INCONNUES

Soit **p** le nombre de pommiers. Soit **c** le nombre de cerisiers.

② 2^{ème} étape : MISE EN ÉQUATIONS DU PROBLÈME

Il achète en tout 16 arbres fruitiers : $p + c = 16$

Sachant qu'un pommier coûte 17 € et qu'un cerisier coûte 23 €, le coût total étant 308 €, il s'écrit : $17p + 23c = 308$

On obtient donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} p + c = 16 & \text{équation n°1} \\ 17p + 23c = 308 & \text{équation n°2} \end{cases}$$

③ 3^{ème} étape : RÉOLUTION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Choisissons, par exemple, d'éliminer l'inconnue **p**

Pour cela, multiplions l'équation n°1 par 17 ; nous obtenons :

$$\begin{cases} 17p + 17c = 272 & \text{nouvelle équation n°1} \\ 17p + 23c = 308 & \text{équation n°2} \end{cases}$$

Soustrayons la nouvelle équation n°1 de l'équation n°2 :

$$23c - 17c = 308 - 272$$

$$6c = 36$$

$$c = 36 \div 6$$

$$c = 6$$

L'arboriculteur a acheté
6 cerisiers.

d'après l'équation n°1 :

$$p + c = 16$$

$$p + 6 = 16$$

$$p = 16 - 6$$

$$p = 10$$

L'arboriculteur a acheté
10 pommiers.

④ 4^{ème} étape : VÉRIFICATION DES RÉSULTATS

Calculons le nombre total d'arbres fruitiers :

$$\begin{array}{rcl} p + c & = & \\ 10 + 6 & = & 16 \end{array}$$

Calculons le coût total :

$$\begin{array}{rcl} 17p + 23c & = & \\ 17 \times 10 + 23 \times 6 & = & \\ 170 + 138 & = & 308 \end{array}$$

L'arboriculteur a donc acheté :

- ❖ 10 pommiers,
- ❖ et 6 cerisiers.

Remarque : de la même façon vous mettrez en équation les exercices suivants.
Vous trouverez ci-dessous les réponses.

Exercice 5

Déterminer deux nombres entiers dont la somme est 39 et la différence 5.

Les deux nombres sont : 17 et 22.

Exercice 6



Pour un concert de l' **Académie des étoiles**, 1 500 billets ont été vendus. La vente de ces billets a rapporté 17 100 €.

Les billets plein tarif ont été vendus 15 €.

Les billets à tarif réduit ont été vendus 9 €.

Combien de billets plein tarif et de billets à tarif réduit ont-ils été vendus ?

On a vendu 600 billets plein tarif et 900 billets à tarif réduit.

Exercice 7

Un opérateur téléphonique propose deux forfaits aux tarifs suivants :

Forfait **LIBRIS** :

- 60 minutes d'appel
- 30 SMS

➤ **Tarif 24 €**



Forfait **MAJESTIC** :

- 100 minutes d'appel
- 100 SMS

➤ **Tarif 45 €**

Le prix d'une minute d'appel est le même pour ces deux forfaits et celui de l'envoi d'un SMS aussi. Calculez ces prix.

Le prix d'une minute d'appel est 0,35 € et le prix d'un SMS : 0,10 €

Exercice 8

Un rectangle a un périmètre de 60 cm. Si l'on augmente sa longueur de 5 cm et que l'on diminue sa largeur de 2 cm, son aire reste la même.

Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

La longueur du rectangle mesure 20 cm et sa largeur : 10 cm.



Fin