

CARGO

Collection de Mathématiques

3^e

Guide pédagogique

ISBN : 978-2-7531-0468-6

© Hachette Livre International 2014

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays. Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L. 122-4 et L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ». Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

1 Les propriétés de Thalès

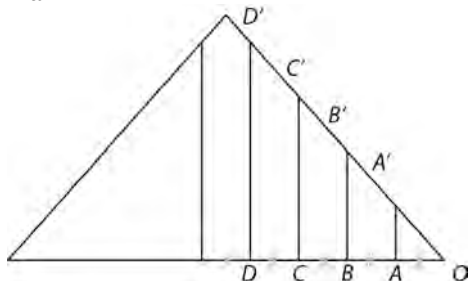
Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	La propriété directe de Thalès dans le cas particulier des triangles [1a p 8]	25, 27, 28, 29, 30, 31, 36, 39	46	49, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59
2	La propriété réciproque de Thalès dans le cas particulier des triangles [1b p 9]	33, 34, 35, 36, 37, 38, 39	47, 48	
	Partager un segment selon un rapport donné [2 p 9]	40, 41, 42, 43, 44, 45		
3	Les propriétés (directe et réciproque) de Thalès dans le cas général [3 p 10]	24, 26, 32, 38	46	49
	Apprendre à appliquer la propriété directe de Thalès [1 p 11]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8		
	Apprendre à appliquer la propriété réciproque de Thalès [2 p 12]	9, 10, 11, 12, 13, 14		
	Apprendre à partager un segment selon un rapport donné [3 p 13]	15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23		50

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

La cathédrale de Yaoundé

1.a.



b. Dans le triangle OBB' , puisque A est le milieu de $[OB]$ et que $(AA') \parallel (BB')$, on en déduit que A' est le milieu de $[OB']$ et que $AA' = \frac{1}{2}BB'$. Donc $BB' = 11,2$ m.

2.a. On procède comme à la question 1.b dans le triangle ODD' :

$BB' = \frac{1}{2}DD'$, donc $DD' = 22,4$ m.

b. On utilise les résultats des questions 1.b et 2.a, le coefficient de proportionnalité est 2.

c. D'après le tableau de proportionnalité :

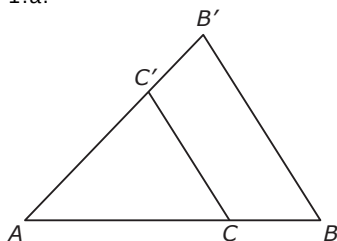
$DD' = 2 \times BB'$ et $BB' = 2 \times AA'$, donc $DD' = 4 \times AA'$.

3. On note h la hauteur : $h = DD' + \frac{BB' - AA'}{2} = 22,4 + \frac{5,6}{2} = 25,2$ m.

Activités de découverte

1 La propriété de Thalès dans les triangles

1.a.

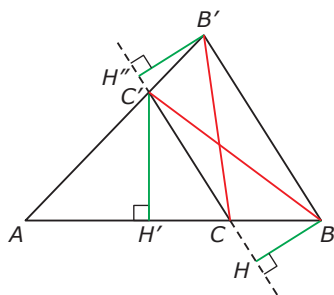


b. (Avec le schéma ci-contre.)

AB	AC	AB'	AC'	BB'	CC'	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{AC'}{AB'}$	$\frac{CC'}{BB'}$
3,9	2,7	3,4	2,3	2,9	2	0,7	0,7	0,7

c. On remarque que les longueurs et les rapports de longueurs sont différents, mais que les trois rapports sont toujours égaux.

2.a.



$$\text{Aire}(BCC') = \frac{CC' \times BH}{2} \text{ et } \text{aire}(B'CC') = \frac{CC' \times BH'}{2}.$$

Or $BHH'B'$ est un rectangle, donc $BH = BH'$.
On en déduit que ces aires sont égales.

b. $\text{Aire}(ABC') = \text{aire}(ACC') + \text{aire}(BCC')$
et $\text{aire}(AB'C) = \text{aire}(ACC') + \text{aire}(B'CC')$,
donc, d'après le 2.a, $\text{aire}(ABC') = \text{aire}(AB'C)$.

$$\text{c. Aire}(ACC') = \frac{C'H'' \times AC}{2} \text{ et } \text{aire}(ABC') = \frac{C'H'' \times AB}{2} ; \text{ ainsi : } \frac{\text{aire}(ACC')}{\text{aire}(ABC)} = \frac{\frac{C'H'' \times AC}{2}}{\frac{C'H'' \times AB}{2}} = \frac{AC}{AB}.$$

On démontre de même que : $\frac{\text{aire}(ACC')}{\text{aire}(AB'C)} = \frac{AC'}{AB'}$. D'après le b, $\text{aire}(ABC') = \text{aire}(AB'C)$; donc : $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$.

3. Dans chacune de ces situations, les raisonnements sont analogues.

2 La propriété réciproque de Thalès dans les triangles

1.a.

	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{AC'}{AB'}$	ces rapports sont égaux : oui / non	(BB') semble parallèle à (CC') : oui / non
Schéma n° 1	0,6	0,6	oui	non
Schéma n° 2	0,6	0,6	oui	oui
Schéma n° 3	1,4	1,4	oui	oui
Schéma n° 4	0,5	0,5	oui	non
Schéma n° 5	0,5	0,5	oui	oui
Schéma n° 6	1,4	1,4	oui	non

b. L'égalité entre les rapports ne suffit pas.

Il faut en plus que les points A, B et C, d'une part, A', B' et C', d'autre part, soient alignés dans le même ordre.

2. Propriété

ABB' est un triangle. C est un point de (AB) et C' un point de (AB') tels que la position de C par rapport à A et B soit la même que la position de C' par rapport à A et B'. Si $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$, alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

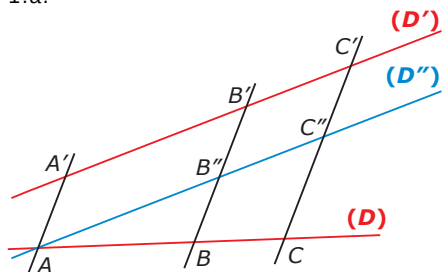
3. ABB' est un triangle. C est un point de (AB) et C' un point de (AB') tels que la position de C par rapport à A et B est la même de C' par rapport à A et B'.

$$\text{De plus, } \frac{AC}{AB} = \frac{5,1 + 3,4}{5,1} = \frac{8,5}{5,1} = \frac{5}{3} \text{ et } \frac{AC'}{AB'} = \frac{4,5 + 3}{4,5} = \frac{7,5}{4,5} = \frac{5}{3} ; \text{ donc : } \frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}.$$

Ainsi, d'après la propriété réciproque de Thalès, les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

3 La propriété de Thalès : le cas général

1.a.



b. Avec ce schéma.

$$\frac{AC}{AB} \approx 1,5 \text{ et } \frac{A'C'}{AC} \approx 1,5 ; \frac{BC}{BA} \approx 0,5 \text{ et } \frac{B'C'}{B'A'} \approx 0,5 ;$$

$$\frac{CA}{CB} \approx 3,1 \text{ et } \frac{C'A'}{C'B'} \approx 3,1.$$

On observe que ces rapports semblent deux à deux égaux.

2.a. Voir la figure ci-contre.

b. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles ABB'' et ACC'' .

c. Ces quadrilatères sont des parallélogrammes car leurs côtés opposés sont parallèles.

d. Puisqu'il s'agit de parallélogrammes : $AB'' = A'B'$ et $AC'' = A'C'$.

$$\text{Or : } \frac{AC}{AB} = \frac{AC''}{AB''} ; \text{ donc : } \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}.$$

1 Apprendre à appliquer la propriété directe de Thalès

Exercice 1

On utilise la propriété générale de Thalès pour déduire que $\frac{MK}{KI} = \frac{NL}{LJ}$, donc $NL = LJ \times \frac{MK}{KI} = 1,3 \times \frac{1,2}{1} = 1,56$ cm.

Exercice 2

On utilise la propriété de Thalès dans les triangles pour déduire : $\frac{FD}{FE} = \frac{FH}{FG}$, donc $FD = FE \times \frac{FH}{FG} = 2 \times \frac{4}{3} \approx 2,7$ cm.

Exercice 3

On utilise la propriété générale de Thalès pour déduire que : $\frac{PQ}{QR} = \frac{ON}{MN}$, donc $PQ = QR \times \frac{ON}{MN} = 1,4 \times \frac{1,1}{1,6} \approx 1$ cm.

Exercice 4

On utilise la propriété de Thalès dans les triangles pour déduire que : $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$, donc $OA = OB \times \frac{OA'}{OB'} = 0,9 \times \frac{0,3}{1,3} \approx 0,2$ cm.

Exercice 5

On utilise la propriété générale de Thalès pour déduire que : $\frac{FD}{FE} = \frac{CA}{CB}$, donc $FD = FE \times \frac{CA}{CB} = 0,5 \times \frac{1,9}{0,4} \approx 2,4$ cm.

Exercice 6

On utilise la propriété de Thalès dans les triangles pour déduire que : $\frac{MN}{MP} = \frac{NS}{PT}$, donc $NS = PT \times \frac{MN}{MP} = 30 \times \frac{12}{32} \approx 11,3$ cm.

Exercice 7

Dans les deux cas, on utilise la propriété de Thalès dans des triangles pour déduire que :

$$\text{Figure 1 : } \frac{IE}{IG} = \frac{IF}{IH},$$

$$\text{donc } IE = IG \times \frac{IF}{IH} = 1 \times \frac{3}{1,2} = 2,5 \text{ dm.}$$

$$\text{De plus } EG = IE + IG = 3,5 \text{ dm.}$$

$$\text{Figure 2 : } \frac{IE}{IG} = \frac{IF}{IH},$$

$$\text{donc } IE = IG \times \frac{IF}{IH} = 4,5 \times \frac{10}{6} = 7,5 \text{ m.}$$

$$\text{De plus } EG = IE - IG = 3 \text{ m.}$$

Exercice 8

On utilise la propriété de Thalès dans les triangles

$$\text{pour déduire que : } \frac{SW}{SU} = \frac{SV}{ST} = \frac{VW}{TU}.$$

$$\text{De plus, } ST = 2 \times TV \text{ donc } SV = 3 \times TV,$$

$$\text{d'où } \frac{SV}{ST} = \frac{3 \times TV}{2 \times TV} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Donc, } SW = SU \times \frac{SV}{ST} = 5 \times \frac{3}{2} \approx 7,5 \text{ cm}$$

$$\text{d'où } UW = 2,5 \text{ cm.}$$

$$\text{De plus, } VW = TU \times \frac{SV}{ST} = 1,4 \times \frac{3}{2} = 2,1 \text{ cm}$$

2 Apprendre à appliquer la propriété réciproque de Thalès

Exercice 9

D est un point de (AB) et E est un point de (AC) tels que la position de D par rapport à A et B est la même que la position de E par rapport à A et C.

$$\text{De plus, } \frac{AC}{AE} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ et } \frac{AB}{AD} = \frac{3,6}{6} = 0,6 ;$$

$$\text{donc : } \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}.$$

D'après la propriété réciproque de Thalès dans le cas des triangles, on en déduit que (BC) // (DE).

Exercice 10

Les points I, K, M sont alignés ; de même que les points J, L, N ; (IJ) // (KL) et la position de M par rapport à I et K est la même que la position de N par rapport à J et L ;

$$\text{de plus : } \frac{IM}{IK} = \frac{3}{1} = 3 \text{ et } \frac{JN}{JL} = \frac{3,6}{1,2} = 3 ;$$

$$\text{donc : } \frac{IM}{IK} = \frac{JN}{JL}.$$

D'après la propriété réciproque de Thalès dans le cas général, on en déduit que (KL) // (MN).

Exercice 11

E est un point de (FG) et I un point de (HG) tels que la position de E par rapport à F et G est la même que la position de I par rapport à H et G.

$$\text{De plus, } \frac{GE}{GF} = \frac{0,5}{0,1} = 5 \text{ et } \frac{GI}{GH} = \frac{0,6}{0,12} = 5 ;$$

$$\text{donc : } \frac{GE}{GF} = \frac{GI}{GH}.$$

D'après la propriété réciproque de Thalès dans le cas des triangles, on déduit que (FH) // (EI).

Exercice 12

Les points P, Q, R sont alignés ; de même que les points P', Q', R' ; (PP') // (QQ') et la position de P par rapport à Q et R est la même que la position de P' par rapport à Q' et R' ;

$$\text{de plus : } \frac{PR}{PQ} = \frac{16}{4} = 4 \text{ et } \frac{P'R'}{P'Q'} = \frac{14}{3,5} = 4 ;$$

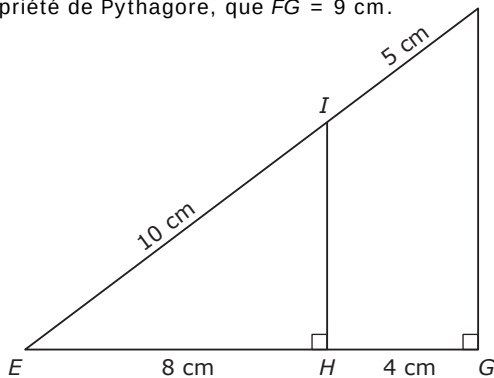
$$\text{donc : } \frac{PR}{PQ} = \frac{P'R'}{P'Q'}.$$

D'après la propriété réciproque de Thalès dans le cas général, on en déduit que (QQ') // (RR').

Exercice 13

1. (Échelle $\frac{1}{2}$)

Pour construire la figure, on démontre, à l'aide de la propriété de Pythagore, que $FG = 9$ cm.



2. H est un point de (EG) et I un point de (EF) tels que la position de H par rapport à E et G est la même que la position de I par rapport à E et F .

De plus, $\frac{EG}{EH} = \frac{12}{8} = 1,5$ et $\frac{EF}{EI} = \frac{15}{10} = 1,5$

donc : $\frac{EG}{EH} = \frac{EF}{EI}$.

D'après la propriété réciproque de Thalès dans le cas des triangles, on en déduit que $(IH) \parallel (FG)$.

Exercice 14

1. On utilise une première fois la propriété de Thalès avec les triangles ABC et $AB'C'$ pour déduire

que $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$;

puis une seconde fois avec les triangles ACD et

$AC'D'$ pour déduire que : $\frac{AC}{AC'} = \frac{AD}{AD'} = \frac{CD}{CD'}$;

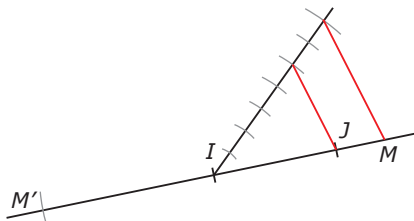
on déduit alors que : $\frac{AB}{AB'} = \frac{AD}{AD'}$.

2. On utilise la propriété réciproque de Thalès dans les triangles ABD et $AB'D'$ et notamment l'égalité des rapports obtenus au 1. pour conclure que $(BD) \parallel (B'D')$.

3 Apprendre à partager un segment

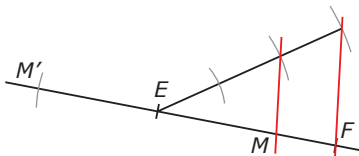
Exercice 15

$$\frac{IM}{IJ} = \frac{7}{5}$$



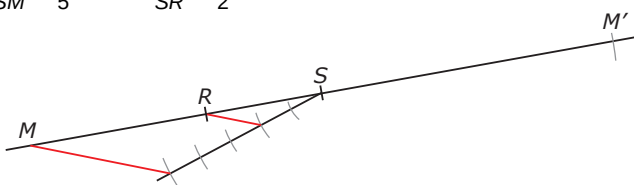
Exercice 16

$$\frac{EM}{EF} = \frac{2}{3}$$



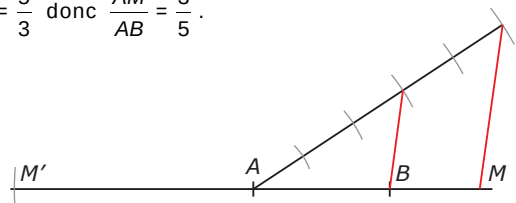
Exercice 17

$$\frac{SR}{SM} = \frac{2}{5} \text{ donc } \frac{SM}{SR} = \frac{5}{2}.$$



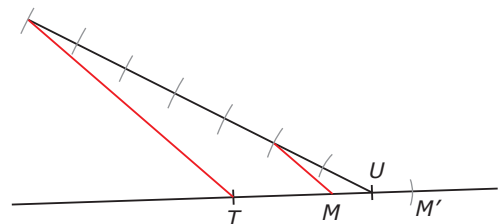
Exercice 18

$$\frac{MA}{BA} = \frac{5}{3} \text{ donc } \frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}.$$



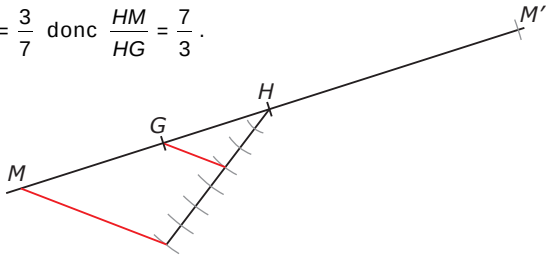
Exercice 19

$$\frac{UM}{UT} = \frac{2}{7}$$



Exercice 20

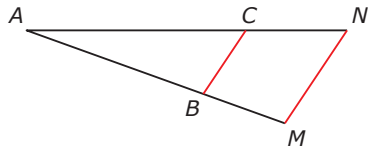
$$\frac{HG}{MH} = \frac{3}{7} \text{ donc } \frac{HM}{HG} = \frac{7}{3}.$$



Exercice 21

a. $\frac{AN}{8} = \frac{7}{5}$ est équivalent à $\frac{AN}{AM} = \frac{AC}{AB}$ ou $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$;

N est donc le point d'intersection de la droite (AC) et de la parallèle à (BC) passant par M .



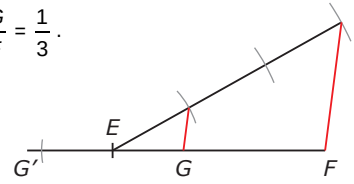
b. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles pour déduire que : $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$;

donc : $AN = AC \times \frac{AM}{AB} = 7 \times \frac{8}{5} = \frac{56}{5} = 11,2 \text{ cm} ;$

d'où : $CN = AN - AC = 4,2 \text{ cm}$.

Exercice 22

a. $EG = \frac{1}{3}EF$ donc $\frac{EG}{EF} = \frac{1}{3}$.



b. On utilise le schéma précédent : puisque $EG = \frac{1}{3}EF$, si on note G' le symétrique de G par rapport à E , alors

$EG' = \frac{1}{3}EF$ et $FG' = \frac{4}{3}EF$. On peut alors tracer le cercle

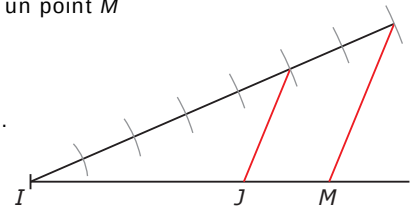
de centre F et de rayon $FG' = \frac{4}{3}FE$.

Exercice 23

On cherche à placer un point M

tel que $IM = \frac{7}{5}IJ$,

c'est-à-dire $\frac{IM}{IJ} = \frac{7}{5}$.



On trace alors le cercle de centre I et de rayon IM .

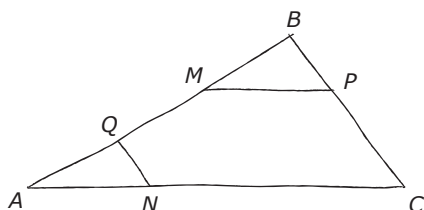
Calculs de longueurs

Exercice 24

- a. $\frac{EF}{EG} = \frac{HI}{HJ}$; $\frac{FG}{EF} = \frac{IJ}{HI}$; $\frac{FG}{EG} = \frac{IJ}{HJ}$.
- b. $\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MP}$; $\frac{BC}{AC} = \frac{NP}{MP}$; $\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$.

Exercice 25

a.



b. On utilise deux fois la propriété de Thalès :

- dans les triangles AQN et ABC : $\frac{AN}{AC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{NQ}{BC}$;
- dans les triangles BMP et BAC : $\frac{BP}{BC} = \frac{BM}{BA} = \frac{PM}{CA}$.

Exercice 26

On utilise la propriété générale de Thalès, puisque les droites rouges sont parallèles, pour en déduire :

- d'une part que : $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$,
donc : $AB = AC \times \frac{A'B'}{A'C'} = 6 \times \frac{4,5}{5} = 5,4 \text{ cm}$;
- d'autre part que : $\frac{C'D'}{C'A'} = \frac{CD}{CA}$,
donc : $CD' = C'A' \times \frac{CD}{CA} = 5 \times \frac{4}{6} = \frac{10}{3} \text{ cm}$.

Exercice 27

a. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles IGH

et IEF pour déduire que : $\frac{IF}{IH} = \frac{IE}{IG} = \frac{FE}{HG}$

d'où : $IF = IH \times \frac{FE}{HG} = 5 \times \frac{4,5}{3} = 7,5 \text{ cm}$.

b. • Dans le triangle IGH rectangle en G, d'après la propriété de Pythagore : $IH^2 = IG^2 + GH^2$, d'où : $IG = 4 \text{ cm}$.

• On reprend les égalités de rapports de longueurs du a :

$\frac{IE}{IG} = \frac{FE}{HG}$ donc : $IE = IG \times \frac{FE}{HG} = 4 \times \frac{4,5}{3} = 6 \text{ cm}$.

Exercice 28

On utilise la propriété de Thalès dans les triangles OAB et

OCD pour déduire que : $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}$.

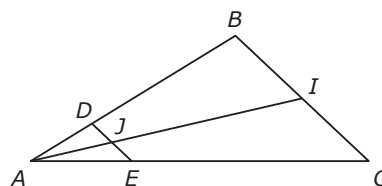
• $CD = AB \times \frac{OC}{OA} = AB \times \frac{AC - OA}{OA} = 8 \times \frac{35 - 10}{10} = 20 \text{ cm}$.

• $OB = OD \times \frac{OA}{OC} = 30 \times \frac{10}{25} = 12 \text{ cm}$.

Donc $BD = 42 \text{ cm}$.

Exercice 29

a.



b. On utilise deux fois la propriété de Thalès :

• une première fois dans les triangles ADJ et ABI, pour

déduire que : $\frac{AJ}{AI} = \frac{AD}{AB} = \frac{DJ}{BI}$, donc $DJ = BI \times \frac{AJ}{AI}$;

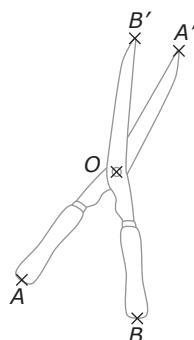
• une seconde fois dans les triangles AEJ et ACI, pour

déduire que : $\frac{AJ}{AI} = \frac{AE}{AC} = \frac{JE}{IC}$, donc $JE = IC \times \frac{AJ}{AI}$

or $IC = BI$, donc : $JE = BI \times \frac{AJ}{AI} = DJ$.

Ainsi, J est le milieu de [DE].

Exercice 30



On schématise les cisailles afin de nommer les points.

On utilise la propriété de Thalès dans les triangles OAB et OA'B' pour déduire

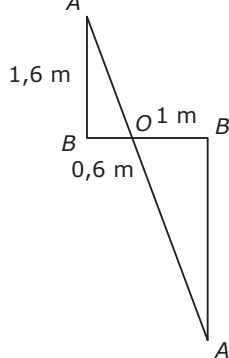
que : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$,

donc : $A'B' = AB \times \frac{OB'}{OB}$

$= 25 \times \frac{48}{32} = 37,5 \text{ cm}$.

Exercice 31

a.



b. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles OAB et OA'B' pour

déduire que : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$,

d'où : $A'B' = AB \times \frac{OB'}{OB}$

$A'B' = 1,6 \times \frac{1}{0,6} \approx 2,7 \text{ m}$.

c. On procède de même, avec $OB = 0,4 \text{ m}$:

$A'B' = 1,6 \times \frac{1}{0,4} = 4 \text{ m}$.

Étudier le parallélisme

Exercice 32

- Les points A , A' et A'' sont alignés, de même que les points B , B' et B'' ;
- $(AA') \parallel (BB')$ et la position de A' par rapport à A et A'' est la même que la position de B' par rapport à B et B'' ;
- enfin $\frac{A'A}{A'A''} = \frac{3,6}{1} = 3,6$ et $\frac{B'B}{B'B''} = \frac{2,7}{0,75} = 3,6$.

Donc $\frac{A'A}{A'A''} = \frac{B'B}{B'B''}$ et, d'après la propriété réciproque de Thalès, $(A'B') \parallel (A''B'')$.

Exercice 33

- Les points N , P et Q sont alignés, de même que les points M , P et R ;
- la position de P par rapport à N et Q est la même que la position de P par rapport à M et R ;
- enfin $\frac{PQ}{PN} = \frac{8}{1,6} = 5$ et $\frac{PR}{PM} = \frac{7,5}{1,5} = 5$.

Donc $\frac{PQ}{PN} = \frac{PR}{PM}$ et, d'après la propriété réciproque de Thalès, $(MN) \parallel (QR)$.

Exercice 34

- Les points E , F et G sont alignés, de même que les points E , I et H ;
- la position de F par rapport à E et G est la même que la position de I par rapport à E et H ;
- enfin $\frac{EH}{EG} = \frac{3}{5} = 0,6$ et $\frac{EI}{EH} = \frac{3,6}{6} = 0,6$.

Donc $\frac{EF}{EG} = \frac{EI}{EH}$ et, d'après la propriété réciproque de Thalès, $(GH) \parallel (FI)$.

Exercice 35

- a. $V \in [RU]$ et $V \in [ST]$.

$$\frac{UV}{RV} = \frac{4,5}{1,8} = 2,5 \text{ et } \frac{TV}{SV} = \frac{7,9}{3,6} \approx 2,2 ; \text{ donc } \frac{UV}{RV} \neq \frac{TV}{SV}.$$

On en déduit, d'après la contraposée de la propriété de Thalès, que les droites (RS) et (TU) ne sont pas parallèles.

- b. $R \in [UV]$ et $S \in [TV]$.

$$\frac{UV}{RV} = \frac{4,8}{3,6} = \frac{4}{3} \text{ et } \frac{TV}{SV} = \frac{7,5}{5,6} \approx 1,34 ; \text{ donc } \frac{UV}{RV} \neq \frac{TV}{SV}.$$

On en déduit, d'après la contraposée de la propriété de Thalès, que les droites (RS) et (TU) ne sont pas parallèles.

Exercice 36

- a. $A' \in [OB']$ et $A \in [OB]$.

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{57,8}{52} = 1,1 \text{ et } \frac{OB}{OA} = \frac{49,5}{44} = 1,125 ;$$

$$\text{donc } \frac{OB'}{OA'} \neq \frac{OB}{OA}.$$

On en déduit, d'après la contraposée de la propriété de Thalès, que les droites (AA') et (BB') ne sont pas parallèles.

- b. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles OAA'' et OBB' . On suppose que la couture est droite, c'est-à-dire $(AA'') \parallel (BB')$.

$$\text{Dans ce cas : } \frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA''} = \frac{BB'}{AA''} ;$$

$$\text{d'où : } AA'' = BB' \times \frac{OA}{OB} = 54 \times \frac{44}{49,5} = 48 \text{ cm.}$$

Exercice 37

- a. Puisque $\text{aire}(ABCD) = \text{aire}(AGFE)$,

$$\text{on obtient : } AB \times AD = AE \times AG ; \text{ d'où : } \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AG}.$$

- b. $E \in [AB]$ et $D \in [AG]$.

On travaille dans les triangles AED et AGB , où $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AG}$;
d'après la propriété réciproque de Thalès, $(DE) \parallel (BG)$.

Exercice 38

- a. • Les points E , F et G sont alignés, de même que les points H , I et J ;
• $(D) \parallel (D')$ et la position de K par rapport à I et J est la même que la position de E par rapport à F et G ;

$$\bullet \text{ enfin } \frac{EF}{FG} = \frac{1,02}{3,4} = 0,3 \text{ et } \frac{HI}{IJ} = \frac{1,2}{4} = 0,3.$$

Donc $\frac{EF}{FG} = \frac{HI}{IJ}$ et, d'après la propriété réciproque de Thalès, $(D) \parallel (D'')$.

- b. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles IKH

$$\text{et } IJG \text{ pour déduire que : } \frac{IH}{IJ} = \frac{IK}{IG} = \frac{HK}{JG} ;$$

$$\text{donc : } HK = JG \times \frac{IH}{IJ} = 2 \times \frac{1,2}{4} = 0,6 \text{ dm.}$$

Exercice 39

- a. $M \in [IJ]$ et $N \in [IK]$.

$$\frac{IM}{IJ} = \frac{2,4}{4} = 0,6 \text{ et } \frac{IN}{IK} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ donc } \frac{IM}{IJ} = \frac{IN}{IK} ;$$

on en déduit, d'après la propriété réciproque de Thalès, que $(JK) \parallel (MN)$.

- b. • On nomme H le pied de la hauteur issue de I dans le triangle IJK et L le pied de la hauteur issue de I dans le triangle IMN .

On utilise la propriété de Thalès dans les triangles ILM et

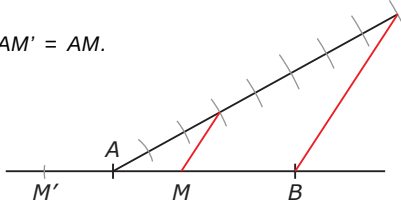
$$IJH \text{ pour déduire que : } \frac{IJ}{IM} = \frac{IH}{IL} = \frac{JH}{ML} ;$$

$$\text{donc : } IL = IH \times \frac{IM}{IJ} = 3,8 \times \frac{2,4}{4} = 2,28 \text{ cm.}$$

Partage d'un segment

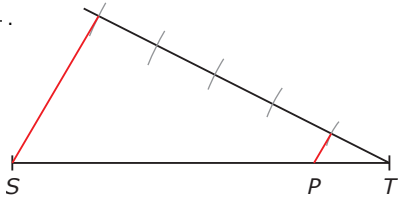
Exercice 40

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{8} \text{ et } AM' = AM.$$

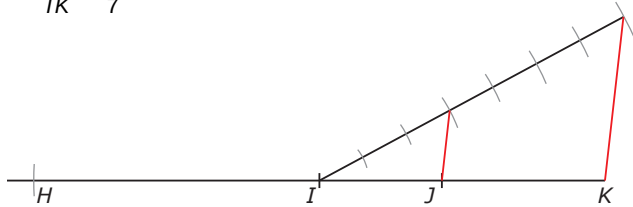


Exercice 41

a. $P \in [ST]$ et $\frac{TP}{ST} = \frac{1}{5}$.



b. $\frac{IJ}{IK} = \frac{3}{7}$ et $IH = IK$.

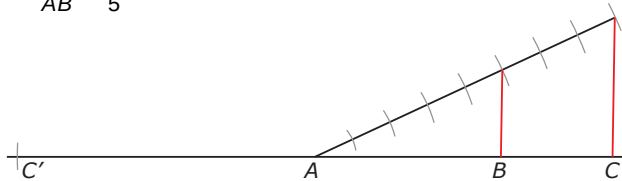


Exercice 42

a. Puisque $\frac{AC}{AB} = \frac{8}{5} > 1$, c'est que $AC > AB$.

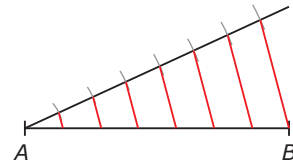
L'élève a donc raison.

b. $\frac{AC}{AB} = \frac{8}{5}$ et $AC = AC'$.

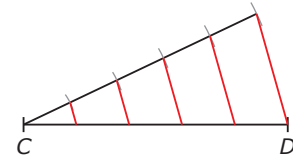


Exercice 43

a.

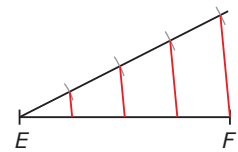


b.



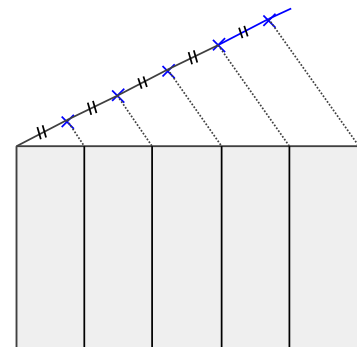
Exercice 44

Méthode 1 :
Par la propriété de Thalès



Méthode 2 :
En constituant le milieu I de $[EF]$ (à l'aide de la médiatrice de $[EF]$), puis celui de $[EI]$ et enfin celui de $[IF]$.

Exercice 45



Le champ est ainsi découpé en 5 parts égales.

Exercice 46 Choisir les bonnes longueurs

1.a. Les longueurs BC et $B'C'$ n'apparaissent pas dans les rapports de longueurs obtenus grâce à la propriété de Thalès.

b.

AB	AB'	BB'
AC	AC'	CC'

2.a. Les longueurs « entre les droites » ne sont pas utilisées lors de la propriété de Thalès.

b.

BC	$B'C'$
AC	$A'C'$

Exercice 47 Bien connaître les propriétés

1.a. $\frac{EM}{EF} = \frac{3}{5} = 0,6$ et $\frac{EN}{EG} = \frac{2,1}{3,5} = 0,6$

donc $\frac{EM}{EF} = \frac{EN}{EG}$.

b. Non, car il faut vérifier au préalable toutes les hypothèses de la propriété réciproque de Thalès, en particulier que la position de M par rapport à E et F est la même que la position de N par rapport à E et G .

c.

Figure où les droites (MN) et (FG) ne sont pas parallèles :

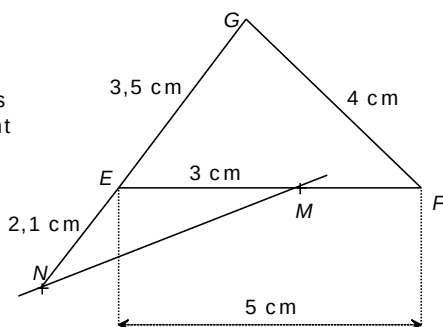
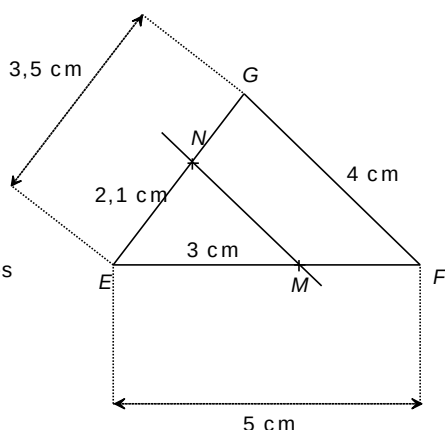


Figure où les droites (MN) et (FG) sont parallèles :



Exercice 48 Propriété réciproque et contraposée

1. ☐ Je m'assure que les points sont alignés dans le bon ordre ;

☐ Je calcule le rapport $\frac{IL}{IM}$; puis le rapport $\frac{IK}{IJ}$, puis je les compare.

☐ Si ces rapports sont égaux, alors j'utilise la propriété *réciproque* de Thalès pour déduire que $(MJ) \parallel (LK)$.

☐ Si ces rapports ne sont pas égaux, alors j'utilise la *contraposée* de la propriété de Thalès pour déduire que les droites (MJ) et (LK) ne sont pas parallèles.

2. Situation 1

☐ Les points J, I et K sont alignés, de même que les points M, I et L ; la position de I par rapport à J et K est la même que la position de I par rapport à M et L .

☐ $\frac{IL}{IM} = \frac{4}{0,8} = 5$ et $\frac{IK}{IJ} = \frac{5,5}{1,1} = 5$ donc $\frac{IL}{IM} = \frac{IK}{IJ}$.

☐ D'après la propriété réciproque de Thalès, on en déduit que $(MJ) \parallel (KL)$.

Situation 2

☐ Les points I, J et K sont alignés, de même que les points I, M et L ; la position de M par rapport à I et L est la même que la position de J par rapport à I et K .

☐ $\frac{IL}{IM} = \frac{4,2}{3} = 1,4$ et $\frac{IK}{IJ} = \frac{3,3}{2,4} = 1,375$ donc $\frac{IL}{IM} \neq \frac{IK}{IJ}$.

☐ D'après la contraposée de la propriété de Thalès, on en déduit que les droites (MJ) et (KL) ne sont pas parallèles.

Exercice 53 Construire une charpente

1. Les points A , B et C sont alignés, de même que les points A , F et E ; la position de B par rapport à A et C est la même que la position de F par rapport à A et E ;

enfin $\frac{AC}{AB} = \frac{9}{5} = 1,8$ et $\frac{AE}{AF} = \frac{6,3}{3,5} = 1,8$ donc $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AF}$.

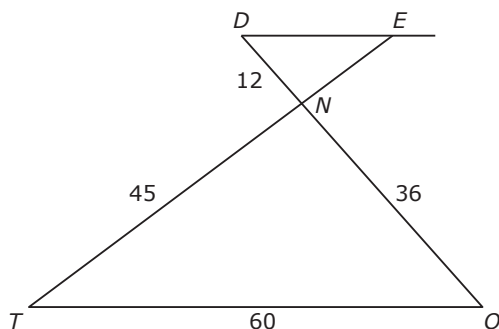
On en déduit, d'après la propriété réciproque de Thalès, que $(CE) \parallel (BF)$.

2. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles ABF et ACE pour déduire que :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AF} = \frac{CE}{BF} \text{ donc } CE = BF \times \frac{AC}{AB} = 2,5 \times 1,8 = 4,5 \text{ m.}$$

Exercice 54 Au millimètre près

1.



2. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles NDE

et NTO pour déduire que : $\frac{ND}{NO} = \frac{NE}{NT} = \frac{DE}{OT}$;

$$\text{donc } NE = NT \times \frac{ND}{NO} = 45 \times \frac{1}{3} = 15 \text{ mm,}$$

$$\text{et } DE = OT \times \frac{ND}{NO} = 60 \times \frac{1}{3} = 20 \text{ mm.}$$

Exercice 55 Aire du trapèze

1. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles AOE

et AML pour déduire que : $\frac{AO}{AM} = \frac{AE}{AL} = \frac{OE}{ML}$;

$$\text{donc } AO = AM \times \frac{AE}{AL} = 3,9 \times \frac{1,5}{4,5} = 1,3 \text{ cm.}$$

2. On calcule les aires des deux triangles rectangles :

$$\text{aire}(AEO) = \frac{1,5 \times 1,3}{2} = 0,975 \text{ cm}^2,$$

$$\text{aire}(AML) = \frac{4,5 \times 3,9}{2} = 8,775 \text{ cm}^2 ;$$

$$\text{d'où : aire}(OELM) = 8,775 - 0,975 = 7,8 \text{ cm}^2.$$

Exercice 56 Deux situations différentes

Situation 1

On utilise la propriété de Thalès dans les triangles ABC et ADE pour déduire que :

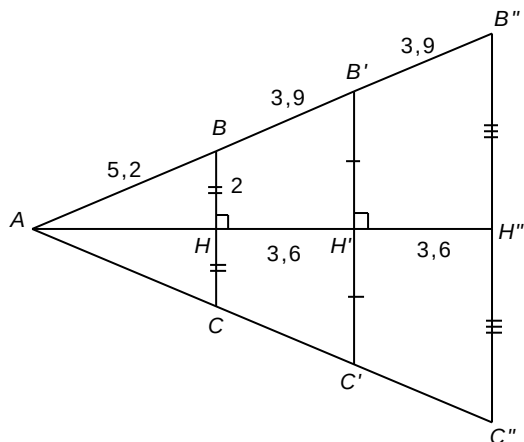
$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{CB}{ED} \text{ donc } AD = AB \times \frac{AE}{AC} = 8 \times \frac{AE}{AC} = 32 \text{ cm.}$$

Situation 2

On utilise la propriété de Thalès dans les triangles ABC et ADE pour déduire que :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \text{ donc } ED = BC \times \frac{AE}{AC} = 10 \text{ cm.}$$

Exercice 57 Pointe de flèche



1. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles ABC et

$AB'C'$ pour déduire que : $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$;

donc $B'C' = BC \times \frac{AB'}{AB} = 2 \times 2 \times \frac{9,1}{5,2} = 7 \text{ cm}$.

2. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles ABH et

$AB'H'$ pour déduire que : $\frac{AH'}{AH} = \frac{AB'}{AB} = \frac{B'H'}{BH}$;

donc $\frac{AH'}{AH} = \frac{AH + 3,6}{AH} = \frac{3,5}{2}$
 $2 \times (AH + 3,6) = 3,5 \times AH$
 $1,5 \times AH = 7,2$
 $AH = 4,8 \text{ cm}$.

Finalement la pointe de flèche mesure :

$4,8 + 3,6 + 3,6 = 12 \text{ cm}$.

3.a. Les points A , B et B'' sont alignés, de même que les points A , H et H'' ; la position de B par rapport à A et B'' est la même que la position de H par rapport à A et H'' ;

de plus $\frac{AB}{AB''} = \frac{5,2}{13} = 0,4$ et $\frac{AH}{AH''} = \frac{4,8}{12} = 0,4$;

donc $\frac{AB}{AB''} = \frac{AH}{AH''}$.

On en déduit, d'après la propriété réciproque de Thalès, que les droites (BH) et $(B''H'')$ sont parallèles ; c'est-à-dire $(BC) \parallel (B''C'')$.

b. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles $AB''C''$

et ABC pour déduire que : $\frac{B''C''}{BC} = \frac{AB''}{AB}$;

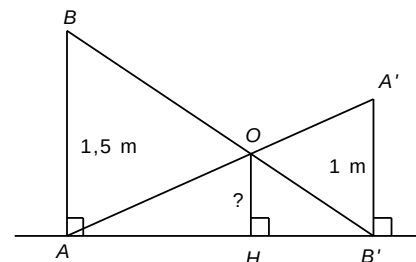
donc $B''C'' = BC \times \frac{AB''}{AB} = 4 \times \frac{13}{5,2} = 10 \text{ cm}$.

AH'' étant la hauteur issue de A dans le triangle $AB''C''$,

on a : $\text{aire}(AB''C'') = \frac{AH'' \times B''C''}{2} = \frac{12 \times 10}{2} = 60 \text{ cm}^2$.

Exercice 58 L'enclos du zébu

On nomme les points du schéma :



On utilise deux fois la propriété de Thalès :

• dans les triangles OAB et $OA'B'$ pour déduire que :

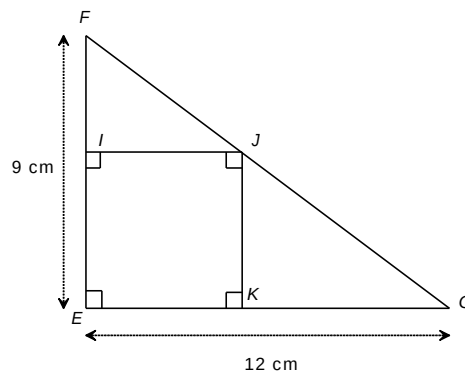
$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$ donc $OA = 1,5 \times OA'$ et $OB = 1,5 \times OB'$;

• dans les triangles AOH et $AA'B'$ pour déduire que :

$\frac{AO}{AA'} = \frac{AH}{AB'} = \frac{OH}{A'B'}$ donc $OH = A'B' \times \frac{AO}{AA'} = A'B' \times \frac{AO}{AO + OA'}$
 $= 1 \times \frac{1,5 \times OA'}{1,5 \times OA' + OA'}$
 $= \frac{1,5}{2,5} = 0,60 \text{ m}$.

Finalement le zébu ne pourra pas enjamber la barrière.

Exercice 59 Pièce d'artisanat



1.a. On utilise la propriété de Pythagore dans le triangle EFG rectangle en E : $FG^2 = FE^2 + EG^2$ d'où $FG = 15 \text{ cm}$.

b. $(IJ) \parallel (EK)$ car elles sont perpendiculaires à une même droite : (EF) ;

$(EI) \parallel (JK)$ car elles sont perpendiculaires à une même droite : (EG) ;

donc $EIJK$ est un parallélogramme.

De plus, $(EI) \perp (EK)$; donc $EIJK$ est un rectangle.

2.a. On utilise la propriété de Thalès dans les triangles FIJ et FEG pour déduire que :

$\frac{FI}{FE} = \frac{FJ}{FG} = \frac{IJ}{EG}$ c'est-à-dire $\frac{FI}{9} = \frac{FJ}{15} = \frac{IJ}{12}$.

b. Pour que $EIJK$ soit un carré, il faut que $IJ = EI = FE - FI$ c'est-à-dire $IJ = 9 - FI$.

Or, d'après le 2.a, $IJ = 12 \times \frac{FI}{9}$;

ainsi : $9 - FI = 12 \times \frac{FI}{9}$ ou $9 = 12 \times \frac{FI}{9} + FI$;

donc : $9 = 12 \times \frac{FI}{9} + 9 \times \frac{FI}{9} = 21 \times \frac{FI}{9}$,

c'est-à-dire : $FI = \frac{81}{21} \approx 3,9 \text{ cm}$.

2 Trigonométrie dans le triangle rectangle

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1, 2, 3	Cosinus, sinus, tangente d'un angle aigu [1 p 22]		46, 47, 48	
4	Relations trigonométriques [2 p 22]	42, 43, 44, 45	48	
	Les angles remarquables [3 p 23]	45	50	54
	Utilisation de la calculatrice [4 p 23]	34	47	
	Apprendre à calculer un cosinus, un sinus, une tangente [1 p 24]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11		
	Apprendre à calculer une longueur [2 p 25]	12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 36, 39, 40, 41	49	51, 52, 53, 55, 56, 57, 59, 60, 61
	Apprendre à déterminer la mesure d'un angle [3 p 26]	24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 37, 38, 39, 40, 41	46, 47	52, 53, 55, 58, 60, 61

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

Image télévisée

1. a. Puisque le rapport : $\frac{\text{longueur de l'image}}{\text{largeur de l'image}} = \frac{L}{l} = \frac{4}{3}$,

on en déduit que :

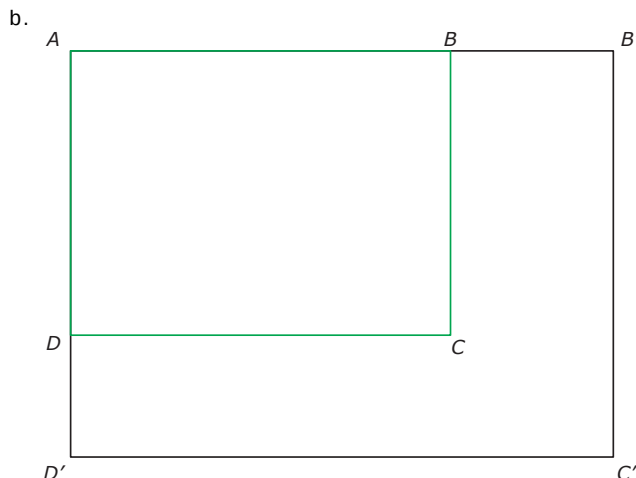
• Pour Yves : $L = \frac{4}{3} \times l = \frac{4}{3} \times 42 = 56$ cm.

Pour le calcul de la diagonale, on utilise la propriété de Pythagore dans le triangle ABD rectangle en A :

$BD^2 = BA^2 + AD^2$, on en déduit que $BD = \sqrt{42^2 + 56^2} = 70$ cm.

• Pour Claire : $l = \frac{L}{\frac{4}{3}} = L \times \frac{3}{4} = 80 \times \frac{3}{4} = 60$ cm.

On procède de même pour la diagonale et on trouve $B'D' = 100$ cm.



2. On utilise le fait que $L = \frac{4}{3} \times l$ et la propriété de Pythagore : $d^2 = L^2 + l^2$, où d est la longueur de la diagonale.

On obtient $120^2 = \left(\frac{4}{3} \times l\right)^2 + l^2$, ce qui donne $l = 72$ cm. Enfin $L = \frac{4}{3} \times l = 96$ cm.

3. $\frac{AD}{BD} = \frac{42}{70} = 0,6$ et $\frac{AD'}{B'D'} = \frac{60}{100} = 0,6$. Ces rapports sont égaux.

$\frac{AB}{BD} = \frac{56}{76} = 0,8$ et $\frac{AB'}{B'D'} = \frac{80}{100} = 0,8$. Ces rapports sont égaux.

Ces rapports ne semblent pas dépendre des dimensions des téléviseurs.

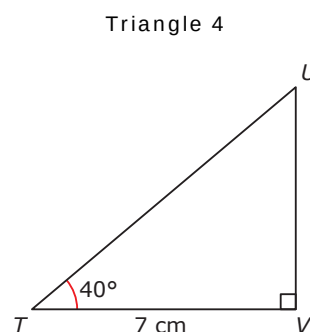
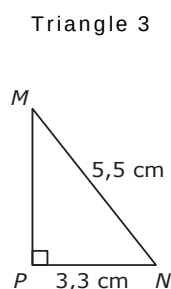
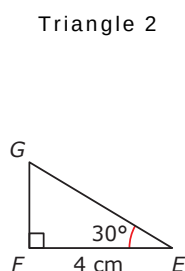
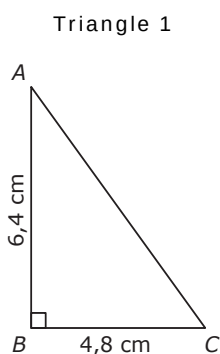
Ce qui est confirmé par les rapports du 3^{ème} téléviseur (question 2) :

d'une part entre largeur et diagonale ($\frac{72}{120} = 0,6$), d'autre part entre longueur et diagonale ($\frac{96}{120} = 0,8$).

Activités de découverte

1 Constructions de triangles rectangles et calculs de longueurs

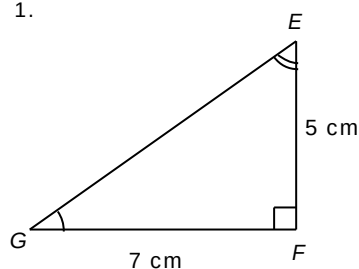
1.



- 2.a. Dans les deux cas, en utilisant la propriété de Pythagore on obtient : $AC = 8$ cm et $MP = 4,4$ cm.
 b. Non, pas avec les connaissances actuelles.

2 Compréhension du vocabulaire

1.



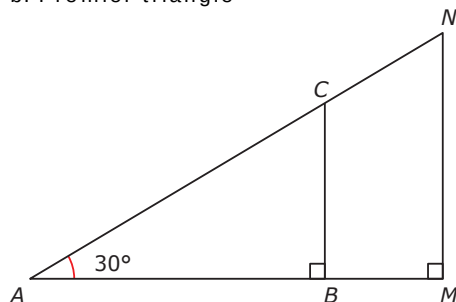
2. a. L'hypoténuse est EG ;
 b. EF est le côté adjacent à $\hat{E}$;
 c. le côté opposé à $\hat{E}$ est GF ;
 d. le côté adjacent à $\hat{G}$ est GF .

3.

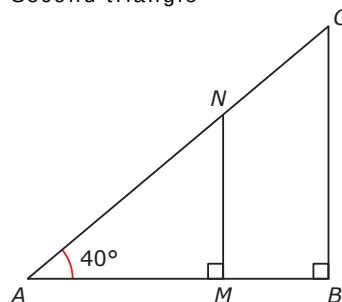
	Hypoténuse	Côté adjacent à l'angle marqué	Côté opposé à l'angle marqué
Situation ☐	BC	AC	AB
Situation ☐	DF	EF	ED
Situation ☐	GI	HI	HG
Situation ☐	LJ	KJ	KL

3 Mesure d'un angle et rapports de longueurs

b. Premier triangle



Second triangle



c. Premier triangle

$\frac{AB}{AC}$	$\frac{AM}{AN}$	$\frac{BC}{AC}$	$\frac{MN}{AN}$	$\frac{BC}{AB}$	$\frac{MN}{AM}$
0,9	0,9	0,5	0,5	0,6	0,6

Second triangle

$\frac{AB}{AC}$	$\frac{AM}{AN}$	$\frac{BC}{AC}$	$\frac{MN}{AN}$	$\frac{BC}{AB}$	$\frac{MN}{AM}$
0,8	0,8	0,6	0,6	0,8	0,8

Ces rapports semblent deux à deux égaux.

2.a. Dans les deux cas, les triangles sont en configuration de Thalès $[(BC) \parallel (MN)]$;

on en déduit l'égalité des rapports : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

b. De $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, on déduit : $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$; de $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, on déduit : $\frac{BC}{AC} = \frac{MN}{AN}$; de $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, on déduit : $\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AM}$.

c. Faux (le rapport $\frac{AM}{AN}$ ne dépend pas de l'emplacement du point M).

Vrai (le rapport $\frac{AM}{AN}$ dépend de l'angle $\hat{A}$).

4 Des formules de trigonométrie

1.a. $\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$; $\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$.

b. $0 < AB < AC$ donc $\frac{0}{AC} < \frac{AB}{AC} < \frac{AC}{AC}$, c'est-à-dire $0 < \cos \hat{A} < 1$.

c. $0 < BC < AC$ donc, $\frac{0}{AC} < \frac{BC}{AC} < \frac{AC}{AC}$ c'est-à-dire $0 < \sin \hat{A} < 1$.

2.a. $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2}$.

b. D'après la propriété de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B , $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$.

3.a. $\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB}$.

b. $\frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{BC}{AC} \times \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB}$.

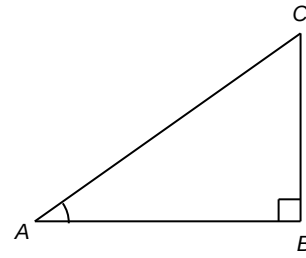
c. Les réponses a. et b. donnent $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$.

4.a. $\cos \hat{C} = \frac{BC}{AC}$, $\sin \hat{C} = \frac{AB}{AC}$.

b. On observe que $\cos \hat{C} = \sin \hat{A}$ et $\sin \hat{C} = \cos \hat{A}$.

c. Les angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires car $\text{mes } \hat{A} + \text{mes } \hat{C} + 90^\circ = 180^\circ$, donc $\text{mes } \hat{A} + \text{mes } \hat{C} = 90^\circ$.

Lorsque deux angles sont complémentaires, le cosinus de l'un est égal au sinus de l'autre.



1 Apprendre à calculer un cosinus, un sinus, une tangente

Exercice 1

$$\cos \hat{C} = \frac{BC}{AC} ; \sin \hat{C} = \frac{AB}{AC} ; \tan \hat{C} = \frac{AB}{BC}.$$

Exercice 2

$$\cos \hat{D} = \frac{DF}{DE} ; \sin \hat{D} = \frac{EF}{DE} ; \tan \hat{D} = \frac{EF}{DP}.$$

Exercice 3

$$\cos \hat{H} = \frac{HI}{GH} ; \sin \hat{H} = \frac{GI}{GH} ; \tan \hat{H} = \frac{GI}{HI}.$$

Exercice 4

$$\cos \hat{K} = \frac{LK}{JK} ; \sin \hat{K} = \frac{LJ}{JK} ; \tan \hat{K} = \frac{LJ}{LK} \quad \tan \hat{H} = \frac{GI}{HI}.$$

Exercice 5

$$\cos \hat{BAC} = \frac{AB}{AC} , \sin \hat{BAC} = \frac{BC}{AC} , \tan \hat{BAC} = \frac{BC}{AB}.$$

Exercice 6

$$\cos \hat{EHF} = \frac{EH}{FH} , \sin \hat{EHF} = \frac{EF}{FH} , \tan \hat{EHF} = \frac{EF}{EH}.$$

Exercice 7

$$\cos \hat{M} = \frac{15}{25} = 0,6 ; \sin \hat{M} = \frac{20}{25} = 0,8 ; \tan \hat{M} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}.$$

Exercice 8

$$1. EG^2 = EF^2 + FG^2 \text{ ce qui donne } FG = 2\sqrt{7} , \text{ donc } FG \approx 5,29.$$

$$2. \cos \hat{E} = \frac{EF}{EG} = \frac{6}{8} = 0,75 ; \sin \hat{E} = \frac{FG}{EG} \approx \frac{5,29}{8} \approx 0,7 ;$$

$$\tan \hat{E} = \frac{FG}{EF} \approx \frac{5,29}{6} \approx 0,9.$$

2 Apprendre à calculer une longueur

Exercice 12

$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} , \text{ donc } AB = 5 \times \cos 27^\circ \approx 4,46 \text{ cm.}$$

Exercice 13

$$\tan \hat{K} = \frac{IJ}{KJ} , \text{ donc } KJ = \frac{10}{\tan 60^\circ} \approx 5,77 \text{ cm.}$$

Exercice 14

$$\sin \hat{E} = \frac{FG}{EG} , \text{ donc } EG = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 8 \text{ cm.}$$

Exercice 15

$$\sin \hat{N} = \frac{MP}{NP} , \text{ donc } NP = \frac{3}{\sin 45^\circ} \approx 4,24 \text{ cm.}$$

Exercice 9

1. On le vérifie à l'aide de la propriété réciproque de Pythagore.

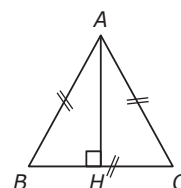
$$2.a. \cos \hat{S} = \frac{ST}{SU} = \frac{12}{13} \approx 0,9 ;$$

$$b. \tan \hat{S} = \frac{TU}{ST} = \frac{5}{12} \approx 0,4 ;$$

$$c. \tan \hat{U} = \frac{ST}{TU} = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Exercice 10

1.



2. Dans un triangle équilatéral, la hauteur est aussi la médiane, donc H est le milieu de [BC]. Ainsi, dans le triangle ABH rectangle en H :

$$\cos \hat{B} = \frac{BH}{BA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

3. a. D'après la propriété de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H, $AB^2 = AH^2 + HB^2$ d'où $AH = 2\sqrt{3}$.

$$b. \sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \tan \hat{B} = \frac{AH}{BH} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

(on retrouve ici $\cos 60^\circ$, $\sin 60^\circ$ et $\tan 60^\circ$)

Exercice 11

1. [AB] est un diamètre de (C), donc le triangle ABC est rectangle en C. On utilise la propriété de Pythagore : $AB^2 = AC^2 + CB^2$ d'où $AC = 10$ cm.

$$2. \cos \hat{BAC} = \frac{AC}{AB} = \frac{10}{12} \approx 0,8 ; \sin \hat{BAC} = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{11}}{12} \approx 0,6.$$

Exercice 16

$$\cos \hat{T} = \frac{TS}{RT} , \text{ donc } RT = \frac{10}{\cos 25^\circ} \approx 11,03 \text{ cm.}$$

Exercice 17

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} , \text{ donc } AC = 12 \times \sin 60^\circ \approx 10,39 \text{ cm.}$$

Exercice 18

$$\sin \hat{N} = \frac{LM}{MN} , \text{ donc } MN = \frac{2,5}{\sin 62^\circ} \approx 2,83 \text{ cm.}$$

Exercice 19

$$\tan \hat{D} = \frac{FE}{DE} , \text{ donc } FE = 30 \times \tan 70^\circ \approx 82,42 \text{ cm.}$$

Exercice 20

$$\sin \hat{K} = \frac{IJ}{KJ}, \text{ donc } KJ = \frac{4}{\sin 26^\circ} \approx 9,1 \text{ cm.}$$

$$\tan \hat{K} = \frac{IJ}{IK}, \text{ donc } IK = \frac{4}{\tan 26^\circ} \approx 8,2 \text{ cm.}$$

Exercice 21

$$\cos \hat{C} = \frac{BC}{AC}, \text{ donc } BC = 10 \times \cos 70^\circ \approx 3,4 \text{ cm.}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{AC}, \text{ donc } AB = 10 \times \sin 70^\circ \approx 9,4 \text{ cm.}$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{P} = AB + BC + AC \approx 9,4 + 3,4 + 10 \approx 22,8 \text{ cm.}$$

$$\text{Finalement, } 22 \leq \mathcal{P} \leq 23.$$

Exercice 22

$$\cos \hat{A} = \frac{AC}{AB}, \text{ donc } AC = 10 \times \cos 30^\circ \approx 8,7 \text{ dm ;}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AB}, \text{ donc } BC = 10 \times \sin 30^\circ = 5 \text{ dm.}$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{A}(ABC) = \frac{AC \times BC}{2} \approx \frac{8,7 \times 5}{2} \approx 21,75 \text{ dm}^2.$$

$$\cos \hat{E} = \frac{DE}{FE}, \text{ donc } DE = 8 \times \cos 39^\circ \approx 6,2 \text{ dm ;}$$

$$\sin \hat{E} = \frac{FD}{FE}, \text{ donc } FD = 8 \times \sin 39^\circ \approx 5 \text{ dm.}$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{A}(DEF) = \frac{FD \times DE}{2} \approx \frac{6,2 \times 5}{2} \approx 15,5 \text{ dm}^2.$$

• C'est donc le triangle ABC qui a la plus grande aire.

Exercice 23

1. • Puisque le triangle ABC est isocèle en A, la médiane (AI) est aussi la médiatrice de [BC]. Donc (BI) ⊥ (AI).

• Dans le triangle ABI rectangle en I :

$$\tan \hat{BAI} = \frac{BI}{AI}, \text{ donc } AI = \frac{3}{\tan 20^\circ} \approx 8,2 \text{ cm ;}$$

$$\sin \hat{BAI} = \frac{BI}{AB}, \text{ donc } AB = \frac{3}{\sin 20^\circ} \approx 8,8 \text{ cm.}$$

2. • L'aire du triangle ABC est donc :

$$\mathcal{A} = \frac{BC \times AI}{2} \approx \frac{6 \times 8,2}{2} \approx 24,6 \text{ cm}^2.$$

• Le périmètre du triangle ABC est donc :

$$\mathcal{P} = AB + BC + CA \approx 8,2 + 8,8 + 6 \approx 23 \text{ cm.}$$

3 Apprendre à déterminer la mesure d'un angle

Exercice 24

$$\cos \hat{A} = \frac{AC}{AB} = \frac{1,3}{2,6} = 0,5 ; \text{ donc mes } \hat{A} = 60^\circ.$$

Exercice 25

$$\tan \hat{J} = \frac{IK}{IJ} = 1 ; \text{ donc mes } \hat{J} = 45^\circ.$$

Exercice 26

$$\sin \hat{P} = \frac{MN}{PM} = \frac{1,05}{10} = 0,105 ; \text{ donc mes } \hat{P} \approx 6^\circ.$$

Exercice 27

$$\tan \hat{F} = \frac{EG}{FG} = \frac{7}{10} = 0,7 ; \text{ donc mes } \hat{F} \approx 35^\circ.$$

Exercice 28

$$\cos \hat{A} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \text{ donc mes } \hat{A} = 30^\circ.$$

Exercice 29

$$\cos \hat{K} = \frac{IK}{JK} = \frac{2,12}{4} = 0,53 ; \text{ donc mes } \hat{K} \approx 58^\circ.$$

Exercice 30

$$\tan \hat{G} = \frac{EF}{EG} = \frac{3,5}{4} = 0,875 ; \text{ donc mes } \hat{G} \approx 41^\circ.$$

Exercice 31

$$\tan \hat{N} = \frac{PM}{MN} = \frac{3,06}{6} = 0,51 ; \text{ donc mes } \hat{N} \approx 27^\circ.$$

Exercice 32

a. • Dans le triangle GHF rectangle en G :

$$\tan \hat{GHF} = \frac{GF}{HG} = \frac{5}{5} = 1 ; \text{ donc mes } \hat{GHF} = 45^\circ.$$

• Dans le triangle EFG rectangle en F :

$$\tan \hat{EFG} = \frac{EF}{GF} = \frac{8}{5} = 1,6 ; \text{ donc mes } \hat{EFG} \approx 58^\circ.$$

b. • Le triangle GHF est isocèle en G,

donc mes $\hat{GFH}$ = mes $\hat{GHF}$ = 45°.

• Dans le triangle EFG :

$$\text{mes } \hat{GEF} + \text{mes } \hat{EFG} + \text{mes } \hat{EGF} = 180^\circ ;$$

on en déduit que mes $\hat{GEF} \approx 32^\circ$.

Exercice 33

$$\text{a. } \cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}, \text{ c'est-à-dire } \cos \alpha = \frac{6,1}{10} = 0,61 ;$$

d'où : $52^\circ < \text{mes } \alpha < 53^\circ$.

$$\text{b. } \sin \hat{A} = \frac{BC}{AB}, \text{ c'est-à-dire } \sin \alpha = \frac{2,4}{6} = 0,4 ;$$

d'où : $23^\circ < \text{mes } \alpha < 24^\circ$.

Recherche d'une longueur, d'un angle

Exercice 34

1. $\cos 35^\circ \approx 0,819$; $\sin 70^\circ \approx 0,940$; $\tan 27^\circ \approx 0,510$;
 $\cos 18^\circ \approx 0,951$; $\tan 61^\circ \approx 1,804$; $\sin 28^\circ \approx 0,470$.

2. $\text{mes } \hat{A} \approx 61^\circ$; $\text{mes } \hat{B} \approx 56^\circ$; $\text{mes } \hat{C} \approx 76^\circ$.

Exercice 35

1. $78^\circ < \text{mes } \hat{I} < 79^\circ$.

2. $53^\circ < \text{mes } \hat{J} < 54^\circ$

3. $21^\circ < \text{mes } \hat{K} < 22^\circ$.

Exercice 36

1. Le triangle OSL est rectangle en S,

donc : $\cos \hat{O} = \frac{OS}{OL}$, donc $OS = 10 \times \cos 40^\circ \approx 7,7$ m.

2. $\sin \hat{O} = \frac{SL}{OL}$, donc $SL = 10 \times \sin 40^\circ \approx 6,4$ m.

Or $6,4 - 2 \times 2,5 = 1,4$. Donc Linda mesure 1 m 40 environ.

Exercice 37

1. On utilise la propriété réciproque de Pythagore dans le triangle FGH : $FH^2 = 9,5^2 = 90,25$;

$$HG^2 + GF^2 = 5,7^2 + 7,6^2 = 90,25.$$

Ainsi, $FH^2 = HG^2 + GF^2$;

on en déduit que ce triangle est rectangle en G.

2. On utilise la propriété de Pythagore dans le triangle FGH rectangle en E et on obtient $EH = \sqrt{24,64} \approx 5$ cm.

3. • Dans le triangle EFH rectangle en H :

$$\cos \hat{E}FH = \frac{8,1}{9,5} \approx 0,85 ; \text{ donc } \text{mes } \hat{E}FH \approx 32^\circ.$$

On en déduit que $\text{mes } \hat{E}HF \approx 58^\circ$.

• Dans le triangle FGH rectangle en G :

$$\cos \hat{H}FG = \frac{7,6}{9,5} \approx 0,8 ; \text{ donc } \text{mes } \hat{H}FG \approx 37^\circ.$$

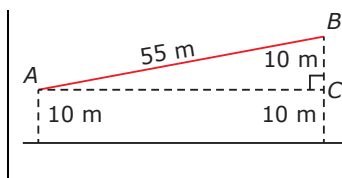
On en déduit que $\text{mes } \hat{G}HF \approx 53^\circ$.

Exercice 38

On schématise la situation :
 dans le triangle ABC,
 rectangle en C,

$$\sin \hat{B}AC = \frac{BC}{AB} = \frac{10}{55} \approx 0,18 ;$$

donc $\text{mes } \hat{B}AC \approx 10^\circ$.



Exercice 39

1. Dans le rectangle FBH, rectangle en H,

$$\sin \hat{B}FH = \frac{BH}{BF} = \frac{3,4 - 2,2}{5,3 - 0,3} = \frac{1,2}{5} \approx 0,24 ;$$

donc $\text{mes } \hat{B}FH \approx 14^\circ$.

2. Dans le rectangle FBH rectangle en H, $\cos \hat{B}FH = \frac{FH}{FB}$,

$$\text{donc } FH = FB \times \cos \hat{B}FH = 5 \times \cos 14^\circ \approx 4,85.$$

$$\text{Ainsi } \ell = 2 \times FH \approx 2 \times 4,85 \approx 9,7 \text{ m.}$$

Exercice 40

• Dans le triangle KLM, rectangle en M :

$$ML = KL \times \cos \hat{L} = 5 \times \cos 60^\circ = 2,5 \text{ dm} ;$$

$$\text{mes } \hat{M}KL = 90 - 60 = 30^\circ ;$$

$$KM = KL \times \sin \hat{L} = 5 \sin 60^\circ \approx 4,3 \text{ dm.}$$

• Dans le triangle JKM, isocèle rectangle en K :

$$\text{mes } \hat{K}JM = \text{mes } \hat{K}MJ = 45^\circ ; JK = KM \approx 4,3 \text{ dm} ;$$

d'après la propriété de Pythagore :

$$JM^2 = JK^2 + KM^2 \text{ d'où } JM \approx 6,1 \text{ dm.}$$

• Dans le triangle IJM, rectangle en M, d'après la propriété de Pythagore, $IJ^2 = JM^2 - IM^2$ d'où $IJ \approx 3,7$ dm ;

$$\cos \hat{I}MJ = \frac{IM}{JM} \approx \frac{4,8}{6,1} \approx 0,79, \text{ d'où } \text{mes } \hat{I}MJ \approx 38^\circ ;$$

$$\text{mes } \hat{I}JM \approx 90 - 38 \approx 52^\circ.$$

Exercice 41

1. Dans le triangle MNQ, rectangle en N, d'après la propriété de Pythagore : $MQ^2 = MN^2 + NQ^2$.

$$\text{On obtient : } MN = \sqrt{2,75} \text{ cm.}$$

2. Dans le triangle MNQ, rectangle en N :

$$\sin \hat{N}MQ = \frac{QN}{QM} = \frac{2,5}{3} \approx 0,83, \text{ donc : } \text{mes } \hat{N}MQ \approx 56^\circ ;$$

$$\text{de plus : } \cos \hat{N}MQ = \frac{MN}{QM} ;$$

$$\text{donc : } MN = 3 \times \cos 56^\circ \approx 1,68 \text{ cm.}$$

3. Dans le triangle PQN, rectangle en N :

$$\tan \hat{P}NQ = \frac{NQ}{NP} ; \text{ donc : } NP = \frac{2,5}{\tan 42^\circ} \approx 2,78 \text{ cm.}$$

$$\text{Finalement : } MP = MN + NP \approx 1,68 + 2,78 \approx 4,46 \text{ cm.}$$

Formules de trigonométrie

Exercice 42

$$1. \bullet \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 ; \cos^2 \alpha + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 ;$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} ;$$

$$\text{donc } \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, \text{ car } \cos \alpha > 0.$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

$$2. \bullet \cos^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 ; \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} ;$$

$$\text{donc } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ car } \cos \alpha > 0.$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$3. \bullet \cos^2 \alpha + \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1 ; \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81} ;$$

$$\text{donc } \cos \alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}, \text{ car } \cos \alpha > 0.$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4\sqrt{5}}{9}} = \frac{1}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{20}.$$

Exercice 43

$$1. \bullet \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 ; \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 ;$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} ;$$

$$\text{donc } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \text{ car } \sin \alpha > 0.$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{6}.$$

$$2. \bullet \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 ; \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{49} = \frac{45}{49} ;$$

$$\text{donc } \sin \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}, \text{ car } \sin \alpha > 0.$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

$$3. \bullet \left(\frac{5}{11}\right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 ; \sin^2 \alpha = 1 - \frac{25}{121} = \frac{96}{121} ;$$

$$\text{donc } \sin \alpha = \frac{4\sqrt{6}}{11}, \text{ car } \sin \alpha > 0.$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4\sqrt{6}}{11}}{\frac{5}{11}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}.$$

Exercice 44

1. Les angles α et β sont des angles complémentaires car $\text{mes} \alpha + \text{mes} \beta = 90^\circ$.

$$2. \cos \alpha = \frac{AC}{AB} \text{ et } \sin \beta = \frac{AC}{AB}.$$

Ainsi, lorsque $\text{mes} \alpha + \text{mes} \beta = 90^\circ$, $\cos \alpha = \sin \beta$.

$$3. \sin \alpha = \frac{BC}{AB} \text{ et } \cos \beta = \frac{BC}{AB},$$

$$\text{donc } \tan \alpha \times \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \times \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 1.$$

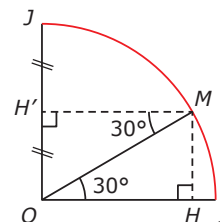
Exercice 45

• Dans le triangle OMH , rectangle en H ,

$$\sin \hat{IOM} = \frac{HM}{OM}, \text{ or } OM = 1$$

$$\text{et } \sin \hat{IOM} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\text{donc } HM = OH' = \frac{1}{2}.$$

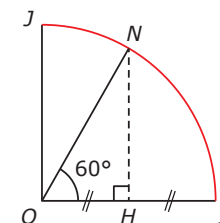


• Dans le triangle ONH , rectangle en H ,

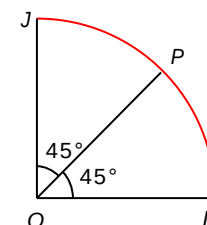
$$\cos \hat{ION} = \frac{OH}{ON}, \text{ or } ON = 1$$

$$\text{et } \cos \hat{ION} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\text{donc } OH = \frac{1}{2}.$$



• Dans le triangle OPH , rectangle en H , (OP) est la bissectrice de l'angle $\hat{IOJ}$ puisque $\text{mes} \hat{IOJ} = 90^\circ$ et $\text{mes} \hat{IOP} = 45^\circ$.



Exercice 46 Vérifier les hypothèses

1. Les formules de trigonométrie ne sont valables que dans les triangles rectangles, ce qui n'est pas le cas pour le triangle EFG . En effet l'hypoténuse de ce triangle ne peut être que son plus grand côté ;
 or $EG^2 = 5^2 = 25$; $EF^2 + FG^2 = 4,2^2 + 3^2 = 26,64$;
 donc $EG^2 \neq EF^2 + FG^2$ et, d'après la contraposée de la propriété de Pythagore, le triangle EFG n'est pas rectangle en F .

2. On vérifie aisément (propriété réciproque de Pythagore) que le triangle EGH est maintenant rectangle en F .

a. $\cos \hat{E} = \frac{EF}{EG} = \frac{4}{5} = 0,8$.

b. On en déduit que $\text{mes } \hat{E} \approx 37^\circ$.

Exercice 47 Bien lire la table de trigonométrie

1. La réponse est $\cos 55^\circ = 0,574$.

L'élève 2 a du lire la colonne des sinus pour 55° .

2. La réponse est $32^\circ < \text{mes } \hat{A} < 33^\circ$.

L'élève 1 n'a pas observé correctement la table et les deux valeurs situées autour de $0,848$.

$\cos 31^\circ = 0,857$; $\cos 32^\circ = 0,848$; $\cos 33^\circ = 0,839$.

Exercice 48 Utiliser les formules de trigonométrie

1. Dans le triangle ABC , rectangle en B , $\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$.

2. • $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \sin^2 \hat{A} = 1$$

$$\sin^2 \hat{A} = \frac{8}{9}$$

$$\sin \hat{A} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\bullet \tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}.$$

• $\sin \hat{C} = \cos \hat{A}$, car les angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires ; donc $\sin \hat{C} = \frac{1}{3}$.

Exercice 49 Utiliser le bon outil

Situation $\square$: On utilise la propriété de Pythagore dans le triangle IJK rectangle en I :
 $JK^2 = JI^2 + IK^2$ ce qui donne $IJ = 4,5$ cm.

Situation $\square$: On utilise la trigonométrie dans le triangle IJK rectangle en I : $\cos \hat{IJK} = \frac{IJ}{JK}$,

d'où $IJ = JK \times \cos \hat{IJK} = 10 \times \cos 60^\circ = 5$ cm.

Situation $\square$: On utilise la propriété de Thalès.

Les triangles IJK et KML sont en configuration de Thalès,

donc : $\frac{KI}{KL} = \frac{KJ}{KM} = \frac{IJ}{LM}$;

de $\frac{KI}{KL} = \frac{IJ}{LM}$, on déduit que : $\frac{6}{8} = \frac{IJ}{4}$ d'où $IJ = 3$ cm.

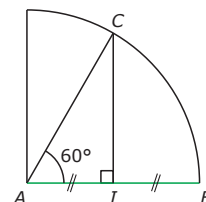
Exercice 50 Rédiger un programme de construction

1. • Étape $\square$: Je trace un quart de cercle de centre A et de rayon AB ;

• Étape $\square$: Je marque le milieu I du segment $[AB]$;

• Étape $\square$: La perpendiculaire à (AB) passant par I coupe le quart de cercle au point C ;

• Étape $\square$: Je trace $[AC]$.



2. • Étape $\square$: Je trace un quart de cercle de centre A et de rayon AB ;

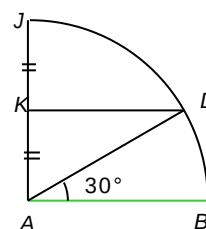
• Étape $\square$: Je trace la perpendiculaire à (AB) passant par A ;

• Étape $\square$: Je place le point J d'intersection du quart de cercle et de la droite précédente ;

• Étape $\square$: Je marque le milieu K du segment $[AJ]$;

• Étape $\square$: La perpendiculaire à $[AJ]$ passant par K coupe le quart de cercle de point D ;

• Étape $\square$: Je trace $[AD]$.



Exercice 51 Des formules générales

1. Dans le triangle OBH rectangle en H , d'après la propriété de Pythagore : $OB^2 = HB^2 + HO^2$, donc : $HO^2 = r^2 - h^2$.

Or le triangle OAB est isocèle en O , donc la hauteur (OH) est aussi une médiane.

Ainsi, $AB = 2 \times HB = 2\sqrt{r^2 - h^2}$.

2. ABC est un triangle équilatéral, donc :

- ses angles ont pour mesure 60° ; comme (OC) est la bissectrice de $\widehat{BCA}$, mes $\widehat{BCO} = 30^\circ$;
- la hauteur (AH) est aussi une médiane, donc H est le milieu de $[BC]$.

Dans le triangle OHC , rectangle en H , $\cos \widehat{HCO} = \frac{HC}{OC}$;

d'où : $HC = OC \times \cos \widehat{HCO}$,

c'est-à-dire : $\frac{a}{2} = r \times \cos 30^\circ$,

$$a = 2 \times r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}.$$

3. Avec les remarques de la question 2. puisque ABC est équilatéral, dans le triangle AHB , rectangle en H ,

$$AB^2 = AH^2 + HB^2, \text{ c'est-à-dire : } a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 ;$$

$$\text{d'où : } a^2 - \frac{a^2}{4} = h^2, \text{ c'est-à-dire : } h^2 = \frac{3a^2}{4} \text{ et } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

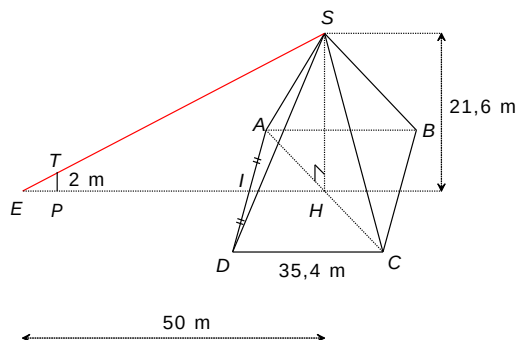
4. Dans le triangle AOB isocèle rectangle en O :

d'une part, mes $\widehat{ABO} = 45^\circ$;

d'autre part, $\cos \widehat{ABO} = \frac{OB}{AB}$; d'où $AB = \frac{OB}{\cos \widehat{ABO}}$;

$$\text{ainsi, } c = \frac{r}{\frac{\sqrt{2}}{2}} ; \text{ d'où } c = r \times \frac{2}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}.$$

Exercice 52 La pyramide du Louvre



$$1. AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{35,4^2 + 35,4^2} \approx 50 \text{ m.}$$

2. Dans le triangle SAH , rectangle en H :

$$a. \tan \widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = \frac{21,6}{25} = 0,864 ;$$

d'où : mes $\widehat{SAH} = 41^\circ$.

$$b. \cos \widehat{SAH} = \frac{AH}{AS}, \text{ donc : } AS = \frac{AH}{\cos \widehat{SAH}} = \frac{25}{\cos 41^\circ} \\ AS \approx 33 \text{ m.}$$

3. Les triangles ETP et ESH sont en configuration de

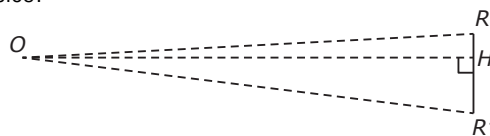
Thalès $[(TP) \parallel (SH)]$, donc : $\frac{EP}{EH} = \frac{PT}{HS}$;

$$\text{d'où : } EP = EH \times \frac{PT}{HS} = 50 \times \frac{2}{21,6} \approx 4,6 \text{ m ;}$$

$$\text{on en déduit que : } PI = EH - EP - IH \approx 50 - 4,6 - \frac{35,4}{2} \\ PI \approx 28 \text{ m.}$$

Exercice 53 Pêche au requin

On nomme les points de la figure afin de résoudre l'exercice.



1. Dans les triangles OHR et OHR' rectangle en H ,

$$\tan \widehat{ROH} = \frac{HR}{OH} ; \text{ donc } HR = OH \times \tan \widehat{ROH}$$

$$HR = 10 \times \tan 3^\circ \approx 0,524 \text{ m.}$$

$$\tan \widehat{R'OH} = \frac{HR'}{OH} ; \text{ donc } HR' = OH \times \tan \widehat{R'OH}$$

$$HR' = 10 \times \tan 7^\circ \approx 1,228 \text{ m.}$$

$$\text{Ainsi } RR' = HR + HR' \approx 1,75 \text{ m.}$$

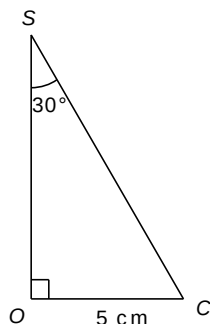
2. Ali s'éloigne de 10 m de plus : $OK = 20 \text{ m.}$

$$\tan \widehat{ROK} = \frac{KR}{OK} = \frac{0,524}{20} = 0,0262, \text{ donc } \widehat{ROK} \approx 1,5^\circ ;$$

$$\tan \widehat{R'OK} = \frac{KR'}{OK} = \frac{1,228}{20} = 0,0614, \text{ donc } \widehat{R'OK} \approx 3,51^\circ ;$$

les angles ne sont pas diminués de moitié.

Exercice 54 Avec les angles remarquables



1. Dans le triangle SOC , rectangle en O , $\sin \hat{O}SC = \frac{OC}{SC}$;
donc $SC = \frac{OC}{\sin \hat{O}SC} = \frac{OC}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{0,5} = 10$ cm.

2. Dans le triangle SOC , rectangle en O , $\cos \hat{O}SC = \frac{OS}{SC}$;

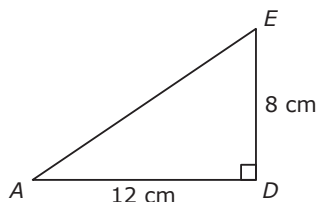
donc $OS = SC \times \cos \hat{O}SC = 10 \cos 30^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm.

(On peut vérifier/trouver ce 2^{ème} résultat à l'aide de la propriété de Pythagore.)

Exercice 55 Mesure d'un angle au degré près

1.

2. Dans le triangle ADE rectangle en D , d'après la propriété de Pythagore :

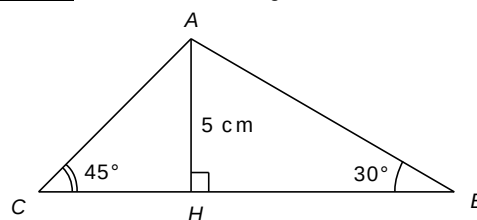


$$EA^2 = ED^2 + DA^2 = 8^2 + 12^2 = 208 ; \text{ d'où } EA = 4\sqrt{13}.$$

3. a. $\tan \hat{A}ED = \frac{AD}{ED} = \frac{12}{8} = 1,5.$

b. $56^\circ < \text{mes } \hat{A}ED < 57^\circ.$

Exercice 56 Aire d'un triangle



1. Dans le triangle AHC , rectangle en H , $\tan \hat{A}CH = \frac{AH}{HC}$;

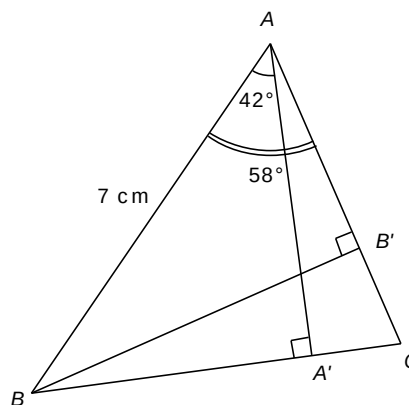
donc : $HC = \frac{AH}{\tan \hat{A}CH} = \frac{5}{\tan 45^\circ} = 5$ cm.

Dans le triangle AHB , rectangle en H , $\tan \hat{A}BH = \frac{AH}{HB}$;

donc : $HC = \frac{AH}{\tan \hat{A}BH} = \frac{5}{\tan 30^\circ} = \frac{5}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 5\sqrt{3}$ cm.

2. $\mathcal{A}(ABC) = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{5 \times (5 + 5\sqrt{3})}{2} = \frac{25(1 + \sqrt{3})}{2} \text{ cm}^2.$

Exercice 57 Points situés sur un même cercle



1. • Dans le triangle ABB' , rectangle en B' ,

$\cos \hat{A}BB' = \frac{AB'}{AB}$; donc : $AB' = AB \times \cos \hat{A}BB'$

$AB' = 7 \times \cos 58^\circ \approx 3,7$ cm.

• Dans le triangle ABA' , rectangle en A' ,

$\sin \hat{B}AA' = \frac{BA'}{AB}$; donc : $BA' = AB \times \sin \hat{B}AA'$

$BA' = 7 \times \sin 42^\circ \approx 4$ cm.

2. Le triangle ABB' est rectangle en B' , donc les points A , B et B' sont situés sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Le triangle ABA' est rectangle en A' , donc les points A , B et A' sont situés sur le cercle de diamètre $[AB]$.

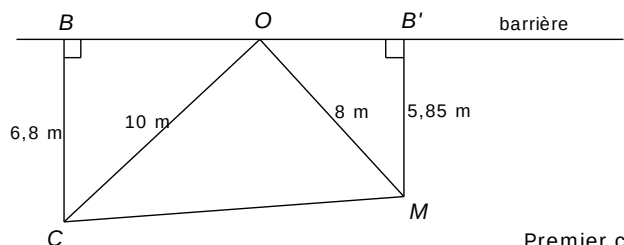
Ainsi, les points A , B , A' et B' sont situés sur le même cercle, de diamètre $AB = 7$ cm.

Activités d'intégration

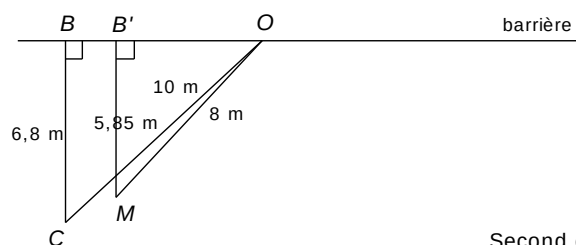
Exercice 58 Le berger et ses chèvres

1. Les animaux décrivent chacun un demi-cercle.

2.a.



Premier cas



Second cas

b. • Dans le triangle OBC rectangle en B , $\sin \hat{B}OC = \frac{BC}{OC} = \frac{6,8}{10} = 0,68$ donc $\hat{B}OC \approx 43^\circ$.

• Dans le triangle $OB'M$ rectangle en B' , $\sin \hat{B}'OM = \frac{B'C}{OC} = \frac{5,85}{8} = 0,73$ donc $\hat{B}'OM \approx 47^\circ$.

c. Dans le premier cas, on peut supposer que le triangle OCM est rectangle.

En effet : $\text{mes} \hat{COM} \approx 180 - (43 + 47) = 90^\circ$.

Alors $CM^2 = CO^2 + OM^2 = 10^2 + 8^2 = 164$; donc : $CM = 2\sqrt{41} \approx 12,8$ m.

Exercice 59 L'okoumé et la rivière

1. On note h la hauteur de l'okoumé et l la largeur de la rivière.

Dans les triangles ABD et ACD , rectangles en A :

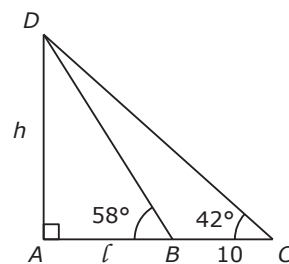
• $\tan \hat{ABD} = \frac{AD}{AB} = \frac{h}{l}$, donc $h = l \times \tan 58^\circ \approx 1,6 \times l$;

• $\tan \hat{ACD} = \frac{AD}{AC} = \frac{h}{l+10}$, donc $h = (l+10) \times \tan 42^\circ \approx 0,9 \times (l+10)$.

Donc : $1,6 \times l = 0,9 \times (l+10)$; d'où : $1,6l = 0,9l + 9$;

ainsi : $0,7l = 9$ et $l = \frac{9}{0,7} \approx 12,9$ m.

2. $h = 1,6 \times l \approx 1,6 \times 12,9 \approx 20,6$ m.



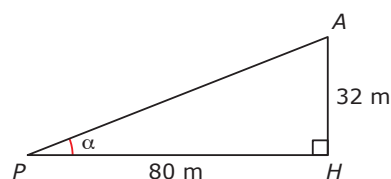
Exercice 60 L'aigle et la proie

a. $\tan \hat{P} = \frac{AH}{PH}$, d'où $\tan \alpha = \frac{32}{80} = 0,4$ et $\text{mes} \alpha \approx 22^\circ$.

b. On peut déterminer cette distance :

• à l'aide de la propriété de Pythagore : $AP = \sqrt{80^2 + 32^2} \approx 86$ m ;

• à l'aide de la trigonométrie : $\sin \hat{P} = \frac{AH}{AP}$; donc : $AP \approx \frac{32}{\sin 22^\circ} \approx 86$ m.



Exercice 61 La préparation du pêcheur

1. a. Dans le triangle APS , rectangle en S , $\tan \hat{APS} = \frac{AS}{PS}$;

donc : $PS = \frac{AS}{\tan \hat{APS}} \approx 37$ cm.

b. $\hat{BAP} = \hat{APS} = 65^\circ$.

Dans le triangle ABP' , rectangle en B , $\tan \hat{BAP'} = \frac{BP'}{AB}$;

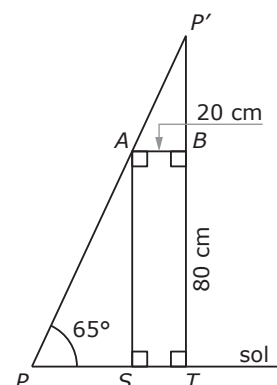
donc : $BP' = AB \times \tan \hat{BAP'} = 20 \times \tan 65^\circ \approx 43$ cm ;

ainsi : $P'T = P'B + BT \approx 43 + 80 \approx 123$ cm.

2. On a désormais $P'B = 16$ cm.

Dans le triangle ABP' , rectangle en B , $\tan \hat{BAP'} = \frac{P'B}{AB} = \frac{16}{20} = 0,8$;

ainsi : $\hat{BAP'} \approx 39^\circ$.



3 L'outil vectoriel

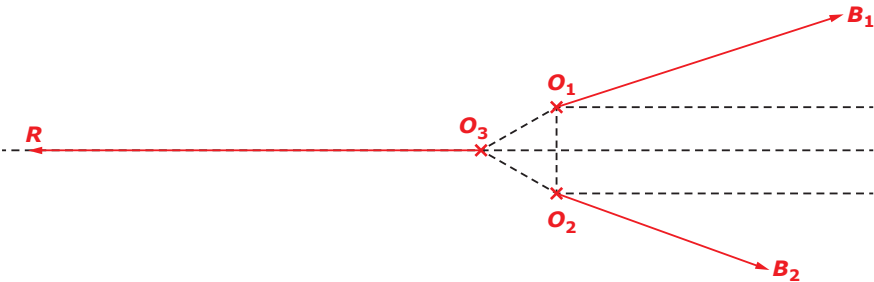
Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1, 2	Multiplication d'un vecteur par un nombre réel, vecteurs colinéaires [1 p 34]	26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37,	49, 51	54
	Apprendre à utiliser la colinéarité [1 p 37]	1, 2, 3, 4, 5, 6		
3	Coordonnées d'un vecteur [2 p 35]	38, 39, 40, 41, 42, 47	52	55, 56, 58, 60, 61, 63
	Apprendre à déterminer les coordonnées [2 p 38]	7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17		
4	Calculs dans un repère orthonormé [3 p 36]	43, 44, 45, 46, 48	50, 52,	57, 59, 60, 62, 64
	Apprendre à étudier le parallélisme, l'orthogonalité [3 p 39]	18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25,	53	

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

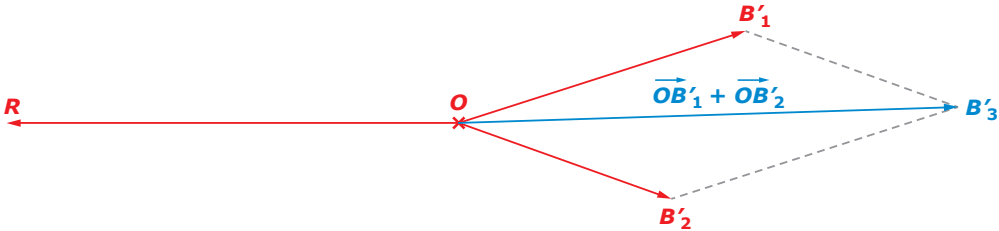
Pour démarrer

Le labour d'un champ

1.a.



b.



2.a. Voir schéma.

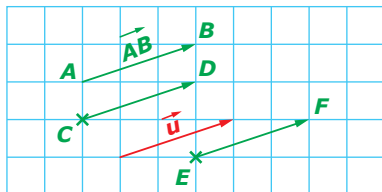
b. Oui : les bœufs ont suffisamment de force pour faire avancer la charrue, car la longueur du vecteur $\overrightarrow{OB'_1} + \overrightarrow{OB'_2}$ est supérieure à la longueur du vecteur $\overrightarrow{OR}$.

c. Oui : le fermier doit exercer une force latérale pour s'assurer que le sillon reste droit, car les points R' , O et B'_3 ne sont pas alignés.

Activités de découverte

1 Une nouvelle notation

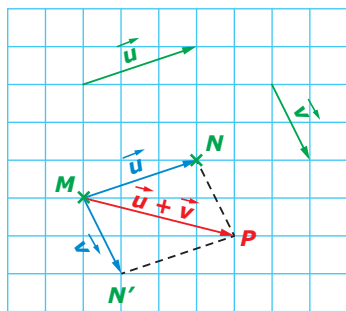
1.a.



- b. $\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF}$ car ces vecteurs ont :
- même *direction* [la droite (AB)] ;
 - même *sens* (de A vers B) ;
 - même *longueur* (la longueur AB).

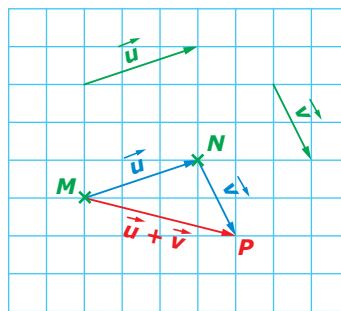
c. Voir schéma.

2.a.



Règle du parallélogramme :
 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{MN} + \vec{MN'} = \vec{MP}$.

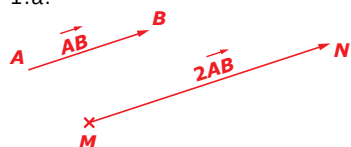
b.



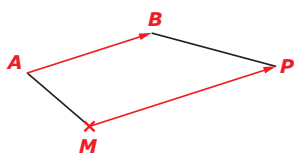
Relation de Chasles :
 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{MN} + \vec{NP} = \vec{MP}$

2 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

1.a.

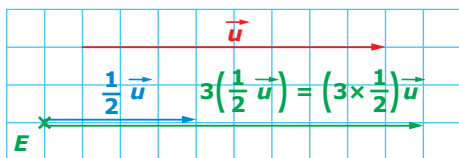


c.



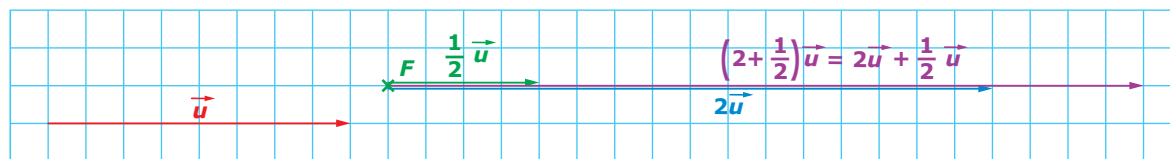
- b. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $2\vec{AB}$ ont :
- même *direction* [la droite (AB)] ;
 - même *sens* (de A vers B) ;
 - la longueur du vecteur $\vec{MN} = 2\vec{AB}$ est le double de la longueur du vecteur $\vec{AB}$.
- d. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $1,5\vec{AB}$ ont :
- même *direction* [la droite (AB)] ;
 - même *sens* (de A vers B) ;
 - la longueur du vecteur $\vec{MP} = 1,5\vec{AB}$ est 1,5 fois plus grande que celle du vecteur $\vec{AB}$.
- Les vecteurs $\vec{AB}$ et $-1,5\vec{AB}$ ont :
- même *direction* [la droite (AB)] ;
 - deux *sens opposés* ;
 - la longueur du vecteur $\vec{PM} = -1,5\vec{AB}$ est 1,5 fois plus grande que celle du vecteur $\vec{AB}$.

2.a. et b.



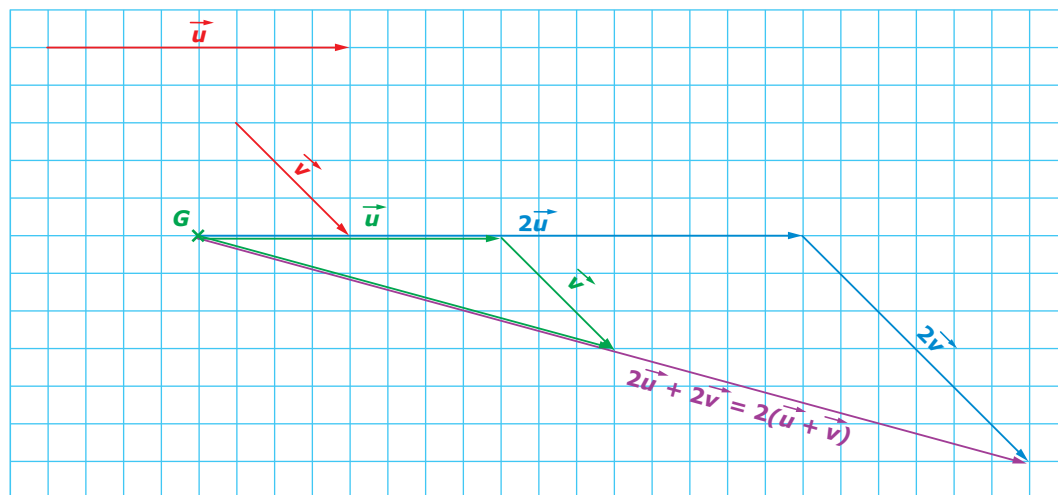
On constate que : $3\left(\frac{1}{2}\vec{u}\right) = \left(3 \times \frac{1}{2}\right)\vec{u}$.

3.a. et b.



On constate que : $2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u} = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\vec{u}$.

4.a. et b.



On constate que :

$$2\vec{u} + 2\vec{v} = 2\left(\vec{u} + \vec{v}\right).$$

3 Coordonnées dans un repère

1.a. Voir schéma.

b. $\vec{OM} = \vec{u}$ et $M(3 ; 1)$ donc $\vec{u}(3 ; 1)$.

$\vec{ON} = \vec{v}$ et $N(1 ; -2)$ donc $\vec{v}(1 ; -2)$.

2.a. Voir schéma.

b. • $\vec{OP} = \vec{u} + \vec{v}$ et $P(4 ; -1)$ donc $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)(4 ; -1)$.

On peut remarquer que : $x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} = 3 + 1 = 4$,
 et $y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} = 1 + (-2) = -1$;

donc : $x_{\vec{u} + \vec{v}} = x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u} + \vec{v}} = y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}}$.

• $\vec{OQ} = \vec{u} - \vec{v}$ et $Q(2 ; 3)$ donc $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)(2 ; 3)$.

On peut remarquer que : $x_{\vec{u}} - x_{\vec{v}} = 3 - 1 = 2$,
 et $y_{\vec{u}} - y_{\vec{v}} = 1 - (-2) = 3$;

donc : $x_{\vec{u} - \vec{v}} = x_{\vec{u}} - x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u} - \vec{v}} = y_{\vec{u}} - y_{\vec{v}}$.

• $\vec{OR} = 2\vec{u}$ et $R(6 ; 2)$ donc $2\vec{u}(6 ; 2)$.

On peut remarquer que : $2 \times x_{\vec{u}} = 2 \times 3 = 6$,
 et $2 \times y_{\vec{u}} = 2 \times 1 = 2$;

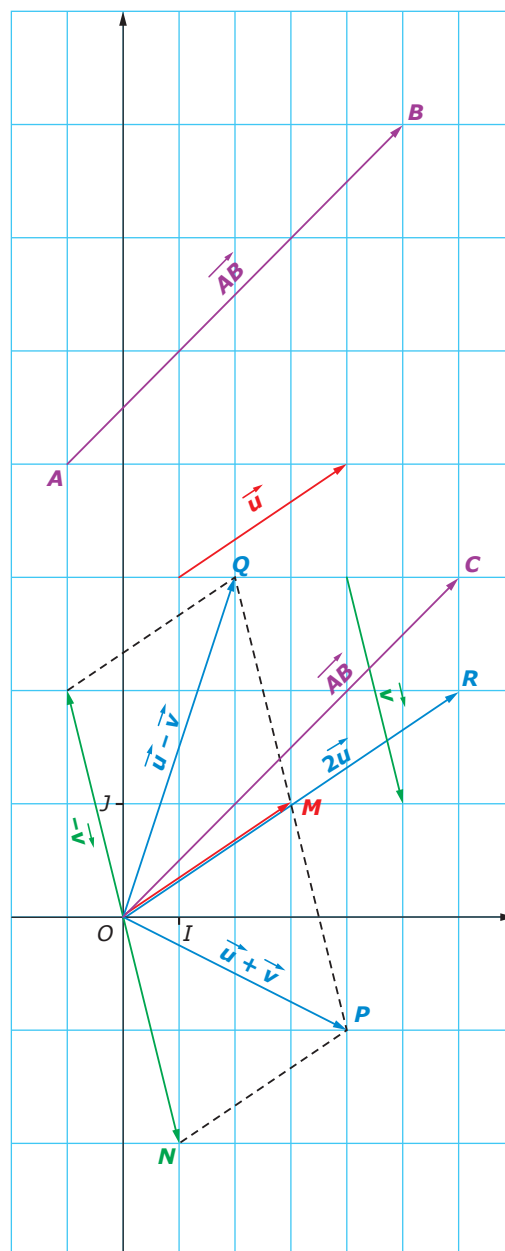
donc : $x_{2\vec{u}} = 2 \times x_{\vec{u}}$ et $y_{2\vec{u}} = 2 \times y_{\vec{u}}$.

3.a. Dans cet exemple, on a placé $A(-1 ; 4)$ et $B(5 ; 7)$.

b. Le point C, tel que $\vec{OC} = \vec{AB}$, a pour coordonnées $(6 ; 3)$;
 donc $\vec{AB}$ a aussi pour coordonnées $(6 ; 3)$.

On peut remarquer que : $x_{\vec{AB}} = x_B - x_A = 5 - (-1) = 6$,
 et $y_{\vec{AB}} = y_B - y_A = 7 - 4 = 3$;

donc : $\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.



4. Vecteurs colinéaires, vecteurs orthogonaux

1. On donne $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$.

a. si k est un nombre réel, alors les coordonnées de $k \vec{u}$ sont : $(kx ; ky)$.

b. Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

- le tableau est un tableau de proportionnalité ;
- $xy' - x'y = 0$.

(résultats à découvrir sur quelques exemples)

2.a. Vérification à l'aide des outils de géométrie.

b. $6 \times (-2) + 3 \times 4 = -12 + 12 = 0$.

3.a. Dire que les deux vecteurs $\vec{u} = \vec{OM}$ et $\vec{v} = \vec{ON}$ sont orthogonaux équivaut à dire que leurs directions sont orthogonales, c'est-à-dire que le triangle OMN est rectangle en O .

b. Pour $\vec{OM} = \vec{u}(x ; y)$ et $\vec{ON} = \vec{v}(x' ; y')$, on a $M(x ; y)$ et $N(x' ; y')$; donc $\vec{MN} = (x' - x ; y' - y)$.

c. Dans le triangle OMN rectangle en O , d'après la propriété de Pythagore : $MN^2 = MO^2 + ON^2$.

Or $MN = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$, donc $MN^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = x'^2 - 2xx' + 2x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2$;

de plus : $OM^2 = MO^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$, donc $MO^2 = x^2 + y^2$;

$ON^2 = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, donc $ON^2 = x'^2 + y'^2$.

Finalement : $x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$, d'où $-2xx' - 2yy' = 0$;

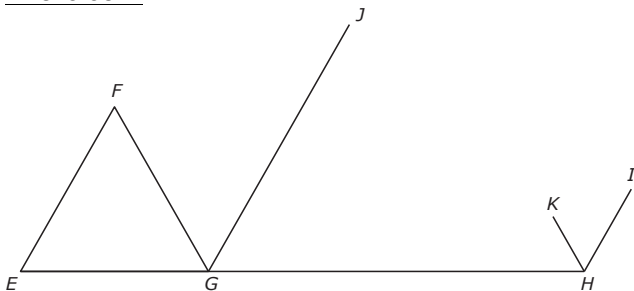
c'est-à-dire : $-2(xx' + yy') = 0$ ou $xx' + yy' = 0$.

1 Apprendre à calculer un cosinus, un sinus, une tangente

Exercice 1



Exercice 2



Exercice 3

$$1. K = \frac{1}{3} ; \quad 2. k = -2 ; \quad 3. k = -\frac{3}{2}$$

Exercice 4

Relations qui caractérisent le milieu I d'un segment $[AB]$:

$$2. \vec{AI} = \vec{IB} ; \quad 3. \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} ; \quad 6. \vec{BI} = -\frac{1}{2} \vec{AB}.$$

Exercice 5

$$1. -\frac{2}{3} \vec{CD} = \frac{4}{5} \vec{EF}, \text{ donc } \vec{CD} = -\frac{12}{10} \vec{EF} = -\frac{6}{5} \vec{EF}.$$

$$\text{Ainsi } \vec{AB} = \frac{1}{4} \vec{CD} = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{6}{5} \vec{EF} \right) = -\frac{3}{10} \vec{EF}.$$

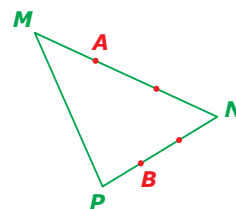
2. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{EF}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

Exercice 6

$$1. \vec{NA} = \frac{2}{3} \vec{NM} ;$$

$$\vec{NB} = \frac{2}{3} \vec{NP}.$$

$$\begin{aligned} 2. \vec{AB} &= \vec{AN} + \vec{NB} \\ &= -\vec{NA} + \vec{NB} \\ &= -\frac{2}{3} \vec{NM} + \frac{2}{3} \vec{NP} \\ &= \frac{2}{3} \vec{MN} + \frac{2}{3} \vec{NP} \\ &= \frac{2}{3} \vec{MP}. \end{aligned}$$



3. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{MP}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (MP) sont parallèles.

2 Apprendre à déterminer les coordonnées

Exercice 7

$$\vec{u} (3 ; 1) ; \quad \vec{v} (1 ; -1) ; \quad \vec{w} (3 ; -1).$$

Exercice 8

$$\vec{u} (2 ; -1) ; \quad \vec{v} (-3 ; 0) ; \quad \vec{w} (7 ; -2).$$

Exercice 9

$$\vec{u} (-5 ; 0) ; \quad \vec{v} (0 ; 1) ; \quad \vec{w} (1 ; -1).$$

Exercice 10

$$\vec{u} (3 ; -1) ; \quad \vec{v} (-6 ; 4) ; \quad \vec{w} (4 ; 2).$$

Exercice 11

$$1. a. \vec{AB} (5 ; 0) ; \quad \vec{AC} (6 ; -1) ; \quad \vec{AD} (4 ; -4).$$

$$b. \vec{EC} (4 ; 2) ; \quad \vec{CE} (-4 ; -2).$$

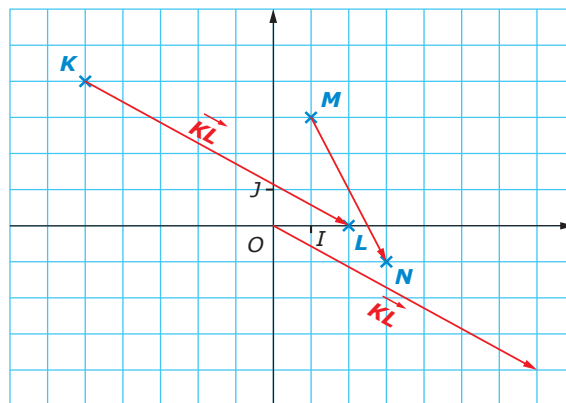
$$2. a. \left(\vec{AC} + \vec{AE} \right) (8 ; -4) ; \quad \left(\vec{BE} + \vec{DC} \right) (-1 ; 0).$$

$$b. -\vec{AB} (-5 ; 0) ; \quad 5\vec{BC} (5 ; -5).$$

Exercice 12

$$1. \vec{KL} (7 ; -4) ; \quad \vec{MN} (2 ; -4).$$

2. a. et b.



Exercice 13

$$M(4 ; -2)$$

Exercice 15

$$M(4 ; -1)$$

Exercice 14

$$M(9 ; 3)$$

Exercice 16

$$M(7 ; 3)$$

Exercice 17

1.a. $E(1 ; 3)$

b. $\vec{FE} = \vec{u}$ équivaut à $\begin{cases} x_E - x_F = x_{\vec{u}} \\ y_E - y_F = y_{\vec{u}} \end{cases}$;

c'est-à-dire $\begin{cases} x_E - (-1) = 2 \\ y_E - 2 = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_E = 1 \\ y_E = 3 \end{cases}$.

2.a. $G(3 ; 4)$.

b. $\vec{FG} = 2\vec{u}$ équivaut à $\begin{cases} x_G - x_F = 2x_{\vec{u}} \\ y_G - y_F = 2y_{\vec{u}} \end{cases}$;

c'est-à-dire $\begin{cases} x_G - (-1) = 2 \times 2 \\ y_G - 2 = 2 \times 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_G = 3 \\ y_G = 4 \end{cases}$.

3 Apprendre à étudier le parallélisme, l'orthogonalité

Exercice 18

1. Ni l'un, ni l'autre

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 19

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 20

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 21

1. Le triangle ABC semble être isocèle rectangle en A .

$$2. \bullet AB^2 = \left(\frac{7}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} + 1 = \frac{53}{4}.$$

$$AC^2 = (-1 - 0)^2 + \left(-1 - \frac{5}{2}\right)^2 = 1 + \frac{49}{4} = \frac{53}{4}.$$

Donc $AB = AC$, le triangle ABC est isocèle en A .

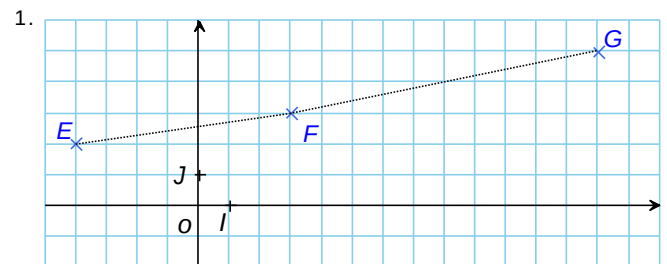
$$\bullet \vec{AB} \left(\frac{7}{2}; -1\right) \text{ et } \vec{AC} \left(-1; -\frac{7}{2}\right).$$

$$\text{Donc } x_{\vec{AB}} \times x_{\vec{AC}} + y_{\vec{AB}} \times y_{\vec{AC}} = \frac{7}{2} \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{7}{2}\right) = 0.$$

Donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.

Ainsi, le triangle ABC est isocèle rectangle en A .

Exercice 22



On peut conjecturer que les points E , F et G sont alignés.

2. $\vec{EF} (7 ; 1)$ et $\vec{FG} (10 ; 2)$.

$$\text{Or } x_{\vec{EF}} \times y_{\vec{FG}} - x_{\vec{FG}} \times y_{\vec{EF}} = 7 \times 2 - 1 \times 10 = 4 \neq 0.$$

Donc les vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{FG}$ ne sont pas colinéaires, les points E , F et G ne sont pas alignés.

Exercice 23

1. le quadrilatère $MNPQ$ semble être un trapèze.

2. $\vec{QM} (8 ; -2)$ et $\vec{PN} (4 ; -1)$.

$$\text{Or } x_{\vec{QM}} \times y_{\vec{PN}} - x_{\vec{PN}} \times y_{\vec{QM}} = 8 \times (-1) - (-2) \times 4 = 0.$$

Donc les vecteurs $\vec{QM}$ et $\vec{PN}$ sont colinéaires.

Les droites (QM) et (PN) sont parallèles et $MNPQ$ est un trapèze.

Exercice 24

$$1. m = -\frac{12}{5}.$$

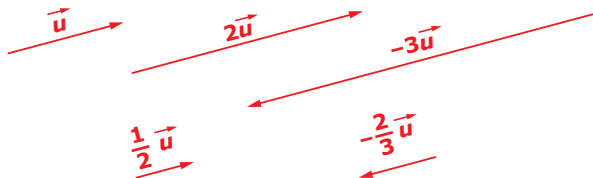
$$2. m = -15.$$

Exercice 25

$$m = 15.$$

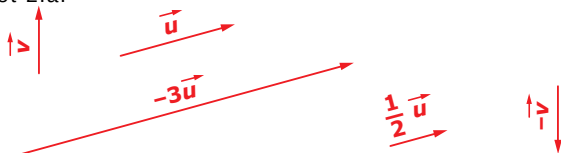
Constructions de vecteurs

Exercice 26

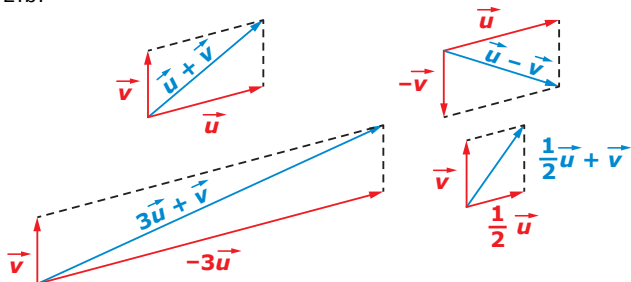


Exercice 27

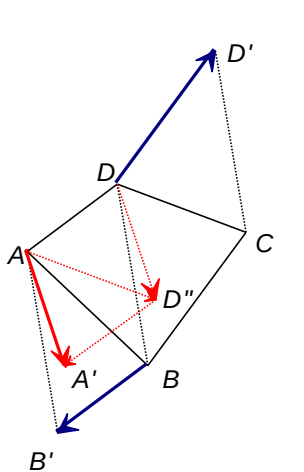
1. et 2.a.



2.b.

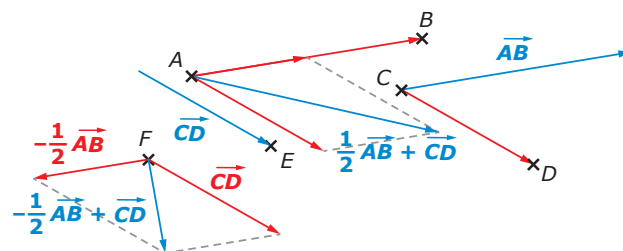


Exercice 28



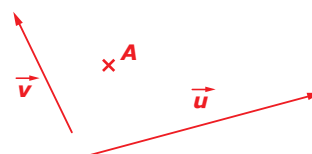
- 1.a. $\vec{DD'} = \vec{BC}$.
- b. $\vec{BB'} = \vec{DA}$.
2. $\vec{AA'} = \vec{DD'} = \vec{DA} + \vec{DC}$.

Exercice 29

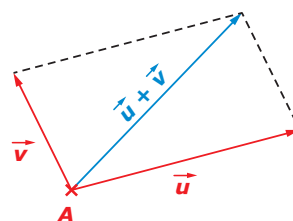


Exercice 30

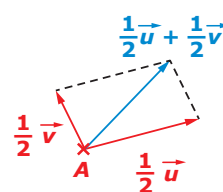
1.



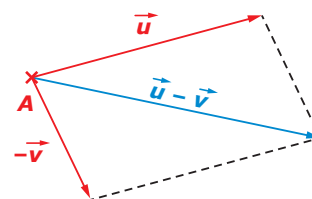
2.a.



b.

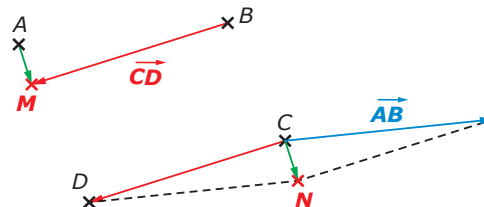


c.



Exercice 31

1.



- 2.a. $\vec{CN} = \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AM}$.

b. Les vecteurs $\vec{CN}$ et $\vec{AM}$ sont égaux, donc AMNC est un parallélogramme.

Vecteurs colinéaires

Exercice 32

1. $k = \frac{2}{7}$ 2. $k = \frac{2}{5}$ 3. $k = \frac{2}{5}$ 4. $k = \frac{1}{3}$

Exercice 33

1.a. $5 \left(\vec{AC} + \vec{AB} \right) = 3 \vec{AB} - \frac{2}{5} \vec{AB}$ est équivalent à :

$$5 \vec{AC} + 5 \vec{AB} = 3 \vec{AB} - \frac{2}{5} \vec{AB}$$

$$5 \vec{AC} = -5 \vec{AB} + 3 \vec{AB} - \frac{2}{5} \vec{AB} = -\frac{12}{5} \vec{AB}$$

$$\vec{AC} = -\frac{12}{25} \vec{AB}.$$

b. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.

2.a. $-3 \left(\vec{EG} + 2 \vec{HF} \right) = 5 \left(2 \vec{EG} - \frac{3}{2} \vec{HF} \right)$ est équivalent à :

$$-3 \vec{EG} - 6 \vec{HF} = 10 \vec{EG} - \frac{15}{2} \vec{HF}$$

$$-3 \vec{EG} - 10 \vec{EG} = 6 \vec{HF} - \frac{15}{2} \vec{HF}$$

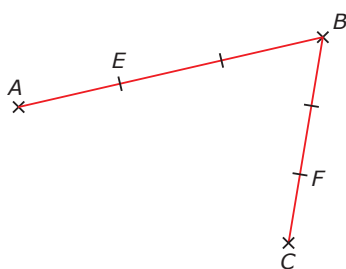
$$-13 \vec{EG} = -\frac{3}{2} \vec{HF}$$

$$\vec{EG} = \frac{3}{26} \vec{HF}.$$

b. Les vecteurs $\vec{EG}$ et $\vec{HF}$ sont colinéaires, donc les droites (EG) et (HF) sont parallèles.

Exercice 34

1.

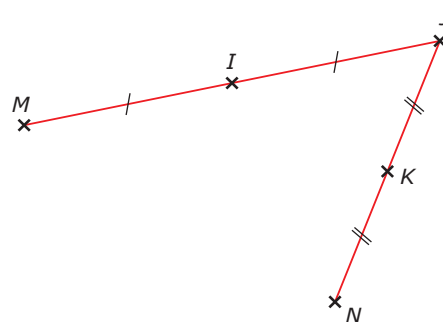


2. $\vec{EF} = \vec{EB} + \vec{BF} = \frac{2}{3} \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{BC} = \frac{2}{3} \left(\vec{AB} + \vec{BC} \right) = \frac{2}{3} \vec{AC}.$

Les vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, donc les droites (EF) et (AC) sont parallèles.

Exercice 35

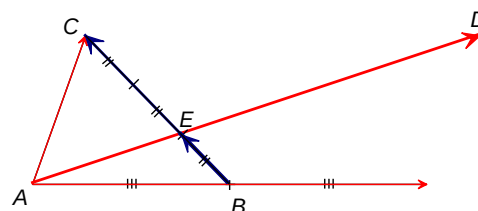
1.



2. $\vec{MN} = \vec{MJ} + \vec{JN} = 2 \vec{IJ} + 2 \vec{JK} = 2 \left(\vec{IJ} + \vec{JK} \right) = 2 \vec{IK}.$

Les vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{IK}$ sont colinéaires, donc les droites (MN) et (IK) sont parallèles.

Exercice 36



$\vec{BC} = 3 \vec{BE}$ est équivalent à $\vec{BA} + \vec{AC} = 3 \left(\vec{BA} + \vec{AE} \right)$

$$\vec{BA} + \vec{AC} - 3 \vec{BA} = 3 \vec{AE}$$

$$-2 \vec{BA} + \vec{AC} = 3 \vec{AE}$$

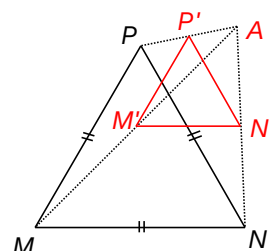
$$2 \vec{AB} + \vec{AC} = 3 \vec{AE}$$

$$\vec{AD} = 3 \vec{AE}.$$

Les vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$ sont colinéaires, donc les points A, D et E sont alignés.

Exercice 37

1.



2.a. $\vec{M'N'} = \vec{M'A} + \vec{AN'}$

$$\vec{M'N'} = \frac{1}{2} \vec{MA} + \frac{1}{2} \vec{AN}$$

$$\vec{M'N'} = \frac{1}{2} \left(\vec{MA} + \vec{AN} \right) = \frac{1}{2} \vec{MN}.$$

b. Le triangle $M'N'P'$ est équilatéral.

En effet, comme à la question 1, on démontre que :

$$\vec{N'P'} = \frac{1}{2} \vec{NP} \text{ et } \vec{P'M'} = \frac{1}{2} \vec{PM}.$$

On en déduit que $M'N' = N'P' = P'M'$, c'est-à-dire que le triangle $M'N'P'$ est équilatéral.

Calculs dans un repère

Exercice 38

$$1. \vec{u}(3; 1); \quad \vec{v}(3; -2); \quad \vec{w}(6; -2).$$

$$2. \vec{u} + \vec{v}(6; -1); \quad \vec{v} + \vec{w}(9; -4);$$

$$2\vec{u}(6; 2); \quad 5\vec{v} - 3\vec{w}(-3; -4).$$

Exercice 39

$$1. \vec{AB}(2; -2); \quad \vec{AC}(-4; -7); \quad \vec{BC}(-6; -5).$$

$$\text{Donc } \vec{AB} + \vec{AC}(-2; -9) \text{ et } 3\vec{BC}(-18; -15).$$

$$2. a. E(-3; -1); \quad b. F(1; -5); \quad c. G(-15; -11).$$

Exercice 40

$$1. \vec{F}_1(-1; 1); \quad \vec{F}_2(1; 2); \quad \vec{F}_3(0; -3).$$

$$2. \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3(0; 0).$$

Donc ce système est en équilibre.

Exercice 41

$$1. \bullet AB = \sqrt{[8 - (-4)]^2 + [5 - (-1)]^2}$$

$$AB = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

$$\bullet AC = \sqrt{[10 - (-4)]^2 + [1 - (-1)]^2}$$

$$AC = \sqrt{14^2 + 2^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

$$\bullet BC = \sqrt{[10 - 8]^2 + [1 - 5]^2}$$

$$BC = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$2. \text{ Dans le triangle } ABC, \quad AB^2 + BC^2 = 180 + 20 = 200$$

$$AC^2 = 200.$$

Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$; ainsi, d'après la propriété réciproque de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B .

Exercice 42

$$1. \bullet EF = \sqrt{[2 - (-8)]^2 + [5 - 3]^2}$$

$$EF = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}.$$

$$\bullet EG = \sqrt{[3 - (-8)]^2 + [-1 - 3]^2}$$

$$EG = \sqrt{11^2 + (-4)^2} = \sqrt{137}.$$

$$\bullet FG = \sqrt{[3 - 2]^2 + [-1 - 5]^2}$$

$$FG = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}.$$

$$2. \text{ Dans le triangle } EFG, \quad EF^2 + FG^2 = 104 + 37 = 141$$

$$EG^2 = 137.$$

Donc $EG^2 \neq EF^2 + FG^2$; ainsi, d'après la contraposée de la propriété de Pythagore, le triangle EFG n'est pas rectangle en F .

Exercice 43

$$\bullet EF = \sqrt{(7-3)^2 + (5-5)^2} = 4.$$

$$\bullet EA = \sqrt{(0-3)^2 + \left(\frac{5}{2}-5\right)^2} = \sqrt{(-3)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$EA = \sqrt{\frac{61}{4}} \neq 4;$$

donc le point A n'appartient pas au cercle (C) .

$$\bullet EB = \sqrt{\left(\frac{13}{2}-3\right)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + (-2)^2}$$

$$EB = \sqrt{\frac{65}{4}} \neq 4;$$

donc le point B n'appartient pas au cercle (C) .

$$\bullet EC = \sqrt{(1-3)^2 + \left(\frac{17}{2}-5\right)^2} = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$EC = \sqrt{\frac{65}{4}} \neq 4;$$

donc le point C n'appartient pas au cercle (C) .

Colinéarité et orthogonalité dans un repère

Exercice 44

1. Ni l'un, ni l'autre.

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

4. Ni l'un, ni l'autre.

Exercice 45

$$1. \vec{AB}(16; -5) \text{ et } \vec{CE}(13; -4).$$

$$\text{Or } x_{\vec{AB}} \times y_{\vec{CE}} - x_{\vec{CE}} \times y_{\vec{AB}} = 16 \times (-4) - (-5) \times 13 = 1 \neq 0.$$

Donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CE}$ ne sont pas colinéaires et les droites (AB) et (CE) ne sont pas parallèles.

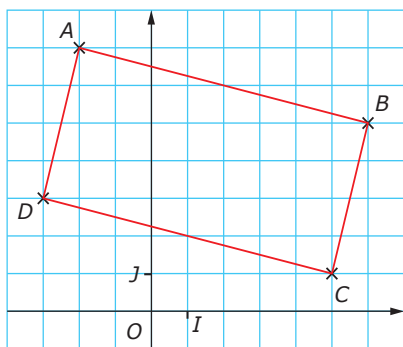
$$2. \vec{AB}(16; -5) \text{ et } \vec{CD}(2; 6).$$

$$\text{Or } x_{\vec{AB}} \times y_{\vec{CD}} + y_{\vec{AB}} \times x_{\vec{CD}} = 16 \times 2 + (-5) \times 6 = 2 \neq 0$$

Donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ne sont pas orthogonaux et les droites (AB) et (CD) ne sont pas orthogonales.

Exercice 46

1.a.



b. On conjecture que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

2.a. Première méthode

• Comme $\vec{AB}(8; -2)$ et $\vec{DC}(8; -2)$, on a $\vec{AB} = \vec{DC}$;
donc $AB = CD$.

Comme $\vec{BC}(-1; -4)$ et $\vec{AD}(-1; -4)$, on a $\vec{BC} = \vec{AD}$;
donc $BC = AD$.

Ainsi le quadrilatère non croisé $ABCD$, dont les côtés opposés sont de même longueur, est un parallélogramme.

• Il reste à démontrer qu'il possède un angle droit.

Dans le triangle ABC : $AB^2 + BC^2 = 68 + 17 = 85$;

de plus $\vec{AC}(7; -6)$; donc : $AC = \sqrt{7^2 + (-6)^2} = \sqrt{85}$.

Ainsi $AC^2 = AB^2 + BC^2$ et, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B .

• Le quadrilatère $ABCD$ est donc un rectangle.

b. Seconde méthode

• $\vec{AB}(8; -2)$ et $\vec{DC}(8; -2)$ donc $\vec{AB} = \vec{DC}$;
on en déduit que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

• Il reste à démontrer qu'il possède un angle droit.

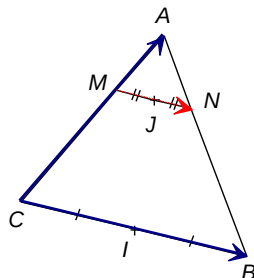
$\vec{AB}(8; -2)$ et $\vec{BC}(-1; -4)$;

or $x \vec{AB} \times x \vec{BC} + y \vec{AB} \times y \vec{BC} = 8 \times (-1) + (-2) \times (-4) = 0$;

donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont orthogonaux.

• Le quadrilatère $ABCD$ est donc un rectangle.

Exercice 47



1. Dans le repère $(C; \vec{CB}; \vec{CA})$:

a. $A(0; 1)$, $B(1; 0)$, $C(0; 0)$, $I(\frac{1}{2}; 0)$;

b. Si $\vec{MN} = \frac{1}{3} \vec{CB}$, on a : $(MN) \parallel (CB)$ et $MN = \frac{1}{3} CB$;

donc, pour les triangles AMN et ACB , on peut appliquer la propriété de Thalès : $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{CB} = \frac{1}{3}$;

on obtient alors les coordonnées de M et N :

• $\frac{CM}{CA} = \frac{2}{3}$ ou $\vec{CM} = \frac{2}{3} \vec{CA}$, donc $M(0; \frac{2}{3})$;

• $\frac{AN}{AB} = \frac{1}{3}$ ou $\vec{AN} = \frac{1}{3} \vec{AB}$, donc $\vec{AC} + \vec{CN} = \frac{1}{3} \vec{AC} + \frac{1}{3} \vec{CB}$,

c'est-à-dire $\vec{CN} = \frac{1}{3} \vec{CB} + (1 - \frac{1}{3}) \vec{CA}$, donc $N(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$;

finally on en déduit les coordonnées de J , le milieu de

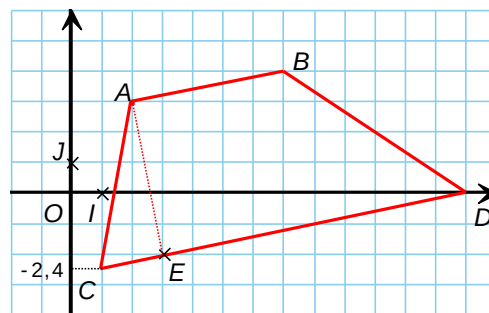
$[MN]$: $J(\frac{1}{6}; \frac{2}{3})$.

2. $\vec{AI}(\frac{1}{2}; -1)$ et $\vec{AJ}(\frac{1}{6}; -\frac{1}{3})$.

Or $x \vec{AI} \times x \vec{AJ} - y \vec{AI} \times y \vec{AJ} = \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{3}) - (-1) \times \frac{1}{6} = 0$

Donc les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{AJ}$ sont colinéaires et les points A , I et J sont alignés.

Exercice 48



1. $\vec{AB}(5; 1)$ et $\vec{CD}(12; 2,4)$.

Or $x \vec{AB} \times x \vec{CD} - y \vec{AB} \times y \vec{CD} = 5 \times 2,4 - 12 \times 1 = 0$.

Donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

On en déduit que le quadrilatère $ABDC$ est un trapèze.

2. $\vec{AE}(1; -5)$ et $\vec{CD}(12; 2,4)$.

Or $x \vec{AE} \times x \vec{CD} + y \vec{AE} \times y \vec{CD} = 1 \times 12 + (-5) \times 2,4 = 0$.

Donc les vecteurs $\vec{AE}$ et $\vec{CD}$ sont orthogonaux et $[AE]$ est la hauteur issue de A dans le trapèze $ABDC$.

3. $\vec{AB}(5; 1)$ donc $AB = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \approx 5,1$ cm.

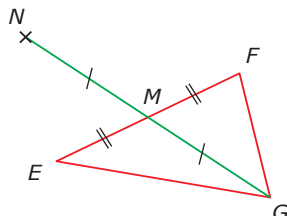
$\vec{CD}(12; 2,4)$ donc $CD = \sqrt{12^2 + 2,4^2} = \sqrt{149,76} \approx 12,2$ cm.

$\vec{AE}(1; -5)$ donc $AE = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26} \approx 5,1$ cm.

Ainsi $\mathcal{A}(ABDC) = \frac{AE \times (AB + CD)}{2}$
 $\approx \frac{5,1 \times (5,1 + 12,2)}{2} \approx 44 \text{ cm}^2$.

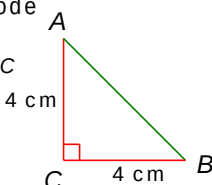
Exercice 49 Des codes aux égalités vectorielles

- $\vec{AI} = \frac{2}{3} \vec{AB}$; $\vec{LB} + \vec{LC} = \vec{0}$;
 $\vec{LJ} = -2 \vec{LK}$; $\vec{DC} + \left(-\frac{1}{3}\right) \vec{AB} = \vec{0}$.
-



Exercice 50 Choisir la bonne méthode

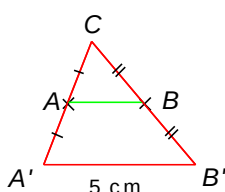
- ☐ Dans le triangle ABC rectangle en C et d'après la *propriété de Pythagore*, on a : $AB^2 = AC^2 + CB^2 = 4^2 + 4^2 = 32$; d'où $AB = 4\sqrt{2}$ cm.



- ☐ Dans le triangle A'B'C, A est le milieu de [A'C] et B est le milieu de [B'C] ; donc, d'après la *propriété de Thalès* :

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'} = \frac{AB}{A'B'} \quad \text{et} \quad \frac{2}{4} = \frac{AB}{5} ;$$

$$\text{d'où } AB = 5 \times \frac{2}{4} = 2,5 \text{ cm.}$$

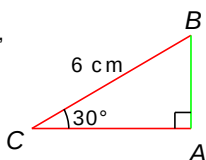


- ☐ Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après la *trigonométrie*,

$$\text{on a : } \sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{CB} ,$$

$$\text{donc } AB = CB \times \sin \widehat{ACB} ;$$

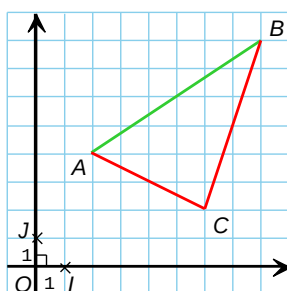
$$\text{d'où } AB = 6 \times \sin 30^\circ = 3 \text{ cm.}$$



- ☐ (O, I, J) est un repère

$$\text{orthonormé ; } \vec{AB}(6; 2) ;$$

$$\text{d'où } AB = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10} \text{ cm.}$$



- Y-a-t-il d'autre méthode, selon les situations ?

- ☐ Pas d'autre méthode possible car il n'y a qu'un seul triangle et il y a ni mesure d'angle, ni repère orthonormé.

- ☐ Pas d'autre méthode possible car il y a ni triangle rectangle, ni mesure d'angle, ni repère orthonormé.

- ☐ Pas d'autre méthode possible car il n'y a que la longueur d'un seul côté, qu'un seul triangle et il n'y a pas de repère orthonormé.

- ☐ On pourrait utiliser la propriété de Pythagore, mais cela allongerait inutilement la démonstration ; pas d'autre méthode possible car il n'y a qu'un triangle et il n'y a pas de mesure d'angle.

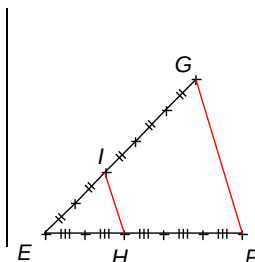
Exercice 51 Utiliser la relation de Chasles

$$\vec{EH} = \frac{2}{5} \vec{EF} \quad \text{et} \quad \vec{EI} = \frac{2}{5} \vec{EG} .$$

D'après la relation de Chasles,

$$\vec{IH} = \vec{IE} + \vec{EH} = \frac{2}{5} \vec{GE} + \frac{2}{5} \vec{EF}$$

$$\vec{IH} = \frac{2}{5} (\vec{GE} + \vec{EF}) = \frac{2}{5} \vec{GF} .$$



Les vecteurs $\vec{IH}$ et $\vec{GF}$ sont colinéaires, donc les droites (IH) et (GF) sont parallèles.

Exercice 52 Introduire un repère pour démontrer

- ☐ a. $\left(A; \frac{1}{4} \vec{AB}; \vec{AD}\right)$ est un repère orthonormé.

- ☐ b. Dans ce repère $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 4)$ et $D(0; 4)$.

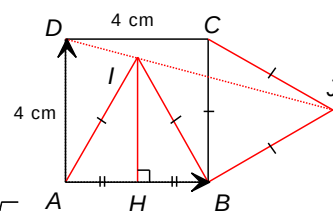
- ☐ c. Dans le triangle AIH, rectangle en H, d'après la propriété de Pythagore :

$$AI^2 = AH^2 + HI^2$$

$$\text{donc : } HI = \sqrt{4^2 - 2^2}$$

$$HI = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm ;}$$

ainsi, dans ce repère, $I(2; 2\sqrt{3})$.



- ☐ On démontre que $J(4 + 2\sqrt{3}; 2)$.

- ☐ 2. $\vec{DI} \left(2; 2\sqrt{3} - 4 \right)$ et $\vec{DJ} \left(4 + 2\sqrt{3}; -2 \right)$.

$$\begin{aligned} \text{Or } x_{\vec{DI}} \times y_{\vec{DJ}} - x_{\vec{DJ}} \times y_{\vec{DI}} &= 2 \times (-2) - (4 + 2\sqrt{3}) \times (2\sqrt{3} - 4) \\ &= -4 - (2\sqrt{3})^2 + 4^2 = -4 - 12 + 16 = 0 . \end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\vec{DI}$ et $\vec{DJ}$ sont colinéaires et les points D, I et J sont alignés.

Exercice 53 Un peu de logique

-

I est le milieu de $[AB]$ •	$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ •
$IA = \frac{1}{2} AB$ •	$\vec{IA}$ et $\vec{IB}$ colinéaires •
I, A et B sont alignés •	$\vec{IA} = \frac{1}{2} \vec{AB}$ •

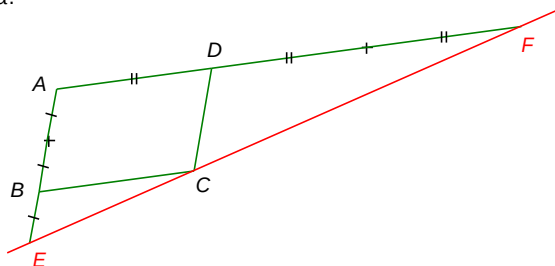
- ☐ 2. $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ dans un repère orthonormé.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux •	$xy' = x'y$ •
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires •	$xx' = -yy'$ •
Il existe un réel k tel que $\vec{u} = k \vec{v}$ •	$\vec{u} = 5 \vec{v}$ •
$\vec{u} = \vec{0}$ •	$\vec{v} = \vec{0}$ •

Exercices d'approfondissement

Exercice 54 Alignements de points

1.a.



b. On conjecture que les points E, C et F sont alignés.

2.a. • $\vec{CE} = \vec{CB} + \vec{BE} = \vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AD}$.

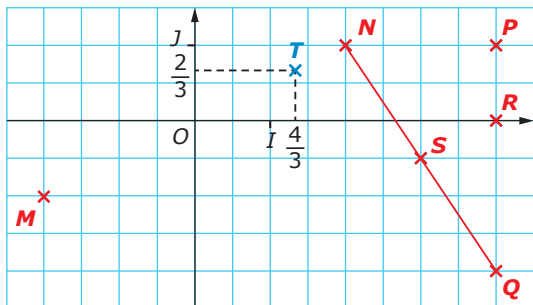
• $\vec{EF} = \vec{EB} + \vec{BA} + \vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \vec{BA} + 3\vec{AD} = -\frac{3}{2}\vec{AB} + 3\vec{AD}$.

b. D'après le 2.a. $\vec{EF} = -3 \times \left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}\right) = -3\vec{CE}$.

Donc les vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{CE}$ sont colinéaires et les points C, E et F sont alignés.

Exercice 55 Intérieur et extérieur d'un cercle

1.a.



b. $x_S = \frac{x_N + x_Q}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$ et $y_S = \frac{y_N + y_Q}{2} = \frac{4+(-4)}{2} = -\frac{1}{2}$;

d'où $S\left(3; -\frac{1}{2}\right)$.

c. Abscisse de T :
$$\begin{aligned} 5 \times (x_N - x_T) + (x_M - x_T) &= 0 \\ 5 \times (2 - x_T) + (-1 - x_T) &= 0 \\ -6x_T &= -8, \text{ ainsi } x_T = \frac{4}{3} ; \end{aligned}$$

ordonnée de T :
$$\begin{aligned} 5 \times (y_N - y_T) + (y_M - y_T) &= 0 \\ 5 \times (4 - y_T) + (-1 - y_T) &= 0 \\ -6y_T &= -4, \text{ ainsi } y_T = \frac{2}{3} ; \end{aligned}$$

d'où $T\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

2. $\vec{SM}\left(-5; -\frac{1}{2}\right)$ donc $SM = \sqrt{(-5)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{101}{4}}$ cm ;

$\vec{SP}\left(1; \frac{3}{2}\right)$ donc $SP = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{4}}$ cm ;

$\vec{SR}\left(1; \frac{1}{2}\right)$ donc $SR = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$ cm ;

$\vec{SQ}\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ donc $SQ = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{4}}$ cm.

a. R est situé à l'intérieur du cercle (c) car $SR < SQ$.

b. M est situé à l'extérieur du cercle (c) car $SM > SQ$.

c. P est situé sur le cercle (c) car :

• méthode 1 : $SP = SQ$.

• méthode 2 : S est le milieu de [NQ] donc [NQ] est un diamètre de (c) ; comme $(PN) \perp (PR)$, le triangle NPQ (rectangle en P) est inscriptible dans le cercle (c).

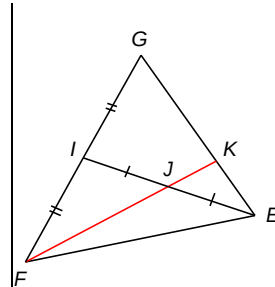
Exercice 56 Introduire un repère

1. Dans le repère $\left(F; \vec{FE}, \vec{FG}\right)$:

$F(0; 0)$; $E(1; 0)$; $G(0; 1)$;

$I\left(0; \frac{1}{2}\right)$; $J\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

2.a. • $\vec{FJ}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ et $\vec{FK}(a; b)$.



Les points F, J et K sont alignés, donc $\vec{FJ}$ et $\vec{FK}$ sont deux vecteurs colinéaires ;

c'est-à-dire :
$$\begin{aligned} x_{\vec{FJ}} \times y_{\vec{FK}} - x_{\vec{FK}} \times y_{\vec{FJ}} &= \frac{1}{2} \times b - a \times \frac{1}{4} = 0 \\ \text{ou : } 2b - a &= 0. \end{aligned}$$

• $\vec{EK}(a-1; b)$ et $\vec{EG}(-1; 1)$.

Les points E, K et G sont alignés donc $\vec{EK}$ et $\vec{EG}$ sont deux vecteurs colinéaires ; c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x_{\vec{EK}} \times y_{\vec{EG}} - x_{\vec{EG}} \times y_{\vec{EK}} &= (a-1) \times 1 - (-1) \times b = 0 \\ \text{ou : } a + b - 1 &= 0. \end{aligned}$$

• De $\begin{cases} 2b - a = 0 \\ a + b - 1 = 0 \end{cases}$, on déduit que : $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$;

ainsi $K\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

b. $\vec{EG}(-1; 1)$ et $\vec{EK}\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; donc : $\vec{EG} = 3\vec{EK}$.

Exercice 57 Double condition

• Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si,

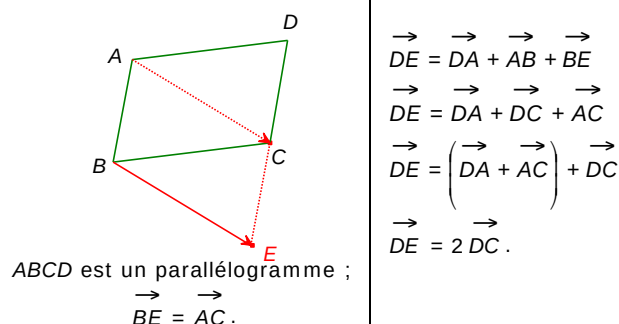
$$\begin{aligned} 2m \times 6 + (-3) \times (5m+4) &= 0 \\ 12m - 15m - 12 &= 0 \\ -3m &= 12 \\ m &= -4 \end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$\begin{aligned} 6 \times (-2m) - (5m+4) \times (-3) &= 0 \\ -12m + 15m + 12 &= 0 \\ 3m &= -12 \\ m &= -4 \end{aligned}$$

Ainsi lorsque $m = -4$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Exercice 58 Égalité vectorielle



Exercice 59 Etude d'un quadrilatère

$A(-1; 3)$, $B(3; \sqrt{5})$, $C(2; -3)$ et $D(-2; -\sqrt{5})$.

1. Le milieu de $[AC]$ est $I(\frac{1}{2}; 0)$;

Le milieu de $[BD]$ est $J(\frac{1}{2}; 0)$.

2. $I = J$; on en déduit que le quadrilatère $ABCD$, dont les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu, est un parallélogramme.

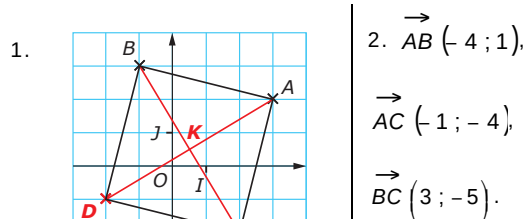
3.a. $\vec{AC}(3; -6)$ donc $AC = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$.

$\vec{BD}(-5; -2\sqrt{5})$ donc $BD = \sqrt{(-5)^2 + (-2\sqrt{5})^2} = \sqrt{45}$.

b. Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont de même longueur, donc $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 60 Avec de la trigonométrie

$A(3; 2)$, $B(-1; 3)$ et $C(2; -2)$.



3. $AB = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$; $AC = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$;
 $BC = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$.

Ainsi, $AB = AC$, donc le triangle ABC est isocèle en A .

De plus, $AB^2 + AC^2 = 17 + 17 = 34$ et $BC^2 = 34$;
 donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$ et, d'après la propriété réciproque de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A .

Finalement le triangle ABC est isocèle et rectangle en A .

4. On déduit, de ce qui précède que :

$\widehat{ABC} = 45^\circ$ et $\cos \widehat{ABC} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.a. Si K est le milieu de $[BC]$, alors $K(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

b. Si D est le symétrique de A par rapport à K , alors K est le milieu de $[AD]$;

$$\text{donc : } \begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_D}{2} \\ y_K = \frac{y_A + y_D}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_D = 2x_K - x_A = 1 - 3 = -2 \\ y_D = 2y_K - y_A = 1 - 2 = -1 \end{cases};$$

c'est-à-dire : $D(-2; -1)$.

6. Plusieurs méthodes pour étudier la nature de $ABCD$.

• La plus rapide consiste à remarquer que par la symétrie orthogonale d'axe (BC) , le triangle ABC a pour image le triangle DBC .

Les propriétés de conservation des angles et des longueurs des symétries orthogonales permettent de conclure que $ABCD$ est un carré.

• On peut également démontrer que les diagonales $[BC]$ et $[AD]$ sont orthogonales et de même longueur...

Exercice 61 Des triangles superposables

1.a. $\vec{IJ}(7; -1)$;

$\vec{JK}(-1; -7)$.

b. $IJ = \sqrt{7^2 + (-1)^2}$,
 $IJ = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;
 $JK = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2}$,
 $JK = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Donc : $IJ = JK$.

c. $\vec{x}_{IJ} \times \vec{x}_{JK} + \vec{y}_{IJ} \times \vec{y}_{JK} = 7 \times (-1) + (-1) \times (-7) = 0$.

Donc les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{JK}$ sont orthogonaux.

d. On déduit, de 1.b. et de 1.c. que le triangle IJK est isocèle et rectangle en J .

2.a. Le milieu de $[IK]$ est $Q(-2; -1)$.

b. Si P est le symétrique de J par rapport à Q , alors Q est le milieu de $[JP]$;

ainsi $x_Q = \frac{x_J + x_P}{2}$, soit $-2 = \frac{2 + x_P}{2}$; donc : $x_P = -6$;

et $y_Q = \frac{y_J + y_P}{2}$, soit $-1 = \frac{2 + y_P}{2}$; donc : $y_P = -4$;

d'où : $P(-6; -4)$.

c. Q est le milieu des diagonales $[IK]$ et $[JP]$, donc le quadrilatère $IJKP$ est un parallélogramme.

• De plus (d'après 1.b.) il possède deux côtés consécutifs de même longueur et (d'après 1.c.) un angle droit.

• Ainsi $IJKP$ est un carré.

3.a. Les triangles IQP et JQK , rectangles isocèles en Q , (et inscrits dans le carré $IJKP$) sont superposables ;
 en effet : $QI = QK$, $QP = QJ$ et $IP = JK$.

b. Dans le triangle IJK , rectangle en J ,

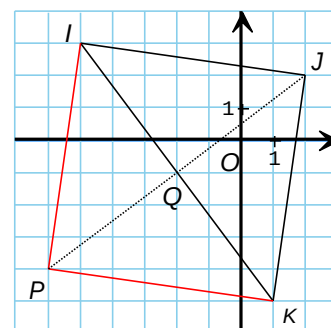
$\cos \widehat{IK} = \frac{IJ}{IK}$ et $\sin \widehat{IK} = \frac{JK}{IK}$.

Or $IJ = 5\sqrt{2}$ et $JK = 5\sqrt{2}$ (d'après 1.b.) ;

de plus $\vec{IK}(6; -8)$, donc $IK = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$.

Donc : $\cos \widehat{IK} = \sin \widehat{IK} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. On en déduit que $\widehat{IK} = 45^\circ$.



Activités d'intégration

Exercice 62 Le chemin du collège

1.a. On trace un repère orthonormé de centre O (la concession de Babila) et d'unité 1 m.

• Itinéraire 1 : $L_1 = OA' + A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F + FG$.

Or : $\vec{A'B'}(70; 20)$, donc $A'B' = 10 \times \sqrt{53} \approx 72,8$ m ;

$\vec{B'C'}(30; -20)$, donc $B'C' = 10 \times \sqrt{13} \approx 36,1$ m ;

$\vec{D'E'}(20; 20)$, donc $D'E' = 20 \times \sqrt{2} \approx 28,3$ m.

Ainsi, $L_1 \approx 60 + 72,8 + 36,1 + 40 + 28,3 + 10 + 10 \approx 257$ m.

• Itinéraire 2 : $L_2 = OA + AB + BC + CD + DE + EF + FG$.

Or : $\vec{OA}(100; 20)$, donc $OA = 20 \times \sqrt{26} \approx 102$ m ;

$\vec{AB}(40; -20)$, donc $AB = 20 \times \sqrt{5} \approx 44,7$ m ;

$\vec{EF}(-30; -20)$, donc $EF = 10 \times \sqrt{13} \approx 36,1$ m.

Ainsi, $L_2 \approx 102 + 44,7 + 80 + 20 + 60 + 36,1 + 10 \approx 353$ m.

L'itinéraire 1 est plus court que l'itinéraire 2.

b. $V = 3 \text{ km/h} = \frac{3000}{60} \text{ m/min} = 50 \text{ m/min}$. De plus $V = \frac{d}{t}$ donc $t = \frac{d}{V}$.

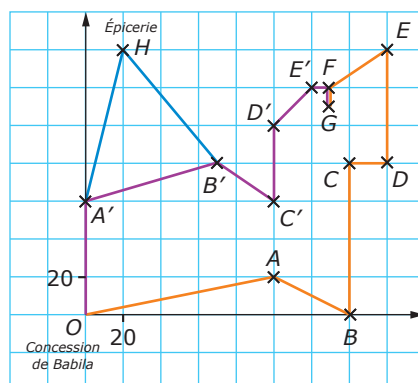
• Itinéraire 1 : $t_1 = \frac{L_1}{V} = \frac{257}{50} \approx 5$; Babila met environ 5 min en passant par l'itinéraire 1.

• Itinéraire 2 : $t_2 = \frac{L_2}{V} = \frac{353}{50} \approx 7$; Babila met environ 7 min en passant par l'itinéraire 2.

2.a. $\vec{A'H}(20; 80)$, donc $A'H = 20 \times \sqrt{17} \approx 82,5$ m ; $\vec{HB'}(50; -60)$, donc $HB' = 10 \times \sqrt{61} \approx 78,1$ m.

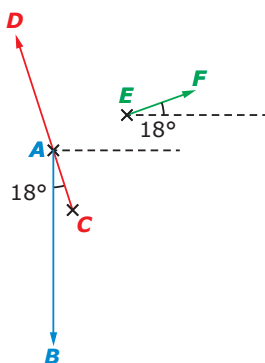
$A'H + HB' - A'B' \approx 82,5 + 78,1 - 72,8 \approx 88$; ce détour est d'environ 88 m.

b. $t_3 = \frac{88}{50} \approx 1,76 \approx 1 \text{ min et } 45 \text{ s}$; Babila perd environ 1 min 45 s en faisant ce détour.



Exercice 63 Une montée difficile

1. On doit utiliser règle graduée et rapporteur ... avec soin, pour que les observations demandées à la question 3 soient pertinentes.



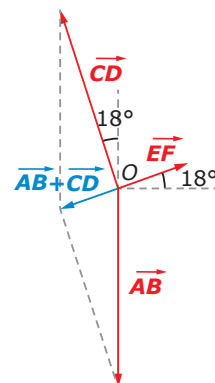
2. On place les représentants, de même origine O , des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ et $\vec{EF}$; on utilise la règle du parallélogramme pour construire le vecteur $\vec{AB} + \vec{CD}$.

3. Observations (sur une figure soignée) :

$\vec{AB} + \vec{CD}$ et $\vec{EF}$ sont colinéaires ;

$\|\vec{AB} + \vec{CD}\| < \|\vec{EF}\|$.

On peut alors affirmer que le zébu va réussir à monter la route.



Exercice 64 La match de foot

a. On utilise le quadrillage pour les axes ; le centre du repère peut être placé n'importe où.

On note A , J_1 , J_2 , J_3 , J_4 et B les points correspondants respectivement au centre du rond central, au joueur 1, au joueur 2, au joueur 3, au joueur 4 et au point d'arrivée du ballon sur la ligne de but.

b. $\vec{AJ_1}(9; 18)$, donc $AJ_1 = \sqrt{9^2 + 18^2} = 9\sqrt{5} \approx 20$; le joueur 1 se trouvait à environ 20 m du centre du rond central.

2.a. $\vec{u_1}(12; -42)$, donc $\|\vec{u_1}\| = 6\sqrt{53} \approx 44$; la première passe était d'environ 44 m ;

$\vec{u_2}(12; 0)$, donc $\|\vec{u_2}\| = 12$; la deuxième passe était d'environ 12 m

$\vec{u_3}(-6; 18)$, donc $\|\vec{u_3}\| = 6\sqrt{10} \approx 19$; la troisième passe était d'environ 19 m

$\vec{u_4}(18; 6)$, donc $\|\vec{u_4}\| = 6\sqrt{10} \approx 19$; le tir était d'environ 19 m.

b. $\vec{x_{u_1}} \times \vec{y_{u_1}} - \vec{x_{u_2}} \times \vec{y_{u_2}} = 12 \times 18 - (-6) \times (-42) = -36 \neq 0$;

donc les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_3}$ ne sont pas colinéaires et les trajectoires des premier et troisième tirs n'étaient pas parallèles.

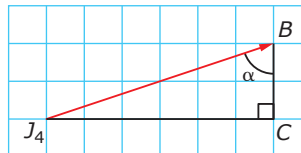
c. $\vec{x_{u_3}} \times \vec{x_{u_4}} + \vec{y_{u_3}} \times \vec{y_{u_4}} = -6 \times 18 + 18 \times 6 = 0$;

donc les vecteurs $\vec{u_3}$ et $\vec{u_4}$ sont orthogonaux et les trajectoires de la troisième passe et du tir étaient orthogonales.

3. Dans le triangle J_4BC , rectangle en C , $\tan \alpha = \frac{J_4C}{BC}$.

Ainsi, $\tan \alpha = \frac{18}{6} = 3$; donc $\alpha \approx 72^\circ$.

L'angle entre le tir et la ligne de but est d'environ 72° .



4 Equations de droites

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Équations cartésiennes d'une droite [1a p 48]	21, 22, 23, 24, 25	47, 48, 52	58, 62, 64
2	Vecteurs directeurs d'une droite [1b p 48]	26, 27, 28, 29, 30		
	Droites particulières [1c p 48]			
	Apprendre à tracer une droite [1 p 50]	1, 3, 4, 5, 7, 8		
	Apprendre à déterminer une équation cartésienne de droite [2 p 51]	11, 12, 13, 14		
3,4	Coefficient directeur et ordonnée à l'origine [2 p 49]	26, 31, 32, 33, 34	49, 50, 51	60
	Apprendre à tracer une droite [1 p 50]	2, 6, 9, 10		
	Apprendre à déterminer une équation cartésienne de droite [2 p 51]	15, 16		
5,6	Droites parallèles et perpendiculaires [3 p 49]	35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46	53	54, 55, 56, 57, 59, 61, 63
	Apprendre à déterminer une équation cartésienne de droite [2 p 51]	17, 18, 19, 20		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer Les cartons à remplir

1. $100x$ représente la masse en grammes de x tomates et $150y$ la masse en grammes de y pommes de terre. Donc $100x+150y$ représente la masse des tomates et des pommes de terre dans le carton, soit 3 000 grammes. D'où l'égalité $100x+15y = 3\ 000$.

2.a. Si $x=6$, alors on obtient l'équation $100 \times 6 + 150y = 3\ 000$, qu'il faut résoudre.

$$\begin{aligned} 100 \times 6 + 150y &= 3\ 000 \\ 600 + 150y &= 3\ 000 \\ 150y &= 2\ 400 \\ y &= 16 \end{aligned}$$

Elle peut encore mettre 16 pommes de terre.

b. Si $y=8$, alors on obtient l'équation $100x+150 \times 8 = 3\ 000$, qu'il faut résoudre.

$$\begin{aligned} 100x + 150 \times 8 &= 3\ 000 \\ 100x + 1200 &= 3\ 000 \\ 100x &= 1\ 800 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Elle peut encore mettre 18 tomates.

3. Si il n'y a que des tomates dans le carton, alors $y=0$.

On obtient donc l'équation $100x+150 \times 0 = 3\ 000$, qu'il faut résoudre.

$$\begin{aligned} 100x + 150 \times 0 &= 3\ 000 \\ 100x &= 3\ 000 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Elle peut mettre 30 tomates.

Si il n'y a que des pommes de terre dans le carton, alors $x=0$.

On obtient donc l'équation $100 \times 0 + 150y = 3\ 000$, qu'il faut résoudre.

$$\begin{aligned} 100 \times 0 + 150y &= 3\ 000 \\ 150y &= 3\ 000 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

Elle peut mettre 20 pommes de terre.

4. Si $y=3$, alors on obtient l'équation $100x+150 \times 3 = 3\ 000$, qu'il faut résoudre.

$$\begin{aligned} 100x + 150 \times 3 &= 3\ 000 \\ 100x + 300 &= 3\ 000 \\ 100x &= 2\ 700 \\ x &= 27 \end{aligned}$$

Elle peut mettre 27 tomates avec 3 pommes de terre.

1 Equations cartésiennes d'une droite

Le point A a pour coordonnées $(x ; y) = (2 ; 3)$.

Comme $2-2\times 3+4 = 2-6+4 = 0$, les coordonnées du point A vérifient l'égalité $x-2y+4 = 0$.

Point	Coordonnées $(x ; y)$	A-t-on $x-2y+4 = 0$?
A	$(2 ; 3)$	Oui
B	$(1 ; 5)$	Non
C	$(-2 ; 1)$	Oui
D	$(2 ; 2)$	Non
E	$(7 ; 3)$	Non
F	$(8 ; 6)$	Oui
G	$(4 ; 4)$	Oui

3.a. Les points dont les coordonnées vérifient l'égalité $x-2y+4 = 0$ sont alignés sur une même droite.

b. Le point de coordonnées $(6 ; 5)$ semble être aligné avec A, C, G et F.

$6-2\times 5+4 = 6-10+4 = 0$; ses coordonnées vérifient donc aussi l'égalité $x-2y+4 = 0$.

Le point de coordonnées $(0 ; 2)$ semble aussi être aligné avec A, C, G et F.

$0-2\times 2+4 = 0-4+4 = 0$; ses coordonnées vérifient donc aussi l'égalité $x-2y+4 = 0$.

c. L'ensemble des points dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient l'égalité $x-2y+4 = 0$ est une droite.

4. Il suffit de vérifier que les coordonnées de B et G vérifient l'égalité $x+3y = 16$;

• pour le point B $(1 ; 5)$: $x+3y = 1+3\times 5 = 1+15 = 16$;

• pour le point G $(4 ; 4)$: $x+3y = 4+3\times 4 = 4+12 = 16$.

Donc la droite (BG) a bien pour équation $x+3y = 16$.

2 Vecteur directeur

1.a. Le vecteur $\vec{u}_1$ a pour coordonnées $(-2 ; -3)$.

b. A $(2 ; 1)$ et B $(0 ; -2)$ ou bien A $(4 ; 4)$ et B $(2 ; 1)$.

c. Dans l'équation de (d), le coefficient devant x est l'ordonnée de $\vec{u}_1$ et celui devant y est l'opposé de l'abscisse de $\vec{u}_1$.

2.a. Le vecteur $\vec{u}_4$ est un vecteur directeur de (d'). Ses coordonnées sont $(3 ; 2)$.

Ces nombres se retrouvent dans l'équation de la droite (d') de la même manière que pour $\vec{u}_1$ et (d).

3. Il semble que le vecteur de coordonnées $(-q ; p)$ soit un vecteur directeur de la droite d'équation $px+qy+r = 0$.

3 Equation du type $y = ax+b$

1.a. $5x-2y+3 = 0$

b. $15-2y+3 = 0$
 $-2y = -18$
 $y = 9$

L'ordonnée de A est 9.

2. On remplace x par -2 dans l'équation de (d) :

$$\begin{aligned} 5\times(-2)-2y+3 &= 0 \\ -10-2y+3 &= 0 \\ -2y &= 7 \\ y &= -3,5 \end{aligned}$$

L'ordonnée de B est -3,5.

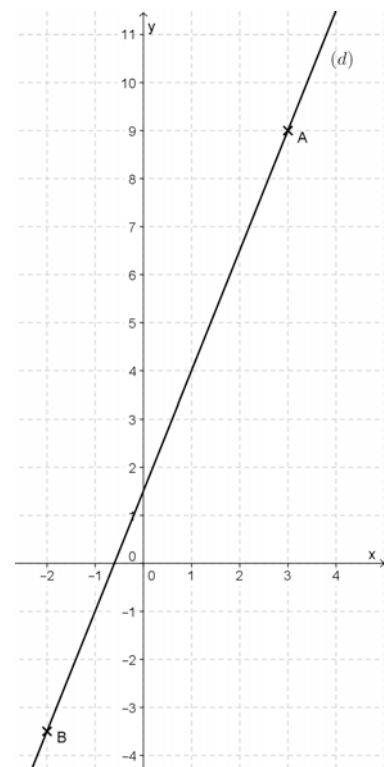
4.a. $5x-2y+3 = 0$
 $-2y = -5x-3$
 $y = 2,5x+1,5$

b. Il suffit de remplacer x par 4 et -5, dans l'équation réduite de (d) ;

pour C : $y = 2,5\times 4+1,5 = 10+1,5 = 11,5$;

pour D : $y = 2,5\times(-5)+1,5 = -12,5+1,5 = -11$.

3.



4 Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

1.a. L'ordonnée de B_1 est $y = 2 \times 0 - 1 = -1$.

b. L'ordonnée de A_1 est $y = 2 \times 1 - 1 = 1$.

c. Les coordonnées de $\overrightarrow{B_1A_1}$ sont $(1-0 ; 1-(-1)) = (1 ; 2)$.

2.

Droite (d_i)	Équation de (d_i)	Coordonnées de $\overrightarrow{B_iA_i}$	Coefficient directeur de (d_i)	Ordonnée à l'origine de (d_i)
(d_1)	$y = 2x - 1$	$(1 ; 2)$	2	-1
(d_2)	$y = x - 1,5$	$(1 ; 1)$	1	-1,5
(d_3)	$y = -0,5x + 2$	$(1 ; -0,5)$	-0,5	2

Pour chaque droite, les nombres figurant dans l'équation réduite correspondent au coefficient directeur et à l'ordonnée à l'origine.

3. (d) est la droite d'équation $y = ax + b$.

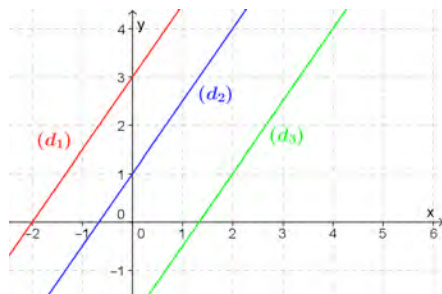
Un vecteur directeur de la droite (d) est $(1 ; a)$;

le coefficient directeur de (d) est a ;

l'ordonnée à l'origine de (d) est b .

5 Droites parallèles

1.a.



$$(d_1) : y = 1,5x + 3 ;$$

$$(d_2) : y = 1,5x + 1 ;$$

$$(d_3) : y = 1,5x - 2.$$

b. Ces trois droites semblent parallèles.

2.a. Un vecteur directeur de (d_1) est $(1 ; 1,5)$;
un vecteur directeur de (d_2) est $(1 ; 1,5)$;
un vecteur directeur de (d_3) est $(1 ; 1,5)$.

b. Ces trois vecteurs étant égaux, ils sont colinéaires.

c. On peut en déduire que ces trois droites sont parallèles.

3. (d) et (d') sont les droites d'équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$;
 (d) et (d') sont parallèles équivaut à $a = a'$.

6 Droites perpendiculaires

Indispensable : le plan est muni d'un repère (O, I, J) orthonormé.

1.a. $\vec{u}(-q ; p)$ est un vecteur directeur de la droite (d) d'équation $px + qy + r = 0$;

$\vec{u}'(-q' ; p')$ est un vecteur directeur de la droite (d') d'équation $p'x + q'y + r' = 0$.

b. Deux vecteurs $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{u}'(x' ; y')$ sont orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$.

c. (d) et (d') sont perpendiculaires équivaut donc à $-q \times (-q') + p \times p' = 0$, c'est-à-dire à : $pp' + qq' = 0$.

2. Pour (d) et (d') : $2 \times 8 + (-6) \times 3 = 16 - 18 = -2$, donc (d) et (d') ne sont pas perpendiculaires ;

pour (d) et (d'') : $2 \times 3 + (-6) \times 1 = 6 - 6 = 0$, donc (d) et (d'') sont perpendiculaires.

1 Apprendre à tracer une droite

Exercice 1

Pour le point A : $2 \times 1 - 3 \times 2 + 4 = 2 - 6 + 4 = 0$;
donc $A \in (d)$.

Pour le point B : $2 \times (-1) - 3 \times 3 + 4 = -2 - 9 + 4 = -7 \neq 0$;
donc $B \notin (d)$.

Pour le point C : $2 \times 4 - 3 \times 4 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$;
donc $C \in (d)$.

Exercice 2

Pour le point M : $3 \times (-1) - 7 = -3 - 7 = -10 \neq 1$;
donc $M \notin (d)$.

Pour le point N : $3 \times 3 - 7 = 9 - 7 = 2$;
donc $N \in (d)$.

Pour le point P : $3 \times \frac{2}{3} - 7 = 2 - 7 = -5 \neq -\frac{5}{3}$;
donc $P \notin (d)$.

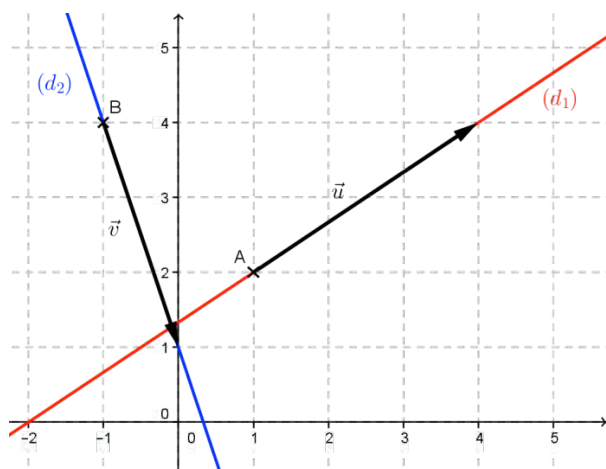
Exercice 3

a. $x = 0$; b. $x = 2$; c. $x = -4$.

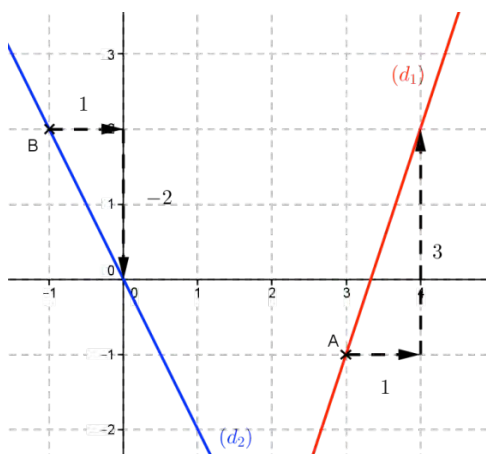
Exercice 4

a. $y = -4,75$; b. $y = 7,75$; c. $y = -11$.

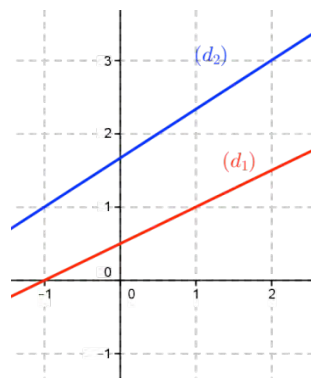
Exercice 5



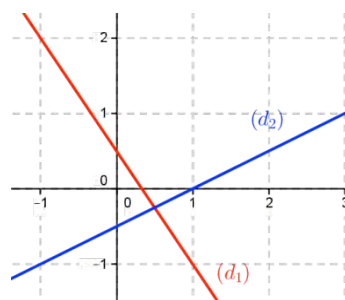
Exercice 6



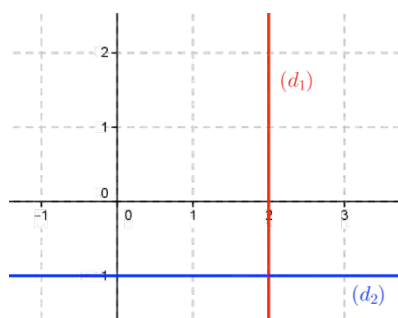
Exercice 7



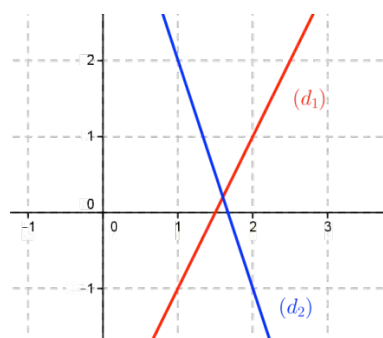
Exercice 8



Exercice 9



Exercice 10



2 Apprendre à déterminer une équation cartésienne de droite

Exercice 11

- a. Equation de la droite (d) passant par $A(-2 ; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\underline{1} ; 4)$: $\underline{4x-y+11 = 0}$.
- b. Equation de la droite (d') passant par $B(-5 ; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(\underline{2} ; 1)$: $\underline{x-2y+9 = 0}$.

Exercice 12

- a. Equation de la droite (d) passant par $C(-2 ; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\underline{-3} ; 1)$: $\underline{x+3y+2 = 0}$.
- b. Equation de la droite (d') passant par $D(0 ; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(\underline{-2} ; -5)$: $\underline{-5x+2y-8 = 0}$.

Exercice 13

- a. Equation de la droite (d) passant par $A(\underline{2} ; 4)$ et $B(\underline{3} ; 7)$: $\underline{3x-y-2 = 0}$.
- b. Equation de la droite (d') passant par $C(\underline{-1} ; 3)$ et $D(\underline{4} ; 5)$: $\underline{2x-5y+17 = 0}$.

Exercice 14

- a. Equation de la droite (d) passant par $R(\underline{0} ; 2)$ et $S(\underline{-3} ; 1)$: $\underline{x-3y+6 = 0}$.
- b. Equation de la droite (d') passant par $T(\underline{4} ; 3)$ et $U(\underline{1} ; 3)$: $\underline{y = 3}$.

Exercice 15

- a. Equation de la droite (d) passant par $A(\underline{3} ; -1)$ et de coefficient directeur 3 : $\underline{y = 3x-10}$.
- b. Equation de la droite (d') passant par $B(\underline{-1} ; 2)$ et de coefficient directeur -2 : $\underline{y = -2x}$.

Exercice 16

- a. Equation de la droite (d) passant par $P(\underline{-4} ; 0)$ et de coefficient directeur 1,5 : $\underline{y = 1,5x+6}$.
- b. Equation de la droite (d') passant par $Q(\underline{-1} ; -1)$ et de coefficient directeur 1 : $\underline{y = x}$.

Exercice 17

- a. Equation de la droite (d) passant par $A(\underline{3} ; 1)$ et perpendiculaire à (Δ) de vecteur directeur $\vec{u}(\underline{1} ; 4)$: $\underline{x+4y-7 = 0}$.
- b. Equation de la droite (d') passant par $B(\underline{1} ; -1)$ et perpendiculaire à (Δ') de vecteur directeur $\vec{v}(\underline{-2} ; 1)$: $\underline{2x-y-3 = 0}$.

Exercice 18

- a. Equation de la droite (d) passant par $E(\underline{1} ; -2)$ et perpendiculaire à (Δ) de vecteur directeur $\vec{u}(\underline{-1} ; 5)$: $\underline{x-5y-11 = 0}$.
- b. Equation de la droite (d') passant par $F(\underline{1} ; 2)$ et perpendiculaire à (Δ') de vecteur directeur $\vec{v}(\underline{0} ; 3)$: $\underline{y = 2}$.

Exercice 19

On donne les points $A(\underline{-1} ; 2)$, $B(\underline{8} ; 3)$ et $C(\underline{0} ; 4)$.

1. Equation de la droite (AB) : $\underline{x-9y+19 = 0}$;
équation de la droite (AC) : $\underline{2x-y+4 = 0}$;
équation de la droite (BC) : $\underline{x+8y-32 = 0}$.

2. $\vec{AB}(\underline{9} ; 1)$.

- 3.a. Equation de la droite (d) , de vecteur directeur $\vec{AB}$ et passant par C : $\underline{x-9y+36 = 0}$;
b. équation de la droite (d') , perpendiculaire à (AB) et passant par C : $\underline{9x+y-4 = 0}$.

Exercice 20

(d) est la droite d'équation $-2x+3y-6 = 0$.

- a. Equation de la droite (AB) , perpendiculaire à (d) [et passant par $A(\underline{3} ; 2)$] : $\underline{3x+2y-13 = 0}$.

- b. Pour déterminer l'abscisse de B , on résout l'équation :
- $$\begin{aligned} 3x+2 \times 1-13 &= 0 \\ 3x-11 &= 0 \\ 3x &= 11 \\ x &= \underline{\frac{11}{3}}. \end{aligned}$$

L'abscisse de B est égale à $\underline{\frac{11}{3}}$.

Activités d'application

Appartenance à une droite

Exercice 21

1. A , B et F sont sur (d_1) .

2. A et D sont sur (d_2) .

Exercice 22

1. A est sur (d_1) , (d_4) et (d_6) .

2. B est sur (d_1) , (d_3) et (d_5) .

Exercice 23

1.

	$A(2 ; 1)$	$B(-2 ; -1)$	$C(-4 ; 4)$
$(d_1) : x + 2y - 4 = 0$	O	N	O
$(d_2) : y = 0,5x$	O	O	N
$(d_3) : y = -2,5x - 6$	N	O	O

2.a. $(d_1) \cap (d_2) = \{A\}$;

b. $(d_2) \cap (d_3) = \{B\}$;

c. $(d_3) \cap (d_1) = \{C\}$.

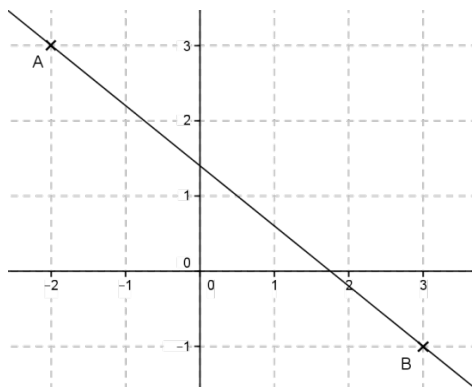
Exercice 24

La droite (AB) a pour équation $4x + 5y - 7 = 0$.

1. Le point A , d'abscisse -2 , a pour ordonnée 3 .

2. Le point B , d'ordonnée -1 , a pour abscisse 3 .

3.



Exercice 25

1. (d_1) est la droite d'équation $-3x - 4y + 12 = 0$.

a. (d_1) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 4 .

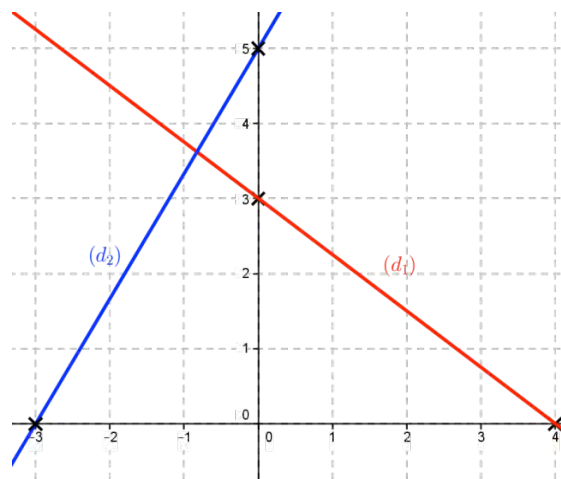
b. (d_1) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3 .

2. (d_2) est la droite d'équation $5x - 3y + 15 = 0$.

a. (d_2) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -3 .

b. (d_2) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 5 .

3.



Vecteur directeur et équations de droite

Exercice 26

- 1.a. Le vecteur $\vec{u}(-q; p)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $px + qy + r = 0$.
- b. La droite d'équation $y = ax + b$ a le vecteur $\vec{u}(1; a)$ comme vecteur directeur.
- 2.a. $(2; 5)$ est un vecteur directeur de la droite (d_1) d'équation $5x - 2y + 1 = 0$;
- b. $(1; -2)$ est un vecteur directeur de la droite (d_2) d'équation $y = -2x + 4$;
- c. $(1; -1,4)$ est un vecteur directeur de la droite (d_3) d'équation $y = -1,4x + 3$;
- d. $(-3; -2)$ est un vecteur directeur de la droite (d_4) d'équation $-2x + 3y + 7 = 0$;
- e. $(0; 1)$ est un vecteur directeur de la droite (d_5) d'équation $x = -1$;
- f. $(1; 0)$ est un vecteur directeur de la droite (d_6) d'équation $y = 2$.

Exercice 27

La droite (d_1) , d'équation $3x - 4y + 1 = 0$, a pour vecteur directeur $\vec{u}(-4; -3)$.

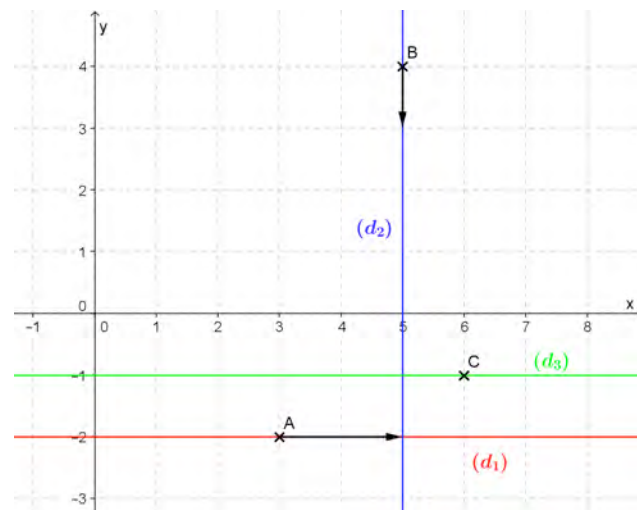
La droite (d_2) , d'équation $-3x - 4y = 0$, a pour vecteur directeur $\vec{w}(4; -3)$.

La droite (d_3) , d'équation $-4x - 3y + 3 = 0$, a pour vecteur directeur $\vec{t}(3; -4)$.

La droite (d_4) , d'équation $-4x + 3y - 1 = 0$, a pour vecteur directeur $\vec{v}(-3; -4)$.

Exercice 28

1. On donne les points $A(3; -2)$, $B(5; 4)$ et $C(6; -1)$.



- 2.a. Equation de la droite (d_1) , passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(2; 0)$: $y = -2$;
- b. Equation de la droite (d_2) , passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}(0; -1)$: $x = 5$;
- c. Equation de la droite (d_3) , passant par C et de coefficient directeur 0 : $y = -1$.

Exercice 29

- 1.a. $\vec{t}(8; -2)$ est un vecteur directeur de (d_3) .
- b. $\vec{u}(-5; -2)$ est un vecteur directeur de (d_1) .
- c. $\vec{v}(3; 4)$ est un vecteur directeur de (d_4) .
- d. $\vec{w}(1; -5)$ est un vecteur directeur de (d_2) .
2. (d_1) a pour équation $2x - 5y + 16 = 0$;
 (d_2) a pour équation $5x + y - 23 = 0$;
 (d_3) a pour équation $x + 4y = 0$;
 (d_4) a pour équation $4x - 3y + 1 = 0$.

Exercice 30

1. $A(2; 4)$, $B(-3; -2)$ et $\vec{u}(-1; 5)$.
- 2.a. Equation de la droite (AB) : $6x - 5y + 8 = 0$;
- b. équation de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$: $5x + y - 14 = 0$.

Équation cartésienne du type $y=ax+b$

Exercice 31

- $y = 2x-3$ est l'équation de (d_3) ;
- $y = -x+1$ est l'équation de (d_2) ;
- $y = 0,5x-3$ est l'équation de (d_1) ;
- $y = 2x+1$ est l'équation de (d_4) .

Exercice 32

- $y = 1,5x+2,5$;
- $y = 5x+2$;
- $y = -2,5x+0,25$;
- $y = -2$.

Exercice 33

On donne les points $A(2 ; 2)$ et $B(6 ; 3)$.

- a. Coefficient directeur de (AB) : $\frac{3-2}{6-2} = 0,25$.
b. L'ordonnée à l'origine de la droite (AB) est b tel que $\frac{3-b}{6-0} = 0,25$, c'est-à-dire $b = 3-6 \times 0,25 = 1,5$.
c. On en déduit que (AB) a pour équation $y = 0,25x+1,5$.

Droites parallèles

Exercice 35

- (d) et (d') sont parallèles car leurs coefficients directeurs sont tous les deux égaux à 1,5.
- (d) et (d') ne sont pas parallèles car leurs coefficients directeurs ne sont pas égaux.
- (d) et (d') sont parallèles car leurs coefficients directeurs sont tous les deux égaux à -1.

Exercice 36

(d') est la droite parallèle à la droite (d) d'équation $y = -3x+5$ et passant par le point $A(2 ; 1)$

- le coefficient directeur de (d') est -3.
- L'ordonnée à l'origine de (d') est égale à b tel que $\frac{1-b}{2-0} = -3$, c'est-à-dire $b = 7$.
- (AB) a pour équation $y = -3x+7$.

Exercice 37

- La droite (d'_1) , parallèle à (d_1) d'équation $y = 2x-1$ et passant par le point $B(5 ; -12)$, a pour équation :
 $y = 2x-22$;
- La droite (d'_2) , parallèle à (d_2) d'équation $y = -1,5x$ et passant par le point $C(-5 ; 0)$, a pour équation :
 $y = -1,5x-7,5$.

Exercice 38

(d) est la droite d'équation $y = 1,2x+3$.
Le coefficient directeur de (AB) est $\frac{3-(-2)}{3-(-1)} = \frac{5}{4} = 1,25$;
donc (AB) et (d) ne sont pas parallèles.
Le coefficient directeur de (CD) est $\frac{4-(-2)}{7-2} = \frac{6}{5} = 1,2$;
donc (CD) et (d) sont parallèles.

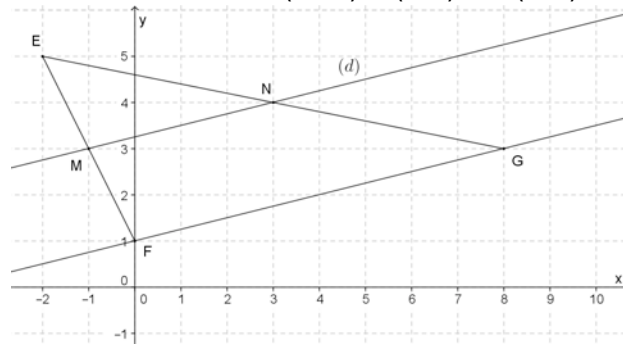
- a. Pour $A(-2 ; 4)$ et $B(3 ; 1)$, l'équation de (AB) est :
 $y = -0,6x+2,8$;
- b. Pour $A(-3 ; -2)$ et $B(-4 ; 2)$, l'équation de (AB) est :
 $y = -4x-14$;
- c. Pour $A(3 ; -1)$ et $B(-2 ; -2)$, l'équation de (AB) est :
 $y = 0,2x-1,6$;
- d. Pour $A(-4 ; 3)$ et $B(2 ; 3)$, l'équation de (AB) est :
 $y = 3$.

Exercice 34

- Pour $A(-1 ; 4)$ et $B(2 ; 6)$, l'équation de (AB) est :
 $y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$;
- Pour $C(-5 ; 10)$ et $D(1 ; -4)$, l'équation de (CD) est :
 $y = -\frac{7}{3}x - \frac{5}{3}$;
- Pour $E(\frac{1}{3} ; \frac{1}{2})$ et $F(\frac{1}{4} ; \frac{1}{5})$, l'équation de (EF) est :
 $y = 3,6x - 0,7$.

Exercice 39

- On donne les points $E(-2 ; 5)$, $F(0 ; 1)$ et $G(8 ; 3)$.



- Les coordonnées du milieu M de $[EF]$ sont $(-1 ; 3)$ et celles du milieu N de $[EG]$ sont $(3 ; 4)$.
- a. Equation de (FG) : $y = 0,25x+1$;
b. équation de la droite (d) , parallèle à (FG) et passant par M : $y = 0,25x+3,25$.
- a. $0,25 \times 3 + 3,25 = 0,75 + 3,25 = 4$;
donc N est bien sur (d) .
b. Une des propriétés de la droite des milieux permet d'obtenir ce résultat.
Dans le triangle EFG , M est le milieu de $[EF]$ et (d) est parallèle à (FG) .
Or si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un second côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.
Donc (d) passe par le milieu N de $[EG]$.

Exercice 40

- Equation de la droite parallèle à (BC) et passant par A :
- pour $A(-2 ; 2)$, $B(-1 ; -2)$ et $C(4 ; 1)$, $y = 0,6x+3,2$;
 - pour $A(2 ; 3)$, $B(-1 ; 2)$ et $C(2 ; -1)$, $y = -x+5$;
 - pour $A(-3 ; 4)$, $B(1 ; 2)$ et $C(5 ; 2)$, $y = 4$.

Droites perpendiculaires

Exercice 41

- $3 \times 4 + (-2) \times 6 = 12 - 12 = 0$ donc (d) et (d') sont perpendiculaires.
- $1 \times 5 + (-5) \times 1 = 5 - 5 = 0$ donc (d) et (d') sont perpendiculaires.
- $7 \times 6 + 3 \times 14 = 42 + 42 = 84$ donc (d) et (d') ne sont pas perpendiculaires.

Exercice 42

- $3 \times 4 + 4 \times (-3) = 12 - 12 = 0$ donc (d) et (d') sont perpendiculaires, quelle que soit la valeur de r .
- (d') passe par $A(5; 1)$ si $4 \times 5 - 3 \times 1 + r = 0$
 $17 + r = 0$
 $r = -17$.
- Une équation cartésienne de (d') est $4x - 3y - 17 = 0$.

Exercice 43

- La droite (d'_1) , perpendiculaire à (d_1) d'équation $2x - 5y + 4 = 0$ et passant par le point $B(-1; 6)$, a pour équation : $5x + 2y - 7 = 0$;
- La droite (d'_2) , perpendiculaire à (d_2) d'équation $x - 2y + 2 = 0$ et passant par le point $C(0; -2)$, a pour équation : $2x + y + 2 = 0$.

Exercice 44

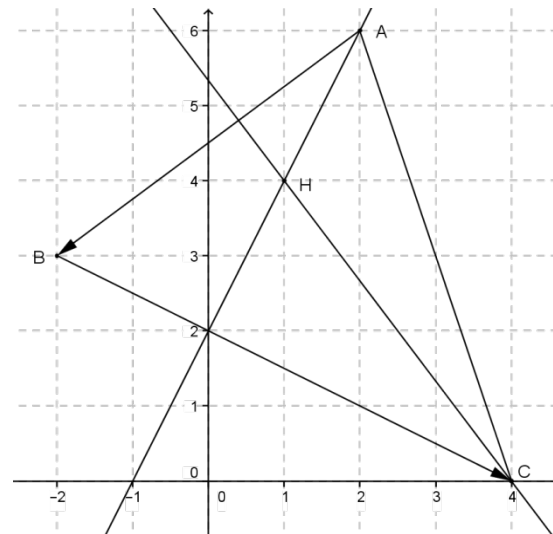
(d) est la droite d'équation $-3x + 7y - 2 = 0$.

La droite (AB) admet pour équation $5x + 2y + 10 = 0$;
 $-3 \times 5 + 7 \times 2 = -15 + 14 = -1 \neq 0$, donc (AB) et (d) ne sont pas perpendiculaires.

La droite (CD) admet pour équation $7x + 3y - 25 = 0$;
 $-3 \times 7 + 7 \times 3 = -21 + 21 = 0$, donc (CD) et (d) sont perpendiculaires.

Exercice 45

- On donne les points $A(2; 6)$, $B(-2; 3)$ et $C(4; 0)$.



- $\vec{AB}(-4; -3)$ et $\vec{BC}(6; -3)$.

- $M(x; y)$ appartient à la hauteur issue de C dans le

triangle ABC équivaut à $\vec{CM}(x - 4; y) \perp \vec{AB}(-4; -3)$
 c'est-à-dire $-4(x - 4) + (-3)y = 0$;

l'équation de cette hauteur est donc : $4x + 3y - 16 = 0$.

- $M(x; y)$ appartient à la hauteur issue de A dans le

triangle ABC équivaut à $\vec{AM}(x - 2; y - 6) \perp \vec{BC}(6; -3)$
 c'est-à-dire $6(x - 2) + (-3)(y - 6) = 0$;

l'équation de cette hauteur est donc : $2x - y + 2 = 0$.

- $4 \times 1 + 3 \times 4 - 16 = 4 + 12 - 16 = 0$ et $2 \times 1 - 4 + 2 = 2 - 4 + 2 = 0$, donc $H(1; 4)$, qui appartient aux hauteurs issues de C et A dans le triangle ABC , est l'orthocentre de ABC .

Exercice 46

Equation de la perpendiculaire à (BC) passant par A :

- lorsque $A(1; 4)$, $B(-1; 1)$ et $C(4; 2)$: $5x + y - 9 = 0$;

- lorsque $A(-3; 2)$, $B(2; 1)$ et $C(1; -1)$: $x + 2y - 1 = 0$;

- lorsque $A(-4; -2)$, $B(-1; 2)$ et $C(3; -2)$: $x - y + 2 = 0$.

Exercice 47 Les bons termes

- a. $y = -3x+2$ est l'équation du type $y = ax+b$ de (d) .
- b. $3x-2y+7 = 0$ est une équation cartésienne de (d') .
- c. 2 est l'ordonnée à l'origine de (d) .
- d. -3 est le coefficient directeur de (d) .
- e. Le vecteur $\vec{u}(2; 3)$ est un vecteur directeur de (d) .
- f. Le vecteur $\vec{v}(1; -3)$ est un vecteur directeur de (d) .

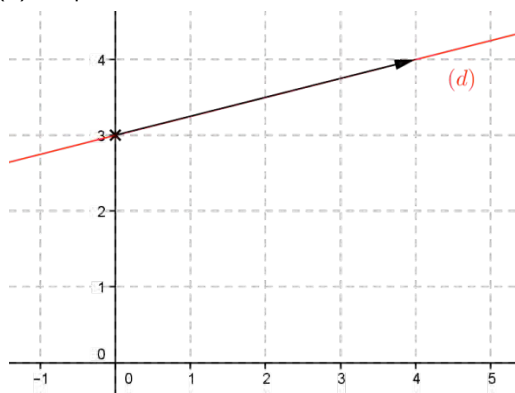
Exercice 48 Des équations, une équation

- (d) a pour équation cartésienne : $4x+2y-6 = 0$.
- a. $8x+4y-12 = 0$ est une autre équation cartésienne de (d) .
- b. $y = -2x+3$ est l'équation de (d) du type $y = ax+b$.

Exercice 49 Tracer précisément

(d) est la droite d'équation $y = 0,25x+3$.

- 1.a. (d) coupe l'axe des ordonnées en 3.



- b. $\vec{u}(1; a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = ax+b$; donc $\vec{u}(1; 0,25)$ est un vecteur directeur de (d) .
- c. L'ordonnée de $\vec{u}$ vaut 0,25 ; pour utiliser une telle coordonnée, il faut un quadrillage adapté.

- d. $2\vec{u}$ a pour coordonnées $(2; 0,5)$,

$3\vec{u}$ a pour coordonnées $(3; 0,75)$,

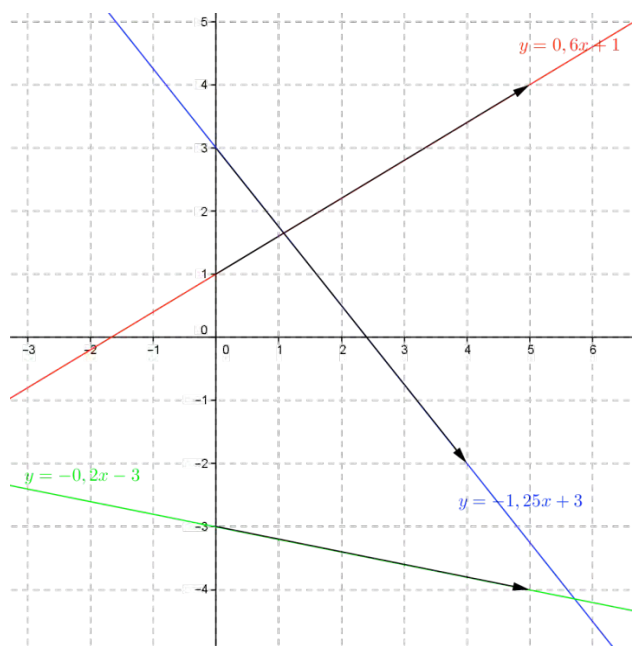
$4\vec{u}$ a pour coordonnées $(4; 1)$,

$5\vec{u}$ a pour coordonnées $(5; 1,25)$.

- e. $\vec{u}$, $2\vec{u}$, $3\vec{u}$, $4\vec{u}$ et $5\vec{u}$ sont des vecteurs directeurs de (d) .

- f. Le vecteur $4\vec{u}$, qui a des coordonnées entières, est le plus facile à représenter.

- 2.a. Le vecteur de coordonnées $(5; 3)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = 0,6x+1$;
- b. le vecteur de coordonnées $(4; -5)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = -1,25x+3$;
- c. le vecteur de coordonnées $(5; -1)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $y = -0,2x-3$.



Exercice 50 D'un seul coup d'œil

Vert clair : $y = -3x + 2$; vert foncé : $y = 2x + 2$;

rose : $y = 2x - \frac{1}{2}$; violet : $y = 3$;

orange : $y = \frac{1}{3}x + 1$; bleu : $y = \frac{1}{3}x - 1$.

Exercice 51 Bien appliquer une formule

1. Pour les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, le coefficient directeur de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

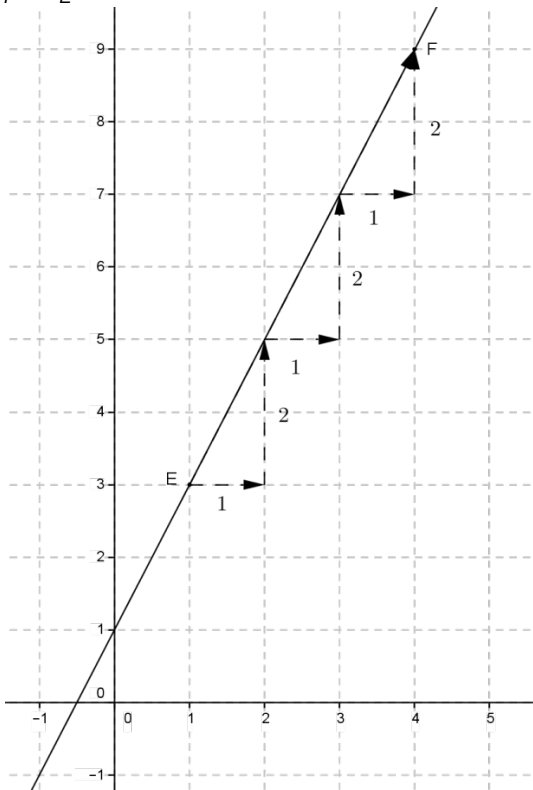
2. On donne les points $E(1 ; 3)$ et $F(4 ; 9)$.

Fatoumata a soustrait les coordonnées de chaque point au lieu de soustraire les abscisses et les ordonnées :

elle a calculé $\frac{y_E - x_E}{y_F - x_F}$ au lieu de $\frac{y_F - y_E}{x_F - x_E}$.

Francis n'a pas respecté l'ordre des points au dénominateur : il a calculé au dénominateur $x_E - x_F$ au lieu de $x_F - x_E$.

3. $\frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{9 - 3}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$.



On constate graphiquement que la droite tracée a bien 2 pour coefficient directeur.

Exercice 52 Obtenir une équation cartésienne

1. On donne les points $A(2 ; 5)$ et $B(6 ; 8)$.

a. $\vec{AB}(4 ; 3)$.

b. $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de (AB) .

On applique la propriété : « $\vec{u}(-p ; q)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $px + qy + r = 0$ ». Ainsi une équation de (AB) peut s'écrire $-3x + 4y + r = 0$.

c.
$$\begin{aligned} -3 \times 2 + 4 \times 5 + r &= 0 \\ 14 + r &= 0 \\ r &= -14. \end{aligned}$$

d. Une équation de (AB) est donc : $-3x + 4y - 14 = 0$.

2.a. Equation de (d_1) : $9x + 8y + 11 = 0$;

b. équation de (d_2) : $5x + 6y - 26 = 0$;

c. équation de (d_3) : $3x - 3y + 18 = 0$.

Exercice 53 L'importance du repère

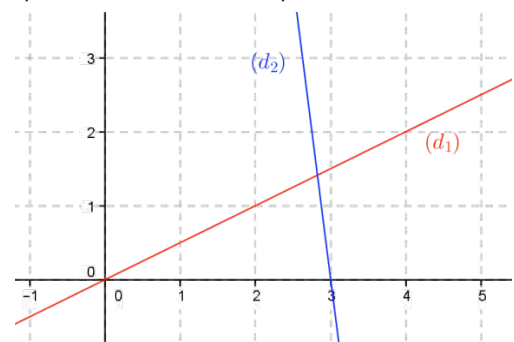
(d_1) est la droite d'équation $-2x + 4y = 0$;

(d_2) est la droite d'équation $8x + y + 24 = 0$.

1.a. Les deux droites ainsi tracées semblent effectivement perpendiculaires. On le contrôle à l'aide de l'équerre.

b. Melissa a appliqué une propriété qui n'est valable que dans un repère orthonormé. Or celui qui est tracé ne l'est pas.

2.a. Représentation dans un repère orthonormé :



b. Les droites tracées ne sont pas perpendiculaires, comme le confirme par ailleurs le calcul de Melissa.

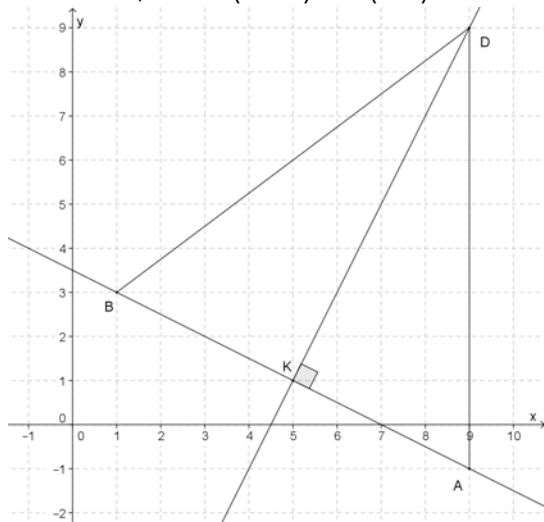
Exercices d'approfondissement

Exercice 54 Critère de parallélisme

1. (d) est la droite d'équation $px+qy+r=0$;
 (d') est la droite d'équation $p'x+q'y+r'=0$.
 a. $\vec{u}(-q ; p)$ est un vecteur directeur de (d) ;
 $\vec{u}'(-q' ; p')$ est un vecteur directeur de (d') .
 b. Deux vecteurs $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{u}'(x' ; y')$ sont colinéaires
 équivaut à $xy'-x'y=0$.
 c. Donc $(d) \parallel (d')$ équivaut à $-q \times p' - p \times (-q') = 0$,
 c'est-à-dire équivaut à $pq' - p'q = 0$.
 2.a. Pour $(d) : 3x-5y+1=0$ et $(d') : -6x+10y-7=0$,
 on a $3 \times 10 - (-6) \times (-5) = 30 - 30 = 0$; donc $(d) \parallel (d')$;
 b. pour $(d) : 6x+3y+2=0$ et $(d') : 8x+4y-3=0$,
 on a $6 \times 4 - 8 \times 3 = 24 - 24 = 0$; donc $(d) \parallel (d')$.

Exercice 55 Équation de médiatrice

1. On donne les points $A(9 ; -1)$ et $B(1 ; 3)$.



- 2.a. Le milieu de $[AB]$ est $K(5 ; 1)$.
 b. $M(x ; y) \in (AB)$ équivaut à :
 $\vec{AM}(x-9 ; y+1)$ et $\vec{AB}(1-9 ; 3-(-1))$ sont colinéaires
 $(x-9)(3-(-1)) - (y+1)(1-9) = 0$
 $4x+8y-27=0$;
 donc une équation de (AB) est : $x+2y-7=0$.
 c. Soit (d) la médiatrice de (AB) .
 $M(x ; y) \in (d)$ équivaut à
 $\vec{KM}(x-5 ; y-1)$ et $\vec{AB}(1-9 ; 3-(-1))$ sont orthogonaux
 $(x-5)(1-9) + (y-1)(3-(-1)) = 0$
 $-8x+4y+36=0$;
 donc une équation de (d) est $-2x+y+9=0$.
 3. Soit D le point de (d) de même abscisse que A .
 a. Pour calculer l'ordonnée de D , on résout :
 $-2 \times 9 + y + 9 = 0$
 $-9 + y = 0$
 $y = 9$;
 donc l'ordonnée de D vaut 9.
 b. $AD = 9 - (-1) = 10$, car A et D ont la même abscisse.
 De plus $BD = 10$, car D est sur la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 56 Triangle particulier

- (d_1) est la droite d'équation $2x-5y-26=0$;
 (d_2) est la droite d'équation $5x+2y+16=0$;
 (d_3) est la droite d'équation $-5x+4y-6=0$.

D'après la figure, le triangle ABC ne peut être rectangle qu'en A ; démontrons que $(d_1) \perp (d_2)$:

$$2 \times 5 + (-5) \times 2 = 10 - 10 = 0.$$

Donc (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires en A et ABC est un triangle rectangle en A .

Exercice 57 Quadrilatère particulier

1. Equations des 4 droites :

$$\begin{aligned} (d_1) : -2x+9y-26 &= 0 ; \\ (d_3) : -9x-2y-22 &= 0 ; \\ (d_2) : 4x-18y-42 &= 0 ; \\ (d_4) : -27x-2y-66 &= 0. \end{aligned}$$

La figure est correcte, modulo une permutation des dénominations des droites notées (d_2) et (d_3) .

2. $ABCD$ semble être un trapèze rectangle de bases $[AB]$ et $[CD]$.

3. On va démontrer que $(d_1) \parallel (d_2)$ et $(d_1) \perp (d_3)$.

- Pour (d_1) et (d_2) :

l'équation du type $y = ax+b$ de (d_1) est : $y = \frac{2}{9}x + \frac{26}{9}$;

l'équation du type $y = ax+b$ de (d_3) est : $y = \frac{2}{9}x - \frac{21}{9}$;

les coefficients directeurs sont égaux, donc $(d_1) \parallel (d_2)$.

- Pour (d_1) et (d_3) :

$$-2 \times (-9) + 9 \times (-2) = 18 - 18 = 0 ; \text{ donc } (d_1) \perp (d_3).$$

Finalement $ABCD$ est effectivement un trapèze rectangle de bases $[AB]$ et $[CD]$.

Exercice 58 Déterminer une équation

La droite passant par $A(1; 2)$ et de vecteur directeur

$\vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j}$ a pour équation : $-x + 2y - 3 = 0$.

Exercice 59 Parallélisme et orthogonalité

L'équation de (d_1) est : $2x - 3y + 4 = 0$;

l'équation de (d_2) peut se s'écrire : $-\frac{3}{2}x + y + 5 = 0$;

l'équation de (d_3) peut se s'écrire : $\frac{3}{2}x + y - 1 = 0$.

Or $2 \times \frac{3}{2} + (-3) \times 1 = 3 - 3 = 0$; donc $(d_1) \perp (d_3)$.

Exercice 60 À chaque droite son équation

Droites	Équations
(d_1)	$y = x$
(d_2)	$y = x - 1$
(d_3)	$y = -x + 3$

Exercice 61 Alignement de points et orthogonalité

On considère, dans un repère orthonormé, les points $A(-2; 1)$, $B(1; 2)$ et $C(-3; 0)$.

1. $\vec{AB}(3; 1)$ et $\vec{AC}(-4; -1)$.

2. $3 \times (-1) - (-1) \times 1 = -3 + 1 = -2 \neq 0$;

donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A , B et C ne sont pas alignés.

3. $\vec{u}(1; -3)$ est un vecteur directeur de la droite (D) d'équation $y = -3x + 1$.

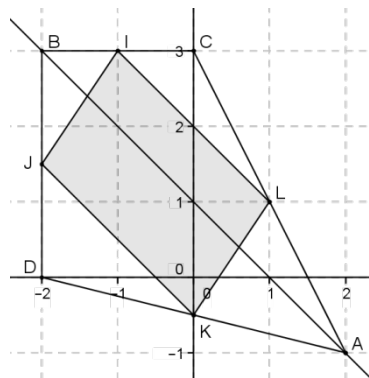
4. $3 \times 1 + 1 \times (-3) = 3 - 3 = 0$;

donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux et les droites (D) et (AB) sont perpendiculaires.

Exercice 62 Une situation problème

On donne, dans un repère orthonormé, les points $A(2; -1)$, $B(-2; 3)$, $C(0; 3)$ et $D(-2; 0)$.

1.



2. Equation de la droite (AB) : $x + y - 1 = 0$.

3. Le milieu de $[BC]$ est $I(-1; 3)$;

le milieu de $[BD]$ est $J(-2; 1,5)$;

le milieu de $[DA]$ est $K(0; -0,5)$;

le milieu de $[AC]$ est $L(1; 1)$.

4. $\vec{IJ}(-1; -1,5)$ et $\vec{LK}(-1; -1,5)$;

donc $\vec{IJ} = \vec{LK}$ et $IJKL$ est un parallélogramme.

5. $AC = \sqrt{(0 - 2)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;

$CB = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (3 - 3)^2} = 2$;

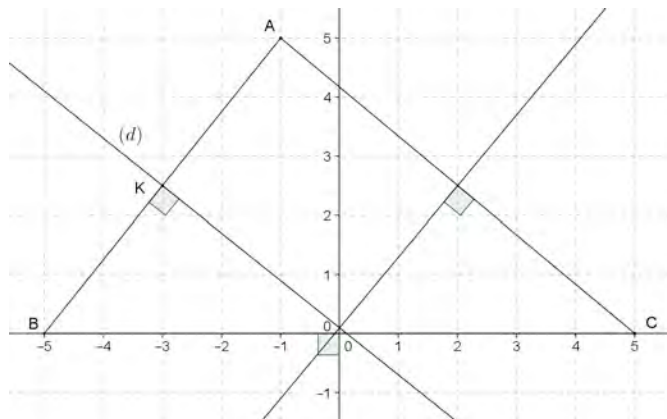
$BD = \sqrt{(-2 - (-2))^2 + (0 - 3)^2} = 3$;

$DA = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{17}$;

le périmètre de $ACBD$ est égal à $(2\sqrt{5} + \sqrt{17} + 5)$ cm.

Exercice 63 L'antenne relais

1.



2.b. L'antenne relais est au point d'intersection des médiatrices qui semblent se croiser au point de coordonnées (0 ; 0).

3.a. Les points B et C sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Donc, l'axe des ordonnées est la médiatrice de [BC] et l'antenne relais est nécessairement sur cet axe.

- b. $\rightarrow$
- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $(-4 ; -5)$;
 - coordonnées du milieu K de [AB] : $(-3 ; 2,5)$;
 - équation de la droite (d) médiatrice de [AB] : $4x+5y-0,5 = 0$;
 - coordonnées du point R de (d) qui est sur l'axe des ordonnées : $(0 ; 0,1)$.

c. Le point R est le point d'intersection de la médiatrice de [AB] et de celle de [BC].

C'est donc en R que sera l'antenne-relais.

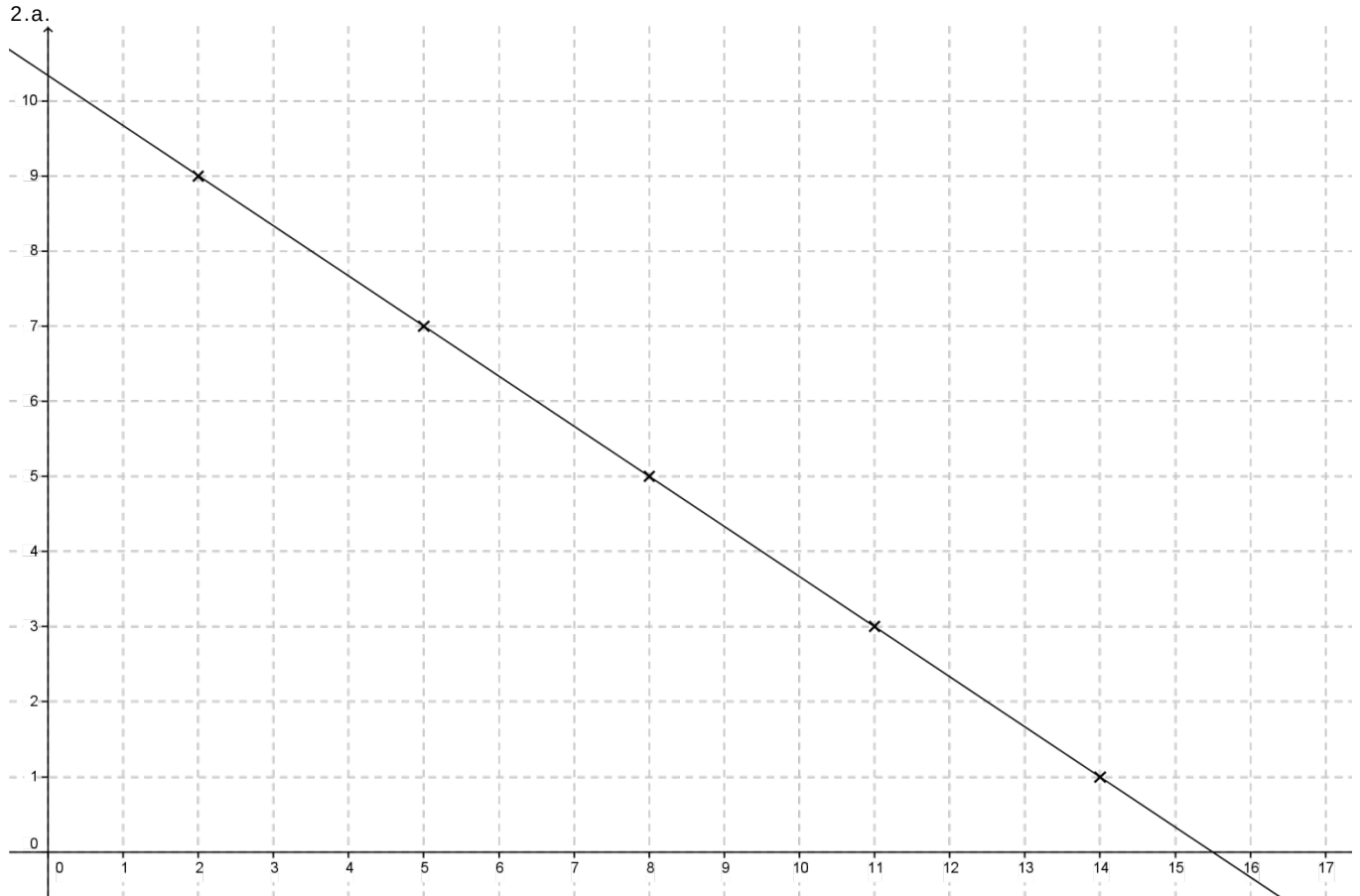
Cette position est légèrement différente de celle qui avait été déterminée graphiquement.

d. La médiatrice de [AC] a pour équation $6x-5y+0,5 = 0$;

$6 \times 0 - 5 \times 0,1 + 0,5 = 0 - 0,5 + 0,5 = 0$; donc R est bien sur la médiatrice de [AC].

Exercice 64 Optimiser une production

- 1.a. La fabrication de 8 petits cartons nécessite le travail de $8 \times 2 = 16$ employés.
La fabrication de 5 grands cartons nécessite le travail de $5 \times 3 = 15$ employés.
8 petits et 5 grands peuvent donc être fabriqués par les 31 employés car $16 + 15 = 31$.
- b. Le nombre d'employés fabriquant x petits cartons est $2x$.
- c. Le nombre d'employés fabriquant y grands cartons est $3y$.
- d. Il y a 31 employés. D'où : $2x + 3y = 31$.



- b. Le point de coordonnées (8 ; 5) est bien sur la droite d'équation $2x + 3y = 31$.
- c. Détermination graphique de tous les autres couples de valeurs possibles pour x et y : (2 ; 9), (5 ; 7), (11 ; 3), (14 ; 1).

3.a. Chiffre d'affaires correspondant à chaque couple obtenu précédemment :

- pour (2 ; 9) : $2 \times 1\,500 + 9 \times 2\,500 = 25\,500$ F CFA ;
- pour (5 ; 7) : $5 \times 1\,500 + 7 \times 2\,500 = 25\,000$ F CFA ;
- pour (8 ; 5) : $8 \times 1\,500 + 5 \times 2\,500 = 24\,500$ F CFA ;
- pour (11 ; 3) : $11 \times 1\,500 + 3 \times 2\,500 = 24\,000$ F CFA ;
- pour (14 ; 1) : $14 \times 1\,500 + 1 \times 2\,500 = 23\,500$ F CFA.

- b. Il faut fabriquer 2 petits cartons et 9 grands pour obtenir le chiffre d'affaires le plus élevé.

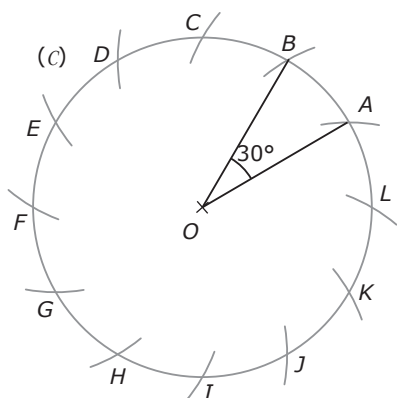
5 Angles inscrits au centre. Polygones réguliers

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Angles inscrits [1 p 60] et angles au centre [2 p 60]	10, 11, 12, 13	31	
2 et 3	Propriétés des angles inscrits [3 p 60]	14, 15, 16, 17, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 28	32	36, 39, 40, 44
	Apprendre à calculer la mesure d'un angle [1 p 62]	1, 2, 3, 4		
4	Polygones réguliers [4 p 61]	25, 26, 27, 28, 29, 30,	33, 34, 35	37, 38, 41, 42, 43
	Apprendre à construire un polygone régulier [2 p 63]	5, 6, 7, 8, 9	32, 35	

Pour démarrer

Cercles et polygones

1.



2.a. En reliant les points A, C, E, G, I, K et A, on obtient un hexagone.

b. [AO] et [CO] sont des rayons du cercle (C) donc $AO = CO$.
Donc AOC est un triangle isocèle en O.

Puis $\text{mes } \widehat{AOC} = \text{mes } \widehat{AOB} + \text{mes } \widehat{BOC} = 30 + 30 = 60^\circ$.

Donc AOC est un triangle équilatéral.

c. AOC équilatéral et $OA = 6$ cm, donc $AC = 6$ cm.

3.a. En reliant les points A, D, G et K, on obtient un carré.

b. [OA] et [OD] sont des rayons du cercle (C), donc $OA = OD$.
Donc AOD est un triangle isocèle en O.

Puis $\text{mes } \widehat{AOD} = \text{mes } \widehat{AOB} + \text{mes } \widehat{BOC} + \text{mes } \widehat{COD} = 30 + 30 + 30 = 90^\circ$.

Donc AOD est un triangle rectangle isocèle en O.

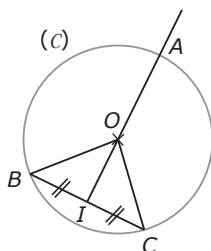
c. AOD est un triangle rectangle en O ; donc, d'après le théorème de Pythagore, on a : $AD^2 = AO^2 + OD^2$.

Or $AO = OD = 6$ cm ; ainsi $AD^2 = 72$ et $AD = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ cm.

Activités de découverte

1 Angles inscrits, angles au centre

1.



2.a. I milieu de [BC], donc I équidistant de B et C.

O centre du cercle (C), B et C appartiennent à (C), donc $OB = OC$ et O équidistant de B et C.

La médiatrice de [BC] est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment [BC], donc O et I sont des points de cette médiatrice et (OI) est bien la médiatrice de [BC].

Ensuite [OB] et [OC] sont des rayons du cercle (C), donc $OB = OC$ et OBC est un triangle isocèle en O.

Dans ce cas, la médiatrice de [BC] est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$.

b. (OI) bissectrice de $\widehat{BOC}$, donc $\text{mes } \widehat{IOC} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \times 80 = 40^\circ$.

$A \in [OI]$, donc $\text{mes } \widehat{IOA} = 180^\circ$, donc $\text{mes } \widehat{IOC} + \text{mes } \widehat{COA} = 180^\circ$, donc $\text{mes } \widehat{COA} = 180 - \text{mes } \widehat{IOC} = 140^\circ$.

De même, on a $\text{mes } \widehat{IOB} = 40^\circ$ et $\text{mes } \widehat{BOA} = 140^\circ$.

c. $[OA]$ et $[OC]$ sont des rayons de (C) , donc $OA = OC$ et AOC est un triangle isocèle en O .

Ainsi $\text{mes}\hat{O}CA = \text{mes}\hat{O}AC$ et donc $\text{mes}\hat{C}OA + 2\text{mes}\hat{O}AC = 180^\circ$,

soit $140 + 2\text{mes}\hat{O}AC = 180^\circ$, donc $\text{mes}\hat{O}AC = 20^\circ$.

d. I , O et A sont alignés donc $\text{mes}\hat{I}AC = \text{mes}\hat{O}AC = 20^\circ$.

3.a. Par la symétrie orthogonale d'axe (OI) , le symétrique de C est B , celui de A est A et celui de $\hat{C}AI$ est $\hat{BA}I$.

b. $\text{mes}\hat{C}AB = \text{mes}\hat{C}AI + \text{mes}\hat{I}AB$. D'après 3.a. $\hat{C}AI$ est le symétrique de $\hat{BA}I$, donc $\text{mes}\hat{C}AI = \text{mes}\hat{BA}I$

et d'après 2.d. $\text{mes}\hat{I}AC = 20^\circ$ donc $\text{mes}\hat{C}AB = 20 + 20 = 40^\circ$.

c. $\text{mes}\hat{B}AC = \frac{1}{2} \text{mes}\hat{B}OC$.

4.a. AIB est un triangle rectangle en I donc les deux angles $\hat{I}BA$ et $\hat{I}AB$ sont complémentaires soit $\text{mes}\hat{I}BA + \text{mes}\hat{I}AB = 90^\circ$.

Or, d'après 3.b., $\text{mes}\hat{I}AB = \text{mes}\hat{C}AI = 20^\circ$; donc $\text{mes}\hat{I}BA = 90 - 20 = 70^\circ$.

b. I milieu de $[BC]$; donc B , I et C sont alignés et $\text{mes}\hat{C}BA = \text{mes}\hat{I}BA = 70^\circ$. Ainsi $\text{mes}\hat{C}BA = \frac{1}{2} \text{mes}\hat{C}OA$.

c. De même : $\text{mes}\hat{B}CA = \frac{1}{2} \text{mes}\hat{B}OA$.

5.a.

$\text{mes}\hat{B}OC$	$\text{mes}\hat{C}OA$	$\text{mes}\hat{B}OA$
$\text{mes}\hat{B}AC$	$\text{mes}\hat{C}BA$	$\text{mes}\hat{B}CA$

$\times \frac{1}{2}$

b. « Si $\hat{B}AC$ est un angle inscrit dans un cercle de centre O , alors $\text{mes}\hat{B}AC = \frac{1}{2} \text{mes}\hat{B}OC$ ».

2 Angles qui interceptent le même arc

1. On utilise la formule « longueur réelle $\times$ échelle = longueur sur plan », en pensant à convertir en centimètre.

2.a. Chaque angle a pour mesure 18° . Les angles de tir sont les mêmes.

b. « Si des points M et N sont situés sur un même cercle et les angles $\hat{AMB}$ et $\hat{ANB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$, alors $\text{mes}\hat{AMB} = \text{mes}\hat{ANB}$. »

3 Démontrer des propriétés

Partie A : Propriété de l'angle inscrit et de l'angle au centre associé

1. Un cas particulier

a. Dans le triangle MOB , isocèle en O , $\text{mes}\hat{OMB} = \text{mes}\hat{OBM}$;

on a : $\text{mes}\hat{OMB} + \text{mes}\hat{OBM} + \text{mes}\hat{MOB} = 2\text{mes}\hat{OMB} + \text{mes}\hat{MOB} = 180^\circ$,

donc : $\text{mes}\hat{OMB} = \frac{180 - \text{mes}\hat{MOB}}{2}$.

b. Les points M , O et A sont alignés, donc les angles $\hat{MOB}$ et $\hat{AOB}$ sont supplémentaires :

$$\text{mes}\hat{AOB} = 180 - \text{mes}\hat{MOB}.$$

c. On en déduit que : $\text{mes}\hat{AMB} = \text{mes}\hat{OMB} = \frac{1}{2} \text{mes}\hat{AOB}$.

2. Le cas général

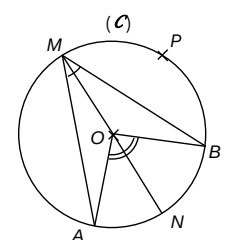
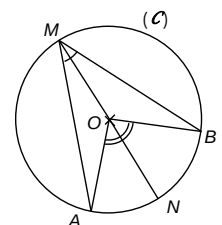
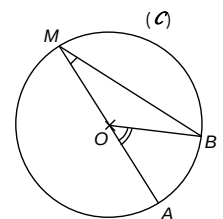
D'après ce qui précède : $\text{mes}\hat{NMB} = \frac{1}{2} \text{mes}\hat{NOB}$ et $\text{mes}\hat{NMA} = \frac{1}{2} \text{mes}\hat{NOA}$.

On en déduit que $\text{mes}\hat{AMB} = \text{mes}\hat{AMN} + \text{mes}\hat{NMB} = \frac{1}{2} (\text{mes}\hat{AON} + \text{mes}\hat{NOB}) = \frac{1}{2} \text{mes}\hat{AOB}$.

Partie B : Propriété des angles inscrits

1. $\text{mes}\hat{AMB} = \frac{1}{2} \text{mes}\hat{AOB}$ et $\text{mes}\hat{APB} = \frac{1}{2} \text{mes}\hat{AOB}$.

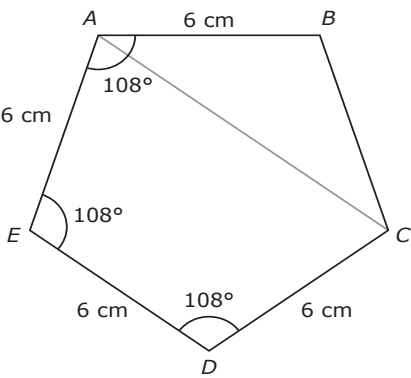
2. On en déduit que : $\text{mes}\hat{AMB} = \text{mes}\hat{APB}$.



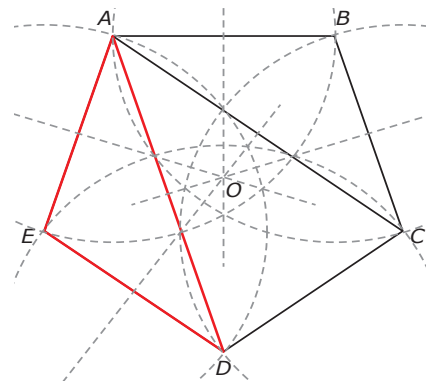
4 Un nouveau polygone régulier

Partie A : Construction d'un pentagone régulier

1.



2.a.

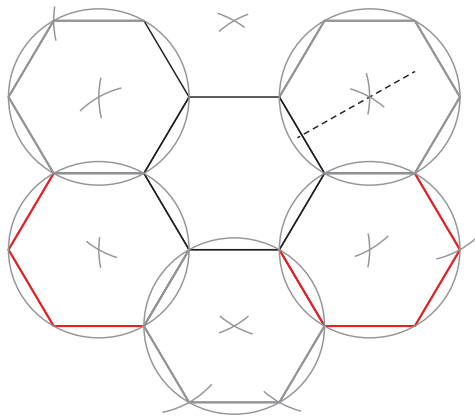


Les cercles circonscrits aux triangles ABC et ADE ont le même centre O et sont donc confondus (puisque passant par A).

b. Il ne manque que la longueur BC qui est, sur le dessin, 6 cm et la mesure de l'angle $C\hat{B}A$ qui est, sur le dessin, 108° . $ABCDE$ est donc bien un polygone régulier.
De plus, à l'aide du rapporteur, $\text{mes } A\hat{O}B = 72^\circ$, $\text{mes } B\hat{O}C = 72^\circ$, ... et $\text{mes } D\hat{O}E = 72^\circ$; tous ces angles ont la même mesure.

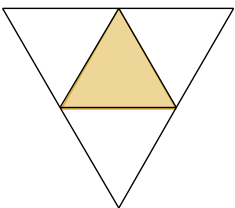
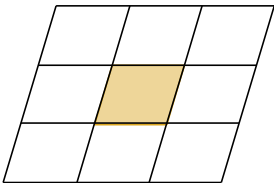
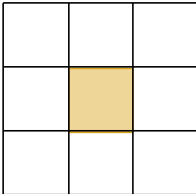
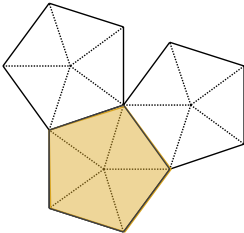
Partie B : Pavage et polygones réguliers

1.



On utilise le fait qu'un hexagone régulier est formé de six triangles équilatéraux pour obtenir le centre du cercle qui permet de construire l'hexagone régulier.

2.a.

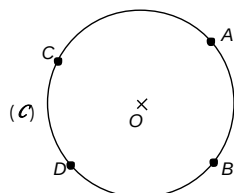
• un triangle équilatéral  On utilise le compas pour tracer les triangles	• un parallélogramme  On utilise le quadrillage pour tracer les parallélogrammes	• un carré  On utilise aussi le quadrillage pour tracer les carrés.	• un pentagone régulier  On utilise la partie A.1.
---	--	--	--

b. Seul le pentagone régulier ne permet pas de réaliser un pavage, puisque les pentagones ne recouvrent pas tout le plan.

1 Apprendre à calculer la mesure d'un angle

Exercice 1

- L'angle $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $\widehat{ACB}$;
- l'angle $\widehat{BOC}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $\widehat{BDC}$;
- l'angle $\widehat{COD}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $\widehat{CBD}$;
- l'angle $\widehat{AOD}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $\widehat{ABD}$.



Exercice 2

- a.
-
- b. L'arc tracé en vert représente le petit arc $\widehat{AD}$, qu'interceptent les angles $\widehat{ABD}$, $\widehat{AED}$, $\widehat{AHD}$, $\widehat{AFD}$ et $\widehat{ACD}$.
- c. $\widehat{BAE}$, $\widehat{BGE}$, $\widehat{BDE}$, $\widehat{BCE}$, $\widehat{BFE}$ et $\widehat{BHE}$ sont tous les angles qui interceptent l'arc $\widehat{BE}$, tracé en rouge.

Exercice 3

- a. $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit dans (C) qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$;

$$\text{donc : } \text{mes } \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOB}$$

$$\text{mes } \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \times 50 = 25^\circ.$$

- De même l'angle $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans (C) qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{BOC}$;

$$\text{donc : } \text{mes } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{BOC}$$

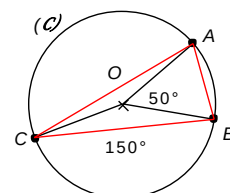
$$\text{mes } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \times 150 = 75^\circ.$$

- b. Dans un triangle, la somme des mesures de ces trois angles est égale à 180° :

$$\text{mes } \widehat{ABC} + \text{mes } \widehat{ACB} + \text{mes } \widehat{BAC} = 180$$

$$\text{mes } \widehat{ABC} + 25 + 75 = 180$$

$$\text{mes } \widehat{ABC} = 80^\circ.$$



Exercice 4

- a. L'angle $\widehat{SPR}$ est un angle inscrit dans (C) et il intercepte le même arc que l'angle $\widehat{SQR}$.

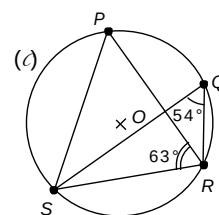
$$\text{b. } \text{mes } \widehat{SPR} = \text{mes } \widehat{SQR} = 54^\circ.$$

- c. Dans le triangle SPR ,

$$\text{mes } \widehat{SPR} + \text{mes } \widehat{PRS} + \text{mes } \widehat{RSP} = 180$$

$$\text{mes } \widehat{RSP} = 180 - 54 - 63 = 63^\circ.$$

- SPR , qui a deux angles de même mesure, est isocèle en P.



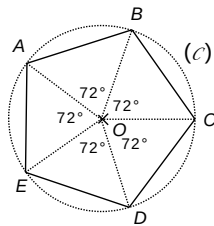
2 Apprendre à construire un polygone régulier

Exercice 5

1. et 3.

2. Si A et B sont deux sommets consécutifs d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de centre O ,

alors $\text{mes } \hat{AOB} = \frac{360}{5} = 72^\circ$.



Exercice 6

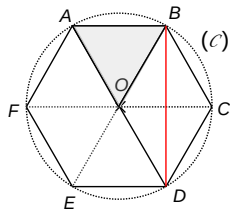
1. $OA=OB$ car $[OA]$ et $[OB]$ sont deux rayons du cercle dans lequel $ABCDEF$ est inscrit ;

de plus $\text{mes } \hat{AOB} = \frac{360}{6} = 60^\circ$;

donc le triangle AOB est équilatéral.

2. Pour démontrer que A , O et D sont alignés, on peut démontrer que $\text{mes } \hat{AOD} = 180^\circ$;

or $\text{mes } \hat{AOD} = \text{mes } \hat{AOB} + \text{mes } \hat{BOC} + \text{mes } \hat{COD}$
 $\text{mes } \hat{AOD} = 60 + 60 + 60 = 180^\circ$.



3.a. $\text{mes } \hat{BAD} = \text{mes } \hat{BAO} = 60^\circ$;

$\text{mes } \hat{ADE} = \text{mes } \hat{ODE} = 60^\circ$.

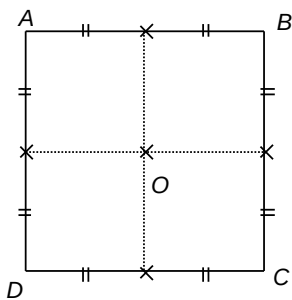
b. $\hat{BAD}$ et $\hat{ADE}$ sont des angles alternes-internes de même mesure ; donc $(AB) \parallel (DE)$.

4. $\hat{ABD}$ est un angle inscrit dans (C) qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\hat{AOD}$;

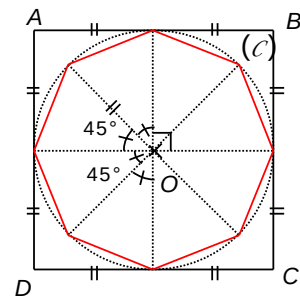
donc $\text{mes } \hat{ABD} = \frac{1}{2} \text{mes } \hat{AOD} = \frac{1}{2} \times 180 = 90^\circ$.

Exercice 7

1. a. et b.



2.



On sait que pour construire un octogone régulier, on a besoin de deux diamètres perpendiculaires d'un cercle (C) . Ici ces deux diamètres peuvent être les segments joignant les milieux de deux côtés non consécutifs du carré.

Le point d'intersection de ses deux segments (qui n'est autre que le centre du carré) est le centre O du cercle (C) passant par les milieux des 4 côtés, dans lequel sera inscrit l'octogone régulier.

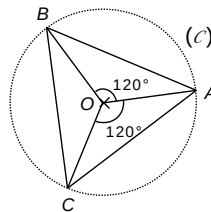
Enfin les bissectrices des angles droits formés par ces deux segments coupent le cercle tracé précédemment aux 4 autres sommets de l'octogone régulier.

Exercice 8

1. Si O est le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC équilatéral, alors : $\text{mes } \hat{AOB} = \frac{360}{3} = 120^\circ$;

de même : $\text{mes } \hat{AOB} = 120^\circ$.

2.



3. D'après le cours, on a la formule $c = \sqrt{3}R$, où c est la longueur du côté et R le rayon.

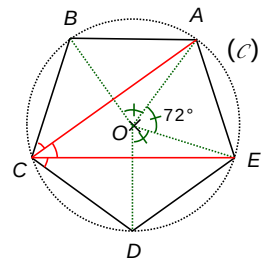
Ici $c = \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$ cm.

Exercice 9

$ABCDE$ est un pentagone régulier inscrit dans le cercle (C) de centre O .

1.a. A et E sont deux sommets consécutifs de ce pentagone régulier, donc $\text{mes } \hat{AOE} = 72^\circ$.

b. $\hat{ACE}$ est un angle inscrit dans le cercle (C) , qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\hat{AOE}$;



donc $\text{mes } \hat{ACE} = \frac{1}{2} \text{mes } \hat{AOE} = \frac{1}{2} \times 72 = 36^\circ$.

2. $\hat{ECD}$ est un angle inscrit dans le cercle (C) , qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\hat{EOD}$;

donc $\text{mes } \hat{ECD} = \frac{1}{2} \text{mes } \hat{EOD} = \frac{1}{2} \times 72 = 36^\circ$.

De même $\text{mes } \hat{BCA} = 36^\circ$.

3. $\text{mes } \hat{BCD} = \text{mes } \hat{BCA} + \text{mes } \hat{ACE} + \text{mes } \hat{ECD}$
 $= 3 \times 36 = 108^\circ$.

4. $ABCDE$ est un pentagone régulier, donc chacun de ses angles ont la même mesure : 108° .

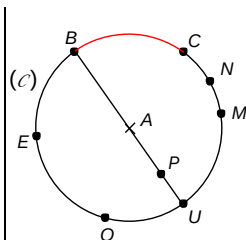
Arc et angles

Exercice 10

1.a. $\widehat{CPU}$ n'est pas un angle au centre du cercle (C) , puisque P n'est pas le centre de (C) ;

b. et c. $\widehat{NAM}$ et $\widehat{MAE}$ sont des angles au centre de (C) , puisque A est le centre de (C) ;

d. $\widehat{ANU}$ n'est pas un angle au centre du cercle (C) , puisque N n'est pas le centre de (C) .



2.a. $\widehat{CAE}$ n'est pas un angle inscrit dans le cercle (C) , puisque A n'appartient pas à (C) ;

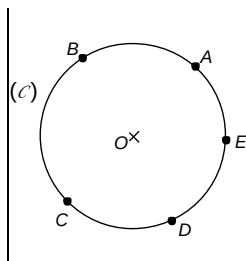
b. $\widehat{BCN}$ est un angle inscrit dans le cercle (C) , puisque les trois points B , C et N appartiennent à (C) ;

c. et d. $\widehat{BEC}$ et $\widehat{EOB}$ aussi (même justification).

3. Les angles inscrits dans le cercle (C) , interceptant l'arc $\widehat{BC}$ sont : $\widehat{BEC}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{BUC}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{BNC}$.

Exercice 11

$\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{BOE}$ et $\widehat{COE}$ sont les angles au centre qui correspondent respectivement aux angles inscrits $\widehat{BDC}$, $\widehat{CBD}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CBE}$.

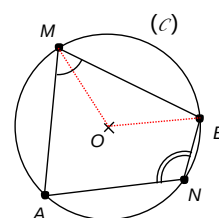


Exercice 12

• L'angle $\widehat{AMB}$ est un angle aigu, il intercepte le petit arc $\widehat{AB}$.

• L'angle $\widehat{MOB}$ est un angle au centre, il intercepte l'arc $\widehat{MB}$.

• L'angle $\widehat{BNA}$ est un angle obtus, il intercepte le grand arc $\widehat{BA}$.



Exercice 13

1. Figure a

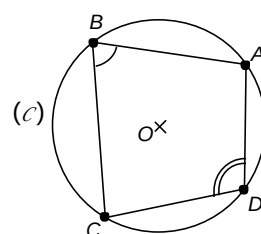
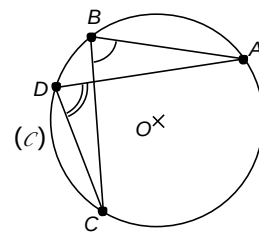


Figure b



2. Sur la figure a, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ interceptent respectivement le petit arc $\widehat{AC}$ et le grand arc $\widehat{AC}$, limités par les points A et C .

Ce n'est pas toujours le cas : sur la figure b, où D et B sont placés sur le même arc limité par les points A et C , $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ interceptent le même arc $\widehat{AC}$.

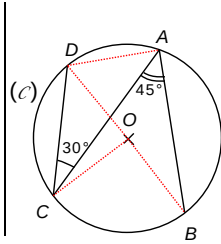
Angles inscrits – Angles au centre

Exercice 14

1. $\widehat{BOC}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $\widehat{BAC}$, inscrit dans (C) ;

$$\text{donc : } \text{mes } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{BOC} ;$$

$$\text{d'où : } \text{mes } \widehat{BOC} = 2 \times \text{mes } \widehat{BAC} = 2 \times 45 = 90^\circ.$$



2. $\widehat{DOA}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $\widehat{DCA}$, inscrit dans (C) ;

$$\text{donc : } \text{mes } \widehat{DCA} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{DOA} ;$$

$$\text{d'où : } \text{mes } \widehat{DOA} = 2 \times \text{mes } \widehat{DCA} = 2 \times 30 = 60^\circ.$$

3. $[OD]$ et $[OA]$ sont des rayons de (C) , donc ODA est un triangle isocèle en O ; de plus $\text{mes } \widehat{DOA} = 60^\circ$.
On en déduit que ODA est un triangle équilatéral, c'est-à-dire $\text{mes } \widehat{ODA} = 60^\circ$.

Exercice 15

1. $\text{mes } \widehat{BAC} = 50^\circ$.

Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$, inscrits dans (C) , interceptent le même arc ; ils ont la même mesure ;
donc : $\text{mes } \widehat{ACB} = 40^\circ$.

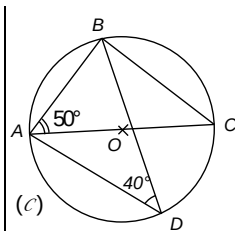
Enfin dans le triangle ABC , on a :

$$\text{mes } \widehat{ABC} = 180 - \text{mes } \widehat{BAC} - \text{mes } \widehat{ACB}$$

$$\text{mes } \widehat{ABC} = 180 - 50 - 40 = 90^\circ.$$

ABC est donc un triangle rectangle en B .

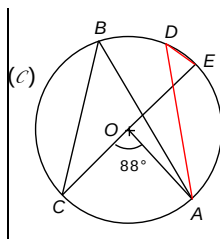
2. L'hypoténuse $[AC]$ de ce triangle, rectangle en B , étant diamètre de son cercle circonscrit, on en déduit que $[AC]$ est un diamètre de (C) .



Exercice 16

1. L'angle $\widehat{ABC}$, inscrit dans (C) , intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOC}$; donc :

$$\text{mes } \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOC} = \frac{1}{2} \times 88 = 44^\circ.$$



2. C, O et E sont alignés dans cet ordre ;

$$\text{donc : } \text{mes } \widehat{COE} = 180^\circ.$$

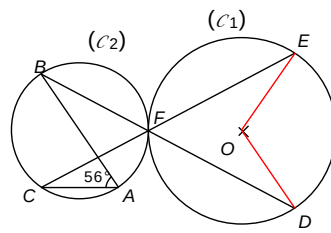
Comme $\text{mes } \widehat{COE} = \text{mes } \widehat{COA} + \text{mes } \widehat{AOE}$, on obtient :

$$\text{mes } \widehat{AOE} = 180 - 88 = 92^\circ.$$

3. L'angle $\widehat{EDA}$, inscrit dans (C) , intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{EOA}$;

$$\text{donc : } \text{mes } \widehat{EDA} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{EOA} = \frac{1}{2} \times 92 = 46^\circ.$$

Exercice 17



$\widehat{DOE}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $\widehat{DFE}$ inscrit dans (C) ; donc :

$$\text{mes } \widehat{DOE} = 2 \times \text{mes } \widehat{DFE}.$$

Ensuite les angles $\widehat{DFE}$ et $\widehat{BFC}$ sont opposés par le sommet ; donc : $\text{mes } \widehat{DFE} = \text{mes } \widehat{BFC}$.

Enfin $\widehat{BFC}$ et $\widehat{BAC}$ sont deux angles inscrits dans (C) ,

qui interceptent le même arc $\widehat{BC}$;

$$\text{donc : } \text{mes } \widehat{BFC} = \text{mes } \widehat{BAC}.$$

$$\text{Finalement : } \text{mes } \widehat{DOE} = 2 \times \text{mes } \widehat{DFE} = 2 \times \text{mes } \widehat{BFC}$$

$$\text{mes } \widehat{DOE} = 2 \times \text{mes } \widehat{BAC} = 2 \times 56 = 112^\circ.$$

Exercice 18

a. Les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ABC}$, inscrits dans (C) , interceptent le même arc ; ils ont la même mesure ;
donc :

$$\text{mes } \widehat{ABC} = \text{mes } \widehat{ADC} = 50^\circ.$$

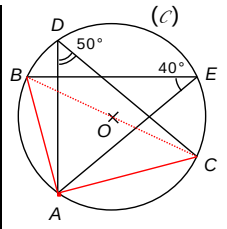
De même :

$$\text{mes } \widehat{BCA} = \text{mes } \widehat{BEA} = 40^\circ.$$

On en déduit que :

$$\text{mes } \widehat{BAC} = 180 - \text{mes } \widehat{ABC} - \text{mes } \widehat{BCA} = 90^\circ ;$$

c'est-à-dire : ABC est un triangle rectangle en A .



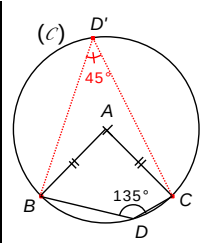
b. D est un point du petit arc $\widehat{BC}$;

si D' est un point du grand arc $\widehat{BC}$, alors les mesures des angles $\widehat{BDC}$ et $\widehat{BD'C}$, inscrits dans (C) , vérifient :

$$\text{mes } \widehat{BDC} + \text{mes } \widehat{BD'C} = 180^\circ ;$$

$$\text{donc : } \text{mes } \widehat{BD'C} = 180 - 135 = 45^\circ.$$

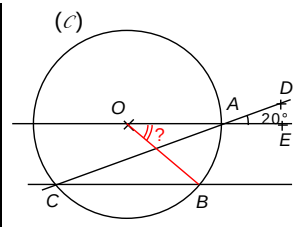
$\widehat{BAC}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $\widehat{BD'C}$; donc : $\text{mes } \widehat{BAC} = 2 \times \text{mes } \widehat{BD'C} = 90^\circ$;
c'est-à-dire : ABC est un triangle rectangle en A .



Exercice 19

a. Les angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{CAO}$, opposés par le sommet, ont la même mesure.

Les angles $\widehat{CAO}$ et $\widehat{ACB}$, qui forment des angles alternes-internes avec $(OA) \parallel (CB)$, ont aussi la même mesure.

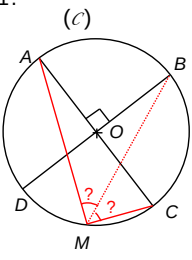


$$\text{Finalement : } \text{mes } \widehat{DAE} = \text{mes } \widehat{CAO} = \text{mes } \widehat{ACB} = 20^\circ.$$

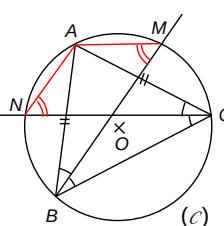
b. $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle $\widehat{ACB}$, inscrit dans (C) ;

$$\text{donc : } \text{mes } \widehat{AOB} = 2 \times \text{mes } \widehat{ACB} = 40^\circ.$$

Exercice 20

1. 
2. L'angle $\widehat{AMB}$, inscrit dans (C) , intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$; donc :
- $$\text{mes } \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \times 90 = 45^\circ.$$
- De même :
- $$\text{mes } \widehat{BMC} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \times 90 = 45^\circ.$$
- On en déduit que la demi-droite $[MB)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMC}$.

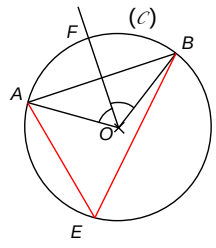
Exercice 21

1. et 2. 
3. Les angles $\widehat{ANC}$ et $\widehat{BMC}$, inscrits dans (C) , interceptent le même arc $\widehat{AC}$;
- donc : $\text{mes } \widehat{ANC} = \text{mes } \widehat{BMC}$.
- De même : $\text{mes } \widehat{AMB} = \text{mes } \widehat{ACB}$.

De plus, ABC est un triangle isocèle en A ;
donc : $\text{mes } \widehat{ABC} = \text{mes } \widehat{ACB}$.

Finalement : $\text{mes } \widehat{ANC} = \text{mes } \widehat{AMB}$.

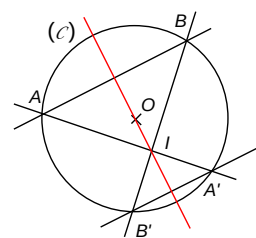
Exercice 22

1. 
2. $[OF)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$; donc :
- $$\text{mes } \widehat{AOF} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOB}.$$
- L'angle $\widehat{AEB}$, inscrit dans (C) , intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$; donc :
- $$\text{mes } \widehat{AEB} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOB}.$$

Finalement : $\text{mes } \widehat{AOF} = \text{mes } \widehat{AEB}$.

Exercice 23

1. Tout d'abord $I \in (AA')$,
donc : $\text{mes } \widehat{BAI} = \text{mes } \widehat{BAA'}$.
- De même, $\text{mes } \widehat{ABI} = \text{mes } \widehat{ABB'}$.
- Ensuite $\widehat{BAA'}$ et $\widehat{BB'A'}$, angles inscrits dans (C) , interceptent le même arc ;
- donc : $\text{mes } \widehat{BAA'} = \text{mes } \widehat{BB'A'}$.



Enfin $\widehat{ABB'}$ et $\widehat{BB'A'}$ sont des angles alternes-internes tels que $(AB) \parallel (A'B')$; donc : $\text{mes } \widehat{ABB'} = \text{mes } \widehat{BB'A'}$.

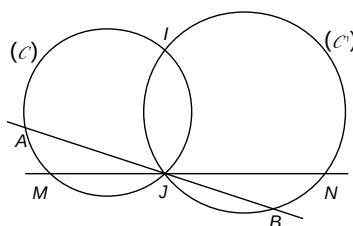
Finalement :

$$\text{mes } \widehat{BAI} = \text{mes } \widehat{ABB'} = \text{mes } \widehat{BB'A'} = \text{mes } \widehat{BAA'} = \text{mes } \widehat{BAI}.$$

Le triangle ABI , qui a deux angles ($\widehat{A}$ et $\widehat{B}$) de même mesure, est isocèle en I .

2. $[OA)$ et $[OB)$ sont deux rayons de (C) , donc le triangle OAB est isocèle en O et O est équidistant de A et B ;
d'après le 1., I est aussi équidistant de A et B ;
on en déduit que (OI) est la médiatrice du segment $[AB]$ et (OI) est perpendiculaire à $[AB]$.

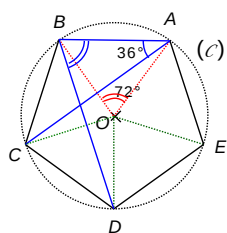
Exercice 24



1. $\widehat{AIM}$ et $\widehat{A'JM}$ sont deux angles inscrits dans (C) qui interceptent l'arc $\widehat{AM}$.
2. $\widehat{NIB}$ et $\widehat{NJB}$ sont deux angles inscrits dans (C') qui interceptent l'arc $\widehat{NB}$.
3. $\text{mes } \widehat{AIB} = \text{mes } \widehat{AIM} + \text{mes } \widehat{MIB}$
 $\text{mes } \widehat{AIB} = \text{mes } \widehat{A'JM} + \text{mes } \widehat{MIB}$ (d'après 1.)
 $\text{mes } \widehat{AIB} = \text{mes } \widehat{B'JN} + \text{mes } \widehat{MIB}$ (puisque $\widehat{A'JM}$ et $\widehat{B'JN}$ sont opposés par le sommet)
 $\text{mes } \widehat{AIB} = \text{mes } \widehat{NIB} + \text{mes } \widehat{MIB}$ (d'après 2.)
 $\text{mes } \widehat{AIB} = \text{mes } \widehat{MIB} + \text{mes } \widehat{BIN} = \text{mes } \widehat{MIN}.$

Polygones réguliers

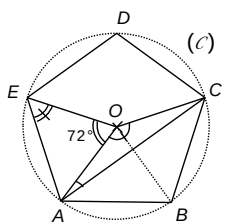
Exercice 25



$ABCDE$ est un pentagone régulier de centre O .
(C) est son cercle circonscrit.

1. Faux. L'angle au centre $\widehat{AOB}$ mesure 72° .
2. Faux. L'angle $\widehat{BAC}$, inscrit dans (C), intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{BOC}$; donc :
 $\text{mes } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{BOC} = 36^\circ$.
3. Faux. L'angle $\widehat{DBA}$, inscrit dans (C), intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{DOA}$; donc :
 $\text{mes } \widehat{DBA} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{DOA} = 72^\circ$.

Exercice 26

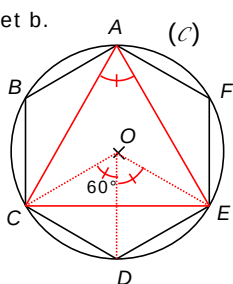


$ABCDE$ est un pentagone régulier de centre O .
(C) est son cercle circonscrit.

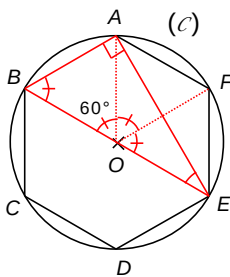
- $\text{mes } \widehat{AOE} = 72^\circ$;
- OEA est un triangle isocèle en O ,
donc : $\text{mes } \widehat{OEA} = \frac{1}{2} \times (180 - 72)$
 $= 54^\circ$;
- $\text{mes } \widehat{AOC} = 2 \times 72 = 144^\circ$;
- OAC est un triangle isocèle en O ,
donc : $\text{mes } \widehat{OAC} = \frac{1}{2} \times (180 - 144)$
 $= 18^\circ$.

Exercice 27

1.a. et b.



Question 2



Question 3

Tous les angles au centre ($\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOF}$ et $\widehat{FOA}$) de l'hexagone régulier $ABCDEF$ ont la même mesure : $\frac{360}{6} = 60^\circ$.

2. • L'angle $\widehat{CAE}$, inscrit dans (C), intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{COE}$; donc :

$$\text{mes } \widehat{CAE} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{COE} = \frac{1}{2} (\text{mes } \widehat{COD} + \text{mes } \widehat{DOE}) = 60^\circ.$$

- De même : $\text{mes } \widehat{ACE} = \text{mes } \widehat{AEC} = 60^\circ$.
- Finalement ACE est un triangle équilatéral.

3.a. $[BE]$ est un diamètre de (C) et $A \in (C)$; donc le triangle ABE est rectangle en A .

b. • L'angle $\widehat{AEB}$, inscrit dans (C), intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$;

$$\text{donc : } \text{mes } \widehat{AEB} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOB} = 30^\circ ;$$

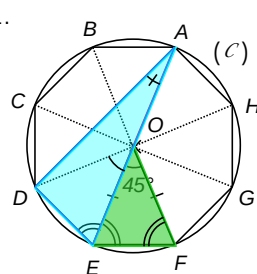
• l'angle $\widehat{ABE}$, inscrit dans (C), intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$;

$$\text{donc : } \text{mes } \widehat{ABE} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOE} = 60^\circ.$$

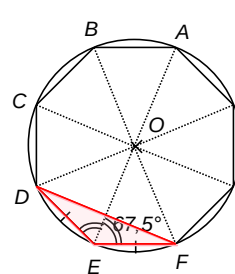
$$(\text{autre méthode : } \text{mes } \widehat{ABE} = 180 - \text{mes } \widehat{BAE} - \text{mes } \widehat{AEB} \\ = 180 - 90 - 30 = 60^\circ.)$$

Exercice 28

1.



Questions 2 et 4



Question 3

Tous les angles au centre ($\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOF}$, $\widehat{FOG}$, $\widehat{GOH}$ et $\widehat{HOA}$) de l'octogone régulier $ABCDEFGH$ ont la même mesure : $\frac{360}{8} = 45^\circ$.

2.a. $[OE]$ et $[OF]$ sont des rayons de (C), donc $OE = OF$ et OEF est un triangle isocèle en O .

$$\text{b. } \text{mes } \widehat{OEF} = \frac{1}{2} \times (180 - 45) = 67,5^\circ.$$

3.a. $ABCDEFGH$ est un octogone régulier, donc $DE = EF$ et FED est un triangle isocèle en E .

$$\text{b. } \text{mes } \widehat{DEF} = \text{mes } \widehat{DEO} + \text{mes } \widehat{OEF} = 67,5 + 67,5 = 135^\circ ;$$

$$\text{on en déduit que : } \text{mes } \widehat{EDF} = \frac{1}{2} \times (180 - 135) = 22,5^\circ.$$

4.a. $[AE]$ est un diamètre de (C) et $D \in (C)$; donc le triangle ADE est rectangle en D .

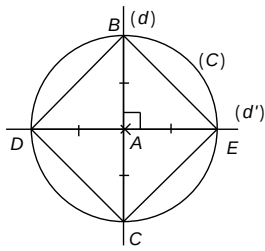
b. L'angle $\widehat{DAE}$, inscrit dans (C), intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{DOE}$;

$$\text{donc : } \text{mes } \widehat{DAE} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{DOE} = 22,5^\circ ;$$

$$\text{on en déduit que : } \text{mes } \widehat{DEA} = 180 - \text{mes } \widehat{ADE} - \text{mes } \widehat{DAE} \\ = 180 - 90 - 22,5 = 67,5^\circ.$$

Exercice 29

1. et 2.



3. Dans le triangle ABD , rectangle en A , on a d'après le théorème de Pythagore :

$$BD^2 = BA^2 + AD^2 = 4^2 + 4^2 = 32.$$

$$\text{Donc : } BD = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

De même, on a :

$$DC = CE = EB = 4\sqrt{2}.$$

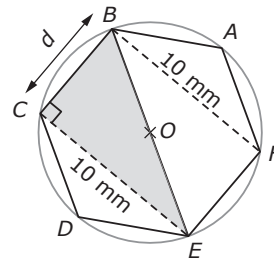
Ensuite le cercle (C) , circonscrit au triangle BDC , est centré au milieu A du côté $[BC]$; donc BDC est rectangle en D et $\text{mes } \hat{BDC} = 90^\circ$.

De même, on a : $\text{mes } \hat{DCE} = \text{mes } \hat{CEB} = \text{mes } \hat{EBA} = 90^\circ$.

Finalement $BDCE$ est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur et ses quatre angles de même mesure ; c'est un polygone régulier.

Exercice 30

Représentation de la tête de l'écrou.



$[BE]$ est un diamètre du cercle (C) dans lequel est inscrit l'hexagone régulier $ABCDEF$; donc BCE est un triangle rectangle en C .

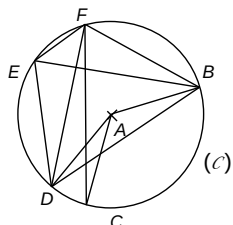
L'angle $\hat{CEB}$, inscrit dans (C) , intercepte le même arc que l'angle au centre $\hat{COB}$, qui mesure 60° ;

$$\text{donc : } \text{mes } \hat{CEB} = \frac{1}{2} \text{mes } \hat{COB} = 30^\circ.$$

$$\text{Or } \tan \hat{CEB} = \frac{CB}{CE}, \text{ donc } CB = CE \times \tan 30^\circ ;$$

$$\text{c'est-à-dire : } d = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 5,8 \text{ mm.}$$

Exercice 31 Connaître le vocabulaire



1. L'angle $\widehat{CAB}$ est un angle *au centre* qui intercepte l'arc $\widehat{BC}$.

De plus, $\text{mes } \widehat{CFB} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{CAB}$.

2. L'angle $\widehat{BED}$ est un angle *inscrit* qui intercepte l'arc $\widehat{BD}$.

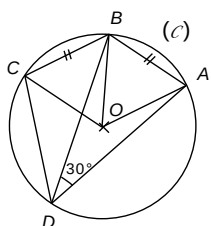
De plus, $\text{mes } \widehat{BED} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{BAD}$
soit $\text{mes } \widehat{BAD} = 2 \times \text{mes } \widehat{BED}$.

3. L'angle $\widehat{EDB}$ intercepte l'arc $\widehat{EB}$.

L'angle $\widehat{EFB}$ intercepte le grand arc $\widehat{EB}$.

Donc, $\text{mes } \widehat{EDB} + \text{mes } \widehat{EFB} = 180^\circ$.

Exercice 32 Une copie à corriger



• L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre de (C) , qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{ADB}$; donc :
 $\text{mes } \widehat{AOB} = 2 \times \text{mes } \widehat{ADB} = 60^\circ$.

• Le triangle AOB , isocèle en O (puisque $OA=OB$), a son angle principal $\widehat{AOB}$ qui mesure 60° ; ce triangle est donc équilatéral et $OA=OB=AB$.

Par construction $OB=OC=BC$; donc OBC est aussi un triangle équilatéral.

Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ ont donc même mesure : 60° .

• L'angle $\widehat{BDC}$, inscrit dans (C) , intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{BOC}$; donc :

$$\text{mes } \widehat{BDC} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{BOC} = 30^\circ.$$

Finalement $\text{mes } \widehat{ADC} = \text{mes } \widehat{ADB} + \text{mes } \widehat{BDC} = 60^\circ$;

les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{ADC}$ ont donc même mesure.

Exercice 33 Les angles dans les polygones réguliers

Polygone régulier	mes $\widehat{AOB}$	mes $\widehat{ABC}$
Triangle équilatéral	120°	60°
Carré	90°	90°
Pentagone	72°	108°
Hexagone	60°	120°
Octogone	45°	135°

2. Pour chaque polygone, $\text{mes } \widehat{AOB} + \text{mes } \widehat{ABC} = 180^\circ$.

Exercice 34 Deux constructions pour un même polygone

Constructions d'un pentagone régulier :

☐ Je trace un cercle (C) de centre O .

☐ Je place un point A sur (C) et un point B sur (C) tels que $\text{mes } \widehat{AOB} = 72^\circ$.

☐ Je place le point C

sur (C) tel que :

$\text{mes } \widehat{BOC} = 72^\circ$.

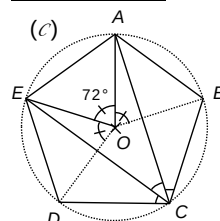
☐ À l'aide du compas, je place

le point C sur (C) tel que :

$AB = BC$.

☐ Je recommence deux fois l'étape 3 afin d'obtenir le pentagone régulier $ABCDE$.

Exercice 35 Rédiger une démonstration



• $ABCDE$ étant un pentagone régulier, $\text{mes } \widehat{AOE} = 72^\circ$.

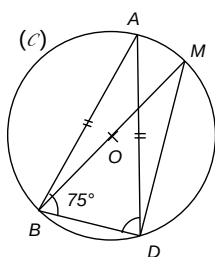
• De plus, l'angle au centre $\widehat{AOE}$ intercepte le même arc $\widehat{AE}$ que l'angle inscrit $\widehat{ACE}$; donc :
 $\text{mes } \widehat{ACE} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOE} = 36^\circ$.

• En tenant le même raisonnement, je démontre que :
 $\text{mes } \widehat{BCA} = 36^\circ$; puis que $\text{mes } \widehat{ECD} = 36^\circ$.

• Ainsi, $\text{mes } \widehat{BCD} = \text{mes } \widehat{BCA} + \text{mes } \widehat{ACE} + \text{mes } \widehat{ECD} = 108^\circ$.

• Enfin, par définition d'un polygone régulier, chaque angle mesure aussi 108° .

Exercice 36 Triangle isocèle et cercle



ABD isocèle en A
 $\text{mes } \hat{A}BD = 75^\circ$
 O centre du cercle (C)
 circonscrit à ABD
 $[BM]$ diamètre de (C)
 $BM = 11,2 \text{ cm}$

1. BMD est un triangle rectangle en D ; en effet, ce triangle est inscrit dans le cercle (C) , de centre O le milieu de $[BM]$.

2.a. ABD isocèle en A , donc :
 $\text{mes } \hat{B}AD = 180 - 2 \times \text{mes } \hat{A}BD$
 $\text{mes } \hat{B}AD = 30^\circ$.

b. Les angles $\hat{B}AD$ et $\hat{B}MD$, inscrits dans (C) , interceptent le même arc ; donc :
 $\text{mes } \hat{B}MD = \text{mes } \hat{B}AD = 30^\circ$.

3. Dans le triangle BMD , rectangle en D , on a :

$$\cos \hat{B}MD = \frac{MD}{MB}$$

$$MD = MB \times \cos 30^\circ$$

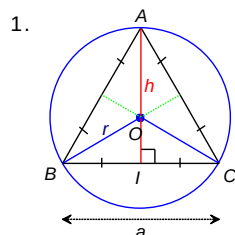
$$MD = 11,2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 9,7 \text{ cm.}$$

$$\sin \hat{B}MD = \frac{BD}{MB}$$

$$BD = MB \times \sin 30^\circ$$

$$BD = 11,2 \times \frac{1}{2} = 5,6 \text{ cm.}$$

Exercice 37 Pyramide à base hexagonale

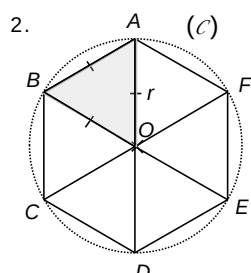


ABC est un triangle équilatéral :

- de côté a ;
- de hauteur h ;
- dont le cercle circonscrit, centré en O , a pour rayon r ;
- d'aire $\mathcal{A}$.

c. Dans un triangle équilatéral, le centre du cercle circonscrit est aussi le centre de gravité.

$$\text{On en déduit que : } r = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = a \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



a. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AIC , rectangle en I , on a :
 $AC^2 = AI^2 + IC^2$.

Or, dans un triangle équilatéral, une hauteur est aussi une médiane ; donc I est le milieu de $[BC]$.

On en déduit que :

$$h = AI = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{b. } \mathcal{A} = \frac{BC \times AI}{2} = \frac{a^2 \times \sqrt{3}}{4}.$$

Un hexagone régulier peut être découpé en six triangles équilatéraux superposables, dont les côtés sont égaux au rayon du cercle circonscrit à ce polygone régulier, c'est-à-dire ici r .

D'après 1. l'aire de chaque triangle équilatéral est $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$.

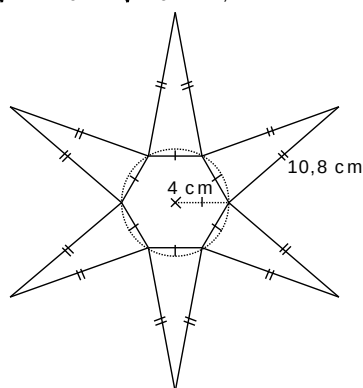
On en déduit que l'aire d'un hexagone régulier, inscrit dans un cercle de rayon r , est : $6 \times \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$.

3. Une pyramide régulière de 10 cm de hauteur, dont la base est un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 4 cm, a pour faces latérales 6 triangles isocèles superposables.

Chacun de ces triangles isocèles a :

- pour base un côté de l'hexagone : 4 cm
- pour autres côtés deux segments de même longueur :

$$\sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116} \approx 10,8 \text{ cm.}$$



Pour réaliser un patron de cette pyramide :

- construire, sur un cercle de rayon 4 cm, un hexagone régulier (de 4 cm de côté) ;
- construire, à l'extérieur de cet hexagone, les 6 faces latérales qui sont des triangles isocèles de base 4 cm et de côtés 10,8 cm.

4. On sait que le volume d'une pyramide régulière est donnée par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{B}h, \text{ où } h \text{ est la hauteur et } \mathcal{B} \text{ l'aire de la base ;}$$

$$\text{ici } V = \frac{\frac{3 \times 4^2 \times \sqrt{3}}{2} \times 10}{3} = 80\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

Exercice 38 Trigonométrie

1. Un losange est un quadrilatère dont les 4 côtés ont la même longueur.

a. B et D étant équidistants de A et C , la droite (BD) est la médiatrice du segment $[AC]$.

b. De même (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$.

c. On en déduit que les segments $[AC]$ et $[BD]$, diagonales du losange, sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

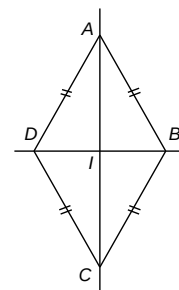
2. I est le point d'intersection de $[AC]$ et $[BD]$.

a. Dans IBC , rectangle en I , on a :

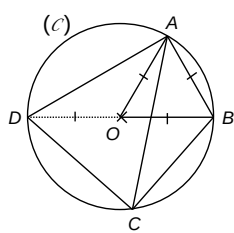
$$\cos \hat{IBC} = \frac{IB}{BC} \text{ et } \cos \hat{ICB} = \frac{IC}{BC}.$$

b. Pour que $\text{mes } \hat{IBC} = \text{mes } \hat{ICB}$, il faut que leurs cosinus soient égaux ; c'est-à-dire $IB = IC$. Dans ce cas $BD = 2IB = 2IC = AC$ et $ABCD$ est un carré.

3. Un losange non carré n'est pas un polygone régulier.



Exercice 39 Dans un cercle



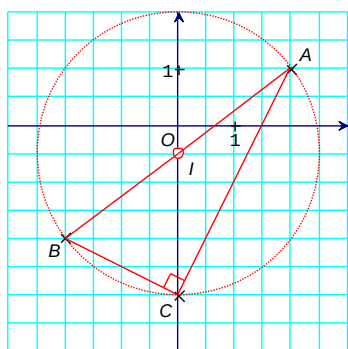
- OAB est un triangle équilatéral, donc $\text{mes } \widehat{OAB} = \text{mes } \widehat{AOB} = 60^\circ$.
- $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit dans (C) , qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$, donc $\text{mes } \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOB} = 30^\circ$.

- ADB est un triangle dont le sommet A appartient au cercle de diamètre $[BD]$, donc $\text{mes } \widehat{BAD} = 90^\circ$.
- $\widehat{AOD}$ est un angle au centre de (C) , qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{ABD}$, donc $\text{mes } \widehat{AOD} = 120^\circ$.

Angle	$\widehat{OAB}$	$\widehat{ACB}$	$\widehat{BAD}$	$\widehat{AOD}$
Mesure en degrés	60	30	90	120

Exercice 40 Dans un repère

1.



Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on donne les points :

- $A(2; 1)$;
 $B(-2; -2)$;
 $C(0; -3)$.

2. $AB = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{25} = 5$;

$AC = \sqrt{(0 - 2)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;

$BC = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (-3 - (-2))^2} = \sqrt{5}$.

3. $AB^2 = AC^2 + BC^2$ donc, d'après la propriété de Pythagore, ABC est un triangle rectangle en C .

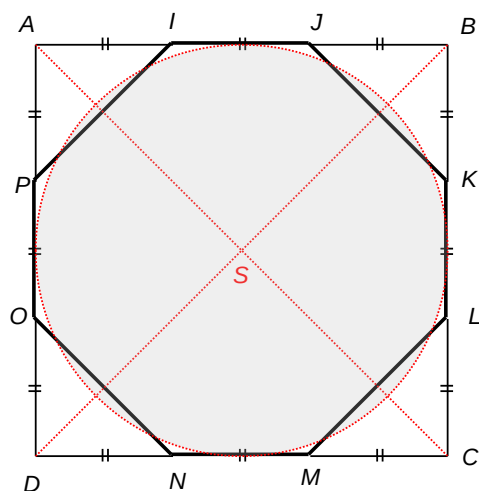
4.a. Le milieu du segment $[AB]$ est $I(0; -\frac{1}{2})$.

c. $\cos \widehat{BAC} = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,894$; donc $\text{mes } \widehat{BAC} \approx 27^\circ$.

d. L'angle au centre associé à $\widehat{BAC}$ est $\widehat{BOC}$;
 $\text{mes } \widehat{BOC} = 2 \times \text{mes } \widehat{BAC} \approx 54^\circ$.

Exercice 41 Quadrature du cercle

1.



2.a. $JK = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

- b. $IJKLMNOP$ n'est pas un octogone régulier ; en effet, $[IJ]$ et $[JK]$ sont deux côtés de cet octogone, dont les longueurs ($IJ=3$ et $JK=3\sqrt{2}$) ne sont pas égales.
- c. L'aire de l'octogone est l'aire du carré à qui on soustrait l'aire des quatre triangles rectangles (des coins). Ces quatre triangles rectangles sont superposables donc leurs aires sont identiques.

$\mathcal{A}_{BJK} = \frac{BJ \times BK}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = 4,5 \text{ cm}^2$.

$\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$.

Finalement $\mathcal{A}_{IJKLMNOP} = 81 - 4 \times 4,5 = 63 \text{ cm}^2$.

3.a. Voir figure ci-dessus.

b. L'aire du disque, de centre S et de diamètre 9 cm, est :

$\mathcal{A} = \pi \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 \approx 63,6 \text{ cm}^2$;

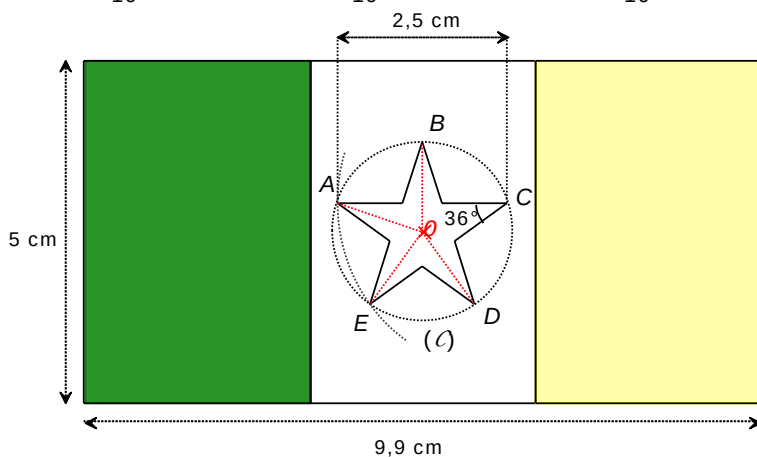
elle est supérieure à celle de l'octogone.

Activités d'intégration

Exercice 42 Le drapeau du Cameroun

Les dimensions de I , L et AC , à l'échelle $\frac{1}{10}$ sont :

$$I = 50 \times \frac{1}{10} = 5 \text{ cm} ; L = 99 \times \frac{1}{10} = 9,9 \text{ cm} ; AC = 25 \times \frac{1}{10} = 2,5 \text{ cm}.$$



2. Après avoir tracé un segment $[AC]$ horizontal et le segment $[CE]$ tel que $CE = CA = 2,5 \text{ cm}$ et $\text{mes } \hat{ACE} = 36^\circ$, on utilise les médiatrices de $[AC]$ et $[CE]$ pour trouver le centre O du cercle (C) circonscrit au triangle ACE .

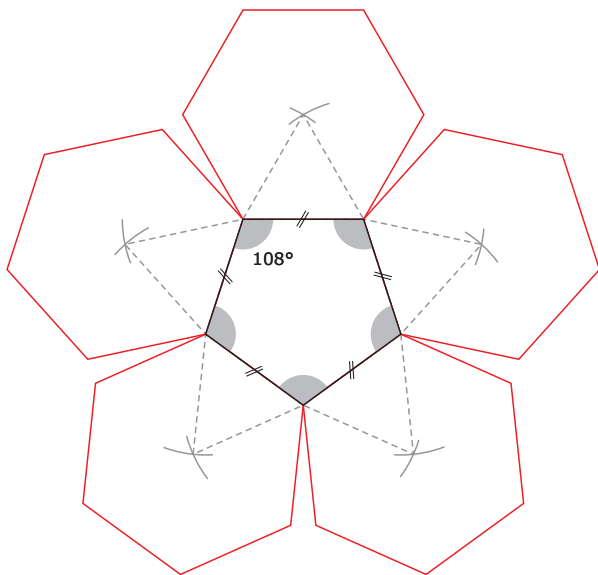
3. $\hat{AOE}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\hat{ACE}$; ils interceptent le même arc et $\text{mes } \hat{AOE} = 2 \times \text{mes } \hat{ACE} = 72^\circ$.

4.a. B est le point qui appartient à (C) tel que $\text{mes } \hat{AOB} = 72^\circ$; D est le point qui appartient à (C) tel que $\text{mes } \hat{EOD} = 72^\circ$.

b. Pour l'étoile, on relie un sommet du pentagone $ABCDE$ et non pas le suivant mais celui d'après. Pour le rectangle le centre du pentagone doit être confondu avec celui du rectangle. Les bandes ont pour longueur 3,3 cm.

Exercice 43 Le ballon de foot

1.



2. • Pour le pentagone :

- choix de la longueur du côté : 2 cm ;
- angle 108° .

• Pour les hexagones :

- le rayon du cercle est celui du côté dont on trace un triangle équilatéral puis l'hexagone correspondant ;
- le centre s'obtient à l'aide d'un triangle équilatéral.

Exercice 44 Position d'un cargo

D'après « la boussole » :

- $\text{mes } \hat{ADB} = 58 - 34 = 24^\circ$; donc le commandant voit $[AB]$ sous un angle de 24° .
- $\text{mes } \hat{BDC} = 34 - 12 = 22^\circ$; donc le commandant voit $[BC]$ sous un angle de 22° .

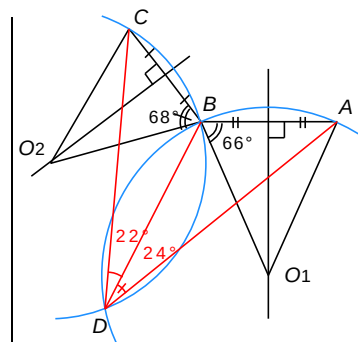
2. • $\hat{ADB}$ peut être considéré comme un angle inscrit dans un cercle de centre O_1 ; alors $\text{mes } \hat{AO_1B} = 2 \times \text{mes } \hat{ADB} = 48^\circ$.

• $\hat{BDC}$ peut être considéré comme un angle inscrit dans un cercle de centre O_2 ; alors $\text{mes } \hat{BO_2C} = 2 \times \text{mes } \hat{BDC} = 44^\circ$.

3. • Après avoir placé les points A , B et C , on trace les médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$, puisque O_1 est équidistant de A et B et O_2 est équidistant de B et C .

• AO_1B triangle isocèle en O_1 et $\text{mes } \hat{AO_1B} = 48^\circ$, donc $\text{mes } \hat{ABO_1} = \frac{1}{2} (180 - 48) = 66^\circ$.

• BO_2C triangle isocèle en O_2 et $\text{mes } \hat{BO_2C} = 44^\circ$, donc $\text{mes } \hat{CBO_2} = \frac{1}{2} (180 - 44) = 68^\circ$.



4. Le cargo est en D , le second point d'intersection du cercle (C_1) , centré en O_1 et passant par B , et du cercle (C_2) , centré en O_2 et passant par B .

6 Applications du plan

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Rappels sur les symétrie [1 p 72]	17, 22	31, 32	41
1	Rappels sur les translations [1 p 72]	16, 17, 22	31, 32	41
2	Utiliser une composée de symétries orthogonales [3 p 72]	18, 19		
3	Construire l'image de points et de figures simples par une rotation [5 p 73, 6 p 73, 2 p 76]	20, 21, 22, 23, 24, 25, 26	31, 32	39, 41, 42
4	Construire l'image de points et de figures simples par une homothétie [7 p 74, 3 p 77]	28, 29, 30	32, 36	43
	Utiliser une rotation pour construire un polygone régulier [6 P 73]	24, 25, 26	34	
	Apprendre à utiliser les propriétés des applications [1 p 75]	24, 25, 26, 27, 30	33, 35	37, 38, 40

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

Le marabout

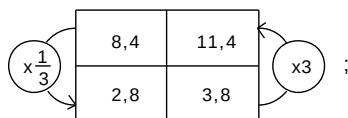
1.a.

8,4	11,4
2,8	3,8

$$\frac{8,4}{2,8} = \frac{84}{28} = 3 \text{ et } \frac{11,4}{3,8} = \frac{114}{38} = 3.$$

Comme $\frac{8,4}{2,8} = \frac{11,4}{3,8}$, ce tableau est un tableau de proportionnalité.

De plus :



donc l'un de ses coefficients est $\frac{1}{3}$, l'autre est 3.

b. Après le développement (et avant sa publication dans le journal), le corps du marabout avait une aire de 2,5 cm².

Or, dans le journal, on utilise pour les dimensions a et b de ce corps le même coefficient de proportionnalité que pour la photographie, qui se transforme donc en $a \times \frac{1}{3}$ et $b \times \frac{1}{3}$.

On en déduit que l'aire du corps de ce marabout, dans la photographie publiée du journal est :

$$a \times \frac{1}{3} \times b \times \frac{1}{3} = a \times b \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2,5 \times \frac{1}{9} \approx 0,28 \text{ cm}^2.$$

2.a. Comme en 1.b, en passant au poster les dimensions du rectangle de la photographie seront multipliées chacune par 12 ; donc l'aire sera multipliée par 12².

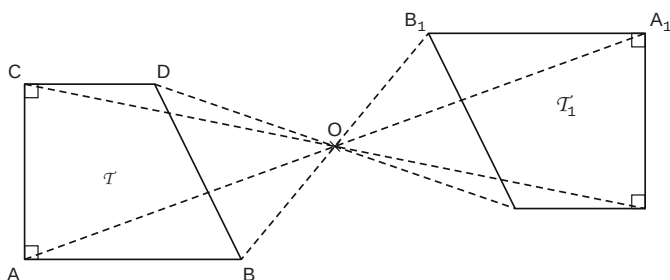
Ainsi l'aire de ce poster est $(8,4 \times 11,4) \times 12^2 = 13\,789 \text{ cm}^2$.

b. L'angle sur le poster mesure aussi 110°.

1 Retour sur la symétrie centrale, la translation

(amélioration de la figure 2)

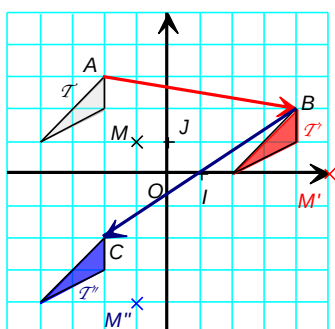
1.a.



b. ABA_1B_1 est un parallélogramme.

Comme A_1 et B_1 sont les images de A et B par la symétrie de centre O , O est le milieu de $[AA_1]$ et $[BB_1]$; donc le quadrilatère ABA_1B_1 , dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.

2.



3. Si T' est l'image de T par la translation de vecteur $\vec{AB}$,
si T'' est l'image de T' par la translation de vecteur $\vec{BC}$,
alors on passe de T à T'' par la translation de vecteur $\vec{AC}$.

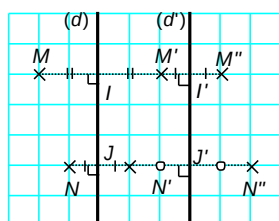
4. a. M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{AB}$, donc $ABM'M$ est un parallélogramme ; de même $BCM''M'$ est un parallélogramme.
b. $ABM'M$ est un parallélogramme, donc $AM = BM'$ et $(AM) \parallel (BM')$.
De même avec $BCM''M'$: $BM' = CM''$ et $(BM') \parallel (CM'')$.
Ainsi $AM = CM''$ et $(AM) \parallel (CM'')$, donc $ACM''M$ est un parallélogramme.

c. On en déduit que $\vec{MM''} = \vec{AC}$; donc M'' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{AC}$.

2 Successions de symétries orthogonales

Partie A : Avec des axes parallèles : $(d) \parallel (d')$.

1. a. b.



2.a. M' symétrique de M par rapport à (d) donc $(MM') \perp (d)$.
De plus $(d) \parallel (d')$, donc : $(MM') \perp (d')$.
 M'' symétrique de M' par rapport à d' , donc : $(M'M'') \perp (d')$.

b. On a deux droites, (MM') et $(M'M'')$, perpendiculaires à une même droite (d') et qui passent toutes les deux par M' ; donc $(MM') = (M'M'')$; c'est-à-dire : M, M' et M'' sont alignés et $(MM'') \perp (d')$.

c. De même on démontre que N, N' et N'' sont alignés et $(NN'') \perp (d')$.
Comme (MM'') et (NN'') sont perpendiculaires à (d') , on en déduit que $(MM'') \parallel (NN'')$.

3.a. I et I' sont les points d'intersection de (MM') avec (d) et (d') ;
 J et J' sont les points d'intersection de (NN') avec (d) et (d') (voir figure ci-dessus).

b. $I \in (d)$ donc $IM = IM'$ et, de même, $I' \in (d')$ donc $I'M' = I'M''$.
Puis M, M' et M'' sont 3 points alignés ; ils sont donc aussi alignés avec I et I' .
Ainsi $MM'' = MI + IM' + M'I' + I'M'' = 2IM' + 2M'I' = 2(IM' + M'I') = 2IJ'$.
De même on démontre que $JN = JN', J'N' = J'N''$ et $NN'' = 2JJ'$.

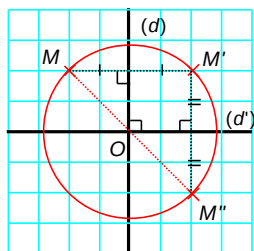
c. $(d) \parallel (d')$ donc $(IJ) \parallel (I'J')$.
Puis $(MM'') = (IJ')$ donc, d'après 2.b, $(IJ') \perp (d')$ soit $(IJ') \perp (I'J')$.
De même $(NN'') = (JJ')$ et, d'après 2.c, $(JJ') \perp (I'J')$.
Finalement : $(IJ') \perp (I'J')$ et $(IJ') \perp (IJ)$, puis $(JJ') \perp (I'J')$ et $(JJ') \perp (IJ)$; donc $I'I'J'J$ est un rectangle.
Comme $I'I'J'J$ est un rectangle, alors $I'I' = JJ'$. Ainsi (d'après 3.b) $MM'' = 2I'I' = 2JJ' = NN''$.

d. $MM''NN''$, quadrilatère dont les côtés $[MM'']$ et $[NN'']$ sont de même longueur (3.c) et parallèles (2.c), est un parallélogramme. On en déduit que $\vec{MM''} = \vec{NN''} = 2\vec{I'I'} = 2\vec{JJ'}$.

Partie B : Avec des axes perpendiculaires : $(d) \perp (d')$

(amélioration de la figure)

1. a. b.



2. a. M' symétrique de M par rapport à (d) , donc (d) est la médiatrice de $[MM']$. Comme $O \in (d)$, O est équidistant de M et M' : $OM = OM'$.
De même : $OM' = OM''$.

On en déduit que M, M' et M'' appartiennent à un cercle de centre O ; c'est-à-dire que O est le centre du cercle circonscrit au triangle $MM'M''$.

b. D'après la symétrie orthogonale $(M'M'') \perp (d')$. Or $(d) \perp (d')$, donc $(M'M'') \parallel (d)$. D'après la symétrie orthogonale $(MM') \perp (d)$. Or $(d) \parallel (M'M'')$ donc $(MM') \perp (M'M'')$. $MM'M''$ est donc un triangle rectangle en M' .

c. On sait que, dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est aussi le milieu de l'hypoténuse ; donc O est milieu de $[MM'']$.

On en déduit que M'' est l'image de M par la symétrie centrale de centre O .

3 Mouvement de rotation

Partie A : Avec une aiguille

1.a. E ; b. I ; c. A .

2.a. F ; b. J ; c. C .

Partie B : Avec deux aiguilles

1.a. Les points d'arrivée sont respectivement E et F .

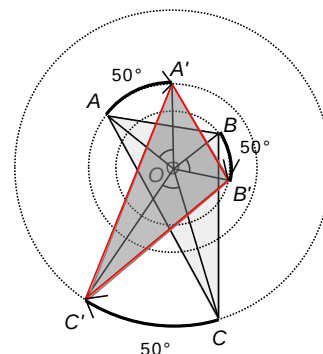
b. $BC = EF$.

2.a. Les points d'arrivée sont respectivement G et H .

b. $BC = GH$.

Partie C : Sans aiguille

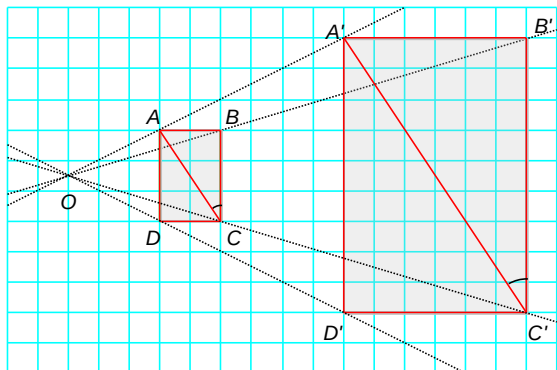
1.



2. $AB = A'B'$; $AC = A'C'$; $BC = B'C'$.

4 Homothétie

1.a.



b. Les quatre droites sont concourantes en O .

c. • $\frac{A'B'}{AB} = \frac{6}{2} = 3$; $\frac{A'D'}{AD} = \frac{9}{3} = 3$.

• D'après le théorème de Pythagore :

$A'C' = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117}$; $AC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

donc : $\frac{A'C'}{AC} = \frac{\sqrt{117}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{117}{13}} = \sqrt{9} = 3$.

• D'après le quadrillage : $(A'B') \parallel (AB)$;

donc, d'après la propriété de Thalès, on a aussi :

$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = 3$.

Finalement, le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité.	$A'B'$	$A'D'$	$A'C'$	OA'	OB'
	AB	AD	AC	OA	OB

2.a. $\mathcal{A}_{ABCD} = 6$ et $\mathcal{A}_{A'B'C'D'} = 54$.

b. $\mathcal{A}_{A'B'C'D'} = 3^2 \times \mathcal{A}_{ABCD}$

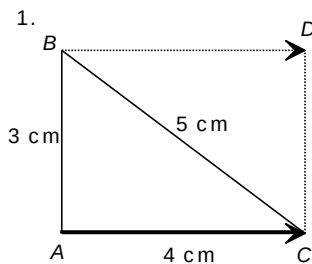
3.a. $\text{mes } \hat{ACB} \approx 34^\circ$ mes $\hat{A'C'B'} \approx 34^\circ$

b. Les mesures de ces deux angles sont égales.

1 Apprendre à utiliser les propriétés des translations et des symétries

Exercice 1

(exercice sans solution)

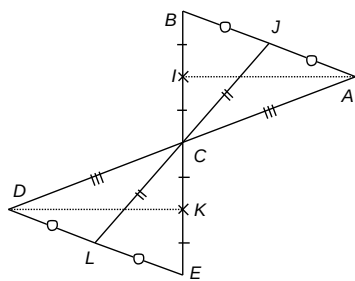


- 1.
- 2.a. D image de B par la translation de vecteur $\vec{AC}$, donc $ACDB$ est un parallélogramme.
- b. Le triangle ABC est rectangle en A car :
 $BC^2 = 5^2 = 25$,
 $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$,
donc : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- c. Le parallélogramme $ACDB$, qui a un angle droit, est un rectangle.

Exercice 2

(exercice sans solution)

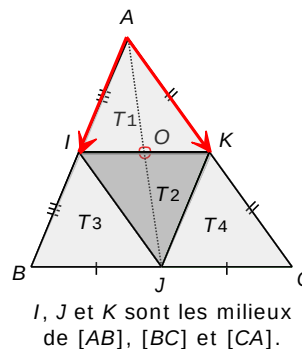
- 1.a. Le triangle ABC , isocèle en A , est tel que : $BC = 5$ cm,
 $AB = AC = 7$ cm.
- b. I milieu de $[BC]$,
 J milieu de $[AB]$.
- c. D, E, K et L sont les symétriques (par rapport à C) de A, B, I et J .



- 2.a. D et E symétriques de A et B par rapport à C , donc : $DE = AB = 7$ cm.
- b. Périmètre du triangle CDE :
 $CD + DE + EC = 7 + 7 + 5 = 19$ cm.
- c. D et E sont symétriques de A et B par rapport à C ; le quadrilatère $ABDE$, dont les diagonales se coupent en leur milieu C , est donc un parallélogramme ; en particulier : $(DE) \parallel (AB)$.
- d. K, E et C sont les symétriques de I, B et C par rapport à C ; de plus I milieu de $[CB]$; donc K est le milieu de $[CE]$.
- 3.a. Dans le triangle ABC , isocèle en A , I est le milieu de $[BC]$; donc : $(AI) \perp (BC)$.
- b. D, K, E et C symétriques de A, I, B et C par rapport à C ; donc : $(DK) \perp (EC)$; de plus C, E et K sont alignés ; donc : $(DK) \perp (CK)$.

Exercice 3

(exercice sans solution)



I, J et K sont les milieux de $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

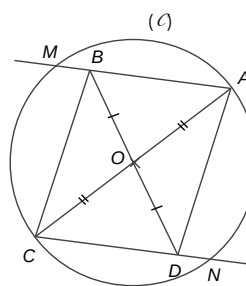
1. • T_1 a pour image T_3 dans la translation de vecteur $\vec{AI}$.
- T_1 a pour image T_4 dans la translation de vecteur $\vec{AK}$.
- 2.a. On en déduit que les triangles T_1, T_3 et T_4 ont la même aire $\mathcal{A}$.

Comme le quadrilatère $AJKI$, dont les côtés opposés sont parallèles, est un parallélogramme pour lequel le point O , intersection des diagonales, est centre de symétrie, les triangles T_1 et T_2 ont aussi la même aire $\mathcal{A}$.

- b. Finalement l'aire du triangle ABC est égale à $4\mathcal{A}$.

Exercice 4

(ajouter la figure, quelques erreurs)

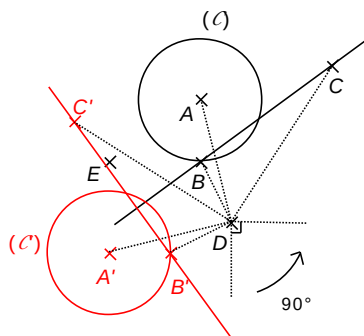


- 1.a. $[AC]$ est un diamètre du cercle (C) de centre O , donc O est le milieu de $[AC]$. Or $[AC]$ est une diagonale du parallélogramme $ABCD$, donc O est aussi le milieu de $[BD]$. Finalement, C et D sont les symétriques de A et B par rapport à O ; l'image de la droite (AB) , par la symétrie de centre O , est donc la droite (CD) .
- b. (C) est un cercle de centre O ; donc son image, par la symétrie de centre O , est lui-même.
- c. M est le point d'intersection de (AB) et de (C) ; donc son image, par la symétrie de centre O , est le point d'intersection N de (CD) et de (C) .
2. N est l'image de M par la symétrie de centre O ; donc O est le milieu de $[MN]$ et, comme O est le milieu de $[AC]$, le quadrilatère $AMCN$ est un parallélogramme.

2 Apprendre à construire l'image d'une figure par une rotation

(Exercices 5, 6, 7 et 8 modifiés
reprise totale des solutions)

Exercice 5



Dans la rotation, dont le centre est D , la mesure de l'angle est égale à 90° et le sens est indiqué par la flèche :

- l'image de A est A' ;
- l'image du cercle (C) est le cercle (C') ;
- l'image de la droite (BC) est la droite $(B'C')$, où B' et C' sont les images respectives de B et C .

Exercice 6

De même que l'exercice 5 en changeant de centre et d'angle.

Exercice 7

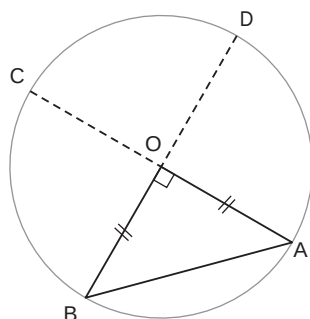
Comme l'exercice 5

Exercice 8

Comme l'exercice 5

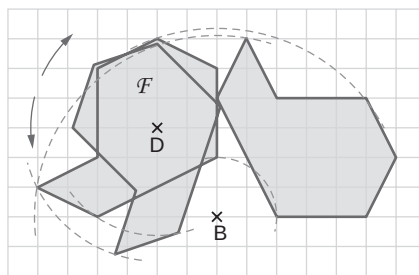
Exercice 9

1. 2.



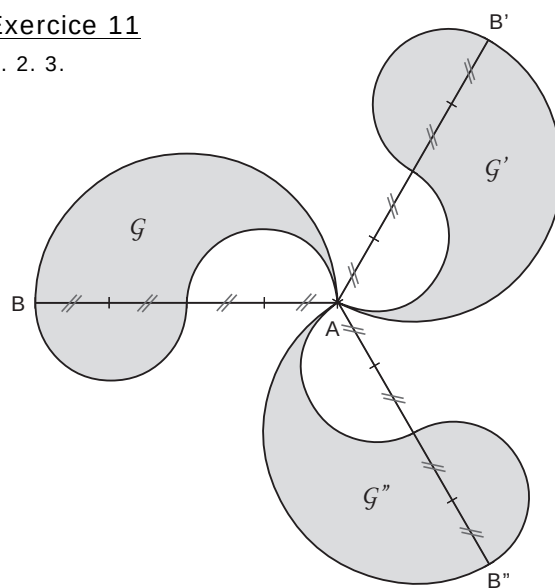
3. $ABCD$ est un quadrilatère inscrit dans un cercle et l'angle au centre de ce quadrilatère est de 90° donc $ABCD$ est un polygone régulier et plus particulièrement un carré.

Exercice 10



Exercice 11

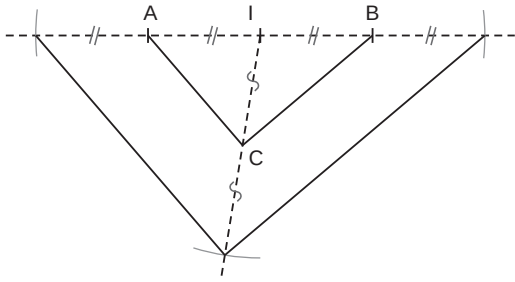
1. 2. 3.



4. Pour transformer G' en G'' on peut utiliser une rotation de centre A d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre ou une rotation de centre A d'angle 300° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

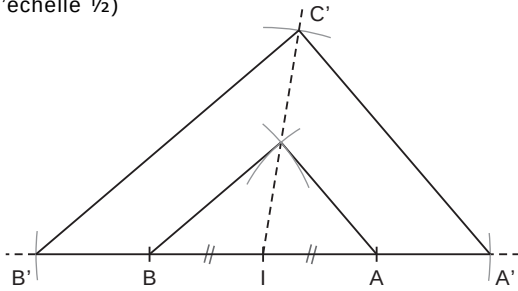
3 Apprendre à utiliser une homothétie pour agrandir ou réduire

Exercice 12



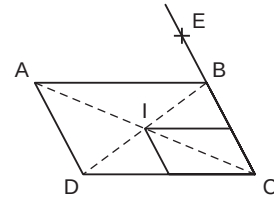
Exercice 13

(à l'échelle $\frac{1}{2}$)



1. a. b.

2.



Exercice 15

1.a. Le point B'' .

b. Le segment $[A''D'']$.

c. $OA \approx 1,6$ cm, $OA'' \approx 5,9$ cm ;

donc le rapport de cette homothétie est $\frac{OA''}{OA} \approx 3,7$.

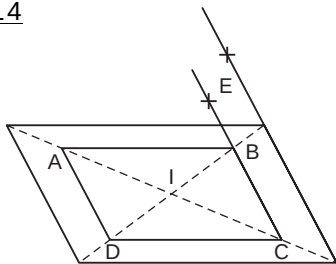
2.a. Le point B' .

b. Le segment $[A'D']$.

c. $OA \approx 1,6$ cm, $OA' \approx 3,2$ cm ;

donc le rapport est $\frac{OA'}{OA} \approx 2$.

Exercice 14

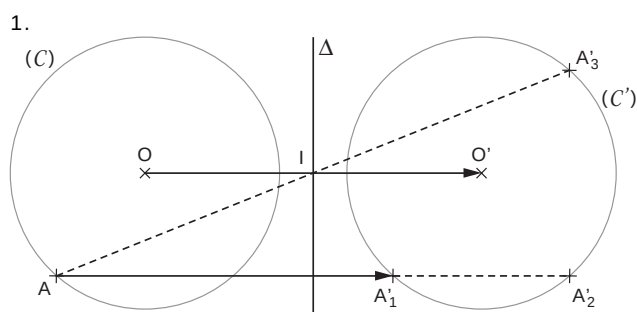


Symétries – Translations

Exercice 16

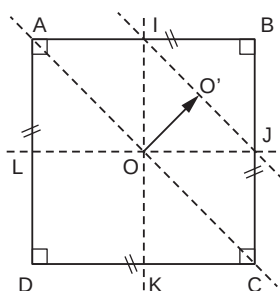
- D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
- D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
- I a pour image D par la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$.
- B a pour image C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
- I est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{IC}$.

Exercice 17



2. La translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.
3. La symétrie d'axe (Δ) , la médiatrice de $[OO']$.
4. La symétrie de centre I , le milieu de $[OO']$.
5. A_1 est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$, A_2 celle de A par la symétrie d'axe (Δ) et A_3 celle de A par la symétrie de centre I .

Exercice 18



1. I et J sont les milieux de $[BA]$ et $[BC]$ deux côtés du triangle ABC donc $(IJ) \parallel (AC)$.
Or la succession de deux symétries orthogonales d'axes parallèles correspond à la translation de vecteur $2\overrightarrow{OI}$ soit $\overrightarrow{OB}$.

O	D	L	K
B	O	I	J

a pour image

2. $[AC]$ et $[BD]$ sont les diagonales d'un carré, donc $(AC) \perp (BD)$.
Or la succession de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires correspond à la symétrie de centre O , le point d'intersection de (AC) et (BD) .

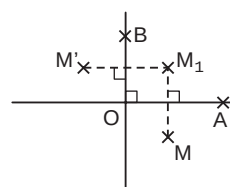
Ainsi

O	A	B	C	D
O	C	D	A	B

a pour image

Exercice 19

1. 2. a. b.



3. • Par la symétrie d'axe (OA) , le segment $[OM]$ a pour image $[OM_1]$ donc $OM = OM_1$.
Par la symétrie d'axe (OB) , le segment $[OM_1]$ a pour image $[OM']$ donc $OM' = OM_1$.
Ainsi $OM = OM_1 = OM'$.

• De plus :

$$\text{mes } \widehat{MOM'} = \text{mes } \widehat{MOA} + \text{mes } \widehat{AOM_1} + \text{mes } \widehat{M_1OB} + \text{mes } \widehat{BOM'}$$

$$\text{mes } \widehat{MOM'} = 2\text{mes } \widehat{AOM_1} + 2\text{mes } \widehat{M_1OB}$$

$$\text{mes } \widehat{MOM'} = 2(\text{mes } \widehat{AOM_1} + \text{mes } \widehat{M_1OB}) = 2\text{mes } \widehat{AOB} = 180^\circ.$$

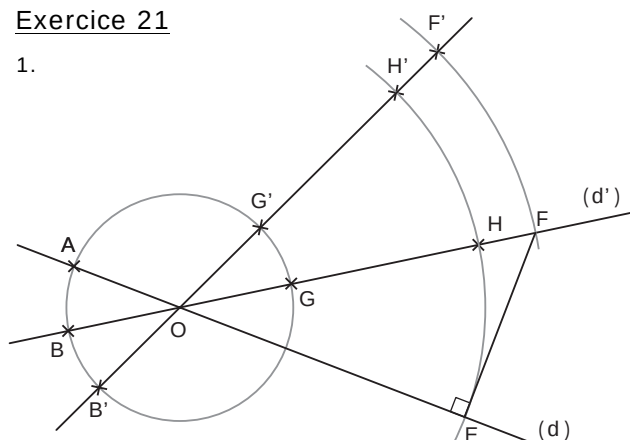
Rotation

Exercice 20

- Non.
- Oui, le centre : le départ de fanions. Le sens de rotation : le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- Non.
- Oui, le centre : l'intersection des segments. Le sens de rotation : le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- Oui, le centre : le départ de fanions. Le sens de rotation : le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- Non.
- Non.
- Oui, le centre : le départ de fanions. Le sens de rotation : le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- Non.
- Non.

Exercice 21

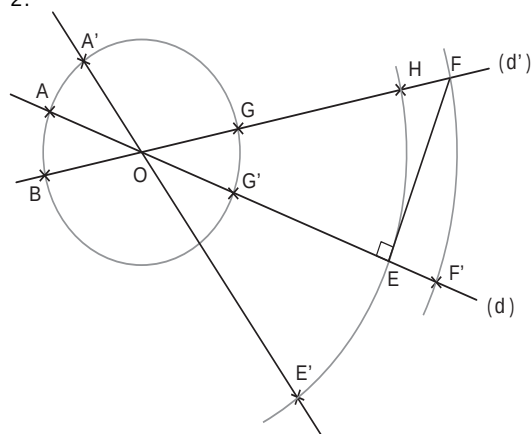
1.



A	B	E	F	G	H
B	B'	H	F'	G'	H'

a pour image

2.



A	B	E	F	G	H
A'	A	E'	F'	G'	E

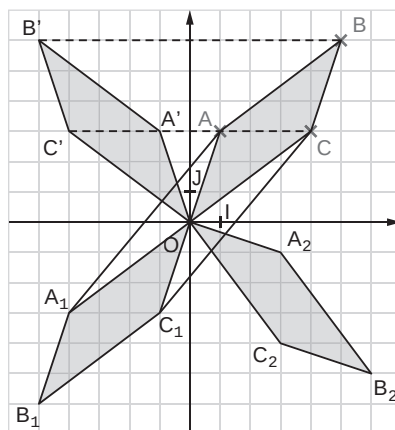
a pour image

Exercice 22

- $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, ici $\vec{AB} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 6 - 3 \end{pmatrix}$
Ainsi $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\vec{OC} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

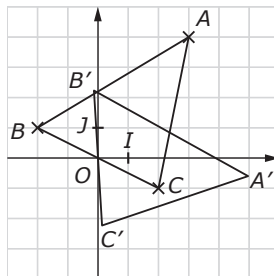
- $\vec{AB}$ et $\vec{OC}$, qui ont les mêmes coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, sont des vecteurs égaux ;
donc $ABCO$ (ou $OABC$) est un parallélogramme.

2. a.



Exercice 23

1.



2.

$$\frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Ainsi O est bien le milieu de [BC].

3. Par la translation de centre O précédente

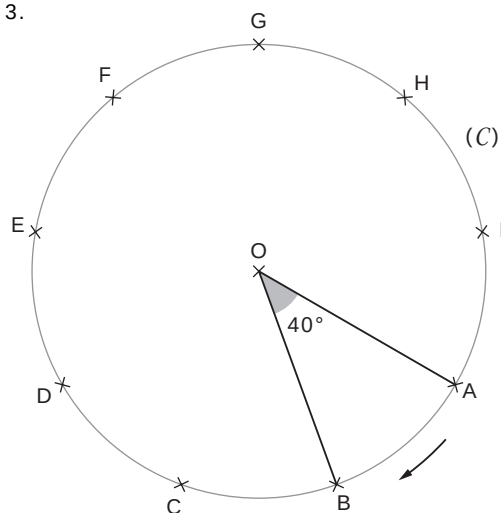
O	B	C	[BC]
O	B'	C'	[CD]

a pour image

De plus on sait que l'image d'un milieu par une rotation est un milieu donc comme O est le milieu de [BC], O est le milieu de [B'C'].

Exercice 24

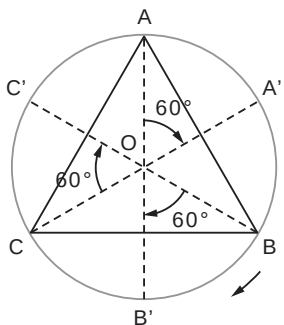
1. 2. 3.



4.a. On peut construire 7 points de cette façon.
 b. À chaque étape l'image d'un segment d'extrémité deux points consécutifs est le segment suivant par la rotation donc les deux segments ont la même longueur et en répétant ce raisonnement les neuf côtés ont la même longueur.
 Ensuite chaque point est l'image du précédent par la rotation de centre O donc tous ces points sur le cercle (C) .
 Ainsi les neuf côtés de ce polygone ont la même longueur et ce polygone est inscrit dans un cercle donc c'est un polygone régulier.
 On l'appelle ennéagone.

Exercice 25

1. 2.

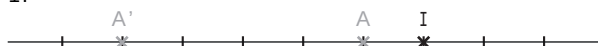


3. O est le point d'intersection des médianes d'un triangle équilatéral donc aussi des médiatrices, O est donc le centre du cercle circonscrit du triangle ABC .
 De plus A' , B' , C' sont les images de A , B , C par la rotation de centre O .
 Ainsi les points A , B , C , A' , B' , et C' sont sur le même cercle de centre O .
 De plus O est le centre du cercle circonscrit de ABC triangle équilatéral donc $\widehat{AOB} = 120^\circ$.
 Puis A' est l'image de A par la rotation de centre O d'angle de mesure 60° donc $\widehat{AOA'} = 60^\circ$.

Homothéties

Exercice 27

1.



$IA' = 5 \times IA$ donc le rapport est 5.

2.



$IA' = \frac{1}{5} \times IA$ donc le rapport est $\frac{1}{5}$.

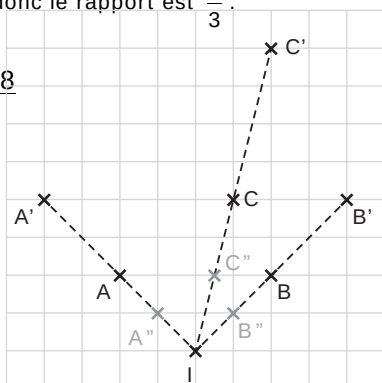
3.



$IA' = \frac{5}{3} \times IA$ donc le rapport est $\frac{5}{3}$.

Exercice 28

1. 2. 3.



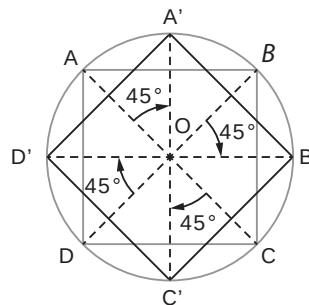
Ainsi $\widehat{A'OB} = \widehat{AOB} - \widehat{AOA'} = 60^\circ$.

De même $\widehat{B'OC} = 60^\circ$, $\widehat{C'OA} = 60^\circ$.

Finalement $AA'BB'CC'$, polygone inscrit dans un cercle et dont tous les angles au centre mesure 60° , est un hexagone régulier.

Exercice 26

1. 3.



2. $ABCD$ a pour image $BACD$ c'est-à-dire le même carré.

4. On sait que $\widehat{AOB} = 90^\circ$, et $\widehat{AOA'} = 45^\circ$ donc $\widehat{A'OB} = 45^\circ$.

De même $\widehat{B'OC} = 45^\circ$, $\widehat{C'OD} = 45^\circ$ et $\widehat{D'OA} = 45^\circ$.

Ainsi $AA'BB'CC'DD'$ est un polygone inscrit dans un cercle et chaque angle au centre mesure 45° donc c'est un octogone régulier.

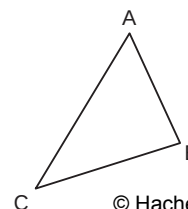
$$4. a. \overrightarrow{IA'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{IA}, \quad \overrightarrow{IB'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{IB}$$

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'I} + \overrightarrow{IB'}$$

$$\begin{aligned} b. \overrightarrow{A'B'} &= \overrightarrow{A'I} + \overrightarrow{IB'} \\ &= -\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} \\ &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{IA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{IB} \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

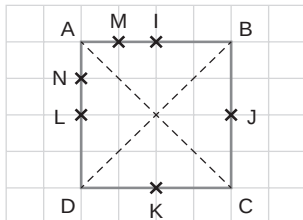
Exercice 29

1. 2.



3. Comme ABC a pour image $A'B'C'$ par une homothétie de rapport 0,6 donc
 $\mathcal{A}_{A'B'C'} = (0,6)^2 \mathcal{A}_{ABC}$.
 Donc le rapport des deux axes est 0,36.

Exercice 30



1. L'image de A est M par l'homothétie de centre I de rapport $\frac{1}{2}$.
2. L'image de A est N par l'homothétie de centre D de rapport $\frac{3}{4}$.

3. a. Par l'homothétie de centre de rapport 2

B	I	J	BIJ
B	A	C	BAC

a pour image

b. On sait que $\mathcal{A}_{BIJ} = \frac{BI \times BJ}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \text{ cm}^2$.

Puis comme BIJ a pour image ABC par une homothétie de rapport 2 on a
 $\mathcal{A}_{BAC} = 2^2 \times \mathcal{A}_{BIJ} = 2^2 \times 2 = 8 \text{ cm}^2$.

4. AMN est l'image de ABC par l'homothétie de centre A de rapport $\frac{1}{4}$.
5. AIL est l'image de AMN par l'homothétie de centre A de rapport 2.

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 31 Les éléments caractéristiques

Numéro de la figure	Transformation	Éléments caractéristiques
④	Symétrie centrale	De centre A
③	Translation	De vecteur $\overrightarrow{BB'}$
①	Symétrie axiale	D'axe la médiatrice de $[BB']$
②	Rotation	De centre A et d'angle 90°

Triangle équilatéral	3	120°
Carré	4	90°
Pentagone	5	72°
Hexagone	6	60°
Octogone	8	45°

Exercice 32 Repérer à l'œil nu

1. • MHI ;
 • MBI ;
 • LKF ;
 • MFL .

2. Le rapport est 2.

Exercice 33 Raisonnement à compléter

J'utilise la rotation de centre O qui transforme A en D .
 B a pour image E car OBE triangle équilatéral, donc
 $OB = OE$ et $\text{mes } \widehat{BOE} = 60^\circ$.
 C a pour image F car OCF triangle équilatéral, donc
 $OC = OF$ et $\text{mes } \widehat{COF} = 60^\circ$.
 Or l'image par une rotation de trois points alignés sont trois points alignés.
 Donc les points D , E et F sont alignés.

Exercice 34 Fiche résumé

- ① : Je trace un cercle (C) de centre O .
- ② : Je place sur (C) un point A : premier sommet de mon polygone.
- ③ : Je place sur (C) le point B : image de A par la rotation de centre O et de mesure indiquée dans le tableau.

Polygone régulier	Nombres de côtés	Mesure de l'angle de rotation
-------------------	------------------	-------------------------------

Exercice 35 Erreurs à corriger

1. • A' , B' et C' sont les images de A , B et C par l'homothétie de rapport $k = \frac{1}{2}$, donc :

• $A'B' = \frac{1}{2} \times AB$;

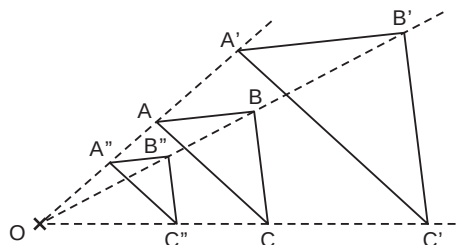
• $\mathcal{A}_{A'B'C'} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \mathcal{A}_{ABC}$;

• $\text{mes } \widehat{A'B'C'} = \text{mes } \widehat{ABC}$.

2. • L'image d'un segment par une homothétie de rapport $k > 0$ est un segment dont la longueur est multipliée par k .
 • L'image d'une figure par une homothétie de rapport $k > 0$ est une figure dont l'aire est multipliée par k^2 .
 • L'image d'un angle par une homothétie est un angle de même mesure.

Exercice 36 Bien comprendre l'importance du rapport

1. 2.



b. OAB et $OA'B'$; OBC et $OB''C''$; OAC et $OA'C'$.

Avec $k = 1,4$:

$OA = 2,4$ donc $OA' = 3,36$,

$OB = 3,7$ donc $OB' = 5,18$,

$OC = 3,8$ donc $OC' = 5,32$.

Avec $k = 0,6$

$OA'' = 1,44$, $OB'' = 2,22$ et $OC'' = 2,28$.

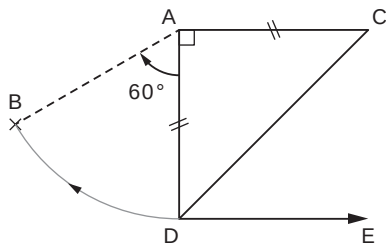
3.a. • Lorsque $0 < k < 1$, le triangle $A'B'C'$ est une réduction de ABC .

• Lorsque $k > 1$, le triangle $A'B'C'$ est un agrandissement de ABC .

Exercices d'approfondissement

Exercice 37 Construction d'un carré

1. a.



On trace l'arc de cercle de centre A partant de D tournant dans le sens des aiguilles d'une montre ; puis on place le point B sur cet arc tel que $\widehat{DAB} = 60^\circ$.

b. Comme D a pour image B par la rotation de centre A on a $AD = AB$ donc ADB est isocèle en A .

De plus $\widehat{DAB} = 60^\circ$ donc ADB est un triangle équilatéral.

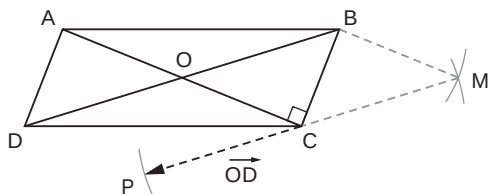
2. a. On trace un ?? représentant le vecteur $\overrightarrow{AC}$ d'origine D . On obtient E .

b. Comme D a pour image E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ on a $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$ donc $DECA$ parallélogramme.

De plus $\widehat{DAC} = 90^\circ$ donc $DECA$ est un rectangle. Enfin $CA = AD$ donc $DECA$ est un carré.

Exercice 38 Points alignés

1.



OBC triangle rectangle en C donc I milieu de $[OB]$.

2. Pour construire $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, on utilise la règle du parallélogramme.

Pour construire $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OD}$, on utilise Chasles en déplaçant un représentant de $\overrightarrow{OD}$ d'origine C .

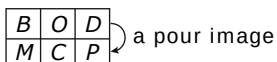
3. a. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ puisque $OBMC$ parallélogramme donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BM}$.

b. Par construction $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CP}$ donc $ODPC$ parallélogramme et donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DP}$.

Ainsi par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$, D a pour image P .

c. O centre du parallélogramme donc B , O et D sont alignés.

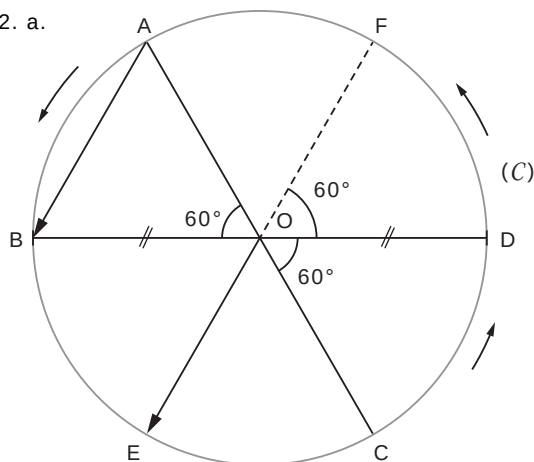
Par la translation de $\overrightarrow{OC}$:



Et trois points alignés ont pour image trois points alignés par une translation donc M , C et P sont alignés.

Exercice 39 Points cocycliques

1. 2. a.



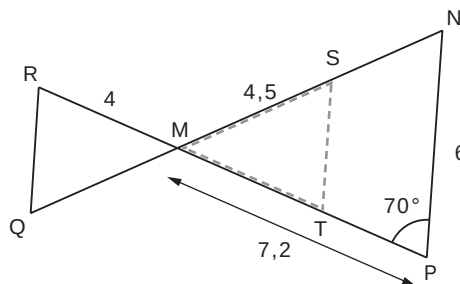
b. O milieu de $[AC]$ et par la rotation définie en 2. A , O et C ont pour images respectives B , O et D . Donc O milieu de $[BD]$. Ainsi $ABCD$ parallélogramme. De plus $[AC]$ et $[BD]$ sont des diamètres de (C) donc $AC = BD$. Ainsi $ABCD$ est un rectangle.

3. c. A , B , C , et D sont évidemment sur le cercle (C) . De plus F a pour image D par la rotation de centre O donc F est aussi sur (C) .

E translation de O par $\overrightarrow{AB}$ donc $ABFO$ parallélogramme donc $AB = OE$. Or ABO triangle équilatéral donc $AB = OE$. Or ABO triangle équilatéral donc $AB = OA$. Ainsi $OE = OA$ et donc E appartient aussi à (C) .

Exercice 40 Agrandissement d'une figure

1.



2. R , M et P et Q , M et N sont alignés dans cet ordre et $(RQ) \parallel (NP)$ donc d'après le théorème de Thalès on a MNP agrandissement de MRQ .

3. Hors programme.

P a pour image R par cette homothétie,

$$\frac{MR}{MP} = \frac{4}{7,2} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9} \text{ et comme } P \text{ et } R \text{ sont placés de part}$$

et d'autre de M on a $K = -\frac{5}{9}$.

4. b. Pour que MNP soit un agrandissement de MST il faut

$$\text{que } \frac{MN}{MS} = \frac{MP}{MT}. \text{ Or } \frac{MP}{MT} = \frac{\frac{3}{5}MP}{\frac{5}{3}MP} = \frac{1}{3} = \frac{5}{15}.$$

$$\text{Et d'après 3. } \frac{MQ}{MN} = \frac{5}{9} \text{ donc } MN = \frac{5}{9}MQ;$$

$$\text{donc } \frac{MN}{MS} = \frac{\frac{9}{5}MQ}{4,5} = \frac{9}{5}MQ \times \frac{1}{4,5} = 22,5MQ.$$

S'entraîner au BEPC

Exercice 41 Reconnaître une application

- $f(I_1) = I_2$, f est la symétrie d'axe $(O\vec{j})$.
- $f(I_3) = I_2$, f est la symétrie d'axe la droite verticale d'équation $y = 4$.
- $f(I_1) = I_5$, f est la translation de vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1-3 \\ 4-(-2) \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi la droite (AB) a pour équation cartésienne $6x + 2y + c = 0$ où c est une constante à déterminer.
Comme $A \in (AB)$, $6x_A + 2y_A + c = 0$ donc $c = -14$.
Finalement $(AB) = 6x + 2y - 14 = 0$.

Exercice 42 Propriété des rotations

1.

R(F)	R(M)	R(H)	R(k)	R(g)
L	F	K	E	M

2. $\widehat{FHG}$ est un angle inscrit dans le cercle (C) qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{FOG}$ donc

$$\text{mes } \widehat{FHG} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{FOG}.$$

Ensuite $EHFG$ est un carré de centre O donc

$$\text{mes } \widehat{FOH} = 90^\circ.$$

$$\text{Ainsi } \text{mes } \widehat{FGH} = 45^\circ.$$

Exercice 43 Propriété des homothéties

1. Les triangles ALI et ABK sont en configuration de Thalès et $(LI) \parallel (BK)$ donc, d'après Thalès, on a : $\frac{AL}{AB} = \frac{AI}{AK}$.

Soit, ici $\frac{AL}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2. h est une homothétie de centre A qui transforme L en B donc $AB = K \times AL$

soit $\frac{AB}{AL} = K$.

D'après 1. $\frac{AB}{AL} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Ainsi $K = 2$.

3. Par cette homothétie le carré $ALMN$ se transforme en $ABCD$.

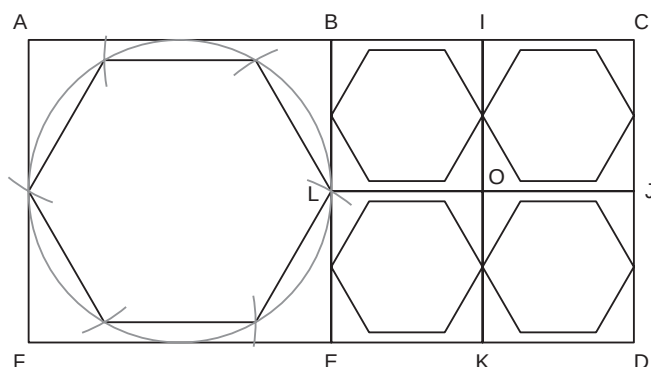
De plus l'image d'une figure par une homothétie est une figure dont l'aire est multipliée par K^2 .

Ainsi $s = K^2 \times s'$ soit $\frac{s}{s'} = K^2$ soit $\frac{s}{s'} = \frac{1}{K^2}$.

Activités d'intégration

Exercice 44 Photomaton

1. a.



b. homothétie qui transforme ABEF en B I O L

A	B	[AB]
B	I	[BI]

a pour image

Donc $IB = K \times AB$ soit $\frac{IB}{AB} = K$.

Or $AB = 8$ cm et $BI = 4$ cm donc $K = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

De même pour les trois autres homothéties.

2. a. • Pour l'hexagone de départ on trace le cercle de centre le centre du carré ABEF passant par L puis on reporte le rayon de ce cercle à partir de L.

• Pour les 2 homothéties on trace les demi-droites passant par les sommets de l'hexagone précédent et le centre de l'homothétie C ou D.

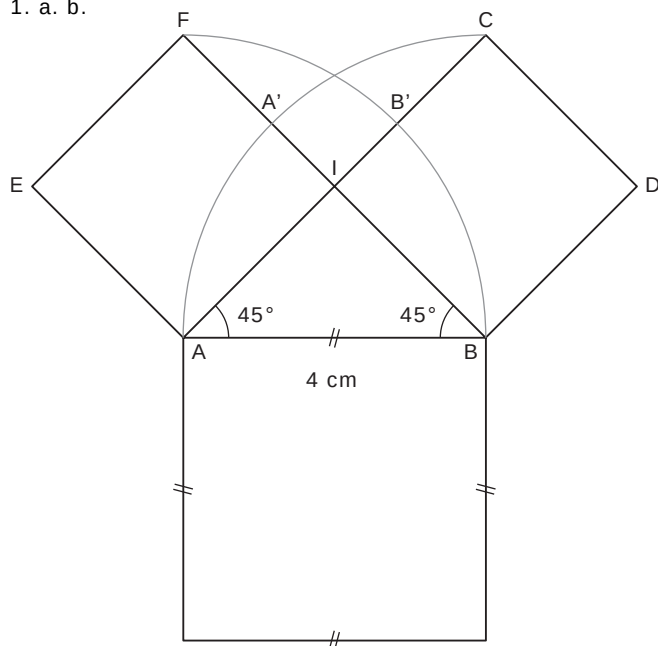
b.

c. Oui, les quatre images obtenues sont extraites de la première.

Exercice 45 Fractales

Partie A

1. a. b.



1. c. • Le premier carré a pour côté 4 cm donc son aire est de 16 cm^2 .

• Les deux autres carrés ont la longueur du côté identique. ABI est un triangle dont les angles à la base mesurent tous les deux 45° . Donc c'est un triangle rectangle isocèle.

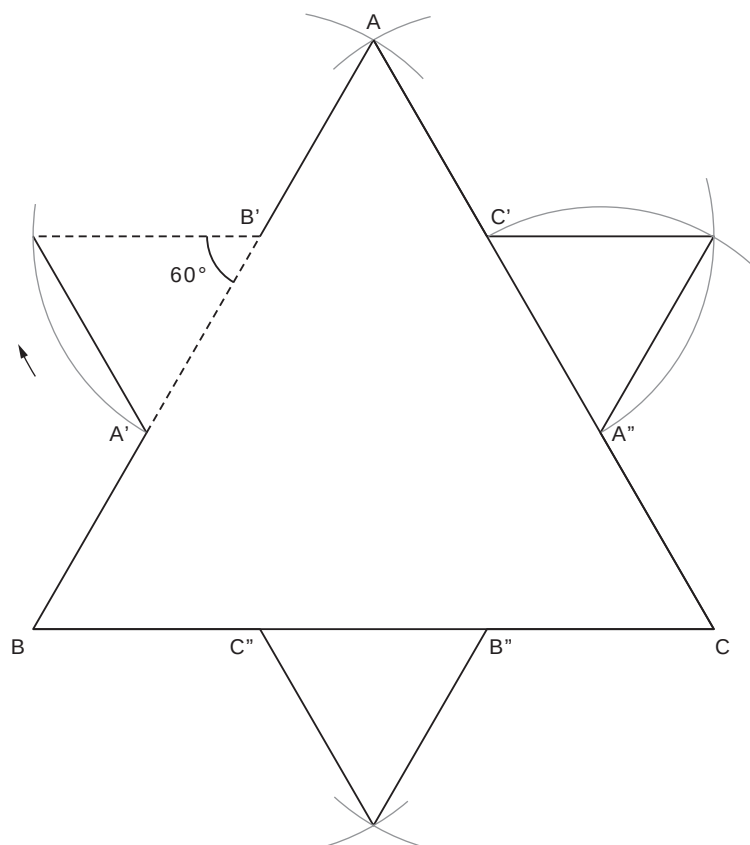
D'après Pythagore, $AB^2 = AI^2 + IB^2$ soit ici $16 = 2IA^2$ et donc $IA^2 = 8$ soit $IA = \sqrt{8}$.

Ainsi chaque nouveau carré a pour aire 8 cm^2 .

Finalement l'aire de la figure à l'étape ② est 32 cm^2 .

Partie B

1. a. b. c.



- $AB = AC = BC = 9 \text{ cm.}$
- $\frac{1}{3} \times 9 = 3$
- image par rotation de $[A'B']$

On utilise la rotation de centre A' , C'' , B'' , A'' et C' toujours d'angle de mesure 60° et dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans l'autre.

7 Pyramides et cônes de révolution

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Rappels sur vocabulaire et patrons des solides	25		47, 48, 51
2, 3	Pyramide [1 p 86]	26, 28, 30, 32, 33	41, 42, 43	46, 47, 48, 50, 53
	Cône de révolution [2 p 87]	27, 29, 31, 32	41, 42	45, 49, 51
	Apprendre à décrire et à représenter une pyramide régulière ou un cône de révolution [1 p 89]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11		
	Apprendre à calculer une longueur, une aire, un volume [2 p 90]	12, 13, 14, 15, 16, 17, 18		
4	Section de pyramide et de cône [3 p 88]	34, 35, 36, 37, 38, 39, 40	44	46, 52
	Apprendre à représenter une section et un tronc [3 p 91]	19, 20, 21, 22, 23, 24		

* Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

Recherche médicale

1.a. $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 0,8^2 \times 10 \approx 20,1 \text{ cm}^3$.

b. Une demi-éprouvette peut donc contenir environ $10,05 \text{ cm}^3$.

2.a. $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$ et $\frac{1\,000}{10,05} \approx 99,5$; la chercheuse aura besoin de 99 éprouvettes (à demi-remplies).

b. $1\,000 - 99 \times 10,05 = 5,05$; il lui restera environ $5,05 \text{ cm}^3$ de liquide.

3. Le liquide jeté va remplir un parallélépipède rectangle à base carrée de côté 20 cm et de hauteur h à déterminer. On cherche h tel que $20 \times 20 \times h = 1\,000$; c'est-à-dire $h = 2,5 \text{ cm}$. Le bac sera rempli jusqu'à une hauteur de 2,5 cm.

Activités de découverte

1 Vocabulaire et patrons des solides (rappel)

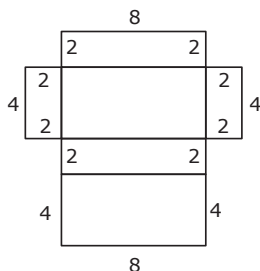
1.a. • $ABCDEFGH$ est un pavé droit, aussi appelé parallélépipède rectangle.

• $IJKNLM$ est un prisme droit à bases triangulaires.

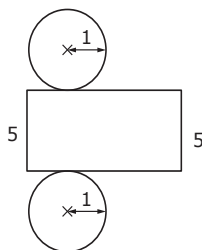
b. • $[FB]$ est une arête latérale (ou une hauteur) et $EABF$ est une face latérale de $ABCDEFGH$.

• $JKML$ est une face latérale, $[JL]$ est une arête latérale (ou une hauteur) et IJK est une base de $IJKNLM$.

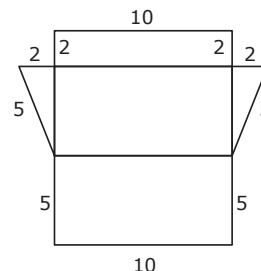
2.



Il s'agit du patron d'un pavé droit, aussi appelé parallélépipède rectangle.

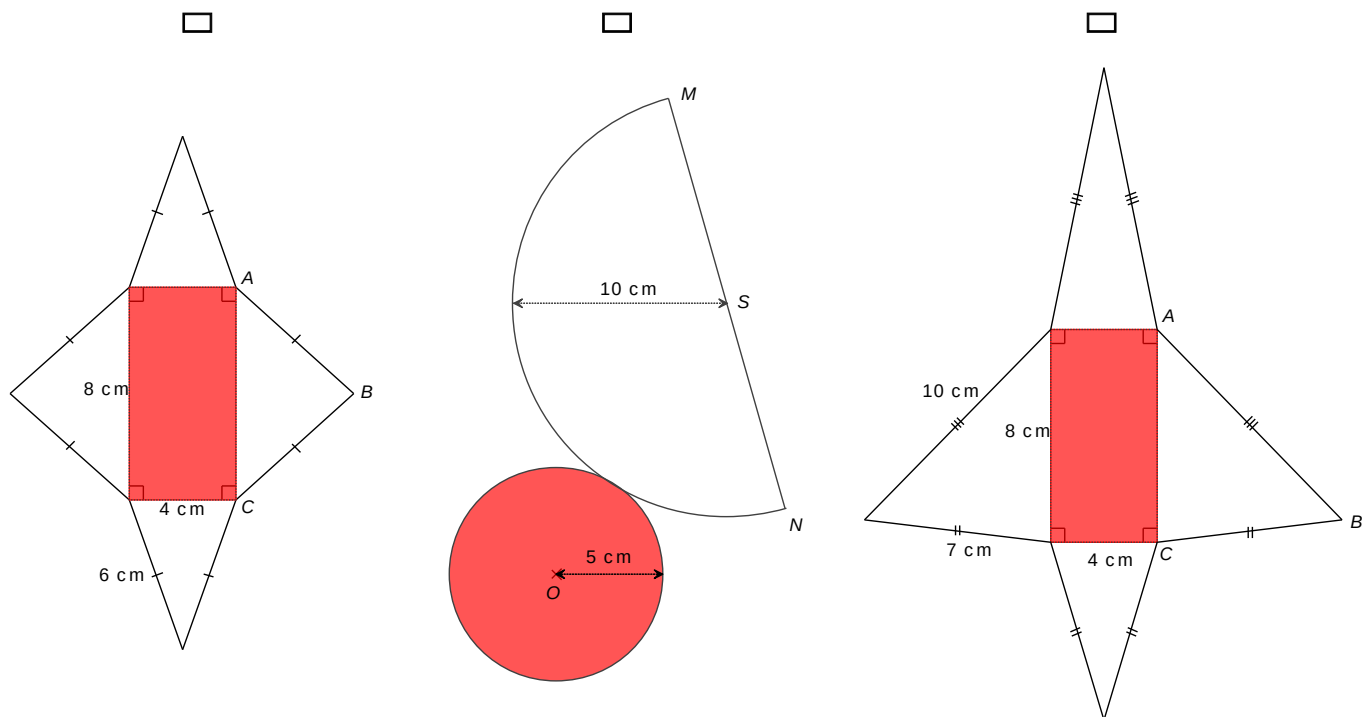


Il s'agit du patron d'un cylindre de révolution.



Il s'agit du patron d'un prisme à base triangulaire.

2 Découper pour observer et décrire



Patron d'une pyramide

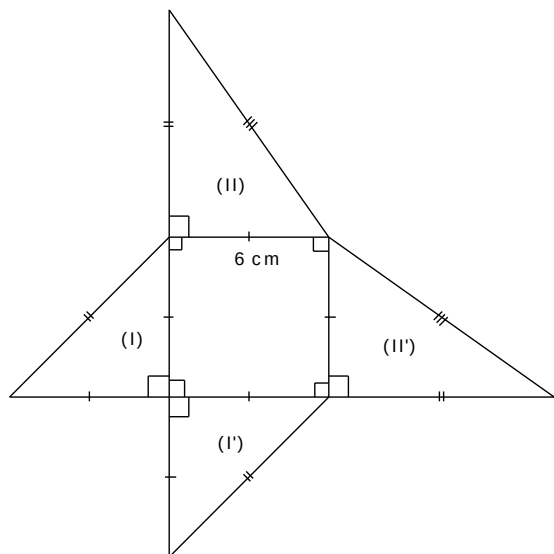
Patron d'un cône de révolution

Patron de la nouvelle pyramide

1. Réalisation, à partir des patrons  et , d'une pyramide et d'un cône de révolution.
- 2.a. La base de la pyramide (colorée en rouge) est un rectangle.
- b. La base du cône de révolution (colorée en rouge) est un disque.
- 3.a. La pyramide a 4 faces latérales et 4 arêtes latérales.
- b. En conservant la même base et en modifiant la longueur de deux arêtes latérales ($AB = 10$ cm et $BC = 7$ cm), on obtient une nouvelle pyramide de patron .
- 4.a. Pour que le solide se « referme », il faut que la longueur de l'arc $\overset{\cap}{MN}$ soit égal au périmètre du cercle de base, c'est-à-dire $10 \times \pi$ cm.
- b.c. Dans le triangle OMS , rectangle en O , on a (d'après la propriété de Pythagore) : $SM^2 = SO^2 + OM^2$;
donc la hauteur de ce cône est : $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm.

3 Aire et volume d'une pyramide

1.a. Reproduction du patron de la pyramide :



b. Les 4 faces latérales sont des triangles rectangles :

- deux [(I) et (I')] ont des côtés de l'angle droit de 6 cm, une hypoténuse de $\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ cm ;
- deux [(II) et (II')] ont un côté de l'angle droit de 6 cm, l'autre côté de l'angle droit de $6\sqrt{2}$ cm.

Donc l'aire latérale de cette pyramide est :

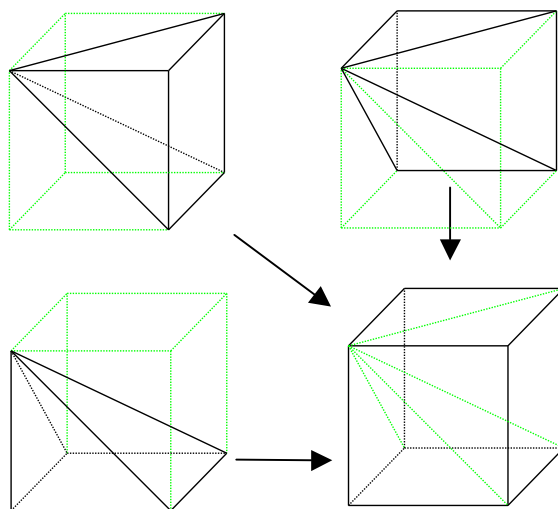
$$\mathcal{A} = 2 \times \frac{6 \times 6}{2} + 2 \times \frac{6 \times 6\sqrt{2}}{2} = 36(1 + \sqrt{2}) \approx 86,9 \text{ cm}^2.$$

c. L'aire de la base est : $\mathcal{B} = 6 \times 6 = 36 \text{ cm}^2$;

donc l'aire totale de cette pyramide est :

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = 36(1 + \sqrt{2}) + 36 = 36(2 + \sqrt{2}) \approx 122,9 \text{ cm}^2.$$

2.a. Reconstitution d'un cube à l'aide de trois pyramides identiques (utilisation du patron 1.a.), en les disposant de la façon suivante :



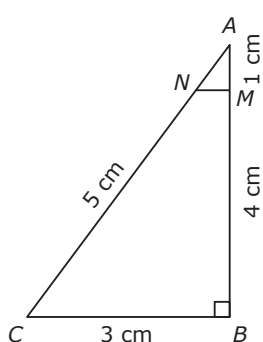
b. Les 3 pyramides (identiques) ont ensemble même volume que le cube de côté 6 cm, c'est-à-dire : $6^3 = 216 \text{ cm}^3$;

donc le volume d'une pyramide est : $\mathcal{V} = \frac{216}{3} = 72 \text{ cm}^3$.

c. A l'aide de la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{B} h$,

on retrouve : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 6 = 72 \text{ cm}^3$.

4 Section par un plan parallèle à la base



1. En faisant pivoter le triangle autour du bâton, on obtient un cône de révolution de hauteur $AB = 4$ cm, de base le cercle (C), de centre B et de rayon $BC = 3$ cm.

2. Le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité

Longueur en cm	AB	AC	BC
Longueur en cm	AM	AN	MN

En effet les triangles ABC et AMN sont en configuration de Thalès, donc : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la ligne 1 à la ligne 2 est : $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$.

Donc : $MN = \frac{1}{4} \times BC = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ cm}$.

3.a. Pour le cône $\mathcal{C}_1$: le périmètre de la base est $\mathcal{P}_1 = 2\pi \times BC = 2 \times 3,14 \times 3 \approx 18,8 \text{ cm}$; $a_1 = AC = 5 \text{ cm}$;

donc l'aire latérale est $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \times \mathcal{P}_1 \times a_1 \approx \frac{1}{2} \times 18,8 \times 5 \approx 47 \text{ cm}^2$.

L'aire de la base est $\mathcal{B}_1 = \pi \times BC^2 \approx 3,14 \times 9 \approx 28,3 \text{ cm}^2$; donc le volume est $\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3} \times \mathcal{B}_1 \times AB \approx \frac{1}{3} \times 28,3 \times 4 \approx 37,7 \text{ cm}^3$.

b. Pour le cône $\mathcal{C}_2$: le périmètre de la base est $\mathcal{P}_2 = 2\pi \times MN = 2 \times 3,14 \times 0,75 \approx 4,7 \text{ cm}$; $a_2 = AN = \frac{1}{4} AC = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ cm}$;

donc l'aire latérale est $\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \times \mathcal{P}_2 \times a_2 \approx \frac{1}{2} \times 4,7 \times 1,25 \approx 2,9 \text{ cm}^2$.

L'aire de la base est $\mathcal{B}_2 = \pi \times MN^2 \approx 3,14 \times 0,75^2 \approx 1,8 \text{ cm}^2$; donc le volume est $\mathcal{V}_2 = \frac{1}{3} \times \mathcal{B}_2 \times AM \approx \frac{1}{3} \times 1,8 \times 1 \approx 0,6 \text{ cm}^3$.

c. Finalement : aire latérale de $\mathcal{C}_1 = 16 \times$ aire latérale de $\mathcal{C}_2$; volume de $\mathcal{C}_1 = 64 \times$ volume de $\mathcal{C}_2$.

1 Apprendre à décrire et à tracer une pyramide régulière

Exercice 1

Sommet : I ;
base : $JKLMN$;
faces latérales : IJK , IKL , ILM , IMN et INJ ;
arêtes latérales : $[IJ]$, $[IK]$, $[IL]$, $[IM]$ et $[IN]$.

Exercice 2

Sommet : F ;
base : $EGHIJK$;
faces latérales : EGE , FGH , FHI , FIJ , FJK et FKE ;
arêtes latérales : $[FE]$, $[FG]$, $[FH]$, $[FI]$, $[FJ]$ et $[FK]$.

Exercice 3

Sommet : S ;
base : le disque de centre U et de rayon UT ;
axe de révolution : (SU) ;
trois génératrices : (ST) , (SU) et (SW) .

Exercice 4

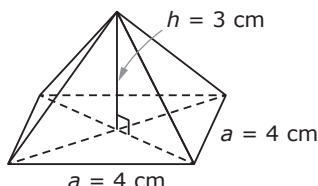
Sommet : D ;
base : le disque de centre B et de rayon BA ;
axe de révolution : (DB) ;
trois génératrices : (DA) , (DC) et (DE) .

Exercice 5

1. Vrai 2. Faux (voir exercice 4).

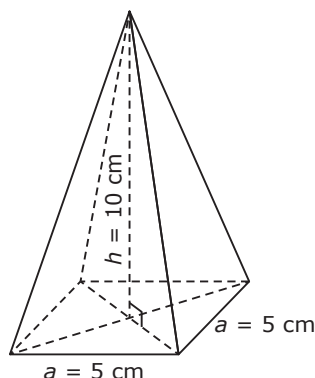
Exercice 6

Représentation en perspective cavalière d'une pyramide à base carrée, de côté $a = 4$ cm, et de hauteur $h = 3$ cm.



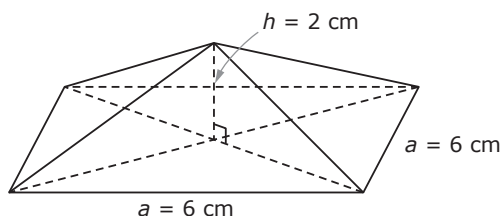
Exercice 7

Représentation en perspective cavalière d'une pyramide à base carrée, de côté $a = 5$ cm, et de hauteur $h = 10$ cm.



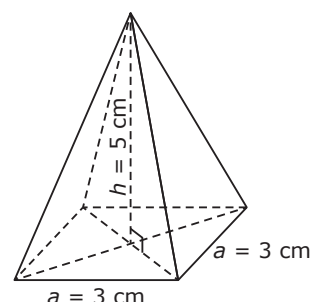
Exercice 8

Représentation en perspective cavalière d'une pyramide à base carrée, de côté $a = 6$ cm, et de hauteur $h = 2$ cm.



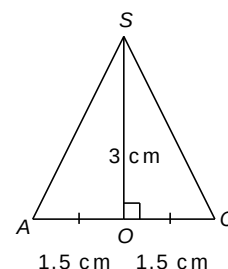
Exercice 9

Représentation en perspective cavalière d'une pyramide à base carrée, de côté $a = 3$ cm, et de hauteur $h = 5$ cm.



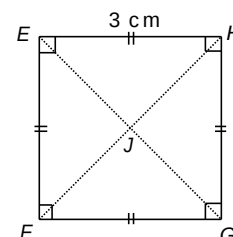
Exercice 10

SAC est un triangle isocèle en S .



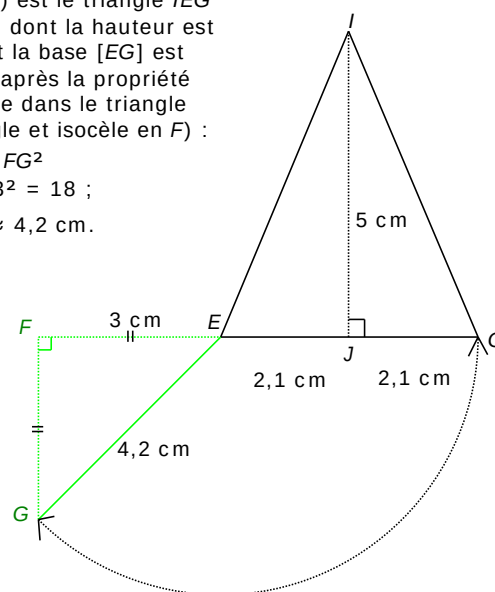
Exercice 11

1. La base $EFGH$ est un carré de côté 3 cm.



2. La section de la pyramide par le plan (IEG) est le triangle IEG isocèle en I , dont la hauteur est $IJ = 5$ cm et la base $[EG]$ est telle que (d'après la propriété de Pythagore dans le triangle EFG rectangle et isocèle en F) :

$$\begin{aligned} EG^2 &= EF^2 + FG^2 \\ &= 3^2 + 3^2 = 18 ; \\ EG &= 3\sqrt{2} \approx 4,2 \text{ cm.} \end{aligned}$$



2 Apprendre à calculer une longueur, une aire, un volume

Exercice 12

1. Représentation à main levée



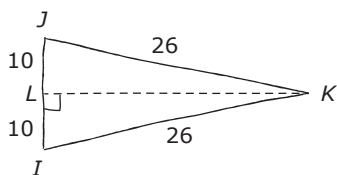
2.a. Dans le triangle ILK rectangle en L , d'après la propriété de Pythagore, on a : $IK^2 = IL^2 + LK^2$;
donc : $LK^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ et $LK = 12$ cm.

b. Volume du cône :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 12^2 \times 5 \approx 754 \text{ cm}^3.$$

Exercice 13

1. Représentation à main levée



2.a. Dans le triangle ILK rectangle en L , d'après la propriété de Pythagore, on a : $IK^2 = IL^2 + LK^2$;
donc : $LK^2 = 26^2 - 10^2 = 576$ et $LK = 24$ cm.

b. Volume du cône :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 10^2 \times 24 \approx 2\,512 \text{ cm}^3.$$

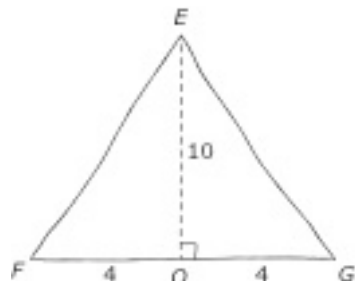
Exercice 14

1. • Dans le triangle OGH isocèle et rectangle en O , d'après la propriété de Pythagore, on a :

$$GH^2 = GO^2 + OH^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \text{ et } GH = 4\sqrt{2} \text{ cm.}$$

• Aire de la base : $B = GH^2 = 32 \text{ cm}^2$.

2.a. Représentation à main levée



b. Volume de la pyramide :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times EO = \frac{1}{3} \times 32 \times 10 = \frac{320}{3} \text{ cm}^3.$$

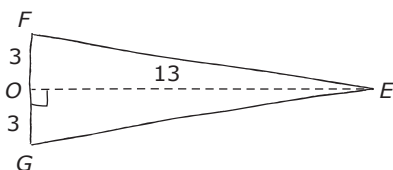
Exercice 15

1. • Dans le triangle OGH isocèle et rectangle en O , d'après la propriété de Pythagore, on a :

$$GH^2 = GO^2 + OH^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \text{ et } GH = 3\sqrt{2} \text{ cm.}$$

• Aire de la base : $B = GH^2 = 18 \text{ cm}^2$.

2.a. Représentation à main levée

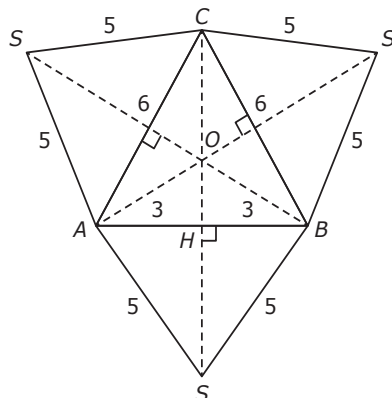


b. Volume de la pyramide :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times EO = \frac{1}{3} \times 18 \times 13 = 78 \text{ cm}^3.$$

Exercice 16

1. Patron de la pyramide :



2. • Dans le triangle ASH rectangle en H , d'après la propriété de Pythagore, on a : $AS^2 = AH^2 + HS^2$;
donc : $HS^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ et $HS = 4$ cm,

$$\text{aire}(ABS) = \frac{6 \times 4}{2} = 12 \text{ cm}^2,$$

$$\text{aire latérale} = 3 \times \text{aire}(ABS) = 3 \times 12 = 36 \text{ cm}^2.$$

• Dans le triangle ACH rectangle en H , d'après la propriété de Pythagore, on a : $AC^2 = AH^2 + HC^2$;

$$\text{donc : } HC^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \text{ et } HC = 3\sqrt{3} \text{ cm,}$$

$$\text{aire}(ABC) = \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

• Aire totale de la pyramide : $(36 + 9\sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

Exercice 17

1. Dans le triangle AOS rectangle en O , $\tan \hat{ASO} = \frac{OA}{OS}$;

$$\text{donc } OS = \frac{OA}{\tan \hat{ASO}} = \frac{5}{\tan 60^\circ} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2,8 \text{ cm.}$$

2. Volume du cône :

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times OA^2 \times OS \approx \frac{1}{3} \times 3,14 \times 5^2 \times 2,8 \approx 73 \text{ cm}^3.$$

Exercice 18

Tableau concernant un cône de révolution :

Rayon r	Arête a	Hauteur h	Aire base B	Aire latérale A	Volume V
4	5	3	16π	20π	16π
5	13	12	25π	65π	100π

En effet : • périmètre de la base : $P = 2\pi r$,

• aire de la base : $B = \pi r^2$,

• aire latérale : $A = \frac{1}{2} P a = \pi r a$,

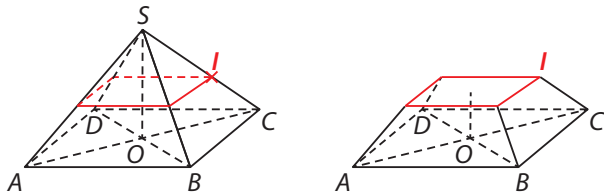
• volume : $V = \frac{1}{3} B h$.

3 Apprendre à représenter une section et un tronc

Exercice 19

1. La section de la pyramide régulière $SABCD$ (à base carrée), par le plan passant par I et parallèle à sa base, est un carré.

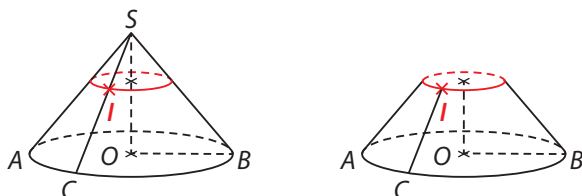
2.



Exercice 20

1. La section du cône de révolution, par le plan passant par I et parallèle à sa base, est un cercle.

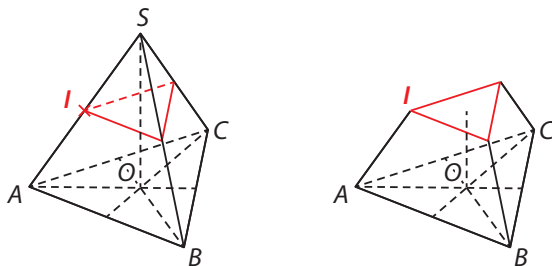
2.



Exercice 21

1. La section de la pyramide régulière $SABC$ (à base triangulaire), par le plan passant par I et parallèle à sa base, est un triangle équilatéral.

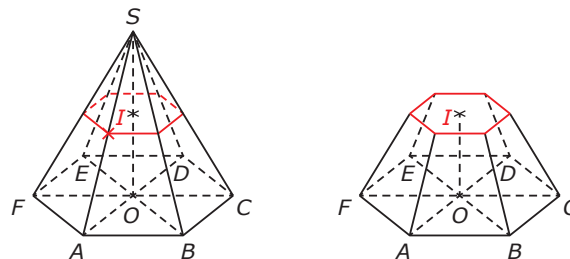
2.



Exercice 22

1. La section de la pyramide régulière $SABCDEF$ (à base hexagonale), par le plan passant par I et parallèle à sa base, est un hexagone régulier.

2.



Exercice 23

- $MN' = 0,6 \times MN$;
- $R'N' = 0,6 \times RN$ (on peut appliquer la propriété de Thalès dans les triangles RMN et $R'N'M$) ;
- aire latérale $(MN'P'Q'R')' = 0,36 \times \text{Aire latérale}(MNPQR)$;
- volume $(MN'P'Q'R') = 0,216 \times \text{Volume}(MNPQR)$.

Exercice 24

1. Désignons respectivement par C et C' le petit cône et le grand cône de tissu.

• Petit cône :

$$\text{aire latérale : } A_C = \frac{1}{2} \times \pi \times 24 \times 20 \approx 754 \text{ cm}^2 ;$$

$$\text{volume : } \mathcal{V}_C = \frac{1}{3} \times \pi \times 12^2 \times 18 \approx 2\,713 \text{ cm}^3.$$

• Grand cône (dont les longueurs sont le triple de celles du petit cône) :

$$\text{aire latérale : } A_{C'} = 3^2 \times A_C \approx 6\,786 \text{ cm}^2.$$

$$\text{volume : } \mathcal{V}_{C'} = 3^3 \times \mathcal{V}_C \approx 73\,251 \text{ cm}^3.$$

2. On en déduit que :

• aire de la jupe :

$$A_{C'} - A_C \approx 6\,786 - 754 \approx 6\,032 \text{ cm}^2 ;$$

• volume de la jupe :

$$\mathcal{V}_{C'} - \mathcal{V}_C \approx 73\,251 - 2\,713 \approx 70\,538 \text{ cm}^3.$$

Activités d'application

Description et construction de solides

Exercice 25

☐ Pavé droit ou parallélépipède rectangle :

8 sommets : A, B, C, D, E, F, G et H ;
 6 faces : $ABCD, EFGH, ABFE, BCGF, ADHE$ et $DCGH$;
 12 arêtes : $[AB], [BC], [CD], [DA], [EF], [FG], [GH], [HE], [AE], [BF], [CG]$ et $[DH]$.

☐ Pyramide à base triangulaire de sommet S :

base : IJK ; hauteur : $[SH]$;
 3 faces latérales : SIJ, SJK et SKI ;
 3 arêtes latérales : $[SI], [SJ]$ et $[SK]$.

☐ Cylindre de révolution :

axe : (MN) ; hauteur : $[MN]$;
 bases : disques de centres M et N , de rayon NP .

☐ Pyramide à base carrée de sommet S :

base : $ABCD$; hauteur : $[SF]$;
 4 faces latérales : SAB, SBC, SCD et SDA ;
 4 arêtes latérales : $[SA], [SB], [SC]$ et $[SD]$.

☐ Cône de révolution :

sommet : O ; hauteur : $[OS]$; génératrice : (OR) ;
 base : disque de centre S , de rayon SR .

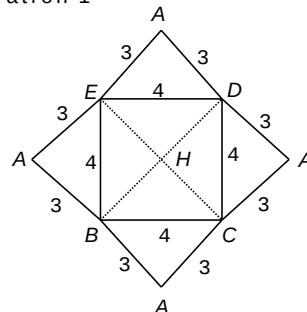
☐ Prisme droit à base triangulaire :

bases : IJK et LMN ;
 3 faces latérales : $IJML, JKNM$ et $KILN$;
 3 arêtes latérales : $[JM], [IL]$ et $[KN]$.

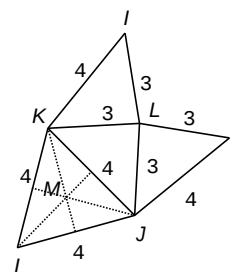
Exercice 26

1.2.

Patron 1



Patron 2



3.

	Patron 1	Patron 2
Nom de la base	$BCDE$	IJK
Nom de la hauteur	$[AH]$	$[LM]$
Nom d'une face latérale	ABE	JKL
Aire latérale	$4 \times \text{aire}(ABE)$	$3 \times \text{aire}(JKL)$

Exercice 27

Axes de révolution : (OS) et $(O'S')$.

Hauteurs : $[OS]$ et $[O'S']$.

Bases : disque de centre O et de rayon OS'
 et disque de centre O' et de rayon $O'S$.

Génératrices : dans les deux cas, la droite (SS') .

CALCULS D'AIRES ET DE VOLUMES

Exercice 28

1. • Pyramide $SABCD$, à base carrée $ABCD$:
 aire de la base : $\mathcal{B}(ABCD) = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$.

• Pyramide $IJKL$, à base triangulaire JKL :

aire de la base : $\mathcal{B}(JKL) = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5 \text{ cm}^2$.

2. • Pyramide à base carrée $SABCD$:

volume : $\mathcal{V}(SABCD) = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times SH = \frac{1}{3} \times 25 \times 4,5 = 37,5 \text{ cm}^3$.

• Pyramide à base triangulaire $IJKL$:

volume : $\mathcal{V}(IJKL) = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times IM = \frac{1}{3} \times 5 \times 3 = 5 \text{ cm}^3$.

Exercice 29

1. • Aire de la base de l'arbuste : $\mathcal{B} = \pi r^2 = \pi \times 0,5^2 \approx 0,8 \text{ m}^2$.

• Aire de la base du coquillage : $\mathcal{B} = \pi r^2 = \pi \times 1^2 \approx 3,1 \text{ cm}^2$.

2. • Volume de l'arbuste : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h \approx \frac{1}{3} \times 0,8 \times 2 \approx 0,5 \text{ m}^3$.

• Volume du coquillage : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h \approx \frac{1}{3} \times 3,1 \times 5 \approx 5,2 \text{ cm}^3$.

Exercice 30

Pyramide à base triangulaire :

1. aire de la base : $\mathcal{B}(ABC) = \frac{3,6 \times 1,1}{2} = 1,98 \text{ cm}^2$;

2. volume de la pyramide :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times 1,98 \times 10 \approx 6,6 \text{ cm}^3.$$

Exercice 31

Cône de révolution de rayon 5 cm et de hauteur 9 cm :

1. aire de la base : $\mathcal{B} = \pi r^2 = \pi \times 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$;

2. volume : $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times 25\pi \times 9 = 75\pi \approx 236 \text{ cm}^3$.

Exercice 32

Découpage, dans un premier cube de 10 cm de côté, d'une pyramide et, dans un second cube de 10 cm de côté, d'un cône de révolution.

1. Aire de la base :

• de la pyramide : $\mathcal{B}(EFGH) = 100 \text{ cm}^2$;

• du cône : $\mathcal{B} = \pi \times 5^2 = 25\pi \approx 79 \text{ cm}^2$.

2. Volume de bois restant :

• après la découpe de la pyramide :

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V}'_{\text{cube}} - \mathcal{V}'_{\text{pyramide}} = 1\,000 - \frac{1}{3} \times 100 \times 10$$

$$\mathcal{V}' = \frac{2}{3} \times 100 \times 10 \approx 666 \text{ cm}^3 ;$$

• après la découpe du cône :

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V}'_{\text{cube}} - \mathcal{V}'_{\text{cône}} \approx 1\,000 - \frac{1}{3} \times 79 \times 10$$

$$\mathcal{V}' \approx 1\,000 - 263 \approx 737 \text{ cm}^3.$$

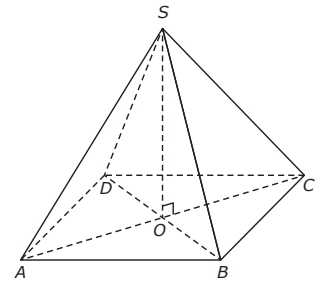
3. Masse du cube :

• évidé de la pyramide : $0,666 \times 700 \approx 466 \text{ g}$;

• évidé du cône : $0,737 \times 700 \approx 516 \text{ g}$.

Exercice 33

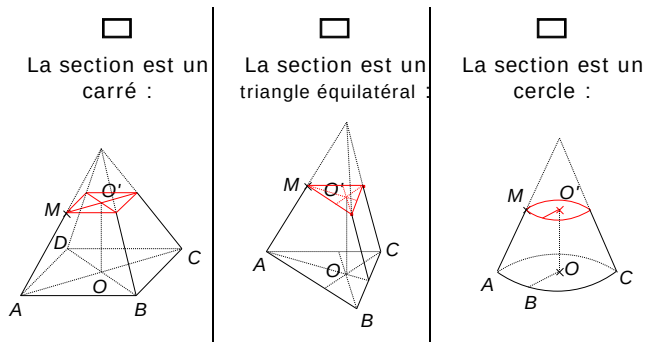
1. Représentation en perspective cavalière d'une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée $ABCD$:



2. Pyramide $SABCD$	☐	☐	☐
AB	4 cm	5 m	9 dm
Hauteur OS	6 cm	3 m	6 dm
Aire de la base	16 cm ²	25 m ²	81 dm ²
Volume	32 cm ³	25 m ³	162 dm ³

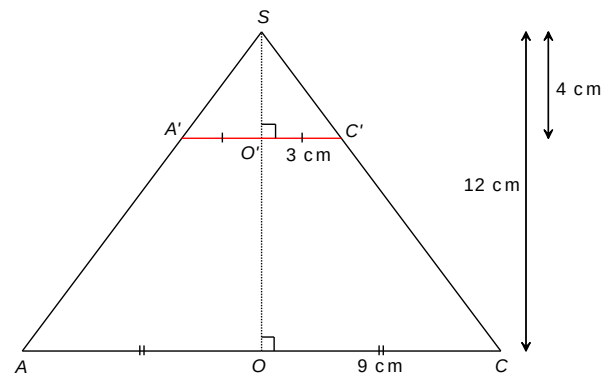
Section par un plan

Exercice 34



Exercice 35

1. Section de la pyramide par le plan (SAC) :

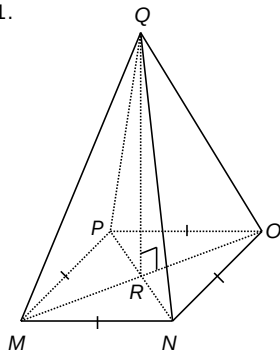


2. • Longueur des arêtes latérales de la petite pyramide : dans le triangle $O'A'S$ rectangle en O' , d'après la propriété de Pythagore on a : $SA'^2 = O'A'^2 + O'S^2 = 3^2 + 4^2 = 25$; donc : $SA' = 5 \text{ cm}$.

• Longueur des arêtes latérales de la grande pyramide : dans le triangle OAS rectangle en O , d'après la propriété de Pythagore on a : $SA^2 = OA^2 + OS^2 = 9^2 + 12^2 = 225$; donc : $SA = 15 \text{ cm}$.

Exercice 36

1.

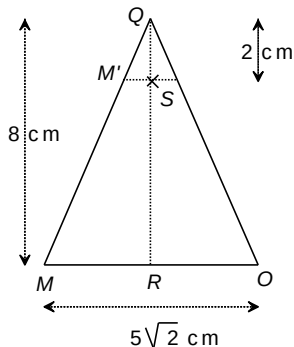


Ci-dessus, la représentation en perspective cavalière d'une pyramide régulière $MNO PQ$:

- à base carrée $MNOP$, de centre R et de côté 5 cm,
- de hauteur $QR = 8$ cm.

2. Dans le triangle MNO , rectangle en N , d'après la propriété de Pythagore on a :
 $MO^2 = MN^2 + NO^2 = 5^2 + 5^2 = 50$;
 donc : $MO = 5\sqrt{2} \approx 7$ cm.

D'où, ci-dessous, la section de la pyramide par le plan (QMO) :

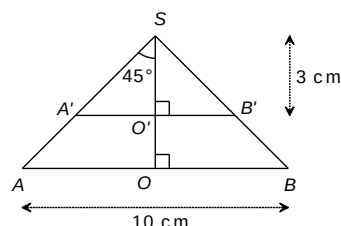


3. Les triangles $QM'S$ et QMR sont en configuration de Thalès, donc :

$$\frac{QS}{QR} = \frac{QM'}{QM} = \frac{M'S}{MR} ;$$

$$\text{d'où : } M'S = MR \times \frac{QS}{QR} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{8} = \frac{5\sqrt{2}}{8} \approx 0,9 \text{ cm.}$$

Exercice 37



1. $[AB]$ est un diamètre du cercle de centre O , donc O est le milieu du segment $[AB]$ et $AO = 5$ cm.

Le triangle SAO , rectangle en O , est aussi isocèle ; donc :

$$SO = AO = 5 \text{ cm et } SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = 5\sqrt{2} \text{ cm.}$$

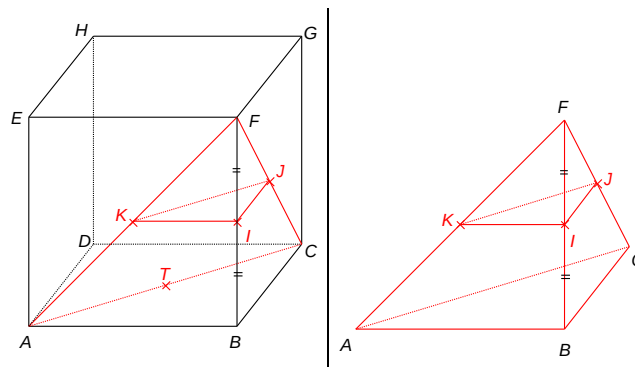
2. • Volume du grand cône C :

$$\mathcal{V}_C = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 5 \approx 130 \text{ cm}^3.$$

• Volume du petit cône C' :

$$\mathcal{V}_{C'} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \mathcal{V}_C = 3^2 \times \pi \approx 28 \text{ cm}^3.$$

Exercice 38



1. Aire totale de la pyramide $FABC$:

$$\bullet \text{ aire}(ABF) = \frac{AB \times BF}{2} = 50 \text{ cm}^2 ;$$

$$\bullet \text{ aire}(ABF) = \text{aire}(BFC) = \text{aire}(ABC) ;$$

• dans le triangle ABC , rectangle en B , d'après la propriété de Pythagore on a :

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ cm} ;$$

dans le triangle AFC équilatéral, si l'on note T le pied de la hauteur issue de F , d'après la propriété de Pythagore dans le triangle AFT , rectangle en T , on a :

$$TF = \sqrt{AF^2 - AT^2} = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 - (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{6} \text{ cm} ;$$

$$\text{donc } \text{aire}(AFC) = \frac{AC \times TF}{2} = \frac{10\sqrt{2} \times 5\sqrt{6}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2 ;$$

• finalement l'aire totale de la pyramide $FABC$ est :

$$\mathcal{A}(FABC) = \text{aire}(ABF) + \text{aire}(BFC) + \text{aire}(ABC) + \text{aire}(AFC)$$

$$\mathcal{A}(FABC) = 50 \times (3 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

Volume de la pyramide $FABC$:

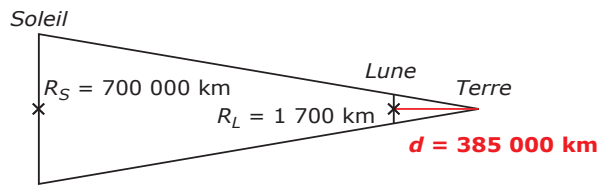
$$\mathcal{V}(FABC) = \frac{1}{3} \times \text{aire}(ABC) \times FB = \frac{1}{3} \times 50 \times 10 = \frac{500}{3} \text{ cm}^3.$$

2. Les longueurs de la petite pyramide $FKIJ$ sont obtenues à partir de celles de la grande pyramide, par réduction de rapport $\frac{1}{2}$. On en déduit que :

$$\bullet \mathcal{A}(FKIJ) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 50 \times (3 + \sqrt{3}) = \frac{25}{2} \times (3 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2 ;$$

$$\bullet \mathcal{V}(FKIJ) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{500}{3} = \frac{125}{6} \text{ cm}^3.$$

Exercice 39



1. Volume $\mathcal{V}$ du petit cône d'ombre :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times R_L^2 \times d = \frac{1}{3} \times \pi \times 1\,700^2 \times 385\,000 \approx 1,165 \times 10^{12}$$

$\mathcal{V} \approx 1\,165$ milliards de km^3 .

2. Volume $\mathcal{V}'$ du grand cône d'ombre :

le grand cône est un agrandissement du petit cône selon

le rapport $\frac{R_S}{R_L} = \frac{700}{1,7}$; donc :

$$\mathcal{V}' = \left(\frac{700}{1,7} \right)^3 \times \mathcal{V} \approx 8,134 \times 10^{19}$$

$\mathcal{V}' \approx 8,134 \times 10^{10}$ milliards de km^3 .

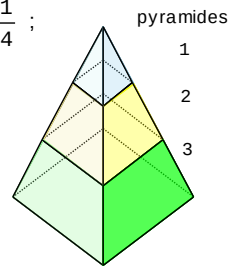
Exercice 40

$$1. \frac{\text{aire totale pyramide}}{\text{aire totale pyramide}} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} ;$$

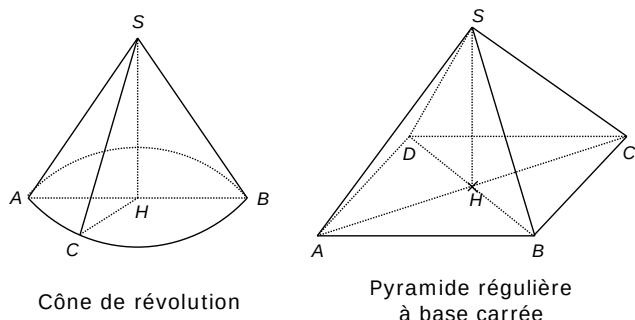
$$2. \frac{\text{aire totale pyramide}}{\text{aire totale pyramide}} = 3^2 = 9 ;$$

$$3. \frac{\text{volume pyramide}}{\text{volume pyramide}} = 2^3 = 8 ;$$

$$4. \frac{\text{volume pyramide}}{\text{volume pyramide}} = \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27} .$$

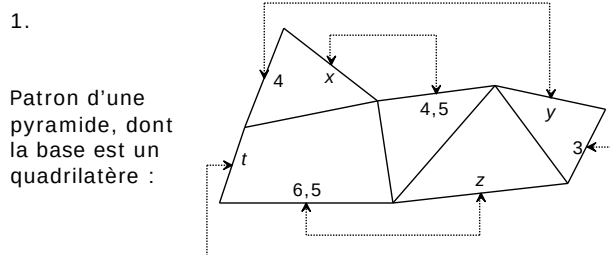


Exercice 41 Observer et décrire

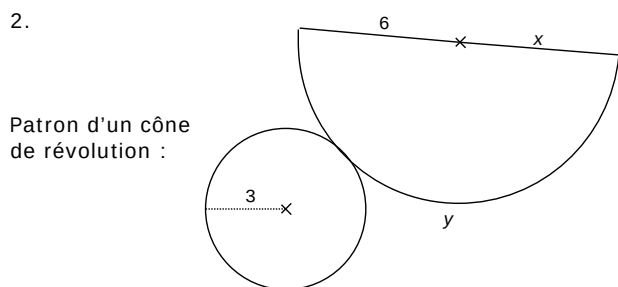


- Hauteur du cône : $[SH]$;
hauteur de la pyramide : $[SH]$.
 - Ces hauteurs passent par le centre H du cône et de la pyramide, puisqu'il s'agit d'un cône de révolution et d'une pyramide régulière.
- Le point H n'appartient pas au plan (SAC) dans le cas du cône ; par contre, le point H appartient au plan (SAC) dans le cas de la pyramide.
- Pour le cône de révolution :
 - trois génératrices : (SA) , (SB) et (SC) .
 - quatre triangles rectangles :
 SAH rectangle en H ; SBH rectangle en H ;
 SCH rectangle en H ; ABC rectangle en C .
- Pour la pyramide régulière :
 - quatre faces latérales : SAB , SBC , SCD et SDA .
 - six triangles rectangles :
 SAH rectangle en H ; SBH rectangle en H ;
 SCH rectangle en H ; SDH rectangle en H ;
 ABH rectangle en H ; ABC rectangle en B .

Exercice 42 Repérer les côtés correspondants



Les doubles-flèches en pointillés relient les arêtes qui vont coïncider lors de la reconstitution de la pyramide ;
d'où : $x = 4,5$ cm ; $y = 4$ cm ; $z = 6,5$ cm ; $t = 3$ cm.

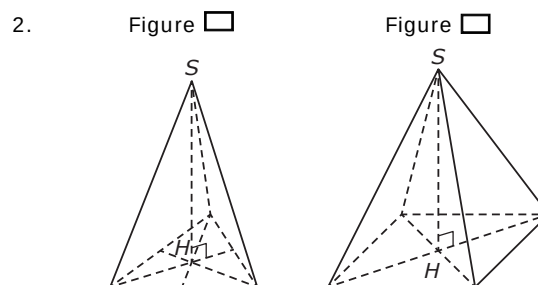


On a : $x = 6$ cm ; $y = 2\pi \times 3 = 6\pi$ cm.
(A noter que le secteur circulaire, correspondant à la partie latérale du cône, est un demi-cercle de rayon 6 cm.)

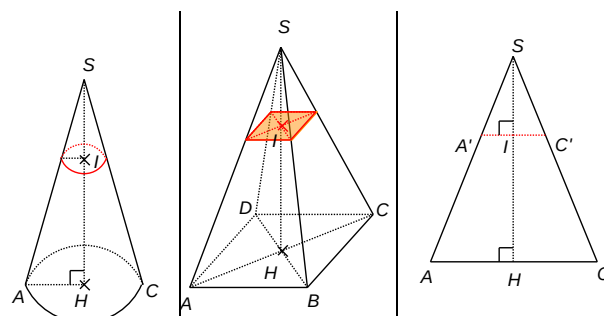
Exercice 43 Représenter correctement

- Figure  :
 - les côtés du triangle équilatéral de base sont représentés avec la même longueur ;
 - le point H n'est pas situé au centre du triangle de base.

- Figure  :
- les côtés du carré de base sont représentés avec la même longueur ;
 - le point H n'est pas situé au centre du carré de base.



Exercice 44 Utiliser la bonne propriété



 : $AS = 10$ cm et $SH = 8$ cm.

Dans le triangle SAH rectangle en H , d'après la propriété de Pythagore on a : $AS^2 = AH^2 + HS^2$;
donc : $AH^2 = AS^2 - HS^2 = 10^2 - 8^2 = 36$ et $AH = 6$ cm.

 : $AS = 5$ cm et $\text{mes } \hat{A}SH = 30^\circ$.

Dans le triangle SAH rectangle en H , $\sin \hat{A}SH = \frac{AH}{AS}$;

donc : $AH = AS \times \sin \hat{A}SH = 5 \times \frac{1}{2} = 2,5$ cm.

 : $SH = 12$ cm, $IA' = 2$ cm et $IS = 4$ cm.

$(AH) \parallel (A'I)$, donc les triangles SAH et $SA'I$ sont en configuration de Thalès et $\frac{SH}{SI} = \frac{SA}{SA'} = \frac{AH}{A'I}$;

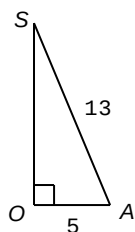
donc : $\frac{AH}{2} = \frac{12}{4}$, c'est-à-dire : $AH = 6$ cm.

Exercices d'approfondissement

Exercice 45 Fabrication de savons

1. Le solide obtenu est un cône de révolution ;

- base : le disque de centre O , de rayon $OA = 5$ cm ;
- d'axe : la droite (OS) ;
- de génératrice : la droite (SA) .



2.a. Dans le triangle OAS rectangle en O , d'après la propriété de Pythagore on a : $AS^2 = AO^2 + OS^2$;
donc : $OS^2 = AS^2 - AO^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ et $OS = 12$ cm.

$$b. \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times OA^2 \times OS = \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 12 \approx 314 \text{ cm}^3.$$

$$3. \frac{4}{\mathcal{V}} = \frac{4}{0,314} \approx 12,7 ;$$

on peut donc fabriquer 12 savons de cette forme.

Exercice 46 Les trois triangles rectangles

1.a. Dans le triangle FGH :

$$FG^2 = 68^2 = 4\,624,$$

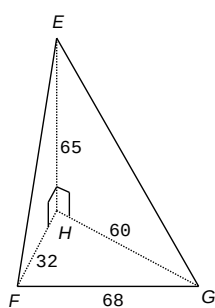
$$FH^2 + HG^2 = 32^2 + 60^2 = 4\,624,$$

donc $FG^2 = FH^2 + HG^2$ et, d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle FGH est rectangle en H .

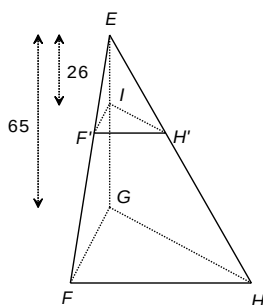
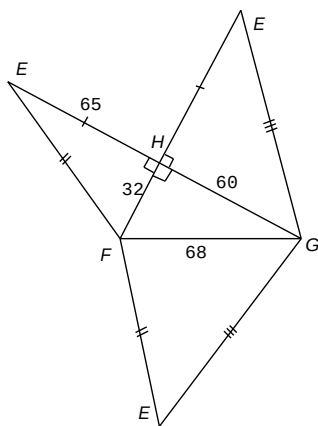
$$b. \mathcal{V}(EFGH) = \frac{1}{3} \times \text{aire}(FGH) \times EH$$

$$\mathcal{V}(EFGH) = \frac{1}{3} \times \frac{FH \times HG}{2} \times EH$$

$$\mathcal{V}(EFGH) = \frac{1}{3} \times \frac{32 \times 60}{2} \times 65 = 20\,800 \text{ mm}^3.$$



c. Patron de la pyramide $EFGH$:



3. Ci-dessus la section de cette pyramide, par un plan passant par I et parallèle à la base FGH .

On obtient la pyramide $EF'IH'$, réduction de $EFGH$ et de

$$\text{volume} : \left(\frac{26}{65}\right)^3 \times \mathcal{V}(EFGH) = 0,4^3 \times 20\,800 = 1\,331,2 \text{ mm}^3.$$

Exercice 47 Étoile de bois

1.a. Volume du cube : $\mathcal{V}_C = 10^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$;

volume de chacune des pyramides :

$$\mathcal{V}_P = \frac{1}{3} \times 10^2 \times 12 = 400 \text{ cm}^3.$$

b. Volume de l'étoile : $\mathcal{V} = \mathcal{V}_C + 6 \times \mathcal{V}_P = 3\,400 \text{ cm}^3$;

donc la masse de l'étoile est : $0,8 \times \mathcal{V} = 2\,720 \text{ g}$.

2.a. Ci-contre une représentation en perspective cavalière de l'une des pyramides.

• Dans le triangle SOH rectangle en O , d'après la propriété de Pythagore

$$\text{on a : } SH^2 = SO^2 + OH^2$$

$$SH^2 = 12^2 + 5^2 = 169$$

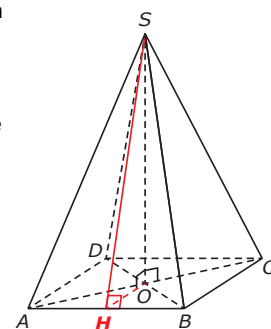
$$SH = 13 \text{ cm}.$$

$$\bullet \text{ Aire}(SAB) = \frac{AB \times SH}{2} = \frac{10 \times 13}{2}$$

$$\text{aire}(SAB) = 65 \text{ cm}^2.$$

• Aire apparente de l'étoile :

$$\mathcal{A} = 6 \times 4 \times \text{aire}(SAB) = 1\,560 \text{ cm}^2.$$



b. Pour peindre son étoile, Ali va utiliser :

$$\frac{10}{10\,000} \times 1\,560 = 1,560 \text{ cL de cette peinture}.$$

Exercice 48 Reconnaître un patron

1. Solide 1 : pavé droit.
Solide 2 : pyramide à base carrée.
Solide 3 : cube.

2. Solide 1 : patron B.
Solide 2 : patron A.
Solide 3 : patron C.

Exercice 49 Volume d'un cône de révolution

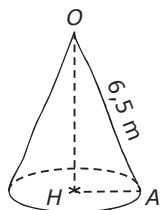
1. • On schématise la situation à main levée, où OH est la hauteur du cône.

• L'aire de la base est $\mathcal{B} \approx 19,625 \text{ m}^2$.
Or $\mathcal{B} = \pi \times HA^2 \approx 3,14 \times HA^2$;

$$\text{donc } HA^2 \approx \frac{19,625}{3,14} \approx 6,25.$$

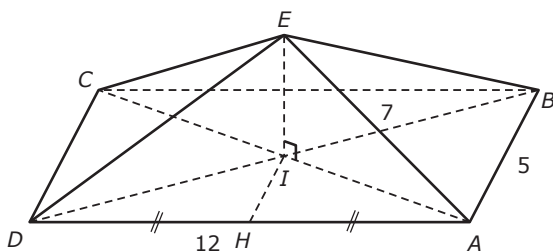
• Dans le triangle OAH rectangle en H , d'après la propriété de Pythagore on a : $OA^2 = OH^2 + HA^2$;
donc : $OH^2 = OA^2 - HA^2 \approx 6,5^2 - 6,25 \approx 36$ et $AH \approx 6 \text{ m}$.

$$2. \mathcal{V} \approx \frac{1}{3} \times 19,625 \times 6 \approx 39,25 \text{ m}^3.$$



Exercice 50 Volume d'une pyramide

1. On schématise la situation :



On note H le milieu de $[AD]$. Puisque le triangle AID est isocèle en I , le triangle AIH est rectangle en H .

D'après la propriété de Pythagore on a :

$$AI^2 = AH^2 + HI^2 = 6^2 + 2,5^2 = 42,25 ;$$

donc : $AI = 6,5 \text{ cm}$.

2. Dans le triangle AIE rectangle en I , d'après la propriété de Pythagore on a : $AE^2 = AI^2 + IE^2$;

$$\text{donc : } IE^2 = AE^2 - AI^2 = 7^2 - 6,5^2 = 7^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$$

$$\text{et } IE = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm.}$$

$$3. \mathcal{V}(ABCDE) = \frac{1}{3} \times \text{aire}(ABCD) \times IE$$

$$\mathcal{V}(ABCDE) = \frac{1}{3} \times 5 \times 12 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 51,9 \text{ cm}^3.$$

Exercice 51 Le château d'eau

Ci-contre une représentation de la section du château d'eau (réservoir, en grisé, et pylône cylindrique, en pointillés) par un plan passant par son axe (AA').

1. A' est le milieu de $[OA]$;
comme $(AB) \parallel (A'B')$, d'après la propriété des milieux dans le triangle OAB , on a :

• B' milieu de $[OB]$,

$$\bullet A'B' = \frac{1}{2} \times AB.$$

Donc : $AB = 2 \text{ m}$.

2.a. Volume de la partie cylindrique :

$$\mathcal{V}_{cy} = \pi \times 2^2 \times (7,1 - 2,1) = 20\pi \text{ m}^3.$$

b. Volume de la partie tronconique :

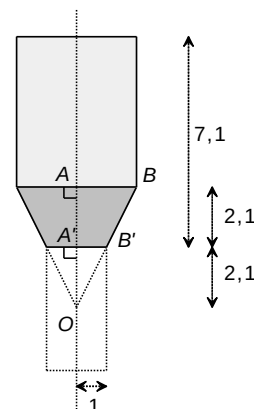
$$\mathcal{V}_t = \frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 4,2 - \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 2,1$$

$$\mathcal{V}_t = \frac{1}{3} \times \pi \times (4 \times 4,2 - 2,1) = 4,9\pi \text{ m}^3.$$

3. Capacité du réservoir :

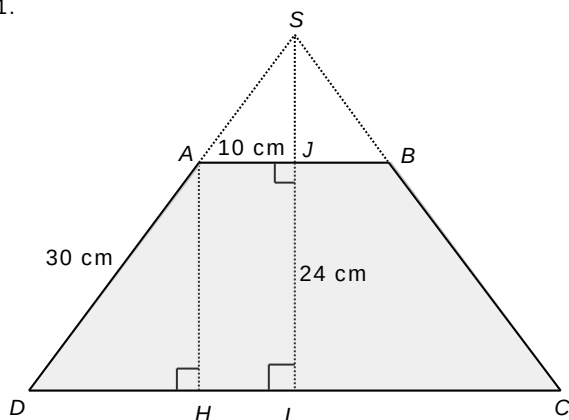
$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{cy} + \mathcal{V}_t = 24,9\pi \approx 24,9 \times 3,14 \approx 78,186 \text{ m}^3.$$

Ainsi, le réservoir a une capacité d'environ 78 186 L.



Exercice 52 La satisfaction du client

1.



Représentation de la section du tronc de cône par le plan (ABC).

2.a. • Dans le triangle ADH rectangle en H , d'après la propriété de Pythagore on a : $AD^2 = AH^2 + HD^2$;
donc : $HD^2 = AD^2 - AH^2 = 30^2 - 24^2 = 324$ et $HD = 18$ cm.
donc le rayon du « grand » cercle de base est : $DI = DH + HI = 28$ cm.

b. Les droites (AD) et (IJ) sont sécantes en S , le sommet commun des deux cônes à partir desquels est obtenu le tronc de cône.

$(AJ) \parallel (DI)$, donc les triangles SAJ et SDI sont en configuration de

Thalès et $\frac{AS}{DS} = \frac{JS}{IS} = \frac{AJ}{DI}$;

en particulier : $\frac{AS}{DA + AS} = \frac{AJ}{DI}$ ou $\frac{AS}{30 + AS} = \frac{10}{28}$;

c'est-à-dire : $28 \times AS = 10 \times (30 + AS)$

$$18 \times AS = 300$$

$$AS = \frac{300}{18} = \frac{50}{3} \text{ cm.}$$

Aire de la bassine

• L'aire du fond de la bassine est $\mathcal{A}_f = \pi \times AJ^2 = 100\pi \text{ cm}^2$.

• L'aire latérale de la bassine $\mathcal{A}_l$ est la différence entre les aires latérales du grand cône $\mathcal{A}_G$ et du petit cône $\mathcal{A}_P$;

$$\text{or : } \mathcal{A}_G = \frac{1}{2} \times (2\pi \times DI) \times DS = \pi \times 28 \times \left(30 + \frac{50}{3}\right) = \frac{28 \times 140}{3} \times \pi \text{ cm}^2,$$

$$\text{et : } \mathcal{A}_P = \frac{1}{2} \times (2\pi \times AJ) \times AS = \pi \times 10 \times \frac{50}{3} = \frac{10 \times 50}{3} \times \pi \text{ cm}^2,$$

$$\text{donc : } \mathcal{A}_l = \pi \times \frac{(28 \times 140 - 10 \times 50)}{3} = \pi \times \frac{3\,420}{3} = 1\,140\pi \text{ cm}^2.$$

• Finalement l'aire totale de la bassine est : $\mathcal{A}_f + \mathcal{A}_l = 100\pi + 1\,140\pi = 1\,240\pi \approx 3\,894 \text{ cm}^2$.

3. • Pour calculer le volume de la bassine, il faut tout d'abord connaître les hauteurs JS et IS des deux cônes ;

$$\text{or, d'après la question 2.b, on a : } \frac{JS}{IS} = \frac{JS}{IJ + JS} = \frac{AJ}{DI} \quad \text{ou} \quad \frac{JS}{24 + JS} = \frac{10}{28} ;$$

$$\text{donc : } 28 \times JS = 10 \times (24 + JS) ; \text{ c'est-à-dire : } JS = \frac{240}{18} = \frac{40}{3} \text{ cm et } IS = 24 + \frac{40}{3} = \frac{112}{3} \text{ cm.}$$

Le volume de la bassine $\mathcal{V}$ est la différence entre les volumes du grand cône $\mathcal{V}_G$ et du petit cône $\mathcal{V}_P$;

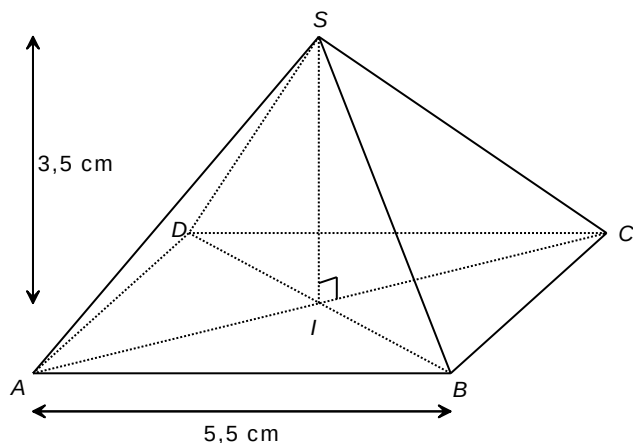
$$\text{or } \mathcal{V}_G = \frac{1}{3} \times \pi \times DI^2 \times IS = \frac{1}{3} \times \pi \times 28^2 \times \frac{112}{3} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_P = \frac{1}{3} \times \pi \times AJ^2 \times JS = \frac{1}{3} \times \pi \times 10^2 \times \frac{40}{3} ;$$

$$\text{donc : } \mathcal{V} = \frac{28^2 \times 112 - 10^2 \times 40}{9} \times \pi = \frac{83\,808}{9} \times \pi = 9\,312\pi \approx 29\,240 \text{ cm}^3.$$

• $25 \text{ L} = 25\,000 \text{ cm}^3 < 29\,240 \text{ cm}^3$, donc la bassine de Yene peut contenir 25 L d'eau.

Exercice 53 La pyramide de Kheops

1.a. Représentation en perspective cavalière de la pyramide de Kheops (échelle : 1 cm pour 80 coudées royales).



b. Dans le triangle ABC rectangle en B , d'après la propriété de Pythagore on a : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2 \times 440^2$;

donc : $AC = 440\sqrt{2}$ et $AI = \frac{AC}{2} = 220\sqrt{2}$ coudées royales.

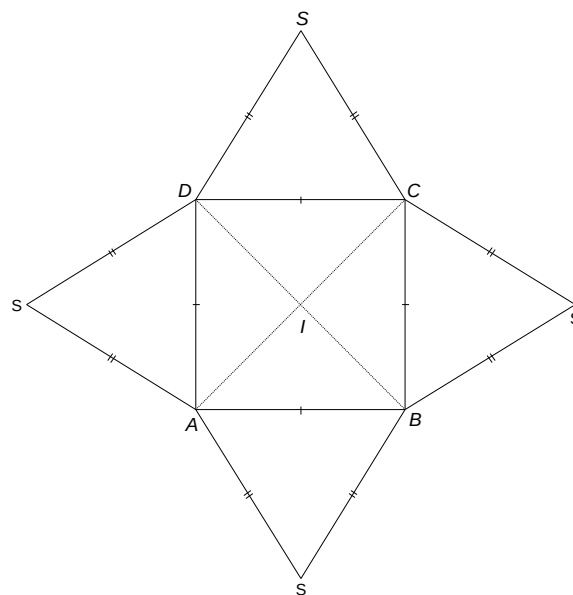
Dans le triangle ASI rectangle en I , d'après la propriété de Pythagore on a :

$$AS^2 = AI^2 + SI^2 = 2 \times 220^2 + 280^2 = 175\,200$$

$$AS = \sqrt{175\,200} = 20\sqrt{438}.$$

La longueur approximative des arêtes latérales de la pyramide de Kheops est donc de 419 coudées royales.

c. Patron de la pyramide de Khéops (échelle : 0,5 cm pour 80 coudées royales).



2.a. Si un mètre correspond environ à 1,9 coudées royales, alors :

- la hauteur de la pyramide de Kheops est : $h = \frac{280}{1,9} \approx 147$ m ;
- les arêtes latérales de la pyramide de Kheops mesurent : $l \approx \frac{419}{1,9} \approx 221$ m ;
- la largeur de la pyramide de Kheops est : $c = \frac{440}{1,9} \approx 232$ m.

b. le volume de la pyramide de Kheops est : $V = \frac{1}{3} \times c^2 \times h \approx \frac{1}{3} \times 232^2 \times 147 \approx 2\,637\,376$ m³.

3. a. Ci-contre une schématisation de la situation à main levée.

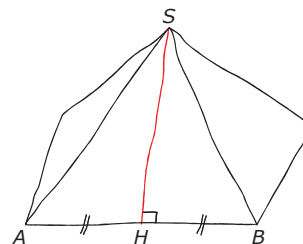
Dans le triangle ASH rectangle en H , d'après la propriété de Pythagore on a : $AS^2 = AH^2 + HS^2$;

donc : $HS^2 = AS^2 - AH^2 \approx 419^2 - 220^2 \approx 127\,161$ et $HS \approx 357$;

l'apothème mesure environ 357 coudées royales.

b. $\frac{\text{apothème}}{\text{demi - largeur}} = \frac{357}{220} \approx 1,62...$ approximation du nombre d'or.

c. $\frac{\text{demi - périmètre de la base}}{\text{hauteur}} = \frac{440 \times 2}{280} \approx 3,14...$ approximation de π .



CARGO

Collection de Mathématiques

3^e

Guide pédagogique

ISBN : 978-2-7531-0468-6

© Hachette Livre International 2014

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays. Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L. 122-4 et L. 122-5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ». Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

8 Racine carrée

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Racine carrée d'un nombre positif [1 p 99]	20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27	52, 53,	
2	Opérations sur les racines carrées [2 p 99]	36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51	54, 55, 56, 57	59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69
	Apprendre à réduire des expressions comportant des radicaux [1 p 100]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10		
3	Valeur exacte ou encadrement d'une racine carrée [3 p 99]	28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35	58	63, 68, 69
	Apprendre à trouver la valeur d'une racine carrée [2 p 101]	11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer Art géométrique

1. Aire du carré bleu : 16 dm²,
 aire du carré orange : 8 dm²,
 aire du carré vert : 4 dm²,
 aire du carré jaune : 2 dm²,
 aire du carré rouge : 1 dm².

2.a. L'aire d'un carré, dont le côté mesure a (dm), est égale à a^2 (dm²).
 b.c. Les côtés des carrés bleu, vert et rouge mesurent respectivement 4 dm, 2 dm et 1 dm.

3.a. Les côtés des carrés orange et jaune mesurent (sur le dessin) $\approx 2,8$ dm et $\approx 1,4$ dm.
 b. On vérifie que : $2,8^2 \approx 8$ et $1,4^2 \approx 2$.
 Les valeurs obtenues ne sont pas des valeurs exactes.

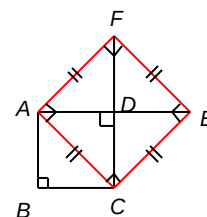
1 Racine carrée de 2

1. ABCD est un carré, dont le côté mesure 1 dm.
 ACEF est un carré, dont les diagonales se coupent en D.

2.a. Aire du carré ABCD : 1 dm².
 b. Aire du triangle ADC : 0,5 dm².
 c. Aire du carré ACEF : $4 \times 0,5 = 2$ dm².

3.a. La longueur $d = AC$ est (mesure effectuée sur une figure soignée) comprise entre 1,4 dm et 1,5 dm.
 b. D'après la propriété de Pythagore, on doit avoir $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.
 c. Si $d = 1,4$ alors $d^2 = 1,96$; si $d = 1,5$ alors $d^2 = 2,25$.
 Constat : il est impossible d'écrire d sous la forme d'un nombre décimal (ou rationnel) ;
 la valeur exacte de d s'appelle la racine carrée de 2 et se note $\sqrt{2}$.

d. On a : $(\sqrt{2})^2 = 2$.



2 Propriétés des racines carrées

A Observer avec des exemples

1.a.

n	p	$\sqrt{n}$	$\sqrt{p}$	$\sqrt{n} \times \sqrt{p}$	$n \times p$	$\sqrt{n \times p}$
4	9	2	3	6	36	6
36	4	6	2	12	144	12
16	25	4	5	20	400	20

b. On constate que : $\sqrt{n} \times \sqrt{p} = \sqrt{n \times p}$.

2.a.

n	p	$\sqrt{n}$	$\sqrt{p}$	$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}}$	$\frac{n}{p}$	$\sqrt{\frac{n}{p}}$
36	9	6	3	2	4	2
64	16	8	4	2	4	2
100	25	10	5	2	4	2

b. On constate que : $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{n}{p}}$.

B Conjecture des propriétés

n et p désignant deux nombres réels positifs, on a : $\sqrt{n} \times \sqrt{p} = \sqrt{n \times p}$ (propriété 1) ;

si $p \neq 0$, $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{n}{p}}$ (propriété 2).

C Observer avec des contre-exemples

n	p	$\sqrt{n}$	$\sqrt{p}$
16	9	4	3
25	16	5	4
13	12	$\approx 3,6$	$\approx 3,4$

$\sqrt{n} + \sqrt{p}$	$n + p$	$\sqrt{n + p}$
7	25	5
9	41	$\approx 6,4$
≈ 7	25	5

$\sqrt{n} - \sqrt{p}$	$n - p$	$\sqrt{n - p}$
1	7	$\approx 2,6$
1	9	3
$\approx 0,2$	1	1

On en conclut que pour deux nombres réels positifs n et p (tels que $n > p$) on a : $\sqrt{n} + \sqrt{p} \neq \sqrt{n + p}$ et $\sqrt{n} - \sqrt{p} \neq \sqrt{n - p}$.

3 Carrés parfaits

1. On considère la liste des nombres : 32 ; 48 ; 49 ; 81 ; 92 ; 121 ; 136 ; 169.

a. 49 ($=7^2$), 81 ($=9^2$), 121 ($=11^2$) et 169 ($=13^2$) sont les carrés parfaits de cette liste.

b. On a : $25 < 32 < 36$; $36 < 48 < 49$; $81 < 92 < 100$; $121 < 136 < 144$.

c. Donc : $5 < \sqrt{32} < 6$; $6 < \sqrt{48} < 7$; $9 < \sqrt{92} < 10$; $11 < \sqrt{136} < 12$.

2. Autres nombres qui sont des carrés parfaits : 1 ($=1^2$), 4 ($=2^2$), 9 ($=3^2$), 16 ($=4^2$), 25 ($=5^2$), 36 ($=6^2$), 64 ($=8^2$), 100 ($=10^2$), 144 ($=12^2$), 196 ($=14^2$), 225 ($=15^2$), 256 ($=16^2$), 289 ($=17^2$) ...

1 Apprendre à réduire des expressions comportant des radicaux

Exercice 1

- a. $\sqrt{12} = \sqrt{2 \times 2 \times 3} = \underline{2\sqrt{3}}$;
 b. $\sqrt{32} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \underline{4\sqrt{2}}$;
 c. $\sqrt{162} = \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2} = \underline{9\sqrt{2}}$;
 d. $\sqrt{10^3} = \sqrt{10 \times 10 \times 10} = \underline{10\sqrt{10}}$;
 e. $\sqrt{800} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 10 \times 10} = \underline{20\sqrt{2}}$;
 f. $\sqrt{175} = \sqrt{5 \times 5 \times 7} = \underline{5\sqrt{7}}$.

Exercice 2

- a. $\sqrt{15 \times 45} = \sqrt{3 \times 5 \times 9 \times 5} = \underline{15\sqrt{3}}$;
 b. $\sqrt{21 \times 14} = \sqrt{3 \times 7 \times 2 \times 7} = \underline{7\sqrt{6}}$;
 c. $\sqrt{24 \times 36} = \sqrt{4 \times 6 \times 4 \times 9} = \underline{12\sqrt{6}}$;
 d. $\sqrt{60 \times 40} = \sqrt{6 \times 10 \times 4 \times 10} = \underline{20\sqrt{6}}$;
 e. $\sqrt{50 \times 14} = \sqrt{2 \times 25 \times 2 \times 7} = \underline{10\sqrt{7}}$;
 f. $\sqrt{18 \times 48} = \sqrt{2 \times 9 \times 3 \times 16} = \underline{12\sqrt{6}}$.

Exercice 3

- a. $\sqrt{900} = \sqrt{9 \times 100} = 3 \times 10 = \underline{30}$;
 b. $\sqrt{6} \times \sqrt{54} = \sqrt{6 \times 6 \times 9} = 6 \times 3 = \underline{18}$;
 c. $\sqrt{5} \times \sqrt{125} = \sqrt{5 \times 5 \times 25} = 5 \times 5 = \underline{25}$.

Exercice 4

- a. $3\sqrt{6} - 5\sqrt{6} + 7\sqrt{6} = \underline{5\sqrt{6}}$;
 b. $\sqrt{4} \times \sqrt{7} + \sqrt{9} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = \underline{5\sqrt{7}}$;
 c. $8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 2 = \underline{3\sqrt{2} + 2}$;
 d. $5\sqrt{5} + \sqrt{4} - 2\sqrt{5} - 6 = \underline{3\sqrt{5} - 4}$.

Exercice 5

- a. $2\sqrt{12} - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{4 \times 3} - 4\sqrt{3} = \underline{0}$;
 b. $\sqrt{98} + \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 49} + \sqrt{2 \times 9} = 7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \underline{10\sqrt{2}}$;
 c. $5\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + \sqrt{25} = 5\sqrt{4 \times 5} - 3\sqrt{16 \times 5} + \sqrt{25}$
 $= 10\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 5 = \underline{5 - 2\sqrt{5}}$;
 d. $7\sqrt{7} + \sqrt{63} - \sqrt{112} = 7\sqrt{7} + \sqrt{7 \times 9} - \sqrt{7 \times 16}$
 $= 7\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} = \underline{6\sqrt{7}}$.

Exercice 6

- a. $5\sqrt{2} \times \sqrt{18} = 5\sqrt{2 \times 2 \times 9} = 5\sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{9} = \underline{30}$;
 b. $\sqrt{5} \times 2\sqrt{35} = 2\sqrt{5 \times 5 \times 7} = 2\sqrt{5 \times 5} \times \sqrt{7} = \underline{10\sqrt{7}}$;
 c. $\sqrt{10^3} \times 3\sqrt{10^2} = \sqrt{10^2} \times \sqrt{10} \times 3\sqrt{10^2} = \underline{300\sqrt{10}}$;
 d. $\sqrt{10^4} \times 2\sqrt{8} = 10^2 \times 2 \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = \underline{400\sqrt{2}}$.

Exercice 7

- a. $\sqrt{6} \times \sqrt{30} \times \sqrt{5} = \sqrt{6} \times (\sqrt{6} \times \sqrt{5}) \times \sqrt{5} = \underline{30}$;
 b. $\sqrt{45} \times 2\sqrt{30} = (\sqrt{5} \times \sqrt{9}) \times 2 \times (\sqrt{5} \times \sqrt{6}) = \underline{30\sqrt{6}}$;
 c. $\sqrt{5} \times \sqrt{7} \times \sqrt{70} = \sqrt{5} \times \sqrt{7} \times (\sqrt{5} \times \sqrt{7} \times \sqrt{2}) = \underline{35\sqrt{2}}$;
 d. $\sqrt{22} \times \sqrt{55} \times \sqrt{10} = \sqrt{2} \times \sqrt{11} \times \sqrt{5} \times \sqrt{11} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \underline{110}$.

Exercice 8

- a. $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = \underline{4}$; b. $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{63}{7}} = \sqrt{9} = \underline{3}$;
 c. $\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{162}{2}} = \sqrt{81} = \underline{9}$; d. $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}$;
 e. $\sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{36}} = \frac{11}{6}$; f. $\frac{1}{5} \times \sqrt{\frac{25}{81}} = \frac{1}{5} \times \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}$.

Exercice 9

- a. $4\sqrt{\frac{27}{16}} = 4 \times \frac{\sqrt{3 \times 9}}{\sqrt{16}} = \underline{3\sqrt{3}}$; b. $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{3 \times 6}{8 \times 6}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$;
 c. $\frac{12}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12} \times \sqrt{12}}{\sqrt{12}} = \underline{\sqrt{12}}$;
 d. $\frac{\sqrt{10^6}}{\sqrt{10^2}} = \sqrt{\frac{10^6}{10^2}} = \sqrt{10^4} = \underline{100}$;
 e. $\frac{\sqrt{10^5}}{\sqrt{10^4}} = \sqrt{\frac{10^5}{10^4}} = \underline{\sqrt{10}}$;
 f. $\sqrt{\frac{100 \times 10^5}{10^3}} = \sqrt{\frac{10^7}{10^3}} = \sqrt{10^4} = \underline{100}$.

Exercice 10

- $\sqrt{12 \times 100} = \sqrt{121} \times \sqrt{100} = 110$;
 - $\sqrt{10} \times \sqrt{40} = \sqrt{10 \times 10 \times 4} = 20$;
 - $\frac{\sqrt{10 \times 10^4}}{\sqrt{250}} = \sqrt{\frac{10 \times 10^4}{10 \times 25}} = \frac{100}{5} = 20$;
- donc : $\sqrt{10} \times \sqrt{40} = \frac{\sqrt{10 \times 10^4}}{\sqrt{250}} < \sqrt{12 \times 100}$.

2 Apprendre à trouver la valeur d'une racine carrée

Exercice 11

- a. $\sqrt{169} = \underline{13}$; b. $\sqrt{1\,444} = \underline{38}$;
c. $\sqrt{3\,025} = \underline{55}$; d. $\sqrt{400} = \underline{20}$;
e. $\sqrt{4\,900} = \underline{70}$; f. $\sqrt{3\,721} = \underline{61}$.

Exercice 12

- a. $\sqrt{12\,100} = \underline{110}$; b. $\sqrt{90\,000} = \underline{300}$;
c. $\sqrt{756\,900} = \underline{870}$; d. $\sqrt{250\,000} = \underline{500}$;
e. $\sqrt{792\,100} = \underline{890}$; f. $\sqrt{484 \times 10^4} = \underline{22 \times 10^2}$.

Exercice 13

- a. $\sqrt{0,16} = \underline{0,4}$; b. $\sqrt{2,25} = \underline{1,5}$;
c. $\sqrt{27,04} = \underline{5,2}$; d. $\sqrt{0,0036} = \underline{0,06}$;
e. $\sqrt{0,5184} = \underline{0,72}$; f. $\sqrt{0,0529} = \underline{0,23}$.

Exercice 14

- a. $\sqrt{2} \approx \underline{1,414}$; b. $\sqrt{5} \approx \underline{2,236}$;
c. $\sqrt{7} \approx \underline{2,646}$; d. $\sqrt{10} \approx \underline{3,162}$;
e. $\sqrt{15} \approx \underline{3,873}$; f. $\sqrt{23} \approx \underline{4,796}$.

Exercice 15

- a. $\sqrt{500} \approx \underline{22,360}$; b. $\sqrt{1\,300} \approx \underline{36,056}$;
c. $\sqrt{2\,200} \approx \underline{46,904}$; d. $\sqrt{90\,000} = \underline{300}$;
e. $\sqrt{140\,000} \approx \underline{374,166}$; e. $\sqrt{24 \times 10^4} \approx \underline{489,898}$.

Exercice 16

- a. $\sqrt{0,06} \approx \underline{0,245}$; b. $\sqrt{0,16} = \underline{0,4}$;
c. $\sqrt{0,17} \approx \underline{0,412}$; d. $\sqrt{0,0008} \approx \underline{0,028}$;
e. $\sqrt{0,0012} \approx \underline{0,035}$; f. $\sqrt{0,0021} \approx \underline{0,046}$.

Exercice 17

- a. $64 < 70 < 81$, donc : $\underline{8 < \sqrt{70} < 9}$;
b. $676 < 700 < 729$, donc : $\underline{26 < \sqrt{700} < 27}$;
c. $961 < 1\,000 < 1\,024$, donc : $\underline{31 < \sqrt{1\,000} < 32}$;
d. $36 < 38 < 49$, donc : $\underline{6 < \sqrt{38} < 7}$;
e. $529 < 545 < 576$, donc : $\underline{23 < \sqrt{545} < 24}$;
f. $1\,764 < 1\,830 < 1\,849$, donc : $\underline{42 < \sqrt{1\,830} < 43}$.

Exercice 18

- a. $53\,824 < 54\,000 < 54\,289$, donc :
 $\underline{232 < \sqrt{54\,000} < 233}$;
b. $22\,500 < 22\,512 < 22\,801$, donc :
 $\underline{150 < \sqrt{22\,512} < 151}$;
c. $139\,876 < 140 \times 10^3 < 140\,625$,
 $\underline{374 < \sqrt{140 \times 10^3} < 375}$.

Exercice 19

$\sqrt{2} + \sqrt{8} \approx 4,24$ et $\sqrt{3} + \sqrt{7} \approx 4,38$ (arrondis au centième).
On a $\sqrt{2} + \sqrt{8} \neq \sqrt{3} + \sqrt{7}$; donc un quadrilatère, dont deux côtés opposés mesurent (en cm) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ et $\sqrt{3} + \sqrt{7}$, ne peut pas être un parallélogramme.

Activités d'application

Définition de la racine carrée

Exercice 20

- 71, 64, 1, 0 et 0,09 (nombres positifs) admettent une racine carrée.
- $\sqrt{71}$ n'est pas un nombre décimal ;
 $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{0,09} = 0,3$.

Exercice 21

- Il est vrai que «la racine carrée de 4 est égale à 2» ; en effet : 2 est positif et $2^2 = 4$.
- Il est faux que «2 est le seul nombre dont le carré est égal à 4» ; en effet $(-2)^2 = 4$.
- Il est faux que «-4 est la racine carrée de -16» ; en effet -16, nombre négatif, n'a pas de racine carrée ; de plus -4, nombre négatif, ne peut pas être une racine carrée.
- Il est vrai que « $\sqrt{3}$ est la valeur exacte de la racine carrée de 3» ; en effet $(\sqrt{3})^2 = 3$.
- Il est faux que «1,41 est la valeur exacte de la racine carrée de 2» ; en effet $1,41^2 = 1,9881 \neq 2$.
- Il est faux que «la racine carrée de 5 est égale à 25» ; en effet $25^2 \neq 5$.

Exercice 22

- $(\sqrt{13})^2 = 13$;
- $\sqrt{99} \times \sqrt{99} = 99$;
- $(\sqrt{10^2})^2 = 10^2$;
- $\sqrt{0^2} = 0$;
- $\sqrt{0,2^2} = 0,2$;
- $\sqrt{\pi^2} = \pi$.

Exercice 23

- $(2\sqrt{11})^2 = 2^2 \times (\sqrt{11})^2 = 44$;
- $2\sqrt{11^2} = 2 \times 11 = 22$;
- $(\sqrt{5})^4 = (\sqrt{5})^2 \times (\sqrt{5})^2 = 25$;
- $(\sqrt{2^2})^3 = 2^3 = 8$;
- $\frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3}{2}$;
- $\frac{(\sqrt{7})^2}{(\sqrt{10})^2} = \frac{7}{10}$.

Utilisation de tables

Exercice 28

- $\sqrt{196} = 14$;
- $\sqrt{625} = 25$;
- $\sqrt{3\,969} = 63$;
- $\sqrt{57\,600} = 240$;
- $\sqrt{160\,000} = 400$;
- $\sqrt{37,21 \times 10^4} = 6,1 \times 10^2$.

Exercice 24

Kinjo n'a pas raison.

En effet, lorsque n est un nombre négatif, $\sqrt{n^2} = -n$.

Exercice 25

- 36 est un carré parfait, car $\sqrt{36} = 6$;
- 32 n'est pas un carré parfait, car $5 < \sqrt{32} < 6$;
- 48 n'est pas un carré parfait, car $6 < \sqrt{48} < 7$;
- 0,4 n'est pas un carré parfait, car $0,4 \notin \mathbb{N}$;
- 0 est un carré parfait, car $\sqrt{0} = 0$;
- 0,16 n'est pas un carré parfait, car $0,16 \notin \mathbb{N}$;
- 121 est un carré parfait, car $\sqrt{121} = 11$;
- 10 000 est un carré parfait, car $\sqrt{10\,000} = 100$.

Exercice 26

- $\sqrt{49} = 7$;
- $\sqrt{10^4} = 100$;
- $\sqrt{144} = 12$;
- $\sqrt{169} = 13$;
- $\sqrt{0,01} = 0,1$;
- $\sqrt{0,64} = 0,8$;
- $\sqrt{3\,600} = 60$;
- $\sqrt{1,21} = 1,1$.

Exercice 27

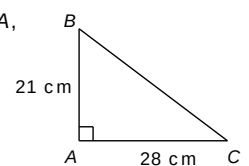
- Pour les 64 bonbons jaunes, Ngu pourra faire 8 paquets de 8 bonbons ; elle utilisera tous les bonbons jaunes.
 Pour les 81 bonbons verts, Ngu pourra faire 9 paquets de 9 bonbons ; elle utilisera tous les bonbons verts.
- Pour les 76 bonbons rouges, Ngu pourra faire 8 paquets de 8 bonbons ; il lui restera 12 bonbons rouges.
 Pour les 104 bonbons mauves, Ngu pourra faire 10 paquets de 10 bonbons ; il lui restera 4 bonbons mauves.

Exercice 29

- Dans le triangle ABC, rectangle en A, on a (propriété de Pythagore) :
 $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

b. $BC^2 = 21^2 + 28^2 = 1\,225$;

$BC = \sqrt{1\,225} = 35$ cm.



Exercice 30

- a. $\sqrt{0,49} = 0,7$; b. $\sqrt{3,61} = 1,9$;
 c. $\sqrt{30,25} = 5,5$; d. $\sqrt{0,0081} = 0,09$;
 e. $\sqrt{0,0441} = 0,21$; f. $\sqrt{0,7225} = 0,85$.

Exercice 31

- a. $\sqrt{8} \approx 2,83$; b. $\sqrt{13} \approx 3,61$; c. $\sqrt{17} \approx 4,12$;
 d. $\sqrt{200} = \sqrt{2 \times 100} = \sqrt{2} \times \sqrt{100} \approx 1,414 \times 10 \approx 14,14$;
 e. $\sqrt{1\,000} = \sqrt{10 \times 100} = \sqrt{10} \times \sqrt{100} \approx 3,162 \times 10 \approx 31,62$;
 f. $\sqrt{70\,000} = \sqrt{7 \times 10\,000} = \sqrt{7} \times \sqrt{10\,000} \approx 2,645\,75 \times 100 \approx 264,58$.

Exercice 32

- a. $\sqrt{0,02} = \sqrt{\frac{2}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{100}} \approx \frac{1,414\,2}{10} \approx 0,141$;
 b. $\sqrt{0,19} = \sqrt{\frac{19}{100}} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{100}} \approx \frac{4,358\,9}{10} \approx 0,436$;
 c. $\sqrt{0,5} = \sqrt{\frac{50}{100}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{100}} \approx \frac{7,071\,1}{10} \approx 0,707$;
 d. $\sqrt{0,0035} = \sqrt{\frac{35}{10\,000}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10\,000}} \approx \frac{5,916\,1}{100} \approx 0,059$;
 e. $\sqrt{0,004} = \sqrt{\frac{40}{10\,000}} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10\,000}} \approx \frac{6,324\,6}{100} \approx 0,063$;
 f. $\sqrt{0,0007} = \sqrt{\frac{7}{10\,000}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10\,000}} \approx \frac{2,645\,8}{100} \approx 0,026$.

Propriétés des racines carrées

Exercice 36

- a. $\sqrt{124} < \sqrt{235}$; b. $\sqrt{17} < \sqrt{17,05}$;
 c. $2\sqrt{4} < 4\sqrt{4}$; d. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$.

Justification : si $0 < x < y$ alors $\sqrt{x} < \sqrt{y}$;

Exercice 37

- a. $(\sqrt{17})^2 = 17$ et $(3\sqrt{2})^2 = 18$, donc : $\sqrt{17} < 3\sqrt{2}$;
 b. $(7\sqrt{3})^2 = 147$ et $(4\sqrt{5})^2 = 80$, donc : $7\sqrt{3} > 4\sqrt{5}$.
 c. $(3\sqrt{72})^2 = 648$ et $(6\sqrt{18})^2 = 648$, donc : $3\sqrt{72} = 6\sqrt{18}$;
 d. $(4\sqrt{13})^2 = 208$ et $(9\sqrt{2})^2 = 162$, donc : $4\sqrt{13} > 9\sqrt{2}$.

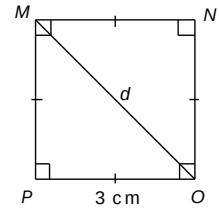
Exercice 38

- a. $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$; b. $\sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}$;
 c. $\sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = 10\sqrt{3}$; d. $\sqrt{243} = \sqrt{81 \times 3} = 9\sqrt{3}$;
 e. $\sqrt{147} = \sqrt{49 \times 3} = 7\sqrt{3}$; f. $\sqrt{1\,200} = \sqrt{400 \times 3} = 20\sqrt{3}$.

Exercice 33

La mesure d de la diagonale d'un carré de côté 3 cm est égale à : $\sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ cm.

Arrondie de cette mesure au dixième : $d \approx 4,2$ cm.



Exercice 34

1. En utilisant la table des carrés ou une calculatrice :

- a. $\sqrt{324} < \sqrt{360} < \sqrt{361}$, donc : $18 < \sqrt{360} < 19$;
 b. $\sqrt{484} < \sqrt{500} < \sqrt{529}$, donc : $22 < \sqrt{500} < 23$;
 c. $\sqrt{841} < \sqrt{850} < \sqrt{900}$, donc : $29 < \sqrt{850} < 30$.

2. a. $\sqrt{360} \approx 19$, car 360 est « plus proche de 361 » ;
 b. $\sqrt{500} \approx 22$, car 500 est « plus proche de 484 » ;
 c. $\sqrt{850} \approx 29$, car 850 est « plus proche de 841 ».
 (Cette « méthode » n'est à utiliser qu'en l'absence de calculatrice.)

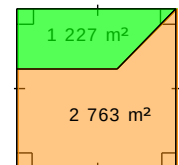
Exercice 35

Aire totale du terrain : $1\,227 + 2\,763 = 3\,990$ m².

Mesure du côté de ce terrain :

$c = \sqrt{3\,990} \approx 63,166...$ m.

Donc : $63 < c < 64$.



Exercice 39

- a. $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$; b. $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$;
 c. $\sqrt{275} = \sqrt{25 \times 11} = 5\sqrt{11}$;
 d. $\sqrt{1\,500} = \sqrt{100 \times 15} = 10\sqrt{15}$;
 e. $\sqrt{324} = \sqrt{9 \times 36} = 18$; f. $\sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5}$.

Exercice 40

- a. $\sqrt{10^3} = \sqrt{10^2 \times 10} = 10\sqrt{10}$;
 b. $\sqrt{10^2 \times 10^5} = \sqrt{10^6 \times 10} = 10^3\sqrt{10}$;
 c. $\sqrt{9 \times 27} = \sqrt{9 \times 9 \times 3} = 9\sqrt{3}$;
 d. $\sqrt{28 \times 35} = \sqrt{4 \times 7 \times 7 \times 5} = 14\sqrt{5}$;
 e. $\sqrt{15 \times 12 \times 10} = \sqrt{3 \times 5 \times 3 \times 4 \times 5 \times 2} = 30\sqrt{2}$;
 f. $\sqrt{24 \times 66} = \sqrt{4 \times 6 \times 6 \times 11} = 12\sqrt{11}$.

Exercice 41

$\sqrt{256} = 16$. Liste des nombres égaux à $\sqrt{256}$:

$2\sqrt{64}$; $16\sqrt{1}$; $4\sqrt{16}$; $4\sqrt{64}$; $8\sqrt{4}$.

Justifications : $2\sqrt{128} = \sqrt{4 \times 128} = \sqrt{512} \neq \sqrt{256}$;

$$2\sqrt{64} = 2 \times 8 = \sqrt{256} ;$$

$$4\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 32} = \sqrt{512} \neq \sqrt{256} ;$$

$$16\sqrt{1} = 16 = \sqrt{256} ;$$

$$4\sqrt{16} = 4 \times 4 = 16 = \sqrt{256} ;$$

$$\sqrt{2^8} = \sqrt{2^4 \times 2^4} = 2^4 = 16 = \sqrt{256} ;$$

$$4\sqrt{64} = 4 \times 8 = 32 \neq \sqrt{256} ;$$

$$8\sqrt{4} = 8 \times 2 = 16 = \sqrt{256} .$$

Exercice 42

Différentes écritures de $\sqrt{72}$:

$$\sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} ;$$

$$6\sqrt{2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} ;$$

$$3\sqrt{8} = \sqrt{9} \times \sqrt{8} .$$

Exercice 43

a. $2\sqrt{7} + 5\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$;

b. $4\sqrt{6} + 4 - 7\sqrt{6} = 4 - 3\sqrt{6}$;

c. $2\sqrt{8} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{4 \times 2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$;

d. $\sqrt{75} + 3\sqrt{12} - 4\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$;

e. $5\sqrt{28} - 3\sqrt{63} = 10\sqrt{7} - 9\sqrt{7} = \sqrt{7}$;

f. $\sqrt{50} - 6 - 3\sqrt{18} + \sqrt{4} = 5\sqrt{2} - 6 - 9\sqrt{2} + 2 = -4 - 4\sqrt{2}$.

Exercice 44

Périmètre du carré de côté $3\sqrt{2}$: $12\sqrt{2}$;

périmètre de l'hexagone régulier de côté $\sqrt{8}$: $6\sqrt{8}$;

donc les deux périmètres sont égaux.

Exercice 45

a. $2\sqrt{14} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} = 14\sqrt{2}$;

b. $4\sqrt{12} \times 4 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{4} \times \sqrt{3} \times 4 \times \sqrt{3} = 96$;

c. $2\sqrt{15} \times 5\sqrt{20} = 2\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times 5\sqrt{4} \times \sqrt{5} = 100\sqrt{3}$;

d. $\sqrt{27} \times \sqrt{48} \times \sqrt{32} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} \times \sqrt{16} \times \sqrt{3} \times \sqrt{16} \times \sqrt{2}$
 $= 144\sqrt{2}$.

Exercice 46

Aire du rectangle de côtés $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{10}$:

$$3\sqrt{2} \times 2\sqrt{10} = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{5} = 12\sqrt{5} .$$

Exercice 47

a. $\sqrt{3}(4\sqrt{3} + 3) = 4\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 12 + 3\sqrt{3}$;

b. $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{12}) = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} + \sqrt{3} \times \sqrt{4} = 6 + 2\sqrt{3}$;

c. $-\sqrt{7}(\sqrt{7} - 4) = 4\sqrt{7} - 7$;

d. $(3\sqrt{5} + \sqrt{15})(2\sqrt{5}) = 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} + 2\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$
 $= 30 + 10\sqrt{3}$.

Exercice 48

a. $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{9} = 3$;

b. $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{5 \times 5 \times 3}{5 \times 3 \times 3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$;

c. $\frac{23}{\sqrt{23}} = \sqrt{23}$; d. $\frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$;

e. $\frac{\sqrt{105}}{\sqrt{28}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{7}}{\sqrt{4} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$;

f. $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{16} \times \sqrt{2}}{6} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Exercice 49

a. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$;

b. $(5 + \sqrt{7})^2 = 25 + 2 \times 5 \times \sqrt{7} + 7 = 32 + 10\sqrt{7}$;

c. $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{5} \times \sqrt{2} + 2 = 7 - 2\sqrt{10}$;

d. $(3 + \sqrt{11})^2 = 9 + 2 \times 3 \times \sqrt{11} + 11 = 20 + 6\sqrt{11}$;

e. $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$;

f. $(\sqrt{5} - \sqrt{13})(\sqrt{5} + \sqrt{13}) = 5 - 13 = -8$.

Exercice 50

Largeur d'un rectangle d'aire 36 cm^2 et de longueur

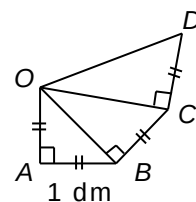
$$4\sqrt{3} \text{ cm} : \frac{36}{4\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \text{ cm} .$$

Exercice 51

$$OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ dm} ;$$

$$OC = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} \text{ dm} ;$$

$$OD = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ dm} .$$



Exercice 52 Existence d'une racine carrée

1. Nombres dont la racine carrée existe :

$$5 ; 2 - \sqrt{3} ; \left(2 - \sqrt{10}\right)^2 \quad (\text{nombres réels positifs}).$$

Nombres dont la racine carrée n'existe pas :

$$-3 ; 2 - \sqrt{8} ; \sqrt{5} - 3 \quad (\text{nombres réels négatifs}).$$

2. n désigne un nombre réel positif et p un nombre réel négatif ; nombres dont la racine carrée existe :

$$n ; -p ; (-n)^2 \quad (\text{nombres réels positifs}).$$

nombres dont la racine carrée n'existe pas :

$$p ; p - n ; \frac{n}{p} \quad (\text{nombres réels négatifs}).$$

Exercice 53 Utiliser correctement une propriété

1.a. Lorsque a est un nombre réel positif, $\sqrt{a^2} = a$.

b. $(-a)^2 = (-a) \times (-a) = a \times a = a^2$.

2.a. Il est faux que $\sqrt{(-3)^2} = -3$;

$$\text{en effet : } \sqrt{(-3)^2} = 3.$$

b. Il est vrai que $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} = \sqrt{7} - 2$.

c. Il est vrai que $\sqrt{(\sqrt{8} - 2)^2} = \sqrt{8} - 2$.

d. Il est faux que $\sqrt{(5 - \sqrt{30})^2} = 5 - \sqrt{30}$;

$$\text{en effet : } \sqrt{(5 - \sqrt{30})^2} = \sqrt{30} - 5.$$

Exercice 54 Opérations sur les racines carrées

$$\sqrt{36 - 11} = 5 = \sqrt{4} + \sqrt{9} ;$$

$$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} = \sqrt{26} \times \sqrt{0,5} ;$$

$$\sqrt{(-9)^2} = 9 = \sqrt{9^2} ;$$

$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3} = \sqrt{75 - 48} ;$$

$$\sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} = \sqrt{5} \times \sqrt{1}.$$

Exercice 55 Des erreurs fréquentes

$$\sqrt{4 + 12} = \sqrt{4 + 12} = 2 + 12 = 14.$$

$$\sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4.$$

$$\sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7.$$

$$\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} = 2 - \sqrt{7} \text{ car } \sqrt{a^2} = a.$$

$$\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} = \sqrt{7} - 2 \text{ car } \sqrt{a^2} = a, \text{ si } a > 0, \\ \sqrt{a^2} = -a, \text{ si } a < 0.$$

Exercice 56 Extraire un nombre du radical

1. a et b désignent deux nombres réels positifs.

D'après la propriété du §2 (page 99) « $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ »,

$$\text{on a : } \sqrt{a^2 \times b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} ;$$

d'après l'une des propriétés du §1 (page 99) « $\sqrt{a^2} = a$ »,

$$\text{on a : } \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}.$$

$$2. \sqrt{588} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 7^2} \\ = \sqrt{(2 \times 7)^2 \times 3} = 2 \times 7 \times \sqrt{3} = 14\sqrt{3}.$$

$$3.a. \sqrt{605} = \sqrt{5 \times 11 \times 11} = \sqrt{5 \times 11^2} = 11\sqrt{5} ;$$

$$b. \sqrt{108} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 3^2} \\ = \sqrt{(2 \times 3)^2 \times 3} = 2 \times 3 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3} ;$$

$$c. \sqrt{5\,200} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 13} = \sqrt{4^2 \times 5^2 \times 13} \\ = \sqrt{(4 \times 5)^2 \times 13} = 4 \times 5 \times \sqrt{13} = 20\sqrt{13}.$$

Exercice 57 Sans radical au dénominateur

$$1.a. \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{6\sqrt{3} \times \sqrt{12}}{\sqrt{12} \times \sqrt{12}} = \frac{6\sqrt{36}}{12} = \frac{6 \times 6}{2 \times 6} = 3 ;$$

$$b. \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{7} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{14}}{2} ;$$

$$c. \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{4\sqrt{5} \times \sqrt{8}}{\sqrt{8} \times \sqrt{8}} = \frac{4\sqrt{5} \times \sqrt{4} \times \sqrt{2}}{8} = \frac{8\sqrt{10}}{8} = \sqrt{10}.$$

$$2.a. \frac{3}{\sqrt{3} + 1} = \frac{3 \times (\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3\sqrt{3} - 3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3} - 3}{2} ;$$

$$b. \frac{5}{\sqrt{6} + 2} = \frac{5 \times (\sqrt{6} - 2)}{(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)} = \frac{5\sqrt{6} - 10}{(\sqrt{6})^2 - 2^2} = \frac{5\sqrt{6} - 10}{2} ;$$

$$c. \frac{4}{2 - \sqrt{2}} = \frac{4 \times (2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{2^2 - (\sqrt{2})^2} \\ = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{2} = 4 + 2\sqrt{2}.$$

Exercice 58 Encadrement et arrondi

$$1.a. \quad 37 < \sqrt{1\,412} < 38.$$

b. $37,5^2 = 1\,406,25$, donc :

$$\bullet 37,5^2 < 1\,412,$$

$$\bullet \text{l'arrondi à l'unité de } \sqrt{1\,412} \text{ est } 38.$$

$$2.a. \sqrt{141\,200} = \sqrt{1\,412 \times 100} = 10\sqrt{1\,412},$$

$$\text{donc : } 370 < \sqrt{141\,200} < 380.$$

b. $375^2 = 140\,525$ et $376^2 = 141\,376$, donc :

$$375 < \sqrt{141\,200} < 376.$$

Exercice 59 Dans le cube

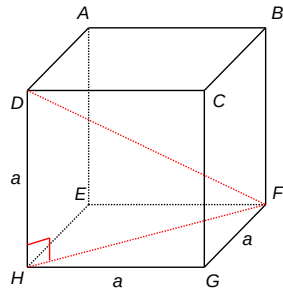
$ABCDEFGH$ est un cube de côté a .

a. D'après la propriété de Pythagore dans le triangle HGF rectangle en G , on a :

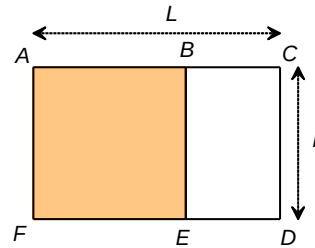
$$HF = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

b. D'après la propriété de Pythagore dans le triangle DHF rectangle en H , on a :

$$DF = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}.$$



Exercice 61 Rectangle et nombre d'or



Sur la figure ci-dessus, $ACDF$ est un rectangle et $ABEF$ est un carré.

a. Si $FD = L$ et $FE = l$, alors $ED = L - l$;

si $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{ED}$, alors $\frac{L}{l} = \frac{l}{L - l}$.

b. Le nombre d'or est une valeur particulière de $\frac{L}{l}$:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,62.$$

c. Un rectangle d'or, de 10 cm de largeur, doit avoir pour

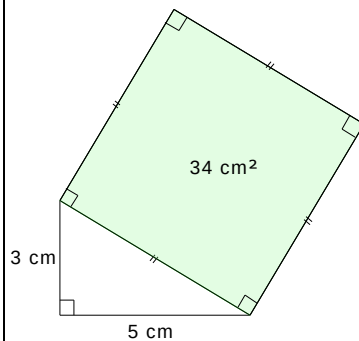
longueur : $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \times 10 \approx 162 \text{ mm}$.

Exercice 60 Carré à construire

Comme $34 = 25 + 9$,

on a : $\sqrt{34} = \sqrt{5^2 + 3^2}$.

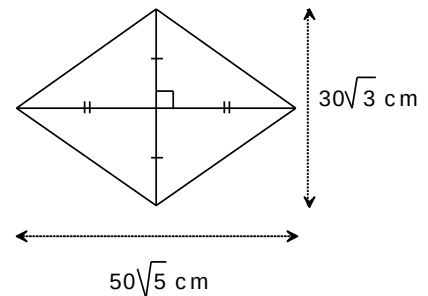
On en déduit que le côté d'un carré, d'aire égale à 34 cm^2 , a la même longueur que l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit mesurent 5 cm et 3 cm.



Pour tracer un carré d'aire égale à 34 cm^2 :

- construire un triangle rectangle, dont les côtés mesurent 5 cm et 3 cm ;
- construire un carré, dont la mesure du côté est égale à celle de l'hypoténuse du triangle rectangle.

Exercice 62 Le cerf-volant



Périmètre du cerf-volant :

$$4\sqrt{(15\sqrt{3})^2 + (25\sqrt{5})^2} = 4\sqrt{675 + 3125} = 4\sqrt{3800} = 40\sqrt{38} \text{ cm}.$$

Aire du tissu nécessaire :

$$4 \times \frac{15\sqrt{3} \times 25\sqrt{5}}{2} = 750\sqrt{15} \text{ cm}^2.$$

Exercice 63 Des nombres entiers

$$\begin{aligned} \text{a. } N &= 2\sqrt{75} - \sqrt{108} = 2\sqrt{25 \times 3} - \sqrt{36 \times 3} \\ &= 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= 2\sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{9 \times 3} - \sqrt{16 \times 3} \\ &= 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

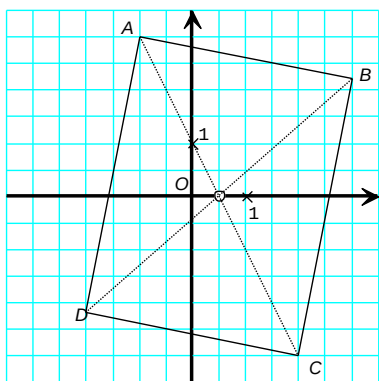
$$\text{b. } N \times P = 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 24 ; \quad \frac{N}{P} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 2.$$

$$\text{c. } 6 < N < 7.$$

Exercice 64 Racine carrée et nombre premier

$$A = 3\sqrt{243} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{81 \times 3} - 2\sqrt{3} = 27\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 25\sqrt{3}.$$

Exercice 65 Racines carrées et coordonnées



Dans le repère orthonormé ci-contre, on a :

$$A(-1 ; 3),$$

$$B(3 ; \sqrt{5}),$$

$$C(2 ; -3),$$

$$D(-2 ; -\sqrt{5}).$$

1. Les coordonnées du milieu I de [AC] sont :

$$\left(\frac{-1+2}{2} ; \frac{3-3}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} ; 0 \right) ;$$

les coordonnées du milieu J de [BD] sont :

$$\left(\frac{3-2}{2} ; \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} ; 0 \right).$$

2. On en déduit que le quadrilatère ABCD, dont les diagonales se coupent en leur milieu, est un parallélogramme.

$$\begin{aligned} \text{3.a. } AC &= \sqrt{[2 - (-1)]^2 + [-3 - 3]^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{[-2 - 3]^2 + [-\sqrt{5} - \sqrt{5}]^2} = \sqrt{5^2 + 2^2 \times 5} \\ &= \sqrt{25 + 20} = \sqrt{45}. \end{aligned}$$

b. On en déduit que le parallélogramme ABCD, dont les diagonales ont la même longueur, est un rectangle.

Exercice 66 Vrai ou faux ?

a. « $\sqrt{(-2)^2} = 2$ » est une égalité vraie.

b. « $\sqrt{0,025} - \sqrt{6,4} = \frac{-3}{4\sqrt{10}}$ » est une égalité fausse ;

en effet :

$$\begin{aligned} \bullet \sqrt{0,025} - \sqrt{6,4} &= \sqrt{\frac{25}{1\,000}} - \sqrt{\frac{6\,400}{1\,000}} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{6\,400}}{\sqrt{1\,000}} \\ &= \frac{5 - 80}{10\sqrt{10}} = \frac{-75}{10\sqrt{10}} = \frac{-7,5}{\sqrt{10}} ; \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{-3}{4\sqrt{10}} = \frac{-0,75}{\sqrt{10}}.$$

c. « $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 9$ » est une égalité fausse ;

en effet : $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$.

Exercice 67 Questionnaire à choix multiples

$$1. A = \sqrt{[2 - \sqrt{5}]^2} = -2 + \sqrt{5} ; \text{ en effet : } \sqrt{5} > 2.$$

$$2. \text{ Si } B = \sqrt{3} + 2\sqrt{123}, \text{ alors } B^2 = 495 + 4\sqrt{369} ;$$

$$\begin{aligned} \text{en effet : } (\sqrt{3} + 2\sqrt{123})^2 &= 3 + 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{123} + 4 \times 123 \\ &= 3 + 492 + 4\sqrt{3 \times 123} \\ &= 495 + 4\sqrt{369}. \end{aligned}$$

$$3. C = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = 6 - \sqrt{35} ;$$

$$\begin{aligned} \text{en effet : } \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} &= \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} = \frac{7 - 2\sqrt{7} \times \sqrt{5} + 5}{7 - 5} \\ &= \frac{12 - 2\sqrt{35}}{2} = 6 - \sqrt{35}. \end{aligned}$$

Exercice 68 Les boîtes en carton

1.a. Contenance

de la boîte A : $1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$;

de la boîte C : $3 \text{ dm}^3 = 3\,000 \text{ cm}^3$;

de la boîte B : $2 \text{ dm}^3 = 2\,000 \text{ cm}^3$;

de la boîte D : $4 \text{ dm}^3 = 4\,000 \text{ cm}^3$.

b. Si toutes les boîtes ont une hauteur de 10 cm, aire de la base carrée :

de la boîte A : 100 cm^2 ;

de la boîte C : 300 cm^2 ;

de la boîte B : 200 cm^2 ;

de la boîte D : 400 cm^2 .

c. Longueur exacte du côté de la base carrée :

de la boîte A : 10 cm ;

de la boîte C : $10\sqrt{3}$ cm ;

de la boîte B : $10\sqrt{2}$ cm ;

de la boîte D : 20 cm.

d. Valeur décimale, exacte ou arrondie au dixième de cm, du côté de la base carrée :

de la boîte A : 10 cm ;

de la boîte C : $\approx 17,3$ cm ;

de la boîte B : $\approx 14,1$ cm ;

de la boîte D : 20 cm.

2.a. Si toutes les boîtes ont une hauteur de 20 cm, aire de la base carrée :

de la boîte E : 50 cm^2 ;

de la boîte G : 150 cm^2 ;

de la boîte F : 100 cm^2 ;

de la boîte H : 200 cm^2 .

b. Longueur exacte du côté de la base carrée :

de la boîte E : $\sqrt{50}$ cm ;

de la boîte G : $\sqrt{150}$ cm ;

de la boîte F : 10 cm ;

de la boîte H : $\sqrt{200}$ cm.

c. Valeur décimale, exacte ou arrondie au dixième de cm, du côté de la base carrée :

de la boîte E : $\approx 7,1$ cm ;

de la boîte G : $\approx 12,2$ cm ;

de la boîte F : 10 cm ;

de la boîte H : $\approx 14,1$ cm.

Exercice 69 Le mobile

1. Si $\mathcal{A}$ est l'aire du disque A, alors les aires des disques B, C et D sont respectivement égales à $2\mathcal{A}$, $3\mathcal{A}$ et $4\mathcal{A}$.

2. On appelle a , b , c et d les rayons respectifs des disques A, B, C et D.

a. L'aire de A est égale à πa^2 ; l'aire de B est égale à πb^2 ; donc : $\pi b^2 = 2\pi a^2$ et $b = a\sqrt{2}$.

b. De la même façon : $\pi c^2 = 3\pi a^2$ et $C = a\sqrt{3}$; $\pi d^2 = 4\pi a^2$ et $d = 2a$.

3. Si le cercle A a pour rayon 1 cm, alors le rayon du disque B est égal à $\sqrt{2} \approx 1,4$ cm,

le rayon du disque C est égal à $\sqrt{3} \approx 1,7$ cm,

le rayon du disque D est égal à 2 cm.

4. Si le cercle D a pour rayon 6 cm, alors le rayon du disque A est égal à 3 cm,

le rayon du disque B est égal à $3\sqrt{2} \approx 4,2$ cm,

le rayon du disque C est égal à $3\sqrt{3} \approx 5,2$ cm.

9 Nombres réels

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Ensemble des nombres réels [1 p 110]	21, 22,	53	
2	Intervalles de $\mathbb{R}$ [2 p 110]	23, 24, 25, 26, 27, 28	54	60
3	Propriétés des inégalités [3 p 110]	29, 30		
4	Comparaison de nombres réels [4 p 111]	31, 32, 33, 34, 35, 36	55, 56	61, 70
	Apprendre à comparer des nombres réels [1 p 112]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13		
5	Principes d'encadrement [5 p 111]	37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46	57, 58, 59	62, 63, 65, 66, 67, 69, 71, 72
	Apprendre à encadrer des nombres réels [2 p 113]	14, 15, 16, 17, 18, 19, 20		
	Valeur absolue [6 p 111]	47, 48, 49, 50, 51, 52		64, 68

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer Au marché

- 1.a. Encadrement du prix de chaque produit :
- $$280 \text{ F CFA} \leq R(1 \text{ kg de riz}) \leq 320 \text{ F CFA}$$
- $$240 \text{ F CFA} \leq PDT(1 \text{ kg de pomme de terre}) \leq 280 \text{ F CFA}$$
- $$550 \text{ F CFA} \leq M(1 \text{ kg de maquereau}) \leq 650 \text{ F CFA}$$
- $$2\,500 \text{ F CFA} \leq B(1 \text{ kg de bœuf}) \leq 2\,900 \text{ F CFA}.$$
- b. Encadrement du coût total T des achats de Fatou :
- $$10 \times 280 + 10 \times 240 + 3 \times 550 + 2 \times 2\,500 \leq 10R + 10PDT + 3M + 2B \leq 10 \times 320 + 10 \times 280 + 3 \times 650 + 2 \times 2\,900$$
- $$2\,800 + 2\,400 + 1\,650 + 5\,000 \leq T \leq 3\,200 + 2\,800 + 1\,950 + 5\,800$$
- $$11\,850 \text{ F CFA} \leq T \leq 13\,750 \text{ F CFA}.$$
- c. Avec 13 000 F CFA, Fatou n'a pas assez d'argent pour acheter tous les produits de la meilleure qualité.
- d. En choisissant le prix minimal pour chaque produit, il lui restera après ses achats : $13\,000 - 11\,850 = 1\,150 \text{ F CFA}$.
- 2.a. Avec 10% de réduction sur les prix, au kg, du maquereau et du bœuf, on a :
- $$550 \times (1 - 10\%) \leq M(1 \text{ kg de maquereau}) \leq 650 \times (1 - 10\%)$$
- $$550 \times 0,9 \leq M(1 \text{ kg de maquereau}) \leq 650 \times 0,9$$
- $$495 \text{ F CFA} \leq M(1 \text{ kg de maquereau}) \leq 585 \text{ F CFA},$$
- $$2\,500 \times (1 - 10\%) \leq B(1 \text{ kg de bœuf}) \leq 2\,900 \times (1 - 10\%)$$
- $$2\,500 \times 0,9 \leq B(1 \text{ kg de bœuf}) \leq 2\,900 \times 0,9$$
- $$2\,250 \text{ F CFA} \leq B(1 \text{ kg de bœuf}) \leq 2\,610 \text{ F CFA},$$
- donc :
- $$10 \times 280 + 10 \times 240 + 3 \times 495 + 2 \times 2\,250 \leq 10R + 10PDT + 3M + 2B \leq 10 \times 320 + 10 \times 280 + 3 \times 585 + 2 \times 2\,610$$
- $$2\,800 + 2\,400 + 1\,485 + 4\,500 \leq T \leq 3\,200 + 2\,800 + 1\,755 + 5\,220$$
- $$11\,185 \text{ F CFA} \leq T \leq 12\,975 \text{ F CFA}.$$
- b. Maintenant Fatou peut acheter tous les produits de la meilleure qualité.

4 Comparaison de nombres

1.a.

n	0,01	0,25	1	4	100
n^2	0,000 1	0,062 5	1	16	10 000
$\sqrt{n}$	0,1	0,5	1	2	10
$\frac{1}{n}$	100	4	1	0,25	0,01

b. Si a et b désignent deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$, alors :

- $a^2 < b^2$;
- $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;
- $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

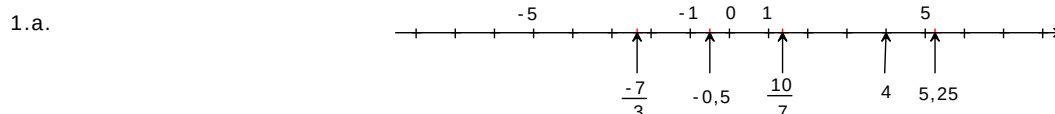
2.a.

n	-10	-4	-1	-0,5	-0,2
n^2	100	16	1	0,25	0,04
$\frac{1}{n}$	-0,1	-0,25	-1	-2	-5

b. Si a et b désignent deux nombres réels strictement négatifs tels que $a < b$, alors :

- $a^2 > b^2$;
- $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

5 Distance à zéro et valeur absolue



a	-5	$-\frac{7}{5}$	-1	-0,5	0	1	$\frac{10}{7}$	4	5	5,25
Distance à zéro de a	5	$\frac{7}{5}$	1	0,5	0	1	$\frac{10}{7}$	4	5	5,25

La distance à zéro d'un nombre a est appelée valeur absolue de a et est notée : $|a|$.

b. La valeur absolue d'un nombre quelconque est toujours positive : $|a| \geq 0$.

2. $|-6| = 6$; $|2| = 2$; $|\frac{-5}{6}| = \frac{5}{6}$; $|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$; $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$; $|4,87| = 4,87$.

3.a. $|-4| = |4| = 4$; $|-2,1| = |2,1| = 2,1$.

b. Les valeurs absolues de deux nombres opposés sont égales.

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à comparer des nombres réels

Exercice 1

a. Si $p = 7^2 - 12$ et $q = 37 + \sqrt{2}$,
alors : $p - q = 49 - 12 - 37 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} < 0$;
donc : $p < q$;

b. si $p = 2(\sqrt{3} + 1)$ et $q = \frac{9}{4} + 2\sqrt{3}$,
alors : $p - q = 2\sqrt{3} + 2 - \frac{9}{4} - 2\sqrt{3} = -\frac{1}{4} < 0$;
donc : $p < q$.

Exercice 2

a. Si $p = \sqrt{7}(\sqrt{5} - 1)$ et $q = \sqrt{35} - 2\sqrt{7}$,
alors : $p - q = \sqrt{35} - \sqrt{7} - \sqrt{35} + 2\sqrt{7} = \sqrt{7} > 0$;
donc : $p > q$;

b. si $p = (2 - \sqrt{7})^2$ et $q = 3(4 - \sqrt{7})$,
alors : $p - q = 4 - 4\sqrt{7} + 7 - 12 + 3\sqrt{7} = -1 - \sqrt{7} < 0$;
donc : $p < q$.

Exercice 3

a. Si $p = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $q = 2(\sqrt{2} + 1)$,
alors : $p - q = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2 = \sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$;
donc : $p > q$;

b. si $p = 8 + \sqrt{7}$ et $q = 2(\sqrt{7} + 3)$,
alors : $p - q = 8 + \sqrt{7} - 2\sqrt{7} - 6 = 2 - \sqrt{7} < 0$;
donc : $p < q$.

Exercice 4

a. Si $p = 2\sqrt{7}$ et $q = 3\sqrt{3}$, alors : $p^2 = 28$, $q^2 = 27$ et $p^2 > q^2$;
comme $p > 0$ et $q > 0$, on a : $p > q$;

b. si $p = 4\sqrt{6}$ et $q = 3\sqrt{10}$,
alors : $p^2 = 96$, $q^2 = 90$ et $p^2 > q^2$;
comme $p > 0$ et $q > 0$, on a : $p > q$.

Exercice 5

- a. Si $p = \sqrt{\frac{10}{7}}$ et $q = \sqrt{\frac{4}{3}}$,
alors : $p^2 = \frac{10}{7} = \frac{30}{21}$, $q^2 = \frac{4}{3} = \frac{28}{21}$ et $p^2 > q^2$;
comme $p > 0$ et $q > 0$, on a : $p > q$;
- b. si $p = \sqrt{\frac{18}{11}}$ et $q = \sqrt{1,7}$,
alors : $p^2 = \frac{18}{11} = \frac{180}{110}$, $q^2 = 1,7 = \frac{17}{10} = \frac{187}{110}$ et $p^2 < q^2$;
comme $p > 0$ et $q > 0$, on a : $p < q$.

Exercice 6

- a. Si $p = -7$ et $q = -2\sqrt{11}$, alors : $p^2 = 49$, $q^2 = 44$ et $p^2 > q^2$;
comme $p < 0$ et $q < 0$, on a : $p < q$;
- b. si $p = -2\sqrt{13}$ et $q = -\sqrt{6} \times \sqrt{8}$,
alors : $p^2 = 52$, $q^2 = 48$ et $p^2 > q^2$;
comme $p < 0$ et $q < 0$, on a : $p < q$.

Exercice 7

- a. Si $p = -9$ et $q = -4\sqrt{6}$, alors : $p^2 = 81$, $q^2 = 96$ et $p^2 < q^2$;
comme $p < 0$ et $q < 0$, on a : $p > q$;
- b. si $p = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ et $q = \frac{-3}{\sqrt{7}}$,
alors : $p^2 = \frac{4}{3} = \frac{28}{21}$, $q^2 = \frac{9}{7} = \frac{27}{21}$ et $p^2 > q^2$;
comme $p < 0$ et $q < 0$, on a : $p < q$.

Exercice 8

- a. Si $p = \frac{1}{89}$ et $q = \frac{2}{181}$,
alors : $\frac{1}{p} = 89$, $\frac{1}{q} = \frac{181}{2} = 90,5$ et $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$;
comme $p > 0$ et $q > 0$, on a : $p > q$;
- b. si $p = \frac{1}{14,5}$ et $q = \frac{3}{46}$,
alors : $\frac{1}{p} = 14,5 = \frac{29}{2} = \frac{87}{6}$, $\frac{1}{q} = \frac{46}{3} = \frac{92}{6}$ et $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$;
comme $p > 0$ et $q > 0$, on a : $p > q$.

Exercice 9

- a. Si $p = \frac{2}{17}$ et $q = \frac{3}{25}$,
alors : $\frac{1}{p} = \frac{17}{2} = \frac{51}{6}$, $\frac{1}{q} = \frac{25}{3} = \frac{50}{6}$ et $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$;
comme $p > 0$ et $q > 0$, on a : $p < q$;
- b. si $p = \frac{1}{\sqrt{10}}$ et $q = \frac{1}{3}$,
alors : $\frac{1}{p} = \sqrt{10}$, $\frac{1}{q} = 3$ et $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$,
comme $p > 0$ et $q > 0$, on a : $p < q$.

Exercice 10

- a. Si $p = \frac{1}{\sqrt{17}}$ et $q = \frac{1}{3\sqrt{2}}$,
alors : $\left(\frac{1}{p}\right)^2 = 17$, $\left(\frac{1}{q}\right)^2 = 18$ et $\left(\frac{1}{p}\right)^2 < \left(\frac{1}{q}\right)^2$,
comme $p > 0$ et $q > 0$, on a : $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$ puis $p > q$;
- b. si $p = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $q = \frac{2}{\sqrt{18}}$,
alors : $\left(\frac{1}{p}\right)^2 = 5$, $\left(\frac{1}{q}\right)^2 = \frac{18}{4}$ et $\left(\frac{1}{p}\right)^2 > \left(\frac{1}{q}\right)^2$,
comme $p > 0$ et $q > 0$, on a : $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$ puis $p < q$.

Exercice 11

- a. Si $p = \frac{-1}{\sqrt{13}}$ et $q = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$,
alors : $\left(\frac{1}{p}\right)^2 = 13$, $\left(\frac{1}{q}\right)^2 = 12$ et $\left(\frac{1}{p}\right)^2 > \left(\frac{1}{q}\right)^2$,
comme $p < 0$ et $q < 0$, on a : $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$ puis $p > q$;
- b. si $p = \frac{-1}{2\sqrt{5}}$ et $q = \frac{-1}{3\sqrt{3}}$,
alors : $\left(\frac{1}{p}\right)^2 = 20$, $\left(\frac{1}{q}\right)^2 = 27$ et $\left(\frac{1}{p}\right)^2 < \left(\frac{1}{q}\right)^2$,
comme $p < 0$ et $q < 0$, on a : $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$ puis $p < q$.

Exercice 12

Comme $\sqrt{3} > \sqrt{2} > 0 > -\sqrt{2} > -\sqrt{3}$,
on a : $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > 0 > -\frac{1}{\sqrt{3}} > -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 13

Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$, alors :

- a. $a + \sqrt{2} < b + \sqrt{2}$;
b. $a - \sqrt{3} < b - \sqrt{3}$;
c. $a \times \pi < b \times \pi$;
d. $\frac{a}{-5} > \frac{b}{-5}$.

2 Apprendre à encadrer des nombres réels

Exercice 14

- a. $5 < \sqrt{32} < 6$.
- b. $6 \times 5 - 25 < 6\sqrt{32} - 25 < 6 \times 6 - 25$
 $5 < 6\sqrt{32} - 25 < 11$;
 $42 - 7 \times 6 < 42 - 7\sqrt{32} < 42 - 7 \times 5$
 $0 < 42 - 7\sqrt{32} < 7$.

Exercice 15

- a. $3 < \sqrt{11} < 4$.
- b. $\frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{11}} < \frac{1}{3}$
 $0,25 < \frac{1}{\sqrt{11}} < 0,34$.

Exercice 16

- a. $2 < \sqrt{7} < 3$ et $4 < \sqrt{17} < 5$
- b. On a : $\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{7}} < \frac{1}{2}$; donc : $\frac{4}{3} < \sqrt{\frac{17}{7}} < \frac{5}{2}$.

Exercice 17

- On donne : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ et $2,4 < \sqrt{6} < 2,5$.
- a. $2,4 + 1,4 < \sqrt{6} + \sqrt{2} < 2,5 + 1,5$
 $3,8 < \sqrt{6} + \sqrt{2} < 4$.
- b. $-1,5 < -\sqrt{2} < -1,4$
 $2,4 - 1,5 < \sqrt{6} - \sqrt{2} < 2,5 - 1,4$
 $0,9 < \sqrt{6} - \sqrt{2} < 1,1$.

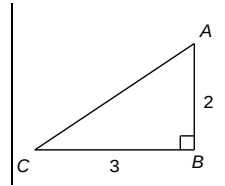
Exercice 18

On donne : $3,6 < \sqrt{13} < 3,7$ et $3,1 < \pi < 3,2$.

Dans le triangle ABC , rectangle en B ,

on a : $AC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Périmètre de ABC : $p = 3 + 2 + \sqrt{13}$;
encadrement de p : $5 + 3,6 < p < 5 + 3,7$
 $8,6 < p < 8,7$.



Périmètre du cercle de rayon $\sqrt{13}$: $q = 2\pi\sqrt{13}$;
encadrement de q : $2 \times 3,1 \times 3,6 < q < 2 \times 3,2 \times 3,7$
 $22,32 < q < 23,68$.

Exercice 19

On donne : $-2,2 < x < 1,4$ et $-0,6 < y < 3,2$.

- a. On a : $-2,2 - 0,6 < x + y < 1,4 + 3,2$
 $-2,8 < x + y < 4,6$;
donc les valeurs que peut prendre $x + y$ sont :
 0 ; $-1,7$; $1,5$; $1,8$.
- b. On a : $-3,2 < -y < 0,6$
 $-2,2 - 3,2 < x - y < 1,4 + 0,6$
 $-5,4 < x - y < 2$;
donc les valeurs que peut prendre $x - y$ sont :
 $-3,2$; 0 ; $0,6$.

Exercice 20

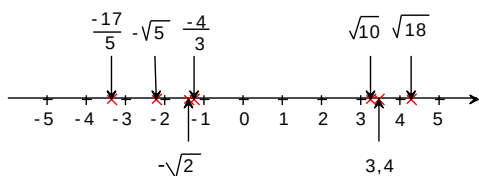
On donne : $x \in]0,3 ; 0,5[$ et $y \in]1,2 ; 2,1[$

- a. On a : $0,3 \times 1,2 < xy < 0,5 \times 2,1$
 $0,36 < xy < 1,05$.
- b. On a : $\frac{1}{2,1} < \frac{1}{y} < \frac{1}{1,2}$ puis $\frac{0,3}{2,1} < \frac{x}{y} < \frac{0,5}{1,2}$
 $0,14 < \frac{x}{y} < 0,42$
c'est-à-dire : $\frac{x}{y} \in]0,14 ; 0,42[$.

Activités d'application

Nombres réels et intervalles

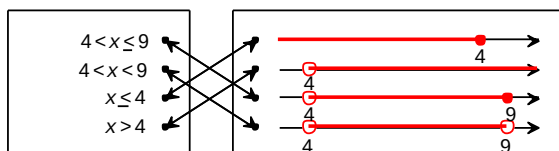
Exercice 21



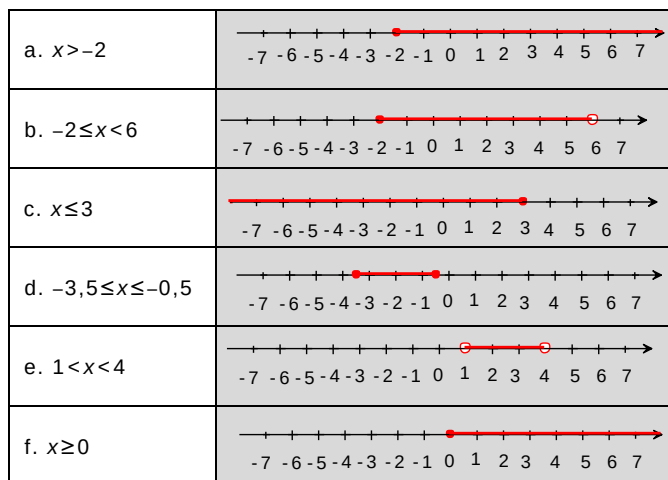
$$\sqrt{10} \approx 3,2 ; \quad -\sqrt{5} \approx -2,2 ; \quad -\frac{17}{5} = -3,4 ;$$

$$\sqrt{18} \approx 4,2 ; \quad -\sqrt{2} \approx -1,4 ; \quad -\frac{4}{3} \approx -1,3.$$

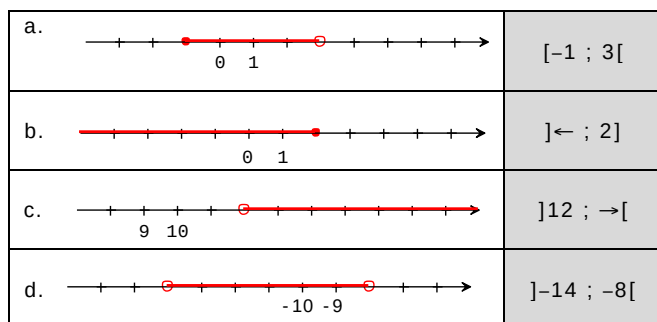
Exercice 22



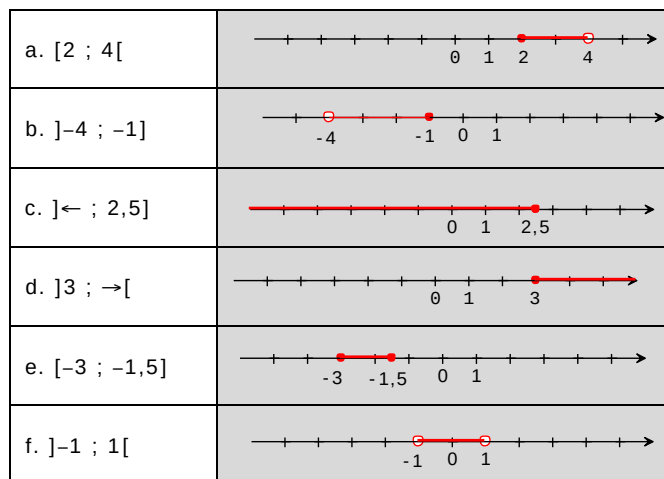
Exercice 23



Exercice 24



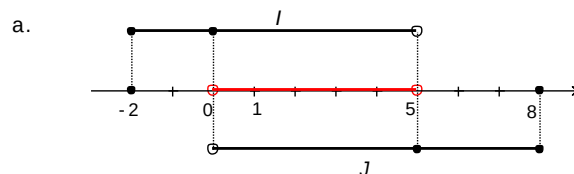
Exercice 25



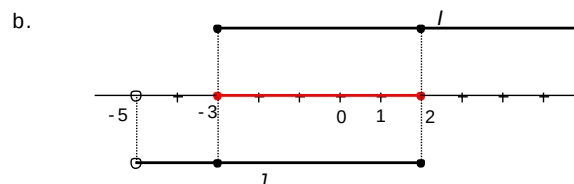
Exercice 26

- a. 1, 2 et 3 sont trois nombres de l'intervalle $]-2 ; 6[$;
 b. $-3, -2$ et 0 sont trois nombres de l'intervalle $[-3 ; 1[$;
 c. 11 010, 12 000 et 25 000 sont trois nombres de l'intervalle $]10^4 ; \rightarrow[$;
 d. $3 \leq 3 < 6$; $3 \leq 4,5 < 6$; $3 \leq 5 < 6$;
 e. $-4 < -3,7 < -3$; $-4 < -3,5 < -3$; $-4 < -3,25 < -3$;
 f. $-0,5 < -0,4 < 0$; $-0,5 < -0,32 < 0$; $-0,5 < -0,27 < 0$.

Exercice 27



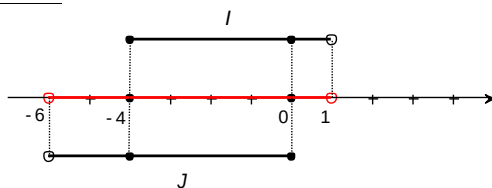
Si $I = [-2 ; 5]$ et $J = [0 ; 8]$, alors : $I \cap J = [0 ; 5]$;



si $I = [-3 ; 2]$ et $J = [-5 ; 2]$, alors : $I \cap J = [-3 ; 2]$.

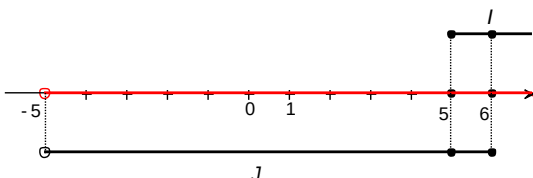
Exercice 28

a.



Si $I = [-4 ; 1[$ et $J =]-6 ; 0]$, alors : $I \cup J =]-6 ; 1[$;

b.



si $I =]5 ; \rightarrow[$ et $J =]-5 ; 6]$, alors : $I \cup J =]-5 ; \rightarrow[$.

Exercice 29

- Si $x \geq 3$ alors :
- a. $x+4 \geq 7$;
 - b. $x-6 \geq -3$;
 - c. $5x \geq 15$;
 - d. $3x-4 \geq 5$;
 - e. $\frac{x}{4} \geq \frac{3}{4}$;
 - f. $-x \leq -3$.

Exercice 30

- Si $y < -2$ alors :
- a. $7y < -14$;
 - b. $-2y > 4$;
 - c. $3y-5 < -11$;
 - d. $-y+7 > 9$;
 - e. $\frac{1}{y} > -\frac{1}{2}$;
 - f. $\frac{-2}{y} < 1$.

Comparaison de nombres

Exercice 31

a. Si $a = 6^2 - 4\sqrt{3}$ et $b = 4(8 - \sqrt{3})$, alors :

- $a-b = 36 - 4\sqrt{3} - 32 + 4\sqrt{3} = 4$,
- comme $4 > 0$, on a : $\underline{a > b}$;

b. si $a = \frac{19}{5}$ et $b = \sqrt{4(1 + \sqrt{4})}$, alors :

- $a-b = \frac{19}{5} - \sqrt{4} - 4 = -\frac{1}{5} - \sqrt{4}$,
- comme $-\frac{1}{5} - \sqrt{4} < 0$, on a : $\underline{a < b}$;

c. si $a = 2\sqrt{5}$ et $b = 4\sqrt{2}$, alors :

- $a^2 = 20$, $b^2 = 32$ et $a^2 < b^2$,
- comme a et b sont positifs, on a : $\underline{a < b}$.

Exercice 32

a. Si $a = -10$ et $b = -3\sqrt{11}$, alors :

- $a^2 = 100$, $b^2 = 99$ et $a^2 > b^2$,
- comme a et b sont négatifs, on a : $\underline{a < b}$;

b. si $a = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ et $b = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}$, alors :

- $a^2 = \frac{13}{5} = \frac{39}{15}$, $b^2 = \frac{14}{6} = \frac{35}{15}$ et $a^2 > b^2$,
- comme a et b sont positifs, on a : $\underline{a > b}$;

c. si $a = \frac{1}{12,5}$ et $b = \frac{2}{24}$, alors :

- $a = \frac{1}{12,5}$, $b = \frac{1}{12}$ avec $12,5 > 12$,
- comme a et b sont positifs, on a : $\underline{a < b}$.

Exercice 33

a. Si $a = 4\sqrt{5}$ et $b = 2(1 + \sqrt{5})$, alors :

- $a-b = 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 2 = 2(\sqrt{5} - 1)$,
- comme $\sqrt{5} > 1$, on a : $\underline{a > b}$;

b. si $a = 6 - 2\sqrt{3}$ et $b = 4 - \sqrt{3}$, alors :

- $a-b = 6 - 2\sqrt{3} - 4 + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$,
- comme $2 > \sqrt{3}$, on a : $\underline{a > b}$;

c. si $a = -\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ et $b = -2$, alors :

- $a^2 = \frac{13}{5}$, $b^2 = 4 = \frac{20}{5}$ et $a^2 < b^2$,
- comme a et b sont négatifs, on a : $\underline{a > b}$.

Exercice 34

- $(4\sqrt{3})^2 = 48$ et $(2\sqrt{7})^2 = 28$, donc : $(4\sqrt{3})^2 > (2\sqrt{7})^2$;
 $4\sqrt{3}$ et $2\sqrt{7}$ étant positifs, on a : $A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{7} > 0$;
- $B = 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 3\sqrt{5} > 0$;
- $(2\sqrt{15})^2 = 60$ et $(3\sqrt{6})^2 = 54$, donc : $(2\sqrt{15})^2 > (3\sqrt{6})^2$;
 $2\sqrt{15}$ et $3\sqrt{6}$ étant positifs, on a : $C = 2\sqrt{15} - 3\sqrt{6} > 0$.

Exercice 35

$$\begin{aligned}
 \text{a. } (\sqrt{11})^2 &= 11 = \frac{396}{36} ; & (\sqrt{6})^2 &= 6 = \frac{216}{36} ; \\
 \left(\frac{7}{3}\right)^2 &= \frac{49}{9} = \frac{196}{36} ; & (2\sqrt{3})^2 &= 12 = \frac{432}{36} ; \\
 \left(\frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{49}{4} = \frac{441}{36} ; & 3^2 &= 9 = \frac{324}{36} ; \\
 \text{or : } \frac{196}{36} &< \frac{216}{36} < \frac{324}{36} < \frac{396}{36} < \frac{432}{36} < \frac{441}{36} ; \\
 \text{comme } \frac{7}{3} ; \sqrt{6} ; 3 ; \sqrt{11} ; 2\sqrt{3} ; \frac{7}{2} &\text{ sont positifs,} \\
 \text{on a : } \underline{\frac{7}{3} < \sqrt{6} < 3 < \sqrt{11} < 2\sqrt{3} < \frac{7}{2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } (-\sqrt{7})^2 &= 7 = \frac{6\,300}{900} ; & (-8,5)^2 &= \left(\frac{85}{10}\right)^2 = \frac{65\,025}{900} ; \\
 \left(-\frac{8}{3}\right)^2 &= \frac{64}{9} = \frac{6\,400}{900} ; & (-2\sqrt{2})^2 &= 8 = \frac{7\,200}{900} ; \\
 \left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^2 &= \frac{5}{3} = \frac{1\,500}{900} ; & (-3)^2 &= 9 = \frac{8\,100}{900} ; \\
 \text{or : } \frac{1\,500}{900} &< \frac{6\,300}{900} < \frac{6\,400}{900} < \frac{7\,200}{900} < \frac{8\,100}{900} < \frac{65\,025}{900} ; \\
 \text{comme } -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} ; -\sqrt{7} ; -\frac{8}{3} ; -2\sqrt{2} ; -3 ; -8,5 &\text{ sont} \\
 \text{négatifs, on a : } \underline{-8,5 < -3 < -2\sqrt{2} < -\frac{8}{3} < -\sqrt{7} < -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } \left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)^2 &= \frac{1}{11} ; & \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 &= \frac{1}{12} ; \\
 \left(\frac{1}{3}\right)^2 &= \frac{1}{9} ; & \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 &= \frac{1}{10} ; \\
 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 &= \frac{1}{8} ; & \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}}\right)^2 &= \frac{2}{19} = \frac{1}{9,5} ; \\
 \text{or : } 8 &< 9 < 9,5 < 10 < 11 < 12, \\
 \text{donc : } \frac{1}{12} &< \frac{1}{11} < \frac{1}{10} < \frac{1}{9,5} < \frac{1}{9} < \frac{1}{8} ; \\
 \text{comme } \frac{1}{2\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{11}} ; \frac{1}{\sqrt{10}} ; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{2\sqrt{2}} &\text{ sont positifs,} \\
 \text{on a : } \underline{\frac{1}{2\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{11}} < \frac{1}{\sqrt{10}} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{19}} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2\sqrt{2}}}.
 \end{aligned}$$

Exercice 36

Parmi : $-\sqrt{3}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^2$; $-\frac{15}{7}$; $2\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sqrt{4}$; $-\sqrt{6}$;
seuls les nombres $-\sqrt{3}$ et $\frac{\sqrt{5}}{2}$ appartiennent à $[-2 ; 2[$.

En effet : $(-2)^2 = (2)^2 = 4$;

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad (-\sqrt{3})^2 &= 3 < 4 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} < 4 ; \\
 \bullet \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} > 2 ; \quad -\frac{15}{7} < -2 ; \quad \sqrt{4} = 2 ; \\
 (2\sqrt{2})^2 &= 8 > 4 ; \quad (-\sqrt{6})^2 = 6 > 4.
 \end{aligned}$$

Encadrements

Exercice 37

- a. $4 < \sqrt{18} < 5$; en effet :
- ces trois nombres sont positifs,
 - $4^2 = 16$, $(\sqrt{18})^2 = 18$, $5^2 = 25$ et $16 < 18 < 25$.
- b. On en déduit que : $5 \times 4 + 5 < 5\sqrt{18} + 5 < 5 \times 5 + 5$
c'est-à-dire : $25 < 5\sqrt{18} + 5 < 30$.

Exercice 38

- a. $5 < \sqrt{29} < 6$; en effet :
- ces trois nombres sont positifs,
 - $5^2 = 25$, $(\sqrt{29})^2 = 29$, $6^2 = 36$ et $25 < 29 < 36$.
- b. On en déduit que : $\frac{2}{6} < \frac{2}{\sqrt{29}} < \frac{2}{5}$,
c'est-à-dire : $0,3 < \frac{2}{\sqrt{29}} < 0,4$.

Exercice 39

- a. $8 < \sqrt{75} < 9$; en effet :
- ces trois nombres sont positifs,
 - $8^2 = 64$, $(\sqrt{75})^2 = 75$, $9^2 = 81$ et $64 < 75 < 81$.
- b. On en déduit que : $\frac{5}{9} < \frac{5}{\sqrt{75}} < \frac{5}{8}$.
- c. On a donc : $0,5 < \frac{5}{\sqrt{75}} < 0,7$.
- d. $\frac{5}{\sqrt{75}} = \frac{5}{\sqrt{25 \times 3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc : $0,5 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 0,7$.

Exercice 40

- On donne : $3,87 < \sqrt{15} < 3,88$ et $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$.
- On a : $3,87 + 1,73 < \sqrt{15} + \sqrt{3} < 3,88 + 1,74$;
c'est-à-dire : $5,60 < \sqrt{15} + \sqrt{3} < 5,62$.
 - On a : $3,87 \times 1,73 < \sqrt{15} \times \sqrt{3} < 3,88 \times 1,74$;
c'est-à-dire : $6,69 < \sqrt{15} \times \sqrt{3} < 6,76$.
 - On a : $\frac{3,87}{1,74} < \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} < \frac{3,88}{1,73}$
c'est-à-dire : $2,22 < \sqrt{5} < 2,24$.

Exercice 41

- On donne : $2,64 < \sqrt{7} < 2,65$ et $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$.
- On a : $2,64 - 1,42 < \sqrt{7} - \sqrt{2} < 2,65 - 1,41$;
c'est-à-dire : $1,22 < \sqrt{7} - \sqrt{2} < 1,24$.
 - On a : $2,64 \times 1,41 < \sqrt{7} \times \sqrt{2} < 2,64 \times 1,42$;
c'est-à-dire : $3,72 < \sqrt{14} < 3,75$.
 - On a : $\frac{2,64}{1,42} < \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} < \frac{2,65}{1,41}$
c'est-à-dire : $1,85 < \sqrt{3,5} < 1,88$.

Exercice 42

- Soit x et y tels que : $3 < x < 5$ et $\sqrt{2} < y < 2$.
- a. • $3 + \sqrt{2} < x + y < 5 + 2$ donc $3 + \sqrt{2} < x + y < 7$;
• $3 - 2 < x - y < 5 - \sqrt{2}$ donc $1 < x - y < 5 - \sqrt{2}$;
• $2 \times 3 + 3 \times \sqrt{2} < 2x + 3y < 2 \times 5 + 3 \times 2$
donc $6 + 3\sqrt{2} < 2x + 3y < 16$.
- b. • $3 \times \sqrt{2} < x \times y < 5 \times 2$ donc $3\sqrt{2} < x \times y < 10$;
• $\frac{3}{2} < \frac{x}{y} < \frac{5}{\sqrt{2}}$ donc $\frac{3}{2} < \frac{x}{y} < \frac{5\sqrt{2}}{2}$;
• $\frac{2 \times 3}{3 \times 2} < \frac{2x}{3y} < \frac{2 \times 5}{3 \times \sqrt{2}}$ donc $1 < \frac{2x}{3y} < \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

Exercice 43

- Soit x et y tels que : $\sqrt{2} < x < 4$ et $\sqrt{3} < y < 5$.
- a. On a : $2 < x^2 < 16$ et $3 < y^2 < 25$.
- b. On en déduit que : $-25 < -y^2 < -3$
 $2 - 25 < x^2 - y^2 < 16 - 3$,
c'est-à-dire : $-23 < x^2 - y^2 < 13$.

Exercice 44

- Soit x et y tels que : $-3,5 < x < -0,5$ et $2 < y < 4,5$.
- On a : $4 < 2y < 9$ et $-9 < -2y < -4$.
- a. Si $m = x + 2y$, alors $0,5 < m < 8,5$.
- b. Si $n = x - 2y$, alors $-12,5 < n < -4,5$ et $4,5 < -n < 12,5$.
- c. Si $p = m - n$, alors $5 < p < 21$.

Exercice 45

- Encadrement du gain hebdomadaire G d'Ali :
 $60\,000 \text{ F CFA} < G < 70\,000 \text{ F CFA}$.
- Encadrement des dépenses (nourriture et autres) hebdomadaires D d'Ali : $25\,000 + 15\,000 < D < 30\,000 + 20\,000$
 $40\,000 \text{ F CFA} < D < 50\,000 \text{ F CFA}$.
- Encadrement de ce qu'il reste à Ali à la fin de la semaine :
 $60\,000 - 50\,000 < G - D < 70\,000 - 40\,000$
c'est-à-dire : $10\,000 \text{ F CFA} < G - D < 30\,000 \text{ F CFA}$.

Exercice 46

- Désignons par L , l et S les longueur, largeur et superficie du jardin rectangulaire de Noah. On a : $l = \frac{S}{L}$.
- Si $850 < S < 900$ et $45 < L < 50$, alors : $\frac{1}{50} < \frac{1}{L} < \frac{1}{45}$;
- on en déduit que : $\frac{850}{50} < \frac{S}{L} < \frac{900}{45}$
c'est-à-dire : $17 < l < 20$;
- la largeur du jardin de Noah est comprise entre 17 et 20 m.

Valeur absolue

Exercice 47

- a. « Un nombre et son opposé ont des valeurs absolues opposées » est une affirmation fausse.
 b. « Un nombre et son inverse ont la même valeur absolue » est une affirmation fausse.
 c. « Une valeur absolue n'est jamais négative » est une affirmation vraie.
 d. « Si a et b sont deux nombres, alors $|a - b| = |b - a|$ » est une affirmation vraie.

Exercice 48

- a. $|-0,1| = \underline{0,1}$; b. $\left|\frac{1}{3}\right| = \underline{\frac{1}{3}}$; c. $|0,03| = \underline{0,03}$;
 d. $|0| = \underline{0}$; e. $|\sqrt{3}| = \underline{\sqrt{3}}$; f. $|\sqrt{7}| = \underline{\sqrt{7}}$.

Exercice 49

- a. $|1 - \sqrt{3}| = \underline{\sqrt{3} - 1}$ car $\sqrt{3} > 1$;
 b. $|\sqrt{5} - 2| = \underline{\sqrt{5} - 2}$ car $\sqrt{5} > 2$;
 c. $|\sqrt{7} - 3| = \underline{3 - \sqrt{7}}$ car $\sqrt{7} < 3$;
 d. $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \underline{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ car $\sqrt{2} < \sqrt{3}$;
 e. $\left|\frac{-1}{\sqrt{2}}\right| = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ car $\frac{-1}{\sqrt{2}} < 0$;
 f. $\left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right| = \underline{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ car $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} > 0$.

Exercice 50

$$A = |6 - 2| + |4 - 5| - |7 - 3|$$

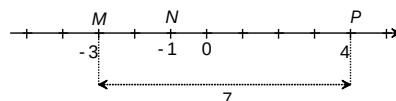
$$A = (6 - 2) + (5 - 4) - (7 - 3) = \underline{1} ;$$

$$B = |2 - \sqrt{3}| + |2 - \sqrt{5}| - |\sqrt{3} - \sqrt{5}|$$

$$B = (2 - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - 2) - (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \underline{0} ;$$

$$C = |5(3 - 2\sqrt{5})| + 2|4 - \sqrt{5}| = 5(2\sqrt{5} - 3) + 2(4 - \sqrt{5}) = \underline{8\sqrt{5} - 7}.$$

Exercice 51



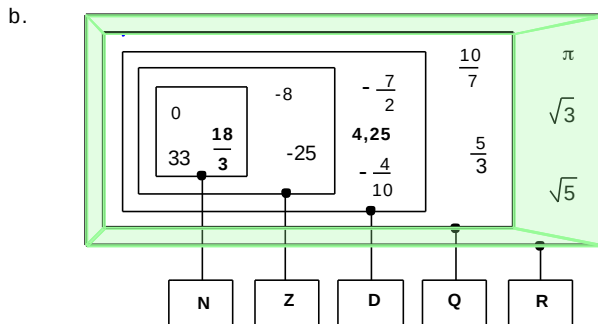
- a. Sur la figure, distance entre les nombres -3 et 4 : 7 .
 Calcul de cette distance : $|4 - (-3)| = |7| = 7$.
 b. Distance entre -3 et -1 :
 sur la figure : 2 ; calcul : $|-1 - (-3)| = |2| = 2$;
 distance entre -1 et 4 :
 sur la figure : 5 ; calcul : $|4 - (-1)| = |5| = 5$.

Exercice 52

- a. Distance entre -3 et 5 : $|5 - (-3)| = |8| = \underline{8}$;
 b. distance entre -6 et -1 : $|-1 - (-6)| = |5| = \underline{5}$;
 c. distance entre 4 et -6 : $|4 - (-6)| = |10| = \underline{10}$;
 d. distance entre $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{2}$: $\left|\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2}{2}\right| = \underline{1}$;
 e. distance entre $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{2}$: $|\sqrt{3} - (-\sqrt{2})| = \underline{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$;
 f. distance entre $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$: $|\sqrt{2} - (-\sqrt{2})| = \underline{2\sqrt{2}}$.

Exercice 53 Les ensembles de nombres

- a. $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels ;
 $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux ;
 $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels ;
 $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels ;
 $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs.



- c. $4,25 \in \mathbb{D}$; $-8 \in \mathbb{Z}$; $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$; $\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$;
 $0 \in \mathbb{N}$; $\frac{18}{3} \in \mathbb{N}$; $-\frac{4}{10} \in \mathbb{D}$; $\pi \in \mathbb{R}$.
d. $33 \in \mathbb{N}$; $-25 \in \mathbb{Z}$; $-\frac{7}{2} \in \mathbb{D}$; $\frac{10}{7} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$.
e. La partie coloriée correspond aux nombres irrationnels.

Exercice 54 Crochets et intervalles

1. $x < 4$ peut aussi s'écrire : $x \in]-\infty ; 4[$.
2. $x \geq -2$ peut aussi s'écrire : $x \in [-2 ; +\infty[$.
3. $x > 6$ peut aussi s'écrire : $x \in]6 ; +\infty[$.
4. $-2 < x \leq 3$ peut aussi s'écrire : $x \in]-2 ; 3]$.
5. $4 > x \geq 3$ peut aussi s'écrire : $x \in]3 ; 4[$.

Exercice 55 Chercher l'erreur

- a. Kamga s'est trompé ; en effet, les nombres p et q étant négatifs, si $q^2 > p^2$ alors : $q < p$.
b. Pour obtenir une rédaction correcte, il suffit de compléter et changer la dernière ligne :
« $q^2 > p^2$; comme p et q sont négatifs, on a : $q < p$. »

Exercice 56 Acquérir les bons réflexes

- a. Pour comparer $p = (6 - \sqrt{3})^2$ et $q = 12(3 - \sqrt{3})$, étudier le signe de leur différence :
 $p - q = (36 - 12\sqrt{3} + 3) - (36 - 12\sqrt{3}) = 3$,
comme $p - q > 0$, alors $p > q$;
b. pour comparer $p = 5\sqrt{7}$ et $q = 7\sqrt{5}$, comparer leurs carrés : $(5\sqrt{7})^2 = 25 \times 7 = 175$ et $(7\sqrt{5})^2 = 49 \times 5 = 245$,
comme $p^2 < q^2$, p et q sont positifs, alors $p < q$;

- c. pour comparer $p = \frac{1}{82,5}$ et $q = \frac{7}{574}$, comparer leurs inverses : $\frac{1}{p} = 82,5$ et $\frac{1}{q} = \frac{574}{7} = 82$,
comme $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$, p et q sont positifs, alors $p < q$.

Exercice 57 Bien comprendre un énoncé

L et l désignent la longueur et la largeur d'un rectangle.

1. On a : $8 \leq L \leq 12$ et $3 \leq l \leq 5$.
2. Encadrement du périmètre P de ce rectangle :
 $2(8+3) \leq P \leq 2(12+5)$
 $22 \leq P \leq 34$;

Encadrement de l'aire A de ce rectangle :
 $8 \times 3 \leq A \leq 12 \times 5$
 $24 \leq A \leq 60$.

Exercice 58 Comprendre un raisonnement

On donne : $x \geq -2$.

- a. Je multiplie chaque membre par 2 : $2x \geq -4$.
J'ajoute 3 à chaque membre : $2x + 3 \geq -4 + 3$.
Donc : $2x + 3 \geq -1$.
b. Je multiplie chaque membre par -1 : $-x \leq 2$.
J'ajoute 2 à chaque membre : $-x + 2 \leq 2 + 2$.
Donc : $-x + 2 \leq 4$.
c. Je multiplie chaque membre par -8 : $-8x \leq -8 \times (-2)$.
Donc : $-8x \leq 16$.
d. Je multiplie chaque membre par 3 : $3x \geq -6$.
J'enlève $\sqrt{3}$ à chaque membre : $3x - \sqrt{3} \geq -6 - \sqrt{3}$.
Donc : $3x - \sqrt{3} \geq -6 - \sqrt{3}$.
e. Je multiplie chaque membre par -1 : $-x \leq 2$.
Je divise chaque membre par 5 : $\frac{-x}{5} \leq \frac{2}{5}$.
Donc : $-\frac{x}{5} \leq \frac{2}{5}$.

- f. Je multiplie chaque membre par $-\frac{5}{3}$: $-\frac{5x}{3} \leq \frac{10}{3}$.
J'ajoute $\frac{3}{2}$ à chaque membre par 5 : $-\frac{5x}{3} + \frac{3}{2} \leq \frac{10}{3} + \frac{3}{2}$.
Donc : $-\frac{5x}{3} + \frac{3}{2} \leq \frac{29}{6}$.

Exercice 59 Bien choisir le symbole d'inégalité

On donne : $2 \leq x < 5$ et $1 < y \leq 7$.

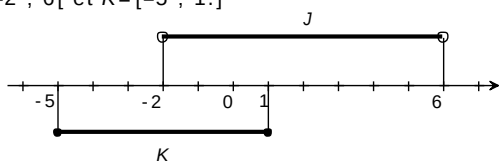
	Encadrements faux	Encadrements corrigés
a.	$3 \leq x+y \leq 12$	$3 < x+y < 12$
b.	$2 < xy \leq 35$	$2 < xy < 35$
c.	$1 < x-y < -2$	$-5 \leq x-y < 4$
d.	$\frac{1}{5} < \frac{y}{x} < \frac{7}{2}$	$\frac{1}{5} < \frac{y}{x} \leq \frac{7}{2}$

Exercices d'approfondissement

Exercice 60 Intervalles et ensembles de nombres

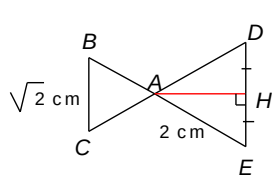
On donne : $J =]-2 ; 6[$ et $K = [-5 ; 1]$

1. Ci-contre la représentation de J et K sur la droite des nombres réels.



- Si $x \in J$ et $x \in K$ alors $-2 < x \leq 1$;
- si $x \in J$ ou $x \in K$ alors $-5 \leq x < 6$;
- si $x \in J$ et $x \notin K$ alors $1 < x < 6$;
- si $x \notin J$ et $x \in K$ alors $-5 \leq x \leq -2$;
- si $x \notin J$ et $x \notin K$ alors $x < -5$ ou $6 \leq x$;
- si $x \notin J$ ou $x \notin K$ alors $x \leq -2$ ou $1 < x$.

Exercice 61 Comparer des périmètres



Dans la figure ci-contre :

- les triangles ABC et ADE sont équilatéraux,
- H est le milieu de $[DE]$.

(AH) , médiane issue de A dans le triangle équilatéral ADE , est aussi hauteur issue de A .

a. On a : $HE = 1 \text{ cm}$ et $AH = \sqrt{AE^2 - HE^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \text{ cm}$.

b. Périmètre du triangle ABC : $3\sqrt{2} \text{ cm}$;

périmètre du triangle AHE : $2 + 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3} \text{ cm}$;

or : $(3\sqrt{2})^2 = 18 = 12 + 6$ et $(3 + \sqrt{3})^2 = 9 + 6\sqrt{3} + 3 = 12 + 6\sqrt{3}$,

donc : $(3\sqrt{2})^2 < (3 + \sqrt{3})^2$ et $3\sqrt{2} < 3 + \sqrt{3}$.

C'est le triangle AHE qui possède le plus grand périmètre.

Exercice 62 Encadrements et comparaisons

On donne :

$a = 7\sqrt{11} + 4$; $b = 5\sqrt{19}$; $c = 6\sqrt{13} + 10$; $d = 9\sqrt{17} - 3$.

On a :

$7 \times 3 + 4 < 7\sqrt{11} + 4 < 7 \times 4 + 4$; donc : $25 < a < 32$;

$5 \times 4 < 5\sqrt{19} < 5 \times 5$; donc : $20 < b < 25$;

$6 \times 3 + 10 < 6\sqrt{13} + 10 < 6 \times 4 + 10$; donc : $28 < c < 34$;

$9 \times 4 - 3 < 9\sqrt{17} - 3 < 9 \times 5 - 3$; donc : $33 < d < 42$.

b. Grâce à ces encadrements, on obtient : $b < a < d$.

c. Si on donne : $3,3 < \sqrt{11} < 3,4$; $3,6 < \sqrt{13} < 3,7$;
 $4,1 < \sqrt{17} < 4,2$; $4,3 < \sqrt{19} < 4,4$;

alors :

$7 \times 3,3 + 4 < 7\sqrt{11} + 4 < 7 \times 3,4 + 4$ et : $27,1 < a < 27,8$;

$5 \times 4,3 < 5\sqrt{19} < 5 \times 4,4$ et : $21,5 < b < 22$;

$6 \times 3,6 + 10 < 6\sqrt{13} + 10 < 6 \times 3,7 + 10$ et : $31,6 < c < 32,2$;

$9 \times 4,1 - 3 < 9\sqrt{17} - 3 < 9 \times 4,2 - 3$; et : $33,9 < d < 34,8$.

Grâce à ces nouveaux encadrements, on a : $b < a < c < d$.

Exercice 63 La clôture

L et l désignant les longueur et largeur du terrain rectangulaire de Yene, on a :

$$48 \text{ m} \leq L \leq 50 \text{ m} \quad \text{et} \quad 32 \text{ m} \leq l \leq 34 \text{ m}.$$

a. Encadrement du périmètre P de ce terrain :

$$2(48 + 32) \leq P \leq 2(50 + 34) \\ 160 \text{ m} \leq P \leq 168 \text{ m}.$$

b. En laissant sur la clôture de ce terrain trois ouvertures de largeur comprise entre 3 m et 4 m, la longueur C de clôture nécessaire est telle que :

$$160 - 3 \times 4 \leq C \leq 168 - 3 \times 3 \\ 148 \text{ m} \leq C \leq 159 \text{ m}.$$

c. $\frac{148}{5} = 29,6$; donc il faut 30 panneaux de 5 m pour

une clôture de 148 m (longueur minimale) ;

$\frac{159}{4} = 39,75$; donc il faut 40 panneaux de 4 m pour une

clôture de 159 m (longueur maximale) ;

finalement, entre 30 et 40 panneaux sont nécessaires.

Exercice 64 Valeurs absolues

a. $(2\sqrt{2})^2 = 8$ et $3^2 = 9$;

donc : $2\sqrt{2} < 3$ et $|2\sqrt{2} - 3| = 3 - 2\sqrt{2}$;

$2^2 = 4$ et $(\sqrt{2})^2 = 2$;

donc : $2 > \sqrt{2}$ et $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$;

on en déduit que :

$$|2\sqrt{2} - 3| + |2 - \sqrt{2}| = 3 - 2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 5 - 3\sqrt{2}.$$

b. $1^2 = 1$ et $(\sqrt{3})^2 = 3$;

donc : $1 < \sqrt{3}$ et $|1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$;

$(2\sqrt{3})^2 = 12$ et $5^2 = 25$;

donc : $2\sqrt{3} < 5$ et $|2\sqrt{3} - 5| = 5 - 2\sqrt{3}$;

on en déduit que :

$$|1 - \sqrt{3}| + |2\sqrt{3} - 5| = \sqrt{3} - 1 - 5 + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 6.$$

c. $(3\sqrt{2})^2 = 18$ et $4^2 = 16$;

donc : $3\sqrt{2} > 4$ et $|3\sqrt{2} - 4| = 3\sqrt{2} - 4$;

$1^2 = 1$ et $(\sqrt{2})^2 = 2$;

donc : $1 < \sqrt{2}$ et $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$;

on en déduit que :

$$|3\sqrt{2} - 4| + |1 - \sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 4 + \sqrt{2} - 1 = 4\sqrt{2} - 5.$$

d. $(\sqrt{2})^2 = 2$ et $(\sqrt{3})^2 = 3$;

donc : $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ et $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$;

$(2\sqrt{2})^2 = 8$ et $(\sqrt{3})^2 = 3$;

donc : $2\sqrt{2} > \sqrt{3}$ et $|2\sqrt{2} - \sqrt{3}| = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$;

on en déduit que :

$$|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |2\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{2}.$$

Exercice 65 Simplification de racines carrées

$$a. A = \frac{(\sqrt{8} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{8} - \sqrt{3})^2}{4}$$

$$A = \frac{(8 + 2\sqrt{8}\sqrt{3} + 3) + (8 - 2\sqrt{8}\sqrt{3} + 3)}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}.$$

b. On a : $5 < A < 6$.

Exercice 66 Simplification de fractions

$$a. B = \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \times \frac{3}{11} + \frac{7}{3} = \frac{2 \times 55}{3 \times 55} - \frac{12 \times 3}{55 \times 3} + \frac{7 \times 55}{3 \times 55}$$

$$B = \frac{9 \times 55 - 3 \times 12}{3 \times 55} = \frac{3 \times 55 - 12}{55} = \frac{153}{55}.$$

b. $\frac{153}{55} \approx 2,7818181 \dots$; donc : $2,781 < \frac{153}{55} < 2,782$.

Exercice 67 Troncature et encadrements

$$a. E = \frac{\frac{7}{5} - \frac{4}{3}}{\frac{7}{5} \times \frac{4}{3}} = \frac{\frac{15}{15}}{\frac{28}{15}} = \frac{1}{15} \times \frac{15}{28} = \frac{1}{28}.$$

b. $\frac{1}{28} = 0,03571\dots$; donc :

$E \approx 0,035$ (troncature à trois décimales) ;

$0 < E < 1$ (encadrement de E par deux entiers consécutifs).

c. $\frac{1}{E} = 28$, donc $\frac{1}{E}$ est un entier naturel.

Exercice 68 Encadrement et valeurs absolues

On considère les nombres réels $a = 2 + \sqrt{5}$ et $b = -2 + \sqrt{5}$.

$$1. a^2 = (2 + \sqrt{5})^2 = 4 + 2 \times 2 \times \sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5} ;$$

$$b^2 = (-2 + \sqrt{5})^2 = 4 - 2 \times 2 \times \sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5} ;$$

$$ab = (2 + \sqrt{5})(-2 + \sqrt{5}) = -4 + 5 = 1.$$

$$2. \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{9 + 4\sqrt{5} + 9 - 4\sqrt{5}}{1} = 18.$$

$$3. \gamma = \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{(9 + 4\sqrt{5}) - (9 - 4\sqrt{5})}{1} = 8\sqrt{5} ;$$

si $2,2360 < \sqrt{5} < 2,2361$,

alors : $8 \times 2,2360 < 8\sqrt{5} < 8 \times 2,2361$

$$17,8880 < \gamma < 17,8888.$$

$$4. (-2)^2 = 4 \text{ et } (\sqrt{5})^2 = 5 ;$$

donc : $\sqrt{5} > 2$ et $|-2 + \sqrt{5}| = -2 + \sqrt{5}$.

Exercice 69 A la fontaine

a. Encadrement du nombre N de gobelets (contenant entre 0,4 L et 0,5 L) que Charles peut remplir avec un bidon qui contient entre 25 L et 30 L :

$$\frac{25}{0,5} \leq N \leq \frac{30}{0,4}$$

$$50 \leq N \leq 75.$$

b. Encadrement de la quantité Q d'eau utilisée pour remplir 20 gobelets :

$$20 \times 0,4 \leq Q \leq 20 \times 0,5$$

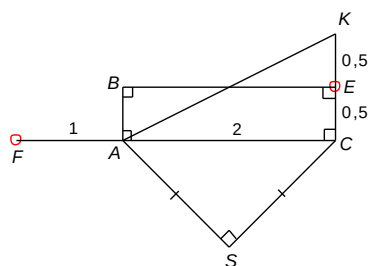
$$8 \text{ L} \leq Q \leq 10 \text{ L} ;$$

Encadrement de la quantité R d'eau qui reste alors dans le bidon :

$$25 - 10 \leq R \leq 30 - 8$$

$$15 \text{ L} \leq R \leq 22 \text{ L}.$$

Exercice 70 Tous les chemins mènent à l'école



1. $AK = \sqrt{AC^2 + CA^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$;

$AC^2 = AS^2 + CS^2 = 2AS^2$, donc : $AS = \sqrt{\frac{AC^2}{2}} = \sqrt{\frac{2^2}{2}} = \sqrt{2}$.

On en déduit les longueurs :

- du trajet via B (Babila) : $FA + AB + BE = 1 + 0,5 + 2 = 3,5$ km ;
- du trajet via K (Kouma) : $FA + AK + KE = 1 + \sqrt{5} + 0,5 = (\sqrt{5} + 1,5)$ km ;
- du trajet via S (Sonia) : $FA + AS + SC + CE = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 0,5 = (2\sqrt{2} + 1,5)$ km.

2. Trajet de lundi : $2(\sqrt{5} + 1,5) = (2\sqrt{5} + 3)$ km ; trajet de mardi : $(2\sqrt{2} + 1,5) + 3,5 = (2\sqrt{2} + 5)$ km.

Or : $(2\sqrt{5} + 3) \approx 7,47$ km et $(2\sqrt{2} + 5) \approx 7,83$ km ; donc c'est le trajet de lundi qui a été le plus court.

Exercice 71 Le voyage en voiture

Première étape

- longueur du trajet : entre 160 km et 180 km ;
- heure de départ : entre 15 h et 15 h 15 ;
- heure d'arrivée : entre 17 h 45 et 18 h.

Deuxième étape

- longueur du trajet : entre 120 km et 140 km ;
- heure de départ : entre 18 h 15 et 18 h 30 ;
- heure d'arrivée : entre 20 h et 20 h 15.

1. Encadrement de la longueur totale D du trajet parcouru par Abas : $160 + 120 \leq D \leq 180 + 140$
 $280 \text{ km} \leq D \leq 320 \text{ km}.$

2.a. Encadrement de la durée T_1 de la première étape : $17 \text{ h } 45 - 15 \text{ h } 15 \leq T_1 \leq 18 \text{ h} - 15 \text{ h}$
 $2 \text{ h } 30 \text{ min} \leq T_1 \leq 3 \text{ h}.$

b. Encadrement de la durée T_2 de la deuxième étape : $20 \text{ h} - 18 \text{ h } 30 \leq T_2 \leq 20 \text{ h } 15 - 18 \text{ h } 15$
 $1 \text{ h } 30 \text{ min} \leq T_2 \leq 2 \text{ h}.$

c. Encadrement de la durée totale T pendant laquelle Abas a roulé : $2 \text{ h } 30 \text{ min} + 1 \text{ h } 30 \text{ min} \leq T \leq 3 \text{ h} + 2 \text{ h}$
 $4 \text{ h} \leq T \leq 5 \text{ h}.$

3.a. Pour une distance D parcourue en un temps T , la vitesse moyenne est : $V_m = \frac{D}{T}$.

b. Encadrement de la vitesse moyenne d'Abas sur la totalité de son parcours : $\frac{280}{5} \leq V_m \leq \frac{320}{4}$
 $56 \text{ km/h} \leq V_m \leq 80 \text{ km/h}.$

Exercice 72 La boîte en carton

1. Encadrement de la largeur b de la bande de carton : $29 - 1 \leq b \leq 29 + 1$
 $28 \text{ cm} \leq b \leq 30 \text{ cm} ;$

encadrement du volume $\mathcal{V}'$ de la boîte : $2\,600 - 100 \leq \mathcal{V}' \leq 2\,600 + 100$
 $2\,500 \text{ cm}^3 \leq \mathcal{V}' \leq 2\,700 \text{ cm}^3.$

2.a. L'aire du fond de la boîte est : $\mathcal{A} = \frac{\mathcal{V}'}{5}$.

b. Encadrement de l'aire du fond de la boîte : $\frac{2\,500}{5} \leq \frac{\mathcal{V}'}{5} \leq \frac{2\,700}{5}$
 $500 \text{ cm}^2 \leq \mathcal{A} \leq 540 \text{ cm}^2.$

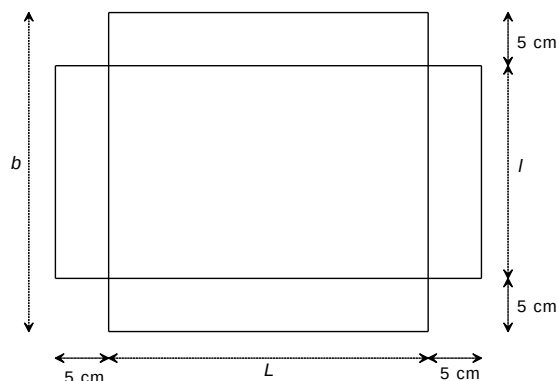
3.a. Encadrement de la largeur l de la boîte : $28 - 10 \leq l \leq 30 - 10$
 $18 \text{ cm} \leq l \leq 20 \text{ cm}.$

b. Encadrement de la longueur $L = \frac{\mathcal{A}}{l}$ de la boîte : $\frac{500}{20} \leq \frac{\mathcal{A}}{l} \leq \frac{540}{18}$
 $25 \text{ cm} \leq L \leq 30 \text{ cm}.$

c. Plusieurs possibilités pour L :

- si $L = 25 \text{ cm}$, lorsque $b = 30 \text{ cm}$ on a : $\mathcal{V}' = 20 \times 5 \times 25 = 2\,500 \text{ cm}^3$;
- si $L = 27 \text{ cm}$, lorsque $b = 30 \text{ cm}$ on a : $\mathcal{V}' = 20 \times 5 \times 27 = 2\,700 \text{ cm}^3$;
- si $L = 30 \text{ cm}$, lorsque $b = 28 \text{ cm}$ on a : $\mathcal{V}' = 18 \times 5 \times 30 = 2\,700 \text{ cm}^3$;

.....



10 Puissances

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Inverse d'un nombre relatif non nul [1 p 122]	27, 28	63, 64	
2	Puissances de 10 et écriture scientifique [2 p 122]	29, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62	65	73
3, 4	Puissance à exposant un entier relatif [3 p 122]	30, 31, 32, 33, 34	64, 66, 67	
	Apprendre à utiliser les notations sur les puissances [1 p 124]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12		
5, 6	Opérations sur les puissances [4 p 123]	35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54	68, 69	70, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84
	Apprendre à utiliser les propriétés sur les puissances [2 p 125]	13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer Micro-organismes et maladies

1.a. Longueur de l'image de la salmonelle sur la revue : 7,2 cm = 0,072 m = $7,2 \times 10^{-2}$ m ;

grossissement utilisé : 20 000 = 2×10^4 .

b. Longueur réelle de la salmonelle : $0,072 \div 20\,000$ m = 0,000 0036 m = $3,6 \times 10^{-6}$ m .

c. Comme 1 μm (micromètre) = 10^{-6} m, la longueur réelle de cette bactérie est : 3,6 μm .

2.a. A partir d'une seule bactérie, qui se divise en 2 toutes les heures, il y aura :

• après 1 heure, 2 = 2^1 bactéries ; • après 2 heures, 4 = 2^2 bactéries ; • après 4 heures, 16 = 2^4 bactéries ;

b. Nombre de bactéries : après 8 heures, $2^8 = 256$; après 24 heures, $2^{24} = 16\,777\,216$.

3. Diamètre réel du VIH (virus du sida) : 100 nm = 10^{-7} m ;

sur une photo grossie 20 000 fois, son diamètre est : $10^{-7} \times 2 \times 10^4 = 2 \times 10^{-3}$ m .

1 Inverse d'un nombre relatif non nul

$$1. -5 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = 1 ; \quad \frac{4}{7} \times \frac{7}{4} = 1.$$

Pour chaque couple, $\left(-5 ; -\frac{1}{5}\right)$ et $\left(\frac{4}{7} ; \frac{7}{4}\right)$, les deux nombres sont inverses l'un de l'autre.

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

2. a, n et p sont des nombres non nuls ; l'inverse de a est $\frac{1}{a}$ et l'inverse de $\frac{n}{p}$ est $\frac{p}{n}$.

2 Ecriture scientifique

1. a. m et n désignant deux nombres entiers relatifs, on a :

$$\bullet \underline{10^m \times 10^n = 10^{m+n}} ; \quad \bullet \underline{\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}} ; \quad \bullet \underline{10^{-m} = \frac{1}{10^m}} .$$

b. On en déduit que : $\bullet A = 10^4 \times 10^3 = 10^7$; $\bullet B = 10^5 \times 10^{-3} = 10^2$; $\bullet C = 10^7 \times 10^{-9} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2}$;

$\bullet D = \frac{10^5}{10^2} = 10^3$; $\bullet E = \frac{10^4}{10^{-2}} = 10^6$; $\bullet F = \frac{10^3}{10^7} = 10^{-4} = \frac{1}{10^4}$.

2. $4\,570 = 4,57 \times 10^3$; $0,003\,71 = 3,71 \times 10^{-3}$; $-26,1 \times 10^2 = -2,61 \times 10^3$; $0,89 \times 10^{-3} = 8,9 \times 10^{-4}$.

3 Puissances à exposant un nombre entier relatif

1.a.

	$\div 4$	$\div 4$	$\div 4$	$\div 4$	$\div 4$	$\div 4$	$\div 4$	$\div 4$	$\div 4$
Ecriture entière ou fractionnaire	256	64	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4^2}$	$\frac{1}{4^3}$	$\frac{1}{4^4}$
Ecriture avec exposant	4^4	4^3	4^2	4^1	4^0	4^{-1}	4^{-2}	4^{-3}	4^{-4}

b. La division par 4, qui fait passer d'une colonne à la colonne suivante, correspond à la soustraction du nombre 1 sur l'exposant de la puissance de 4.

2. a

	$\div \frac{3}{2}$	$\div \frac{3}{2}$	$\div \frac{3}{2}$	$\div \frac{3}{2}$	$\div \frac{3}{2}$	$\div \frac{3}{2}$	$\div \frac{3}{2}$	$\div \frac{3}{2}$	$\div \frac{3}{2}$
Ecriture entière ou fractionnaire	$\frac{243}{32}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$
Ecriture avec exposant	$\left(\frac{3}{2}\right)^5$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^0$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

b. La division par $\frac{3}{2}$, qui fait passer d'une colonne à la colonne suivante, correspond à la soustraction du nombre 1 sur l'exposant de la puissance de $\frac{3}{2}$.

3. Propriété : a désignant un nombre réel non nul et n un nombre entier relatif, on a : $\underline{\frac{1}{a^n} = a^{-n}}$.

4.a. $\frac{1}{3^4} = 3^{-4}$; b. $\frac{1}{5^3} = 5^{-3}$; c. $\frac{1}{8^{-5}} = 8^5$; d. $\frac{1}{9} = 9^{-1}$; e. $\frac{1}{11^{-3}} = 11^3$.

4 Signe d'une puissance

1. $\bullet -3^3 = -27$; $\bullet (-3)^3 = -27$; $\bullet 2^4 = 16$; $\bullet (-2)^4 = 16$; $\bullet 2^5 = 32$; $\bullet (-2)^5 = -32$.

2. $\bullet 5^7 > 0$; $\bullet (-5)^3 < 0$; $\bullet 2^3 > 0$; $\bullet (-2)^3 < 0$; $\bullet (-10)^4 > 0$; $\bullet (-10)^5 < 0$.

3. a désigne un nombre réel non nul et n un nombre entier relatif.

a. Lorsque a est positif : a^n est toujours positif.

b. Lorsque a est négatif : a^n est positif quand n est pair ; a^n est négatif quand n est impair.

5 Puissances de produits ou de quotients

1.a. $(-7 \times 2)^3 = (-7 \times 2) \times (-7 \times 2) \times (-7 \times 2) = [(-7) \times (-7) \times (-7)] \times (2 \times 2 \times 2) = (-7)^3 \times 2^3$.

$(5 \times 3)^{-4} = \frac{1}{(5 \times 3)^4} = \frac{1}{5^4 \times 3^4} = \frac{1}{5^4} \times \frac{1}{3^4} = 5^{-4} \times 3^{-4}$.

b. Propriété : a et b sont deux nombres réels non nuls, n est un nombre entier relatif : $\underline{(a \times b)^n = a^n \times b^n}$.

2.a. $\left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{3^5}{5^5}$. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = 2^4 \times \frac{1}{3^4} = \frac{1}{2^{-4}} \times 3^{-4} = \frac{3^{-4}}{2^{-4}}$.

b. Propriété : a et b sont deux nombres réels non nuls, n est un nombre entier relatif : $\underline{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$.

3.a. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2$ donc $(a+b)^n \neq a^n + b^n$.

b. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \neq a^2 - b^2$ donc $(a-b)^n \neq a^n - b^n$.

6 Produits, quotients ou puissances de puissances

1. a.
- $8^3 \times 8^5 = (8 \times 8 \times 8) \times (8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8) = 8^8$;
 - $(-7)^{-2} \times (-7)^5 = \frac{1}{(-7)^2} \times (-7)^5 = \frac{(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)}{(-7) \times (-7)} = (-7)^3$;
- b.
- $\frac{4^6}{4^3} = \frac{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}{4 \times 4 \times 4} = 4^3$;
 - $\frac{2^7}{2^{-2}} = 2^7 \times \frac{1}{2^{-2}} = 2^7 \times 2^2 = 2^9$;
 - $\frac{5^{-4}}{5^2} = 5^{-4} \times \frac{1}{5^2} = 5^{-4} \times 5^{-2} = 5^{-6} = \frac{1}{5^6}$;
- c.
- $(5^3)^2 = (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) = 5^6$;
 - $(4^{-2})^3 = \left(\frac{1}{4^2}\right) \times \left(\frac{1}{4^2}\right) \times \left(\frac{1}{4^2}\right) = \frac{1}{4^6} = 4^{-6}$;
 - $(3^{-2})^{-2} = \frac{1}{(3^{-2})^2} = \frac{1}{3^{-4}} = 3^4$.

2. Propriétés : a est un nombre réel non nul, m et n sont deux nombres entiers relatifs :

$$\bullet \quad \underline{a^m \times a^n = a^{m+n}} ; \qquad \bullet \quad \underline{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} ; \qquad \bullet \quad \underline{(a^m)^n = a^{m \times n}} .$$

1 Apprendre à utiliser les notations sur les puissances

Exercice 1

a. $5^4 = \underline{625}$;

b. $(-8)^2 = \underline{64}$;

c. $7^3 = \underline{343}$;

d. $2^5 = \underline{32}$.

Exercice 2

a. $2^3 = \underline{8}$;

b. $(-2)^3 = \underline{-8}$;

c. $-2^3 = \underline{-8}$;

d. $3^5 = \underline{243}$.

Exercice 3

a. $10^3 = \underline{1\ 000}$;

b. $(-10)^4 = \underline{10\ 000}$;

c. $10^{-2} = \underline{\frac{1}{100}}$;

d. $-10^{-3} = \underline{-\frac{1}{1\ 000}}$;

e. $(-10)^{-3} = \underline{-\frac{1}{1\ 000}}$;

f. $10^{-1} = \underline{\frac{1}{10}}$.

Exercice 4

a. $(\sqrt{5})^4 = 5^2 = \underline{25}$;

b. $(\sqrt{3})^6 = 3^3 = \underline{27}$;

c. $(-\sqrt{2})^4 = 2^2 = \underline{4}$;

d. $(\sqrt{2})^{-4} = 2^{-2} = \underline{\frac{1}{4}}$;

e. $(-\sqrt{7})^{-2} = 7^{-1} = \underline{\frac{1}{7}}$;

f. $(-\sqrt{3})^{-6} = 3^{-3} = \underline{\frac{1}{27}}$.

Exercice 5

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \underline{4}$;

b. $\left(-\frac{1}{7}\right)^{-1} = \left(-\frac{7}{1}\right)^1 = \underline{-7}$;

c. $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{3}\right)^3 = \underline{-\frac{125}{27}}$;

d. $\left(\frac{7}{5}\right)^{-5} = \left(\frac{5}{7}\right)^5 = \underline{\frac{3\ 125}{16\ 807}}$;

e. $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{-4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^4 = \underline{\frac{9}{4}}$;

f. $\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)^{-4} = \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\right)^4 = \underline{\frac{49}{25}}$.

Exercice 6

Ecriture scientifique : a. $14\ 507 = \underline{1,4507 \times 10^4}$;

b. $2\ 347 = \underline{2,347 \times 10^3}$;

c. $1\ 070 = \underline{1,07 \times 10^3}$.

Exercice 7

Ecriture scientifique : a. $0,000\ 12 = \underline{1,2 \times 10^{-4}}$;

b. $0,043\ 7 = \underline{4,37 \times 10^{-2}}$;

c. $0,000\ 351 = \underline{3,51 \times 10^{-4}}$.

Exercice 8L'écriture scientifique de $243,7 \times 10^4$ est : $2,437 \times 10^6$. $3,20 \times 10^{-3}$ et $2,471 \times 10^2$ sont des nombres écrits en écriture scientifique.Exercice 9

$\left(-\frac{12}{5}\right)^7 < 0$ (puissance impaire d'un nombre négatif) ;

$(2\sqrt{7})^6 > 0$ (puissance d'un nombre positif) ;

$(-4)^9 < 0$ (puissance impaire d'un nombre négatif).

Exercice 10

a. $-8 = \underline{(-2)^3}$; b. $\frac{1}{4} = \underline{(-2)^{-2}}$; c. $-\frac{1}{32} = \underline{(-2)^{-5}}$.

Exercice 11

a. $\frac{1}{125} = \underline{5^{-3}}$; b. $1\ 000 = \underline{\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}}$; c. $-27 = \underline{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}}$.

Exercice 12

a. $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \underline{2^{-3}}$; b. $-\frac{1}{2} = \frac{1}{(-2)^1} = \underline{(-2)^{-1}}$;

c. $\frac{49}{81} = \frac{7^2}{9^2} = \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \underline{\left(\frac{9}{7}\right)^{-2}}$; d. $-32 = (-2)^5 = \underline{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}}$.

2 Apprendre à utiliser les propriétés sur les puissances

Exercice 13

- a. $7^5 \times 2^5 = 14^5$; b. $(-3)^4 \times 2^4 = (-6)^4$;
c. $(\sqrt{3})^7 \times 2^7 = (2\sqrt{3})^7$.

Exercice 14

- a. $\frac{3^4}{8^4} = \left(\frac{3}{8}\right)^4$; b. $\frac{(-2)^5}{6^5} = \left(-\frac{2}{6}\right)^5 = \left(-\frac{1}{3}\right)^5$;
c. $\frac{(\sqrt{5})^3}{(\sqrt{2})^3} = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^3$.

Exercice 15

- a. $12^5 \times 10^5 = (12 \times 10)^5 = 120^5$; b. $(-3)^4 \times (-2)^4 = 6^4$;
c. $(\sqrt{3})^6 \times (\sqrt{2})^6 = (\sqrt{3} \times \sqrt{2})^6 = (\sqrt{6})^6 = \left((\sqrt{6})^2\right)^3 = 6^3$.

Exercice 16

- a. $\frac{14^7}{3^7} = \left(\frac{14}{3}\right)^7$; b. $\frac{2^{-5}}{7^{-5}} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-5}$;
c. $\frac{(-4)^8}{(-5)^8} = \left(\frac{-4}{-5}\right)^8 = \left(\frac{4}{5}\right)^8$.

Exercice 17

- a. $((-3)^2)^3 = (-3)^6 = 3^6$; b. $((\sqrt{2})^3)^6 = (\sqrt{2})^{18} = 2^9$;
c. $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$.

Exercice 18

- a. $\left(\frac{5}{4}\right)^{-7} = \left(\frac{4}{5}\right)^7$;
b. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$;
c. $\frac{3^4}{(-2)^{-4}} = 3^4 \times (-2)^4 = 6^4$.

Exercice 19

- a. $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(-\frac{2 \times 1}{7 \times 2}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-4} = 7^4$;
b. $\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^{-3} \times (6\sqrt{8})^{-3} = \left(\frac{6\sqrt{8} \times \sqrt{8}}{3}\right)^{-3} = (2 \times 8)^{-3} = \left(\frac{1}{16}\right)^3$;
c. $\frac{5^{-2}}{9^{-2}} = \left(\frac{9}{5}\right)^2$; d. $\frac{(-12)^{-3}}{3^{-3}} = \left(\frac{-12}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^3$;
e. $\frac{(-5)^{-4}}{(-15)^{-4}} = \left(\frac{-5}{-15}\right)^{-4} = 3^4$.

Exercice 20

- a. Si $3^2 \times a^n = 12^2$, alors $a^n = \frac{12^2}{3^2} = 4^2$;
b. Si $a^n \times 8^{-3} = 16^{-3}$, alors $a^n = \frac{16^{-3}}{8^{-3}} = 2^{-3}$.

Exercice 21

- a. Si $3^{-4} \times a^n = 3^{-9}$, alors $a^n = \frac{3^{-9}}{3^{-4}} = 3^{-5}$;
b. Si $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times a^n = \frac{2}{5}$, alors $a^n = \frac{\frac{2}{5}}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$.

Exercice 22

- a. Si $\frac{a^n}{(-5)^4} = (-5)^2$, alors $a^n = (-5)^2 \times (-5)^4 = (-5)^6$;
b. Si $\frac{(\sqrt{3})^7}{a^n} = \sqrt{3}$, alors $a^n = \frac{(\sqrt{3})^7}{\sqrt{3}} = (\sqrt{3})^6 = 3^3$.

Exercice 23

- a. Si $(a^n)^3 = 2^{15} = (2^5)^3$, alors $a^n = 2^5$;
b. Si $(a^n)^5 = (-\sqrt{3})^{20} = ((-\sqrt{3})^4)^5$, alors $a^n = (-\sqrt{3})^4$.

Exercice 24

- a. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$;
b. $(-7)^{2015} \times (-7)^{2014} = (-7)^1 = -7$.
c. $\frac{(\sqrt{3})^8}{\left((\sqrt{3})^4\right)^2} = \frac{(\sqrt{3})^8}{(\sqrt{3})^8} = 1$;
d. $\frac{1}{5} \times \frac{(-5)^7}{(-5)^6} = \frac{(-5)^7}{5 \times 5^6} = \left(\frac{-5}{5}\right)^7 = -1$.

Exercice 25

Si $A = 5\sqrt{2} \times 10^3$ et $B = \sqrt{2} \times 10^{-2}$, alors :

- $A^2 = (5\sqrt{2})^2 \times (10^3)^2 = 50 \times 10^6 = 5 \times 10^7$;
- $A \times B = 5\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 10^{3-2} = 10 \times 10 = 1 \times 10^2$;
- $\frac{A}{B} = \frac{5\sqrt{2} \times 10^3}{\sqrt{2} \times 10^{-2}} = 5 \times 10^5$; $\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{2} \times 10^{-2}}{5\sqrt{2} \times 10^3} = 2 \times 10^{-6}$.

Exercice 26

Si $C = \frac{2}{5} \times 10^{-2}$ et $D = \frac{5}{4} \times 10^5$, alors :

- $C^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times (10^{-2})^2 = \frac{4}{25} \times 10^{-4} = 1,6 \times 10^{-5}$;
- $C \times D = \frac{2}{5} \times \frac{5}{4} \times 10^{-2+5} = \frac{1}{2} \times 10^3 = 5 \times 10^2$;
- $\frac{C}{D} = \frac{\frac{2}{5} \times 10^{-2}}{\frac{5}{4} \times 10^5} = \frac{8}{25} \times 10^{-7} = 3,2 \times 10^{-8}$;
- $\frac{D}{C} = \frac{\frac{5}{4} \times 10^5}{\frac{2}{5} \times 10^{-2}} = \frac{25}{8} \times 10^7 = 3,125 \times 10^7$.

Activités d'application

Calculs avec une puissance

Exercice 27

Nombres égaux à l'inverse de $-\frac{3}{8}$:

$$\frac{-8}{(\sqrt{3})^2} ; \quad \frac{24}{-9} ; \quad \frac{8}{-\sqrt{9}} ; \quad -\frac{8}{3} ; \quad \frac{-2^3}{(\sqrt{3})^2}.$$

Exercice 28

Ecriture sous forme d'une fraction irréductible :

$$\text{a. } \frac{1}{2} = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} ; \quad \text{b. } \frac{1}{-\frac{4}{7}} = 1 \times \left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{7}{4} ;$$

$$\text{c. } 10 \div \frac{15}{8} = 10 \times \frac{8}{15} = \frac{16}{3} ; \quad \text{d. } \frac{7}{2} \div 4 = \frac{7}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8} ;$$

$$\text{e. } \frac{11}{14} \div \frac{3}{7} = \frac{11}{14} \times \frac{7}{3} = \frac{11}{6} ;$$

$$\text{f. } \frac{\sqrt{3}}{3} \div \frac{2\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{6}.$$

Exercice 29

- a. $10^4 = 10\,000$: dix mille ;
 b. $10^{-2} = 0,01$: un centième ;
 c. $10^7 = 10\,000\,000$: dix millions ;
 d. $10^{-4} = 0,000\,1$: un dix millième.

Exercice 30

- a. $3^5 = 243$; b. $(-5)^3 = -125$; c. $0,2^3 = 0,008$;
 d. $(-8)^2 = 64$; e. $(-\sqrt{7})^4 = 49$; f. $(-15)^0 = 1$.

Exercice 31

$$\text{a. } 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} ; \quad \text{b. } (-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81} ;$$

$$\text{c. } (-0,5)^{-1} = \frac{1}{-0,5} = -2 ; \quad \text{d. } (\sqrt{11})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{11})^2} = \frac{1}{11} ;$$

$$\text{e. } (-1)^{-6} = 1 ; \quad \text{f. } \left(-\frac{7}{8}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{1}{\frac{49}{64}} = \frac{64}{49}.$$

Exercice 32

$$\text{a. } 36 = 6^2 ; \quad \text{b. } 16 = 2^4 ; \quad \text{c. } -27 = (-3)^3 ;$$

$$\text{d. } -\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 ; \quad \text{e. } \frac{49}{9} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 ; \quad \text{f. } \frac{64}{27} = \left(\frac{4}{3}\right)^3.$$

Exercice 33

$$\text{a. } \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2} ; \quad \text{b. } \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2} ;$$

$$\text{c. } -\frac{1}{5} = \frac{1}{(-5)^1} = (-5)^{-1} ; \quad \text{d. } 81 = 3^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} ;$$

$$\text{e. } \frac{100}{9} = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{10}\right)^{-2} ; \quad \text{f. } \frac{81}{64} = \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^{-2}.$$

Exercice 34

$$\left(-\sqrt{3}\right)^6 > 0 \quad (\text{puissance paire d'un nombre négatif}) ;$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^5 > 0 \quad (\text{puissance d'un nombre positif}) ;$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{2\,015} < 0 \quad (\text{puissance impaire d'un nombre négatif}).$$

Propriétés des puissances

Exercice 35

- a. $8^3 \times 6^3 = \underline{48^3}$; b. $(-5)^{-2} \times (0,4)^{-2} = \underline{2^{-2}}$;
c. $(-9)^4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \underline{15^4}$.

Exercice 36

- a. $(\sqrt{3})^{-1} \times (3\sqrt{3})^{-1} = \underline{9^{-1}}$; b. $\left(\frac{5}{4}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \underline{\left(\frac{15}{8}\right)^{-3}}$;
c. $\left(\frac{3}{8}\right)^{-3} \times \left(-\frac{4}{3}\right)^{-3} = \underline{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}$. d. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-5} \times \left(\frac{10}{3}\right)^{-5} = \underline{\left(\frac{4}{3}\right)^{-5}}$.

Exercice 37

- a. $\frac{9^2}{5^2} = \underline{\left(\frac{9}{5}\right)^2}$; b. $\frac{12^{-2}}{4^{-2}} = \underline{3^{-2}}$;
c. $\frac{(-4)^{-3}}{7^{-3}} = \underline{\left(-\frac{4}{7}\right)^{-3}}$.

Exercice 38

- a. $\frac{6^4}{1,5^4} = \underline{4^4}$; b. $\frac{(2\sqrt{5})^5}{4^5} = \underline{\left(\frac{2\sqrt{5}}{4}\right)^5} = \underline{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^5}$;
c. $\frac{(-27)^{-1}}{(-9)^{-1}} = \underline{(-3)^{-1}} = \underline{-\frac{1}{3}}$.

Exercice 39

- a. Si $\frac{1}{3^4} \times x = 27$, alors $x = 27 \times 3^4 = \underline{3^7}$;
b. si $2^{-5} \times x = 10^5$, alors $x = \frac{10^5}{2^{-5}} = \underline{20^5}$;
c. si $7^3 \times x = 21^3$, alors $x = \frac{21^3}{7^3} = \underline{3^3}$.

Exercice 40

- a. Si $-8x^n = (ax)^3$, alors $a = -2$ et $n = 3$;
b. Si $\frac{36}{25}x^n = (ax)^2$, alors $a = \frac{6}{5}$ et $n = 2$;
c. Si $ax^{-2} = (5x)^n$, alors $a = \frac{1}{25}$ et $n = -2$.

Exercice 41

- a. $(2\ 468)^{10} \times \left(\frac{1}{1\ 234}\right)^{10} = \left(\frac{2\ 468}{1\ 234}\right)^{10} = \underline{2^{10}} = \underline{1\ 024}$.
b. $2^{10} = 2^5 \times 2^5 = 32 \times 32$; Gambo a raison.

Exercice 42

- a. $(-18)^3 \times (-18)^1 = \underline{(-18)^4}$; b. $7^{-2} \times 7^5 = \underline{7^3}$;
c. $2^{-5} \times 2^2 = \underline{2^{-3}}$.

Exercice 43

- a. $(\sqrt{5})^4 \times (\sqrt{5})^{-4} = \underline{(\sqrt{5})^0} = \underline{1}$; b. $\frac{7}{8} \times \left(\frac{7}{8}\right)^{-2} = \underline{\left(\frac{7}{8}\right)^{-1}} = \underline{\frac{8}{7}}$;
c. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \underline{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$.

Exercice 44

- a. $\frac{9^6}{9^5} = \underline{9}$; b. $\frac{14^{-3}}{14^{-2}} = \underline{14^{-1}} = \underline{\frac{1}{14}}$;
c. $\frac{(-0,25)^{-4}}{(-0,25)^3} = \underline{(-0,25)^{-7}} = \underline{(-4)^7}$;

Exercice 45

- a. $\frac{(\sqrt{12})^3}{(\sqrt{12})^{-4}} = \underline{(\sqrt{12})^7}$; b. $\frac{8^4}{8} = \underline{8^3}$;
c. $\frac{7^5}{7^0} = \underline{7^5}$.

Exercice 46

- a. $(11^4)^2 = \underline{11^8}$; b. $(9^{-3})^{-3} = \underline{9^9}$;
c. $(2^{-2})^5 = \underline{2^{-10}}$.

Exercice 47

- a. $\left((\sqrt{6})^2\right)^{-4} = \underline{6^{-4}}$; b. $\left(\left(\frac{8}{5}\right)^3\right)^0 = \underline{1}$;
c. $\left(\left(-\frac{9}{2}\right)^{-1}\right)^{-1} = \underline{-\frac{9}{2}}$.

Exercice 48

- a. Si $6,3^3 \times 6,3^n = 6,3^2$ alors $3+n = 2$
 $n = \underline{-1}$;
b. si $8^n \times 8^{-4} = 8^2$ alors $n-4 = 2$
 $n = \underline{6}$;
c. si $3^{-5} \times 3^n = 3^4$, alors $-5+n = 4$
 $n = \underline{9}$;
d. si $\left(\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$, alors $n-4 = -4$
 $n = \underline{0}$.

Exercice 49

- a. Si $\frac{12^2}{12^n} = 12^4$ alors $2-n = 4$
 $n = \underline{-2}$;
- b. si $\frac{(-4,5)^n}{(-4,5)^{-1}} = (-4,5)^{-3}$ alors $n+1 = -3$
 $n = \underline{-4}$;
- c. si $\frac{(\sqrt{7})^n}{(\sqrt{7})^{-4}} = (\sqrt{7})^2$ alors $n+4 = 2$
 $n = \underline{-2}$;
- d. si $\frac{10^{-4}}{10^n} = 10^{-1}$ alors $-4-n = -1$
 $n = \underline{-3}$.

Exercice 50

- a. Si $(13^2)^n = 13^{-6}$, alors $2n = -6$
 $n = \underline{-3}$;
- b. si $(3,6^n)^{-2} = 3,6^8$, alors $-2n = 8$
 $n = \underline{-4}$;
- c. si $(4^{-3})^n = 4^0$, alors $-3n = 0$
 $n = \underline{0}$;
- d. si $\left(\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)^{-1} = \left(-\frac{3}{5}\right)^{-3}$, alors $-n = -3$
 $n = \underline{3}$.

Exercice 51

- a. Après le 2^e prélèvement de $\frac{1}{5}$ sur les $\frac{4}{5}$ de la somme initiale, il reste $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$ de cette somme initiale ;
après le 3^e prélèvement de $\frac{1}{5}$ sur les $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ de la somme initiale, il reste $\frac{4}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^3$ de cette somme initiale ;
après n prélèvements, il reste $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ de la somme initiale.
- b. Pour $n=2$, $\left(\frac{4}{5}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} = 0,64$;
pour $n=3$, $\left(\frac{4}{5}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125} = 0,512$;
pour $n=4$, $\left(\frac{4}{5}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625} = 0,4096$.
- c. C'est donc après 4 prélèvements qu'il restera moins de la moitié de la somme initiale.

Exercice 52

- a. $9^2 \times 5^2 = \underline{45^2}$;
- b. $(-4)^{-2} \times (-4)^3 = \underline{-4}$;
- c. $0,7^{-4} \times 0,7^{-1} = \underline{0,7^{-5}}$;
- d. $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{6 \times 5}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = \underline{10^2}$.

Exercice 53

- a. $\frac{6^{-1}}{6^{-2}} = \underline{6}$;
- b. $\frac{3^3}{0,5^3} = \left(\frac{3}{0,5}\right)^3 = \underline{6^3}$;
- c. $\frac{(\sqrt{10})^3}{(\sqrt{10})^{-3}} = (\sqrt{10})^6 = \underline{10^3}$;
- d. $\frac{(-0,5)^{-1}}{0,2^{-1}} = \left(-\frac{0,5}{0,2}\right)^{-1} = -\frac{2}{5} = \underline{-0,4}$.
- e. $\frac{(-6)^{-4}}{(-6)^2} = \underline{(-6)^{-6}}$;
- f. $\frac{7^{-5}}{0,7^{-5}} = \left(\frac{7}{0,7}\right)^{-5} = \underline{10^{-5}}$.

Exercice 54

- a. $(2\sqrt{2})^4 = 2^4 \times (\sqrt{2})^4 = 16 \times 4 = \underline{64}$;
- b. $(5\sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{(5\sqrt{3})^2} = \frac{1}{5^2 \times (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{25 \times 3} = \underline{\frac{1}{75}}$;
- c. $14^2 \times \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \left(\frac{14}{7}\right)^2 = 2^2 = \underline{4}$;
- d. $\left(\frac{2^2}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \underline{\frac{64}{27}}$;
- e. $\left(\frac{\sqrt{12}}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{4}{\sqrt{12}}\right)^4 = \frac{4^4}{(\sqrt{12})^4} = \frac{4^2 \times 4^2}{12^2} = \frac{4^2}{3^2} = \underline{\frac{16}{9}}$;
- f. $\frac{(2\sqrt{5})^3}{(4\sqrt{5})^3} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \underline{\frac{1}{8}}$.

Puissances de 10

Exercice 55

1. a. $5\,400 = 5,4 \times 10^3$; b. $-268,9 = -2,689 \times 10^2$;
c. $300\,000 = 3 \times 10^5$; d. $0,003\,4 = 3,4 \times 10^{-3}$;
e. $15,07 = 1,507 \times 10$; f. $0,000\,006 = 6 \times 10^{-6}$.

Exercice 56

2. a. $183 \times 10^4 = 1,83 \times 10^2 \times 10^4 = 1,83 \times 10^6$;
b. $0,003 \times 10^2 = 3 \times 10^{-3} \times 10^2 = 3 \times 10^{-1}$;
c. $-45,7 \times 10^2 = -4,57 \times 10 \times 10^2 = -4,57 \times 10^3$;
d. $351,8 \times 10^{-5} = 3,518 \times 10^2 \times 10^{-5} = 3,518 \times 10^{-3}$;
e. $0,000\,25 \times 10^{-3} = 2,5 \times 10^{-4} \times 10^{-3} = 2,5 \times 10^{-7}$.
f. $66,66 \times 10^{-1} = 6,666 \times 10 \times 10^{-1} = 6,666$.

Exercice 57

- a. $7,2 \times 10^2 \times 5 \times 10^3 = 36 \times 10^5 = 3\,600\,000$;
b. $0,5 \times 10^{-3} \times 8 \times 10^2 = 4 \times 10^{-1} = 0,4$;
c. $-\frac{1}{3} \times 10^{-4} \times 6 \times 10^5 = -2 \times 10^1 = -20$;
d. $-\frac{1}{5} \times 10^{-3} \times 3 \times 10^3 = -\frac{3}{5} \times 10^0 = -6 \times 10^{-1} = -0,6$.

Exercice 58

- a. $\frac{13 \times 10^2}{5 \times 10^5} = \frac{13}{5} \times 10^{-3} = 2,6 \times 10^{-3} = 0,002\,6$;
b. $\frac{2 \times 10^{-1}}{-3 \times 10^{-4}} = -\frac{2}{3} \times 10^3 \approx -0,666 \dots \times 10^3 \approx -666,666 \dots$;
c. $\frac{8 \times 10^3}{16 \times 10^{-3}} = \frac{1}{2} \times 10^6 = 5 \times 10^5 = 500\,000$;

Exercice 59

- a. $\frac{-3 \times 10^{-2}}{4 \times 10^4} = -\frac{3}{4} \times 10^{-6} = -7,5 \times 10^{-7} = -0,000\,000\,75$;
b. $\frac{\sqrt{3} \times 10^3}{2\sqrt{3} \times 10^2} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$;
c. $\frac{0,2 \times 10^{-1}}{\frac{1}{6} \times 10^{-3}} = 1,2 \times 10^2 = 120$.

Exercice 60

Longueur du ruban : $150\text{ m} = 1,5 \times 10^2\text{ m}$;
largeur du ruban : $8\text{ mm} = 0,008\text{ m} = 8 \times 10^{-3}\text{ m}$;
aire d'une face du ruban :
 $1,5 \times 10^2 \times 8 \times 10^{-3} = 12 \times 10^{-1} = 1,2\text{ m}^2$.

Exercice 61

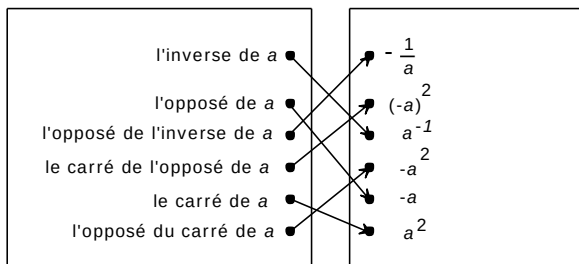
1 AL (année-lumière) $\approx 9\,500$ milliards de km
 $\approx 9\,500 \times 10^9\text{ km} \approx 9,5 \times 10^{12}\text{ km}$.

Distance de la Terre à la galaxie d'Andromède :
2 millions d'AL $\approx 2 \times 10^6 \times 9,5 \times 10^{12}\text{ km} \approx 1,9 \times 10^{19}\text{ km}$.

Exercice 62

Masse approximative d'une molécule d'eau : $3 \times 10^{-23}\text{ g}$.
Masse de 1,5 L d'eau : $1\,500\text{ g}$.
Nombre de molécules d'eau dans une bouteille de 1,5 L :
 $\frac{1\,500}{3 \times 10^{-23}} \approx 5 \times 10^2 \times 10^{23} \approx 5 \times 10^{25}$.

Exercice 63 Comprendre le vocabulaire



Exercice 64 Connaître le signe

1. Signe de chaque nombre :

- $-3^3 < 0$ (opposé d'une puissance d'un nombre positif) ;
- $(-3)^3 < 0$ (puissance impaire d'un nombre négatif) ;
- $-3^{-3} < 0$ (opposé d'une puissance d'un nombre positif) ;
- $(-3)^{-3} < 0$ (puissance impaire d'un nombre négatif) ;
- $-3^4 < 0$ (opposé d'une puissance d'un nombre positif) ;
- $(-3)^4 > 0$ (puissance paire d'un nombre négatif) ;
- $-3^{-4} < 0$ (opposé d'une puissance d'un nombre positif) ;
- $(-3)^{-4} > 0$ (puissance paire d'un nombre négatif).

2.a. Nombres égaux : $-3^3 = (-3)^3$; $-3^{-3} = (-3)^{-3}$;

b. nombres inverses l'un de l'autre :

$$-3^3 \text{ et } -3^{-3} ; \quad (-3)^3 \text{ et } (-3)^{-3} ;$$

$$-3^4 \text{ et } -3^{-4} ; \quad (-3)^4 \text{ et } (-3)^{-4} ;$$

b. nombres opposés l'un de l'autre :

$$-3^4 \text{ et } (-3)^4 ; \quad -3^{-4} \text{ et } (-3)^{-4}.$$

Exercice 65 Ecriture scientifique

1. Raisons pour lesquelles aucun des nombres suivants n'est présenté en écriture scientifique :

$A = 23,147 \times 10^{-4}$:

23,147 a 2 chiffres non nuls avant la virgule ;

$B = 0,003\,85 \times 10^3$:

0,003 85 n'a pas un chiffre non nul avant la virgule ;

$C = 1,5 \times 2^8$:

2^8 n'est pas une puissance de 10 ;

$D = 1,5 \times 10^2 \times 2,2 \times 10^3$:

ce nombre n'est pas écrit sous la forme $a \times 10^n$.

2. Ecriture scientifique des ces nombres :

$A = 2,314\,7 \times 10^{-3}$;

$B = 3,85$;

$C = 384 = 3,84 \times 10^2$;

$D = 3,3 \times 10^5$.

3. $E = 2,347 \times 10^5 = 234\,700$;

$F = 2,85 \times 10^{-4} = 0,000\,285$.

Exercice 66 Changer le signe de l'exposant

1. a. $7^{-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^2$; b. $(-4)^{-5} = \left(-\frac{1}{4}\right)^5$; c. $12^{-1} = \frac{1}{12}$;

d. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-4} = 4^4$; e. $\left(-\frac{1}{7}\right)^{-1} = -7$; f. $\left(\frac{2}{9}\right)^{-4} = \left(\frac{9}{2}\right)^4$;

g. $\left(\frac{5}{12}\right)^{-3} = \left(\frac{12}{5}\right)^3$; h. $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-1} = -\frac{3}{4}$.

2.a. $11^2 = \left(\frac{1}{11}\right)^{-2}$; b. $(-6)^3 = \left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$; c. $17 = \left(\frac{1}{17}\right)^{-1}$;

d. $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = 3^{-5}$; e. $\left(-\frac{1}{5}\right)^4 = (-5)^{-4}$; f. $\left(\frac{3}{8}\right)^4 = \left(\frac{8}{3}\right)^{-4}$;

g. $\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}\right)^{-3}$; h. $\left(-\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-2}$.

Exercice 67 Observer pour comprendre

1.a. $5^{-2} < 5^{-1} < 5^0 < 5^2 < 5^3$.

b. $0,2^2 < 0,2^1 < 0,2^0 < 0,2^{-1} < 0,2^{-2}$.

(Résultats obtenus par calculs.)

2. Constat : si $a > 0$, les puissances de a sont :

- dans le même ordre que celui des exposants, si $a > 1$;
- dans l'ordre opposé à celui des exposants, si $0 < a < 1$.

3. $(-2)^3 < (-2)^{-3} < (-2)^0 < (-2)^{-2} < (-2)^2$.

(Résultats obtenus par calculs.)

4. Constat : si $a < 0$, les puissances successives de a sont :

- positives lorsque l'exposant est pair ;
- négatives lorsque l'exposant est impair.

Exercice 68 Corriger des erreurs

☐ $(-3)^7 \times (-3)^5 = (-3)^{7+5} = (-3)^{12} \neq (-3)^{7 \times 5}$;

☐ $10^4 + 10^2 = 10\,100 \neq 10^{4+2}$;

☐ $\frac{5^3}{5^{-2}} = 5^{3-(-2)} = 5^5 \neq 5^{3-2}$;

☐ $4^5 - 4^3 = 960 \neq 4^{5-3}$;

☐ $(2^3)^3 = 2^{3 \times 3} = 2^9 \neq 2^6$.

Exercice 69 Problème guidé

1. S'il disparaît un tiers des poissons au cours de la première année, il en reste donc deux tiers à la fin de la première année. Donc : $R_1 = \frac{2}{3}$.

A la fin de la 2^e année : $R_2 = R_1 \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

A la fin de la n^{e} année : $Rn = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2. $R_2 = \frac{4}{9}$; $R_3 = \frac{8}{27} \approx 0,29$; $R_4 = \frac{16}{81} \approx 0,20$; $R_5 = \frac{32}{243}$.

La première fraction inférieure à un quart est $R_4 = \frac{16}{81}$.

C'est donc à la fin de la 4^e année qu'il restera moins du quart de la quantité initiale de poissons.

Exercices d'approfondissement

Exercice 70 Combinaison de puissances

$$\begin{aligned} \text{a. } R &= (3^{-2})^3 = 3^{-6} ; & S &= 6^{-3} \times 3^{-3} = 18^{-3}. \\ \text{b. } \frac{R}{S} &= \frac{3^{-6}}{6^{-3} \times 3^{-3}} = \frac{6^3 \times 3^3}{3^6} = \frac{2^3 \times 3^3 \times 3^3}{3^6} = 2^3 = 8. \end{aligned}$$

Exercice 71 Simplifications d'expressions

$$\begin{aligned} \text{a. } A &= \frac{5^{-3} \times 5^2}{2^{-1} \times 6^{-1}} = \frac{2 \times 6}{5} = \frac{12}{5} ; \\ B &= \frac{2 \times 10^2 \times 2,5 \times 10^{-4}}{6 \times 10^4 \times 0,2 \times 10^{-5}} = \frac{5 \times 10^{-2}}{1,2 \times 10^{-1}} = \frac{5}{12}. \\ \text{b. } A &\text{ n'est pas l'opposé de } B ; \\ A \text{ et } B &\text{ sont inverses l'un de l'autre.} \end{aligned}$$

Exercice 72 Résolutions d'équations

$$\begin{aligned} \text{a. Si } 5^7 \times x &= 5^4, \text{ alors : } x = \frac{5^4}{5^7} = 5^{-3} ; \\ \text{b. si } 3 \times (10^4)^2 \times x &= 9\,000, \text{ alors :} \\ x &= \frac{9\,000}{3 \times (10^4)^2} = \frac{9 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 3 \times 10^{-5} ; \\ \text{c. si } 4^{-3} \times 5^2 \times x &= 5^3 \times 4^{-1}, \text{ alors :} \\ x &= \frac{5^3 \times 4^{-1}}{4^{-3} \times 5^2} = 5 \times 4^2 = 80 ; \\ \text{d. si } \frac{x}{3^4 \times (-5)^7} &= 3^{-3} \times 5^5, \text{ alors :} \\ x &= 3^{-3} \times 5^5 \times 3^4 \times (-5)^7 = -3 \times 5^{12} ; \\ \text{e. si } 7^2 \times x &= 7^3 \times 7, \text{ alors : } x = \frac{7^3 \times 7}{7^2} = 7^2 = 49 ; \\ \text{f. si } 10^3 \times 10^{-5} \times x^2 &= 10^6, \text{ alors :} \\ x^2 &= \frac{10^6}{10^3 \times 10^{-5}} = 10^8 \text{ et } x = 10^4 \text{ ou } x = -10^4. \end{aligned}$$

Exercice 73 Ecriture scientifique et encadrements

$$\begin{aligned} \text{a. } 247 \times 10^3 &= 2,47 \times 10^5 ; \\ \text{donc : } 10^5 &< 247 \times 10^3 < 10^6 ; \\ \text{b. } 12,08 \times 10^2 &= 1,208 \times 10^3 ; \\ \text{donc : } 10^3 &< 12,08 \times 10^2 < 10^4 ; \\ \text{c. } 45,7 \times 10^{-2} &= 4,57 \times 10^{-1} ; \\ \text{donc : } 10^{-1} &< 45,7 \times 10^{-2} < 10^0 ; \\ \text{d. } 0,33 \times 10^{-3} &= 3,3 \times 10^{-4} ; \\ \text{donc : } 10^{-4} &< 0,33 \times 10^{-3} < 10^{-3} ; \\ \text{e. } 0,004 \times 10^{-3} &= 4 \times 10^{-6} ; \\ \text{donc : } 10^{-6} &< 0,004 \times 10^{-3} < 10^{-5} ; \\ \text{f. } 45,7 \times 10^{-1} &= 4,57 \times 10^0 ; \\ \text{donc : } 1 &< 45,7 \times 10^{-1} < 10. \end{aligned}$$

Exercice 74 Etablir l'égalité

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{8,8 \times 10^5}{2,2 \times 10^2} &= 4 \times 10^3 \text{ donc :} \\ 2,2 \times 10^2 \times \boxed{4 \times 10^3} &= 8,8 \times 10^5 ; \\ \text{b. } \frac{5 \times 10^2}{1,25 \times 10^{-3}} &= 4 \times 10^5 \text{ donc :} \\ 1,25 \times 10^{-3} \times \boxed{4 \times 10^5} &= 5 \times 10^2 ; \\ \text{c. } \frac{3,6 \times 10^6}{4 \times 10^4} &= 9 \times 10 \text{ donc :} \\ 4 \times 10^4 \times \boxed{9 \times 10} &= 3,6 \times 10^6 ; \\ \text{d. } \frac{1,6 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-2}} &= 4 \times 10^{-3} \text{ donc :} \\ 4 \times 10^{-2} \times \boxed{4 \times 10^{-3}} &= 1,6 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Exercice 75 Goutte à goutte

$$\begin{aligned} \text{a. Nombre de gouttes d'eau tombées en une heure :} \\ 70 \times 60 &= 4\,200. \\ \text{b. Volume d'une goutte d'eau :} \\ \frac{147}{4\,200} &= 0,035 = 3,5 \times 10^{-2} \text{ mL.} \\ \text{c. Quantité d'eau perdue en un an :} \\ 147 \times 24 \times 365 &= 1\,287\,720 \text{ mL} \\ &= 1,287\,720 \times 10^6 \text{ mL} \\ &= 1,287\,720 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Exercice 76 Puissances de nombres premiers

$$\frac{2^7 \times 3^5 \times 5}{3^4 \times 2^8 \times 5^2} = \frac{3}{2 \times 5} = \underline{\underline{\frac{3}{10}}}.$$

Exercice 77 Fraction irréductible

$$D = \frac{21 \times 10^{-3} \times 5^3}{3 \times 10^2 \times 2^{-3}} = \frac{3 \times 7 \times 10^{-3} \times 5^3 \times 2^3}{3 \times 10^2} = \underline{\underline{\frac{7}{100}}}.$$

Exercice 78 Les différentes techniques de calcul

$$A = \frac{3}{8} - \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3-10}{8} = -\frac{7}{8};$$

$$B = \frac{\frac{8}{5} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{32-5}{20}}{\frac{5+2}{5}} = \frac{27}{20} \times \frac{5}{7} = \underline{\underline{\frac{27}{28}}};$$

$$C = \frac{4 \left(10^{-2}\right)^3 \times 10^2}{16 \times 10^{-3}} = \frac{4 \times 10^{-4}}{16 \times 10^{-3}} = \frac{10^{-1}}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{40}}}.$$

Exercice 79 Deux expressions à simplifier

$$R = \frac{6 \times 10^{14} \times 2 \times 10^6}{5 \times (10^3)^4} = \frac{6 \times 2 \times 10^{20}}{5 \times 10^{12}} = \frac{12 \times 10^8}{5} = \underline{\underline{24 \times 10^7}};$$

$$S = \frac{5 \times 10^5 \times (2 \times 10^{-1})^3}{6 \times 10^4 \times (4 \times 10^{-1})^2} = \frac{5 \times 8 \times 10^2}{6 \times 16 \times 10^2} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}.$$

Exercice 80 Produit et quotient de produits

On donne :

$$A = 8 \times 10^3; B = 0,5 \times 10^{-2}; C = 4 \times 10^4; D = 0,1 \times 10^{-1}.$$

$$\text{a. } A \times B \times C \times D = 8 \times 0,5 \times 4 \times 0,1 \times 10^3 \times 10^{-2} \times 10^4 \times 10^{-1} \\ = 1,6 \times 10^4 = \underline{\underline{16\,000}};$$

$$\text{b. } \frac{A \times B}{C \times D} = \frac{8 \times 0,5 \times 10^3 \times 10^{-2}}{4 \times 0,1 \times 10^4 \times 10^{-1}} = \frac{4 \times 10}{4 \times 10^2} = 10^{-1} = \underline{\underline{0,1}}.$$

Exercice 81 Calculs de produits et de quotients

$$P = \frac{6 \times 10^3 \times 0,2 \times 10^{-4}}{2,4 \times 10^{-1} \times 2 \times 10^3} = \frac{1,2 \times 10^{-1}}{4,8 \times 10^2} = \underline{\underline{\frac{1}{4} \times 10^{-3}}};$$

$$Q = \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-5} \times 5 \times 10^3}{\frac{1}{2} \times 10^2 \times 15 \times 10^{-3}} = \frac{\frac{5}{2} \times 10^{-2}}{\frac{15}{2} \times 10^{-1}} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \times 10^{-1}}}.$$

Exercice 82 Equation avec x^2

1. L'ensemble des solutions de l'équation $10^5 x^2 = 10^{-3}$ est $\{10^{-4}; -10^{-4}\}$;

en effet : $10^5 (10^{-4})^2 = 10^{5-8} = 10^{-3},$

$$10^5 (-10^{-4})^2 = 10^{5-8} = 10^{-3}.$$

2. L'ensemble des solutions de l'équation $5^{-4} x^2 = (5^3)^4$ est $\{5^8; -5^8\}$;

en effet : $5^{-4} (5^8)^2 = 5^{-4+16} = (5^3)^4,$

$$5^{-4} (-5^8)^2 = 5^{-4+16} = (5^3)^4.$$

Activités d'intégration

Exercice 83 Le beau ruban

1.	Ruban entier	Après 1 partage	Après 2 partages	Après 3 partages	Après 4 partages	Après 5 partages	Après 6 partages
Nombre de morceaux	1	2	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$
Longueur d'un morceau (en m)	1	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{8} = 0,125$	$\frac{1}{16} = 0,0625$	$\frac{1}{32} = 0,03125$	$\frac{1}{64} = 0,015625$

2.a. Pour obtenir au moins 60 morceaux, Angu doit effectuer 6 partages.

b. Longueur de chaque morceau, après 6 partages : $\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625 = 1,5625 \times 10^{-2} \text{ m} \approx \underline{16 \text{ mm}}$.

3. Après n partages, n désignant un nombre entier naturel non nul :

a. nombre de morceaux de ruban : 2^n ;

b. longueur de chaque morceau : $\frac{1}{2^n} \text{ m}$.

4. En repliant le ruban en trois morceaux de même longueur :

	Ruban entier	Après 1 partage	Après 2 partages	Après 3 partages	Après 4 partages	Après 5 partages	Après 6 partages
Nombre de morceaux	1	3	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$	$3^6 = 729$
Longueur d'un morceau (en m)	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81} \approx 0,012345$	$\frac{1}{243} \approx 0,004115$	$\frac{1}{729} \approx 0,001371$

Pour obtenir au moins 60 morceaux, Angu doit effectuer 4 partages.

Longueur de chaque morceau, après 4 partages : $\frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \approx 0,012345 \approx 1,2345 \times 10^{-2} \text{ m} \approx \underline{12 \text{ mm}}$.

Exercice 84 Atomes d'or

1.a. Diamètre d'un atome sur la photo : $7,5 \text{ mm} = 0,0075 \text{ m} = 7,5 \times 10^{-3} \text{ m}$;

grossissement du microscope : 25 millions = 25 000 000 = $2,5 \times 10^7$.

b. Diamètre réel d'un atome d'or : $\frac{7,5 \times 10^{-3}}{2,5 \times 10^7} = 3 \times 10^{-10} \text{ m} = \underline{0,3 \text{ nm}}$.

2.a. $1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m} = 1 \times 10^{-2} \text{ m}$;

nombre d'atomes qui pourraient être juxtaposés le long d'une arête de 1 cm d'un cube :

$$\frac{1 \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-10}} \approx 3,3 \times 10^7 (\approx 33 \text{ millions}).$$

b. Si la masse de 1 cm^3 d'or est de 19,3 g et celle d'un atome d'or de $3,27 \times 10^{-22} \text{ g}$, alors le nombre d'atomes d'or contenu

dans le cube de 1 cm d'arête est : $\frac{19,3}{3,27 \times 10^{-22}} = \frac{19,3}{3,27} \times 10^{22} \approx \underline{6 \times 10^{22}}$.

11 Calcul littéral

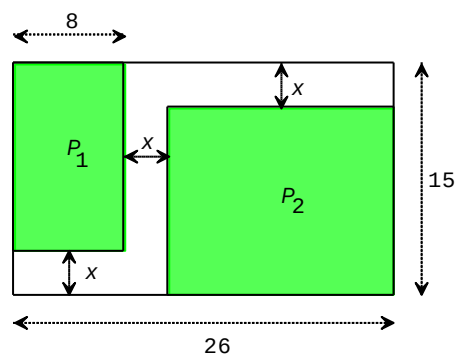
Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1,2	Développement, factorisation (rappels) [1 p 134]	24, 25, 26, 27, 28, 29		67
3	Identités remarquables (rappels) [2 p 134]	30, 31, 32, 33, 34, 35, 36	55, 56	62
4	Monôme, polynôme [3 p 134 et 135]	37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45	57, 58, 59	68, 69, 71, 72, 73
	Apprendre à développer, ordonner, décrire des polynômes [1 p 136]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11		
5	Addition et multiplication de polynômes [4 p 135]	46, 47, 48		63, 64, 65, 66
6	Fraction rationnelle [5 p 135]	49, 50, 51, 52, 53, 54	60, 61	69, 70
	Apprendre à simplifier une fraction rationnelle [2 p 137]	12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Activités de découverte

Pour démarrer Aménagement d'un jardin

- 1.a. Longueur de P_1 : $15-x$,
aire de P_1 : $8x(15-x) = 120-8x$.
- b. Longueur de P_2 : $26-8-x = 18-x$,
largeur de P_2 : $15-x$,
aire de P_2 : $(18-x) \times (15-x) = x^2 - 33x + 270$.
- c. Aire de l'ensemble des deux parcelles :
 $120-8x + x^2 - 33x + 270 = x^2 - 41x + 390$,
aire de l'allée : $26 \times 15 - (x^2 - 41x + 390) = 41x - x^2$.



- 2.a. pour $x = 1$ m, l'aire des deux parcelles est : $1^2 - 41 \times 1 + 390 = 350$ m²,
l'aire de l'allée est : $390 - 350 = 40$ m² ;
pour $x = 2$ m, l'aire des deux parcelles est : $2^2 - 41 \times 2 + 390 = 312$ m²,
l'aire de l'allée est : $390 - 312 = 78$ m² ;
pour $x = 3$ m, l'aire des deux parcelles est : $3^2 - 41 \times 3 + 390 = 276$ m²,
l'aire de l'allée est : $390 - 276 = 114$ m².

- b. Pour que l'ensemble des deux parcelles cultivées occupe les $\frac{4}{5}$ de la superficie du jardin, Charles doit choisir comme

largeur de l'allée : $x = 2$ m ; en effet : pour $x = 1$, $\frac{350}{390} = \frac{35}{39} > \frac{4}{5}$; pour $x = 2$, $\frac{312}{390} = \frac{4}{5}$; pour $x = 3$, $\frac{276}{390} = \frac{46}{65} < \frac{4}{5}$.

3. A l'échelle $\frac{1}{200}$, les dimensions du plan sont, en cm, égales à la moitié de celles, en m, de la réalité :

- le jardin, de dimensions 26 m et 15 m, est représenté par un rectangle de dimensions 13 cm et 7,5 cm ;
- la parcelle P_1 , de dimensions 13 m et 16 m, est représentée par un rectangle de dimensions 6,5 cm et 8 cm ;
- la parcelle P_2 , de dimensions 13 m et 8 m, est représentée par un rectangle de dimensions 6,5 cm et 4 cm ;
- la largeur de l'allée, égale à 2 m, est représentée par 1 cm.

1 Développement d'une expression

1. 1^{re} méthode : $8(7 + 3) = 8 \times 10 = 80$; $6(5 - 2) = 6 \times 3 = 18$;
 2^e méthode : $8(7 + 3) = 8 \times 7 + 8 \times 3 = 56 + 24 = 80$; $6(5 - 2) = 6 \times 5 - 6 \times 2 = 30 - 12 = 18$.
 La 2^e méthode est appelée développement d'un produit ou d'une somme.

2. a, b, c et d désignent des nombres réels.

- a. $a(b + c) = ab + ac$ et $a(b - c) = ab - ac$.
 b. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ et $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$.

3. a. $3(y + 2) = 3y + 6$; b. $2x(x + 4) = 2x^2 + 8x$;
 c. $(y + 4)(3y + 5) = 3y^2 + 17y + 20$; d. $(4x + 3)(x - 7) = 4x^2 - 25x - 21$.

2 Factorisation d'une expression

1. $A = 3x^2 + 6 = 3 \times x^2 + 3 \times 2 = 3(x^2 + 2)$; $B = 5y^2 - 7y = y \times 5y - y \times 7 = y(5y - 7)$.

Cette méthode de calcul est appelée factorisation d'une expression.

2. a. $6x + 9 = 3(2x + 3)$; b. $7x^2 + 2x = x(7x + 2)$; c. $4y - 4x = 4(y - x)$;
 d. $4y^2 - 12y = 4y(y - 3)$; e. $6x^3 + 9x^2 - 3x = 3x(2x^2 + 3x - 1)$.

3. $C = (x + 4)(x - 3) + 5(x + 4)$.

a. $(x + 4)$ est le facteur commun aux deux termes de cette somme.

- b. $C = (x + 4)(x - 3) + 5(x + 4) = (x + 4)[(x - 3) + 5] = (x + 4)(x - 3 + 5) = (x + 4)(x + 2)$.

4. a. $(x - 2)(x + 5) + 8(x - 2) = (x - 2)[(x + 5) + 8] = (x - 2)(x + 5 + 8) = (x - 2)(x + 13)$;

- b. $(2x + 5)(3x - 1) - (2x + 5)(2x - 6) = (2x + 5)[(3x - 1) - (2x - 6)] = (2x + 5)(3x - 1 - 2x + 6) = (2x + 5)(x + 5)$.

3 Les identités remarquables

1. a. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

- b. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

- c. $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

2. a. $(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$;

- b. $(2x - 7)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2 = 4x^2 - 28x + 49$;

- c. $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$;

- d. $(2x - 6)(2x + 6) = (2x)^2 - 6^2 = 4x^2 - 36$.

3. a. A, B, D, F et G ne sont pas des identités remarquables ;

$$C = 49 + 14x + x^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times x + x^2 = (7 + x)^2 ;$$

$$E = 16 + 24x^2 + 9x^4 = 4^2 + 2 \times 4 \times (3x^2) + (3x^2)^2 = (4 + 3x^2)^2 ;$$

$$H = 49 - 28x + 4x^2 = 7^2 - 2 \times 7 \times (2x) + (2x)^2 = (7 - 2x)^2 ;$$

$$I = 4x^4 - 20x^2 + 25 = (2x^2)^2 - 2 \times (2x^2) \times 5 + 5^2 = (2x^2 - 5)^2 .$$

b. K n'est pas une identité remarquable.

$$J = x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 2)(x - 2) ;$$

$$L = 64 - 4x^2 = 8^2 - (2x)^2 = (8 + 2x)(8 - x) ;$$

$$M = 4x^4 - 100 = (2x^2)^2 - 10^2 = (2x^2 + 10)(2x^2 - 10) .$$

4 Les polynômes

On considère le polynôme $5x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 7$, de variable x et de degré 4.

$-2x^3$ est appelé monôme de degré 3. Le coefficient de ce monôme de degré 3 est égal à -2 .
7 est le terme constant du polynôme.

1.a. $4x^2$ est le monôme de degré 2 de ce polynôme.

b. 5 est le coefficient du monôme de degré 4 de ce polynôme.

Polynôme	Degré du polynôme	Monôme de degré 2	Coefficient du monôme de degré 1	Terme constant
$-x^2 + 2x - 5$	2	$-x^2$	2	-5
$x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 1$	5	$3x^2$	0	-1
$2x^4 + x^3 + 6x + 8$	4		6	8

3. Valeurs prises par chacun des polynômes pour certaines valeurs de x :

x	0	1	-1	2
$-x^2 + 2x - 5$	-5	-4	-8	-5
$x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 1$	-1	-1	5	11
$2x^4 + x^3 + 6x + 8$	8	17	3	60

5 Opérations sur les polynômes

Partie A : Observer sur des exemples

	Situation 1	Situation 2	Situation 3
	$A = 2x + 1$ $B = 3x^2 + 4x + 2$	$A = -4x^3 + x + 1$ $B = 4x^3 + x^2$	$A = x^5 - 4x$ $B = 2x^2 + 3$
Degré de A	1	3	5
Degré de B	2	3	2
$A+B$	$(2x + 1) + (3x^2 + 4x + 2)$ = $3x^2 + 6x + 3$	$(-4x^3 + x + 1) + (4x^3 + x^2)$ = $x^2 + x + 1$	$(x^5 - 4x) + (2x^2 + 3)$ = $x^5 + 2x^2 - 4x + 3$
Degré de A+B	2	2	5
$A \times B$	$(2x + 1)(3x^2 + 4x + 2)$ = $6x^3 + 11x^2 + 8x + 2$	$(-4x^3 + x + 1)(4x^3 + x^2)$ = $-16x^6 - 4x^5 + 4x^4 + 5x^3 + x^2$	$(x^5 - 4x)(2x^2 + 3)$ = $2x^7 + 3x^5 - 8x^3 - 12x$
Degré de $A \times B$	3 (=1+2)	6 (=3+3)	7 (=5+2)

Partie B : Conjecturer des propriétés

Propriété 1 *Lorsqu'on fait la somme de deux polynômes, le degré du polynôme obtenu est inférieur ou égal au degré du polynôme initial du plus haut degré.*

Propriété 2 *Lorsqu'on fait le produit de deux polynômes, le degré du polynôme obtenu est égal à la somme des degrés des deux polynômes initiaux.*

6 Fractions rationnelles

On donne les expressions : $A = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x - 3}$; $B = \frac{3x^3 - 2x^2 + 8}{x^2 + x - 6}$.

1. Valeurs prises par A et B pour certaines valeurs de x :

x	0	1	-1	4
A	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2 - 4 + 1}{1 - 3} = \frac{1}{2}$	$\frac{2 + 4 + 1}{-1 - 3} = -\frac{7}{4}$	$\frac{32 - 16 + 1}{4 - 3} = 17$
B	$-\frac{4}{3}$	$\frac{3 - 2 + 8}{1 + 1 - 6} = -\frac{9}{4}$	$\frac{-3 - 2 + 8}{1 - 1 - 6} = -\frac{1}{2}$	$\frac{192 - 32 + 8}{16 + 4 - 6} = 12$

2.a. Il est impossible de calculer B pour $x = 2$, car le dénominateur de B s'annule pour cette valeur de x .

b. Il est impossible de calculer A pour $x = 3$, car le dénominateur de A s'annule pour cette valeur de x .

3.a. $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ et $3x^2 - 3x = 3x(x - 1)$; donc : $C = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 3x} = \frac{(x - 1)^2}{3x(x - 1)}$.

b. $(x - 1)$ est le facteur commun au numérateur et au dénominateur de C .

c. Lorsque $x \neq 1$, on a : $C = \frac{x - 1}{3x}$.

d. Pour $x = 8$, $C = \frac{8 - 1}{3 \times 8} = \frac{7}{24}$.

Méthodes et savoir-faire

1 Apprendre à développer, ordonner, décrire des polynômes

Exercice 1

Pour le polynôme $A = 6x^3 + x^2 - 5x + 7$,
 x est sa variable, 3 est son degré,
 6 est le coefficient de son monôme de degré 3,
 7 est son terme constant ;

Pour le polynôme $B = 9y^5 - y^4 - 2y^3 + 8y - 2$,
 y est sa variable, 5 est son degré,
 -2 est le coefficient de son monôme de degré 3,
 -2 est son terme constant ;

Pour le polynôme $C = x^6 + 3x^4 - 5x^3 + 1$,
 x est sa variable, 6 est son degré,
 -5 est le coefficient de son monôme de degré 3,
 1 est son terme constant.

Exercice 2

Pour le polynôme $A = -y^4 + 10y^3 + 8y^2 - 1$,
 y est sa variable, 4 est son degré,
 10 est le coefficient de son monôme de degré 3,
 -1 est son terme constant ;

Pour le polynôme $B = 7x^5 - 13x^3 - 2x^2 + 8x$,
 x est sa variable, 5 est son degré,
 -13 est le coefficient de son monôme de degré 3,
 0 est son terme constant ;

Pour le polynôme $C = y^7 - y^5 - 3y^4 + 2y^2 - 7$,
 y est sa variable, 7 est son degré,
 0 est le coefficient de son monôme de degré 3,
 -7 est son terme constant.

Exercice 3

- $5(2 + x) = 5x + 10$;
- $-4(1 - 3x) = 12x - 4$;
- $y(6 + y) = y^2 + 6y$;
- $-6x\left(\frac{x}{2} - 4\right) = -3x^2 + 24x$;
- $2x(2x^2 - 3) = 4x^3 - 6x$;
- $-4y^2(8 - 2y) = 8y^3 - 32y^2$.

Exercice 4

- $4(x + 1) - 6x = -2x + 4$;
- $-3(12 - y^2) + 6y^2 = 9y^2 - 36$;
- $y(1 + 6y) + 8y = 6y^2 + 9y$;
- $3x\left(5 - \frac{2x}{3}\right) + 2x^2 = 15x$;
- $3x^3 + 2x^2(5 - 3x) = -3x^3 + 10x^2$;
- $7x(x^2 - 2) + 10x^2 = 7x^3 + 10x^2 - 14x$.

Exercice 5

- $(x + 6)(x + 3) = x^2 + 9x + 18$;
- $(5 + y)(y - 2) = y^2 + 3y - 10$;
- $(3y - 1)(3y + 2) = 9y^2 + 3y - 2$;
- $4(x + 5)(x - 6) = 4x^2 - 4x - 120$;
- $(5y + 3)(2y^2 - 1) = 10y^3 + 6y^2 - 5y - 3$;
- $(x + 7)(x^2 - 3x) = x^3 + 4x^2 - 21x$.

Exercice 6

- a. $(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$;
- b. $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$;
- c. $(3y+4)^2 = 9y^2 + 24y + 16$;
- d. $(4y-7)^2 = 16y^2 - 56y + 49$;
- e. $(5-4x)^2 = 16x^2 - 40x + 25$;
- f. $(y^2-2)^2 = y^4 - 4y^2 + 4$.

Exercice 7

- a. $(x+6)(x-6) = x^2 - 36$;
- b. $(4y+3)(4y-3) = 16y^2 - 9$;
- c. $(7x+1)(7x-1) = 49x^2 - 1$;
- d. $(1-7y)(1+7y) = 1 - 49y^2$;
- e. $(3+2x)(3-2x) = 9 - 4x^2$;
- f. $(2y-6)(2y+6) = 4y^2 - 36$.

Exercice 8

- a. $(4+x)(x-4) = x^2 - 16$;
- b. $(3-5y)(5y+3) = 25y^2 - 9$;
- c. $(x^2+4)(x^2-4) = x^4 - 16$;
- d. $(8-3y^2)(8+3y^2) = 64 - 9y^4$;
- e. $(\sqrt{3}+2x)(\sqrt{3}-2x) = 3 - 4x^2$;
- f. $\left(\frac{x}{2}+3\right)\left(\frac{x}{2}-3\right) = \frac{x^2}{4} - 9$.

Exercice 9

- a. $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.
- b. $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$.
- c. On en déduit que :
$$A = (2x+3)^2 + (3x-2)^2 = 4x^2 + 12x + 9 + 9x^2 - 12x + 4$$
$$= 13x^2 + 13.$$

Exercice 10

- a. $A = (5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$.
- b. $B = (5x-2)^2 = 25x^2 - 20x + 4$.
- c. On en déduit que :
$$A+B = 50x^2 + 8 \quad \text{et} \quad A-B = 40x.$$

Exercice 11

- a. $A = (3-4x)^2 = 16x^2 - 24x + 9$,
$$B = (2x^2+3)(x-7) = 2x^3 - 14x^2 + 3x - 21.$$
- b. $A+B = 2x^3 + 2x^2 - 21x - 12$;
$$A-B = -2x^3 + 30x^2 - 27x + 30$$
 ;
$$A \times B = (16x^2 - 24x + 9)(2x^3 - 14x^2 + 3x - 21)$$
$$= 32x^5 - 224x^4 + 48x^3 - 336x^2 - 48x^4 + 336x^3$$
$$- 72x^2 + 504x + 18x^3 - 126x^2 + 27x - 189$$
$$= 32x^5 - 272x^4 + 384x^3 - 534x^2 + 531x - 189.$$

2 Apprendre à factoriser un polynôme, à simplifier une fraction

Exercice 12

$$A = 6x^2 + 6 = 6(x^2 + 1) ;$$
$$B = 10y - 5 = 5(2y - 1) ;$$
$$C = 2x^3 - 5x = x(2x^2 - 5) ;$$
$$D = 6y^4 - 9y = 3y(2y^3 - 3).$$

Exercice 13

$$A = 2x^3 - 4x^2 + 2x = 2x(x^2 - 2x + 1) = 2x(x-1)^2 ;$$
$$B = -7y^3 + 14y^2 - 35y = -7y(y^2 - 2y + 5) ;$$
$$C = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x+2)(x-2) ;$$
$$D = 5y^4 - 20y^2 - 10y = 5y(y^3 - 4y - 2).$$

Exercice 14

$$A = 3x(x-4) + 3x(4x+1) = 3x(5x-3) ;$$

$$B = y(y+1) - (y+1)(1-4y) = (y+1)(5y-1) ;$$

$$C = (y-1)(2y+3) - 2(y-1) = (y-1)(2y+1).$$

Exercice 15

$$A = (x+2)(3x-1) + (x+2)(2x+3) \\ = (x+2)[(3x-1) + (2x+3)] = (x+2)(5x+2) ;$$

$$B = (6y+7)(y+5) - (y+5)(8-3y) \\ = (y+5)[(6y+7) - (8-3y)] = (y+5)(9y-1) ;$$

$$C = (3x+5)(x-6) + (3x+5)(7-2x) \\ = (3x+5)[(x-6) + (7-2x)] = (3x+5)(-x+1).$$

Exercice 16

$$A = (2x+3)^2 - 7(2x+3) = (2x+3)[(2x+3) - 7] \\ = (2x+3)(2x-4) ;$$

$$B = (1+y)^2 + 5(1+y) = (1+y)[(1+y) + 5] \\ = (1+y)(y+6) ;$$

$$C = (2y-5)^2 - (2y-5)(y+4) = (2y-5)[(2y-5) - (y+4)] \\ = (2y-5)(y-9).$$

Exercice 17

$$A = x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 = (x+2)^2 ;$$

$$B = y^2 + 12y + 36 = y^2 + 2 \times y \times 6 + 6^2 = (y+6)^2 ;$$

$$C = 9 + 6x + x^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times x + x^2 = (3+x)^2 ;$$

$$D = 9y^2 + 12y + 4 = (3y)^2 + 2 \times 3y \times 2 + 2^2 = (3y+2)^2.$$

Exercice 18

$$A = x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x-3)^2 ;$$

$$B = y^2 - 10y + 25 = y^2 - 2 \times y \times 5 + 5^2 = (y-5)^2 ;$$

$$C = 9x^2 - 18x + 9 = (3x)^2 - 2 \times (3x) \times 3 + 3^2 = (3x-3)^2 ;$$

$$D = 4y^4 - 4y^2 + 1 = (2y^2)^2 - 2 \times (2y^2) \times 1 + 1^2 = (2y^2 - 1)^2.$$

Exercice 19

$$A = x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2) ;$$

$$B = 9y^2 - 4 = (3y)^2 - 2^2 = (3y+2)(3y-2) ;$$

$$C = 1 - x^2 = 1^2 - x^2 = (1+x)(1-x) ;$$

$$D = 25y^2 - 49 = (5y)^2 - 7^2 = (5y+7)(5y-7).$$

Exercice 20

$$A = (x+3)^2 - 16 = (x+3)^2 - 4^2 = [(x+3)+4][(x+3)-4] \\ = (x+7)(x-1) ;$$

$$B = (2y+1)^2 - 9 = (2y+1)^2 - 3^2 \\ = [(2y+1)+3][(2y+1)-3] = (2y+4)(2y-2) ;$$

$$C = 36 - (x-5)^2 = 6^2 - (x-5)^2 = [6+(x-5)][6-(x-5)] \\ = (x+1)(11-x) ;$$

$$D = (y^2+4)^2 - 4y^4 = (y^2+4)^2 - (2y^2)^2 \\ = [(y^2+4) + (2y^2)][(y^2+4) - (2y^2)] \\ = (3y^2+4)(-y^2+4).$$

Exercice 21

$$A = \frac{5x(2x-5)}{x(7x+1)} = \frac{5(2x-5)}{7x+1}, \text{ pour } x \neq 0 ;$$

$$B = \frac{3x^2(3-x)}{6x^2(5x^2+8)} = \frac{3-x}{2(5x^2+8)}, \text{ pour } x \neq 0 ;$$

$$C = \frac{7x(3x+8)}{(x-4)(3x+8)} = \frac{7x}{x-4}, \text{ pour } x \neq -\frac{8}{3} ;$$

$$D = \frac{(x^2+1)(9x-5)}{(x^2-6)(x^2+1)} = \frac{9x-5}{x^2-6}.$$

Exercice 22

$$a. A = 4(2x+3) - 7x(2x+3) = (4-7x)(2x+3) ;$$

$$B = (2x+3)(x+1) + (2x+3)^2 = (2x+3)[(x+1) + (2x+3)] \\ = (2x+3)(3x+4).$$

$$b. F = \frac{4[2x+3] - 7x(2x+3)}{(2x+3)(x+1) + (2x+3)^2} = \frac{(4-7x)(2x+3)}{(2x+3)(3x+4)} \\ = \frac{4-7x}{3x+4}, \text{ pour } x \neq -\frac{3}{2}.$$

Exercice 23

$$a. A = (2x+1)(5x-2) - (2x+1)(2x-6) \\ = (2x+1)[(5x-2) - (2x-6)] = (2x+1)(3x+4) ;$$

$$B = (3x+4)^2 + (3x+4)(x-2) = (3x+4)[(3x+4) + (x-2)] \\ = (3x+4)(4x+2) \\ = 2(3x+4)(2x+1) ;$$

$$C = 16x^2 + 16x + 4 = (4x)^2 + 2 \times (4x) \times 2 + 2^2 = (4x+2)^2 \\ = 4(2x+1)^2.$$

$$b. F = \frac{A}{B} = \frac{(2x+1)(3x+4)}{2(3x+4)(2x+1)} = \frac{1}{2}, \text{ pour } x \neq -\frac{4}{3} \text{ et } x \neq -\frac{1}{2} ;$$

$$G = \frac{B}{C} = \frac{2(3x+4)(2x+1)}{4(2x+1)^2} = \frac{(3x+4)}{2(2x+1)} ;$$

$$H = \frac{A}{C} = \frac{(2x+1)(3x+4)}{4(2x+1)^2} = \frac{(3x+4)}{4(2x+1)}.$$

Expressions littérales

Exercice 24

$$A = 7x + 6 - (9y + 15) + 4y - 3x = 7x + 6 - 9y - 15 + 4y - 3x \\ = 4x - 5y - 9 ;$$

$$B = 14 - (8a^2 - 15a) - 6a + 7 = 14 - 8a^2 + 15a - 6a + 7 \\ = -8a^2 + 9a + 21 ;$$

$$C = -3y + (20y - x^2 + 3) - 12 = -3y + 20y - x^2 + 3 - 12 \\ = -x^2 + 17y - 9 ;$$

$$D = 6ab - 7b(-a) + 12a - (6b + 3) = 6ab + 7ba + 12a - 6b - 3 \\ = 13ab + 12a - 6b - 3 .$$

Exercice 25

$$a. 7(3y - 6) = 21y - 42 ;$$

$$b. x(4 - 5x) = -5x^2 + 4x ;$$

$$c. 2a(-3a + 6) = -6a^2 + 12a ;$$

$$d. (7b - 2)(-5) = -35b + 10 .$$

Exercice 26

$$a. (x + 5)(6 + x) = 6x + x^2 + 30 + 5x = x^2 + 11x + 30 ;$$

$$b. (2y + 3)(3 - y) = 6y - 2y^2 + 9 - 3y = -2y^2 + 3y + 9 ;$$

$$c. (4b - 7)(7b + 5) = 28b^2 + 20b - 49b - 35 \\ = 28b^2 - 29b - 35 ;$$

$$d. (\sqrt{5} - y^2)(y - \sqrt{5}) = \sqrt{5}y - 5 - y^3 + \sqrt{5}y^2 \\ = -y^3 + \sqrt{5}y^2 + \sqrt{5}y - 5 .$$

Exercice 27

$$a. 5y - 10 = 5(y - 2) ;$$

$$b. 9a - 3b = 3(3a - b) ;$$

$$c. 6x^2 - x^3 = x^2(6 - x) ;$$

$$d. a - 6a^2 + 7ab = a(-6a + 7b + 1) .$$

Exercice 28

$$a. (x + 1)(x + 3) - 2(x + 1) = (x + 1)[(x + 3) - 2] \\ = (x + 1)^2 ;$$

$$b. 5x(x + 7) + x^2(x + 7) = x(x + 7)(x + 5) ;$$

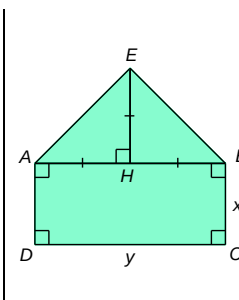
$$c. (3x - 2)(x + 4) - x(3x - 2) = (3x - 2)(x + 4 - x) \\ = 4(3x - 2) ;$$

$$d. -2x(x + 8) - (x + 2)(x + 8) = (x + 8)[-2x - (x + 2)] \\ = (x + 8)(-3x - 2) .$$

Exercice 29

$$a. AH = HB = HE = \frac{y}{2} .$$

$$b. AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} \\ = \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} \\ = \sqrt{2 \times \frac{y^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} y .$$



c. Périmètre de AEB CD :

$$2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} y + 2x + y = 2x + (\sqrt{2} + 1)y .$$

$$d. \text{Aire de AHE} : \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} y \right)^2 = \frac{y^2}{4} ;$$

$$\text{Aire de AEB CD} : xy + 2 \left(\frac{y^2}{4} \right) = \frac{y^2}{2} + xy .$$

c. Si $x=2$ et $y=6$, l'aire de AEB CD est égale à :

$$\frac{6^2}{2} + 2 \times 6 = 30 \text{ cm}^2 .$$

Identités remarquables

Exercice 30

- a. $(a+6)^2 = a^2 + 12a + 36$;
- b. $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$;
- c. $(2b+3)^2 = 4b^2 + 12b + 9$;
- d. $(8-y)^2 = 64 - 16y + y^2$;
- e. $(x^2+3)^2 = x^4 + 6x^2 + 9$;
- f. $(-6+2a)^2 = 36 - 24a + 4a^2$.

Exercice 31

- a. $(a+5)(a-5) = a^2 - 25$;
- b. $(7-x)(7+x) = 49 - x^2$;
- c. $(4b-3)(4b+3) = 16b^2 - 9$;
- d. $(1+3y)(3y-1) = 9y^2 - 1$.

Exercice 32

- a. $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$;
- b. $4 + 4a + a^2 = (2+a)^2$;
- c. $4y^2 + 8y + 4 = 4(y^2 + 2y + 1) = 4(y+1)^2$;
- d. $16 - 9b^2 = 4^2 - (3b)^2 = (4+3b)(4-3b)$.

Exercice 33

- a. $4x^2 + 9y^2 + 12xy = (2x)^2 + 2 \times (2x) \times (3y) + (3y)^2 = (2x+3y)^2$;
- b. $-36a + 36 + 9a^2 = 9(a^2 - 4a + 4) = 9(a-2)^2$;
- c. $8y^2 + 16 + y^4 = (y^2)^2 + 2 \times y^2 \times 4 + 4^2 = (y^2+4)^2$;
- d. $-x^4 + 100 = 10^2 - (x^2)^2 = (10+x^2)(10-x^2)$.

Exercice 34

- a. $(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$;
- b. $(3a+6)^2 = 9a^2 + 36a + 36$;
- c. $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$;
- d. $(2-3b)^2 = 4 - 12b + 9b^2$.

Exercice 35

- a. $3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x+4)(x-4)$;
- b. $28 - 7a^2 = 7(4 - a^2) = 7(2+a)(2-a)$;
- c. $5y^2 + 10y + 5 = 5(y^2 + 2y + 1) = 5(y+1)^2$;
- d. $27 - 72b + 48b^2 = 3(9 - 24b + 16b^2) = 3(3-4b)^2$.

Exercice 36

- a. Si le nombre choisi est 7, alors
 - on retranche 2 : $7-2 = 5$,
 - on élève au carré : $5^2 = 25$,
 - on ajoute le quadruple du nombre choisi : $25+4 \times 7 = 53$,
 - on retranche 4 : $53-4 = 49$.
 - b. On obtient le carré du nombre choisi.
 - c. Si le nombre choisi est x, alors
 - on retranche 2 : $x-2$,
 - on élève au carré : $(x-2)^2$,
 - on ajoute le quadruple du nombre choisi : $(x-2)^2 + 4x$,
 - on retranche 4 : $(x-2)^2 + 4x - 4 = x^2 - 4x + 4 + 4x - 4$.
- On obtient : x^2 .

Monômes et polynôme

Exercice 37

- a. $x^2 + \frac{2}{x} + 6$ n'est pas un polynôme ;
 b. $7y^2 - y$ est un polynôme de degré 2 ;
 c. $2x^3 + 7x^2 - \sqrt{x} + 4$ n'est pas un polynôme ;
 d. $-a^3 - 3$ est un polynôme de degré 3.

Exercice 38

Pour le polynôme $A = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 2$,
 x est sa variable, 3 est son degré,
 -3 est le coefficient de son monôme de degré 2,
 2 est son terme constant ;

Pour le polynôme $B = 2y^6 - 3y^5 + y^2 + 3y - 2$,
 y est sa variable, 6 est son degré,
 1 est le coefficient de son monôme de degré 2,
 -2 est son terme constant ;

Pour le polynôme $C = a^4 + 3a^3 - a^2$,
 a est sa variable, 4 est son degré,
 -1 est le coefficient de son monôme de degré 2,
 0 est son terme constant ;

Pour le polynôme $D = -y^2 + 7y + 25$,
 y est sa variable, 2 est son degré,
 -1 est le coefficient de son monôme de degré 2,
 25 est son terme constant.

Exercice 39

- a. $(-1)(6x^2) = -6x^2$ est un monôme de degré 2 ;
 b. $y \times y \times 5 \times y^2 = 5y^4$ est un monôme de degré 4 ;
 c. $-x^2 \times 7x^3 = -7x^5$ est un monôme de degré 5.

Exercice 40

- $A = 3x - 8 + 4x^2 - (5x + 3) - 2^2$
 $= 4x^2 - 2x - 15$;
 A est un polynôme de degré 2 ;
- $B = 12 - 7y + 6y^2 - (2y + 8y^3) + 4y(-y)$
 $= -8y^3 + 2y^2 - 9y + 12$;
 B est un polynôme de degré 3 ;
- $C = -x + 7x^2 - 6 - 3 \times 3x^3 + 6x + 5(-1)$
 $= -9x^3 + 7x^2 + 5x - 11$;
 C est un polynôme de degré 3.

Exercice 41

a. $A = 5(x + 2) - 4x + 3$
 $= 5x + 10 - 4x + 3 = x + 13$;

$B = 8(3 - x) - 5x^2(x - 2)$
 $= 24 - 8x - 5x^3 + 10x^2 = -5x^3 + 10x^2 - 8x + 24$;

$C = (2x - 5)(3 + 4x) + 6(3 - x^2)$
 $= 6x + 8x^2 - 15 - 20x + 18 - 6x^2 = 2x^2 - 14x + 3$;

$D = 4x(3 + x) - (1 - 3x)(x^2 + 1)$
 $= 12x + 4x^2 - (x^2 + 1 - 3x^3 - 3x) = 3x^3 + 3x^2 + 15x - 1$.

b.

	$x=1$	$x=-1$
$A = x + 13$	14	12
$B = -5x^3 + 10x^2 - 8x + 24$	21	47
$C = 2x^2 - 14x + 3$	-9	19
$D = 3x^3 + 3x^2 + 15x - 1$	20	-16

Exercice 42

$A = (x + 5)^2 - (3x^3 - 5x + 13)$
 $= x^2 + 10x + 25 - 3x^3 + 5x - 13 = -3x^3 + x^2 + 15x + 12$;

$B = (7 - x)^2 - (x - 1)(x + 1)$
 $= 49 - 14x + x^2 - x^2 + 1 = -14x + 50$;

$C = (2x - 3)(2x + 3) - (6 - x)^2$
 $= 4x^2 - 9 - (36 - 12x + x^2) = 3x^2 + 12x - 45$;

$D = (x^2 - 1)^2 + (2x^2 - 1)(2x^2 + 1)$
 $= x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^4 - 1 = 5x^4 - 2x^2$.

Exercice 43

$A = 2x^4 - 4x^3 + 8x = 2x(x^3 - 2x^2 + 4)$;

$B = 9x^5 - 6x^4 + 3x^2 = 3x^2(3x^3 - 2x^2 + 1)$;

$C = (2x - 1)(7x + 3) + (2x - 1)(2 - x)$
 $= (2x - 1)(7x + 3 + 2 - x) = (2x - 1)(6x + 5)$;

$D = (5x + 3)^2 + (7 - 2x)(5x + 3)$
 $= (5x + 3)(5x + 3 + 7 - 2x) = (5x + 3)(3x + 10)$.

Exercice 44

a. $16x^2 - 9 = (4x)^2 - 3^2 = (4x + 3)(4x - 3).$

b. $E = 16x^2 - 9 + (4x + 3)(6 - 2x)$
 $= (4x + 3)(4x - 3 + 6 - 2x) = (4x + 3)(2x + 3).$

c. $E = 8x^2 + 12x + 6x + 9 = 8x^2 + 18x + 9.$

d. Pour $x = 2$, $E = 32 + 36 + 9 = 77$;
pour $x = -1$, $E = 8 - 18 + 9 = -1.$

Exercice 45

$$A = 4x^2 - 4x + 1 + (2x - 1)(5 - x) = (2x - 1)^2 + (2x - 1)(5 - x)$$
$$= (2x - 1)(2x - 1 + 5 - x) = (2x - 1)(x + 4) ;$$

$$B = (2x + 3)(x + 4) + 4x^2 + 12x + 9$$
$$= (2x + 3)(x + 4) + (2x + 3)^2 = (2x + 3)(x + 4 + 2x + 3)$$
$$= (2x + 3)(3x + 7) ;$$

$$C = (4x - 5)^2 + 16x^2 - 25 = (4x - 5)^2 + (4x + 5)(4x - 5)$$
$$= (4x - 5)(4x - 5 + 4x + 5) = 8x(4x - 5) ;$$

$$D = (1 - 3x)(3 - x) - 9x^2 + 1$$
$$= (1 - 3x)(3 - x) + (1 + 3x)(1 - 3x) = (1 - 3x)(3 - x + 1 + 3x)$$
$$= (1 - 3x)(2x + 4).$$

Exercice 46

a. Si $A = 3x^2 - 8x + 5$ et $B = x^3 + 2x - 4$,
alors : $A + B = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$;

b. Si $A = -2x^5 + 3x^2 - 12$ et $B = 7x^4 + 9x^3 + 6x + 7$,
alors : $A + B = -2x^5 + 7x^4 + 9x^3 + 3x^2 + 6x - 5$;

c. Si $A = 2x^2 + 13 - 4x^3 + x$ et $B = 6x^2 - 4 + 3x$,
alors : $A + B = -4x^3 + 8x^2 + 4x + 9.$

Exercice 47

a. $A = (4x - 3)(4x + 3) - 6(x^2 - 3)$
 $= 16x^2 - 9 - 6x^2 + 18 = 10x^2 + 9 ;$

$$B = (2x - 1)^2 + (x + 7)(2x - 1)$$
$$= 4x^2 - 4x + 1 + 2x^2 - x + 14x - 7 = 6x^2 + 9x - 6.$$

b. $A + B = (10x^2 + 9) + (6x^2 + 9x - 6) = 16x^2 + 9x + 3.$

c. $A - B = (10x^2 + 9) - (6x^2 + 9x - 6) = 4x^2 - 9x + 15.$

Exercice 48

1. a. $A = x^2 - 3x$ est un polynôme de degré 2 ;
 $B = 3x - 4$ est un polynôme de degré 1 ;
donc $A \times B$ est un polynôme de degré 3.

b. $A = 3x^3 - x^2 + 2$ est un polynôme de degré 3 ;
 $B = -x^2 + 1$ est un polynôme de degré 2 ;
donc $A \times B$ est un polynôme de degré 5.

2. a. $A \times B = (x^2 - 3x) \times (3x - 4) = 3x^3 - 4x^2 - 9x^2 + 12x$
 $A \times B = 3x^3 - 13x^2 + 12x ;$

b. $A \times B = (3x^3 - x^2 + 2) \times (-x^2 + 1)$
 $A \times B = -3x^5 + 3x^3 + x^4 - x^2 - 2x^2 + 2$
 $A \times B = -3x^5 + x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2.$

Fractions rationnelles

Exercice 49

Les valeurs interdites de $\frac{4x^2 + 5x - 3}{x^2 - 3x + 2}$ sont 1 et 2, qui annulent le dénominateur.

Exercice 50

a. $4x^2 - 8x = 4x(x - 2)$.

b. Les valeurs interdites de $\frac{x^2 + 3}{4x^2 - 8x}$ sont celles qui annulent le dénominateur : 0 et 2.

Exercice 51

$$A = \frac{x(x-4)}{x(6x+2)} = \frac{x-4}{6x+2}, \text{ pour } x \neq 0;$$

$$B = \frac{3x(5-2x)}{3x^2(5x+4)} = \frac{5-2x}{x(5x+4)};$$

$$C = \frac{3x^2(x-6)}{(x-6)(2x+7)} = \frac{3x^2}{2x+7}, \text{ pour } x \neq 6;$$

$$D = \frac{(x^2-1)(7x-5)}{(x^2+4)(1-x^2)} = \frac{5-7x}{x^2+4}, \text{ pour } x \neq -1 \text{ et } x \neq 1.$$

Exercice 52

a. $A = \frac{5x^2 - 5x}{4x - 4} = \frac{5x(x-1)}{4(x-1)};$

$$B = \frac{2x^3 + x^2 + 5x}{3x^2 - 2x} = \frac{x(2x^2 + x + 5)}{x(3x - 2)};$$

$$C = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9} = \frac{x(x+3)}{(x+3)(x-3)};$$

$$D = \frac{4x^2 - 4x + 1}{10x^2 - 5x} = \frac{(2x-1)^2}{5x(2x-1)}.$$

b. $A = \frac{5x^2 - 5x}{4x - 4} = \frac{5x}{4}, \text{ pour } x \neq 1;$

$$B = \frac{2x^3 + x^2 + 5x}{3x^2 - 2x} = \frac{2x^2 + x + 5}{3x - 2}, \text{ pour } x \neq 0;$$

$$C = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9} = \frac{x}{x-3}, \text{ pour } x \neq -3;$$

$$D = \frac{4x^2 - 4x + 1}{10x^2 - 5x} = \frac{2x-1}{5x}, \text{ pour } x \neq \frac{1}{2}.$$

Exercice 53

a. $A = -4x^2 + 49 = 7^2 - (2x)^2 = (7+2x)(7-2x);$

$$B = 4x^2 - 28x + 49 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2 = (2x-7)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } F &= \frac{-4x^2 + 49}{4x^2 - 28x + 49} = \frac{(7+2x)(7-2x)}{(7-2x)(7-2x)} \\ &= \frac{7+2x}{7-2x}, \text{ pour } x \neq \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 54

a. $F = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)};$

$$G = \frac{9x^2 - 6x + 1}{9x^2 - 1} = \frac{(3x-1)^2}{(3x+1)(3x-1)};$$

$$H = \frac{-25 + 4x^2}{-4x^2 + 20x - 25} = \frac{(2x+5)(2x-5)}{-(2x-5)^2};$$

$$I = \frac{16 - 25x^2}{25x^2 - 40x + 16} = \frac{(4+5x)(4-5x)}{(5x-4)^2}.$$

b. $F = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x+1}{x-1}, \text{ pour } x \neq -1;$

$$G = \frac{9x^2 - 6x + 1}{9x^2 - 1} = \frac{3x-1}{3x+1}, \text{ pour } x \neq \frac{1}{3};$$

$$H = \frac{-25 + 4x^2}{-4x^2 + 20x - 25} = \frac{2x+5}{5-2x};$$

$$I = \frac{16 - 25x^2}{25x^2 - 40x + 16} = \frac{4+5x}{4-5x}.$$

Exercice 55 Comprendre des formulations

a et b désignent deux nombres réels.

Le carré de leur somme est associé à $(a+b)^2$.

La différence de leurs carrés est associé à $a^2 - b^2$.

Leur double produit est associé à $2ab$.

Le carré de leur différence est associé à $(a-b)^2$.

La somme de leur carré est associé à $a^2 + b^2$.

Le produit de leur carré est associé à $a^2 b^2$.

Exercice 56 Aires et identités remarquables

a et b désignent deux nombres réels positifs.

1. a. a^2 est l'aire du carré jaune ;

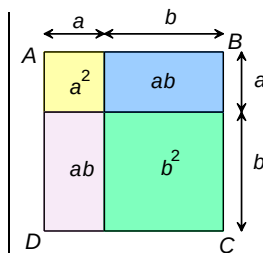
b. b^2 est l'aire du carré vert ;

c. $(a+b)^2$ est l'aire du carré ABCD ;

d. ab est l'aire de chaque rectangle (bleu ou mauve).

2.a. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

b. On retrouve cette égalité à l'aide des aires colorées : l'aire du carré ABCD est égale à la somme des aires des quatre quadrilatères colorés.



Exercice 57 Ne rien oublier

Exemple : $A = 2x(3x+5) + 2x$
 $A = 2x(3x+5) + 2x \times 1$
 $A = 2x[(3x+5)+1]$
 $A = 2x(3x+6)$.

$B = 5x(2x+7) + 5x$ | $D = (3x+1)(x-4) + (3x+1)$
 $B = 5x(2x+7) + 5x \times 1$ | $D = (3x+1)(x-4) + (3x+1) \times 1$
 $B = 5x[(2x+7)+1]$ | $D = (3x+1)[(x-4)+1]$
 $B = 5x(2x+8)$; | $D = (3x+1)(x-3)$;

$C = 3x^2(x+2) - 3x^2$ | $E = (5x-4)(x+1) - (5x-4)$
 $C = 3x^2(x+2) - 3x^2 \times 1$ | $E = (5x-4)(x+1) - (5x-4) \times 1$
 $C = 3x^2[(x+2)-1]$ | $E = (5x-4)[(x+1)-1]$
 $C = 3x^2(x+1)$; | $E = (5x-4)x$.

Exercice 58 Vocabulaire

$A = 4x^3 - 3x^2 + 10$; $B = 7y^4 - 3y^3 + y^2 + 3$;
 $C = -z^6 + z^3 - z^2 - 1$; $D = t^5 + 6t^3 - 5t^2 + t$.

Polynômes	A	B	C	D
Variable	x	y	z	t
Degré	3	4	6	5
Monôme de degré 2	$-3x^2$	y^2	$-z^2$	$-5t^2$
Terme constant	10	3	-1	0

Exercice 59 Chercher l'erreur

Consigne : développer, réduire et ordonner le polynôme

$$A = 2x(1-x) + 7(x^2 - 2)$$

Gondo

• solution : $A = 2x - x + 7x^2 - 2$

$$A = 7x^2 + x - 2 ;$$

• erreurs commises : a oublié, en développant, de multiplier x par $2x$ et -2 par 7 .

Noha

• solution : $A = 2x \times 1 + 2x \times (-x) + 7 \times x^2 + 7 \times (-2)$

$$A = 2x - 2x^2 + 7x^2 - 14$$

$$A = 2x + 5x^2 - 14 ;$$

• erreurs commises : - a omis, à la 1^{ère} ligne, des parenthèses autour de $-x$ et -2 ;
 - résultat correct mais non présenté sous la forme ordonnée.

Oumar

• solution : $A = 2x \times 1 + 2x \times (-1x) + 7 \times x^2 + 7 \times (-2)$

$$A = 2x - 2x + 7x^2 - 14$$

$$A = 7x^2 - 14 ;$$

• erreur commise : $2x \times (-1x) \neq -2x$.

Bonne solution : $A = 2x \times 1 + 2x \times (-x) + 7 \times x^2 + 7 \times (-2)$

$$A = 2x - 2x^2 + 7x^2 - 14$$

$$A = 5x^2 + 2x - 14.$$

Exercice 60 Valeur(s) interdite(s) d'une fraction rationnelle

Consigne : indiquer la (ou les) valeur(s) interdite(s) de

$$F = \frac{(x+7)^2 - 5x(x+7)}{(x+7)(x-3)}$$

a. Détail des calculs de chacun des élèves.

Dahirou

réponse : j'ai trouvé deux valeurs interdites : $x = -7$ et $x = 3$;

calcul : ce sont les valeurs qui annulent le dénominateur.

Azah

réponse : j'ai factorisé le numérateur et ensuite j'ai simplifié F ; je n'ai trouvé qu'une valeur interdite : 3.

calcul $F = \frac{(x+7)^2 - 5x(x+7)}{(x+7)(x-3)} = \frac{(x+7)(x+7-5x)}{(x+7)(x-3)}$

$$F = \frac{7-4x}{x-3}$$

b. C'est Dahirou qui a raison.

Exercice 61 Mauvaise simplification

a. En posant $F = \frac{x^2 + 6x + 9}{x(x+3)} = \frac{x^2 + 6x + 9}{(x+3)}$, Fatou a simplifié par x , qui n'est pas un facteur du numérateur.

b. $F = \frac{x^2 + 6x + 9}{x(x+3)} = \frac{(x+3)^2}{x(x+3)} = \frac{x+3}{x}$, pour $x \neq -3$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 62 Du calcul mental

$$1. a. [a+b]^2 - (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$$

$$= 4ab.$$

$$b. \bullet 101^2 - 99^2 = (100+1)^2 - (100-1)^2$$

$$= 4 \times 100 \times 1 = 400;$$

$$\bullet 105^2 - 95^2 = (100+5)^2 - (100-5)^2$$

$$= 4 \times 100 \times 5 = 2\,000;$$

$$\bullet 510^2 - 490^2 = (500+10)^2 - (500-10)^2$$

$$= 4 \times 500 \times 10 = 20\,000.$$

$$2. a. (a+b)^2 + (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$$

$$= 2(a^2 + b^2).$$

$$b. \bullet 101^2 + 99^2 = (100+1)^2 + (100-1)^2$$

$$= 2(100^2 + 1^2) = 20\,002;$$

$$\bullet 104^2 + 96^2 = (100+4)^2 + (100-4)^2$$

$$= 2(100^2 + 4^2) = 20\,032;$$

$$\bullet 510^2 + 490^2 = (500+10)^2 + (500-10)^2$$

$$= 2(500^2 + 10^2) = 500\,200.$$

Exercice 63 Somme et différence de polynômes

On donne : $A = 3x(5x-2)$ et $B = 25x^2 - 20x + 4$.

$$a. A+B = 3x(5x-2) + (5x-2)^2$$

$$= 15x^2 - 6x + 25x^2 - 20x + 4 = 40x^2 - 26x + 4.$$

$$b. A-B = 3x(5x-2) - (5x-2)^2 = (5x-2)[3x - (5x-2)]$$

$$= (5x-2)(3x-5x+2) = 2(5x-2)(1-x).$$

Exercice 64 Produit et quotient de polynômes

On donne : $A = 4x^2 - 4x + 1 + (5-x)(2x-1)$,

$$B = 5x(2x-1) + 4x^2 - 1.$$

$$a. A = (2x-1)^2 + (5-x)(2x-1)$$

$$= (2x-1)(2x-1+5-x)$$

$$= (2x-1)(x+4);$$

$$B = 5x(2x-1) + (2x+1)(2x-1)$$

$$= (2x-1)(5x+2x+1)$$

$$= (2x-1)(7x+1).$$

$$b. A \times B = (2x-1)(x+4)(2x-1)(7x+1)$$

$$= (2x-1)^2(x+4)(7x+1).$$

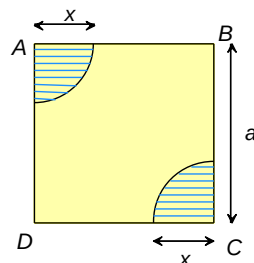
$$c. \frac{A}{B} = \frac{(2x-1)(x+4)}{(2x-1)(7x+1)} = \frac{x+4}{7x+1}, \text{ pour } x \neq \frac{1}{2}.$$

Exercice 65 Le carré rongé

1. a. Aire d'un quart de cercle, de rayon x : $\frac{\pi x^2}{4}$.

b. Aire de la partie jaune :

$$a^2 - 2 \times \frac{\pi x^2}{4} = \frac{2a^2 - \pi x^2}{2}.$$



$$2. a. AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

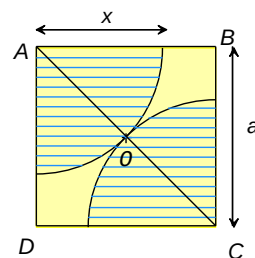
$$= \sqrt{a^2 + a^2}$$

$$= \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$b. x = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

c. Aire de la partie jaune :

$$\frac{2a^2 - \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = \frac{2a^2 - \frac{\pi a^2}{2}}{2} = \frac{(4 - \pi)a^2}{4}.$$



Exercice 66 Des volumes de solides

Volume du prisme droit à base triangulaire :

$$\mathcal{B} \times h = \frac{2x}{2} \times (2+x) = x^2 + 2x.$$

Volume de la pyramide à base carrée :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{B} \times h}{3} &= \frac{(2x+1)^2 \times (x+3)}{3} \\ &= \frac{(4x^2 + 4x + 1)(x+3)}{3} \\ &= \frac{4x^3 + 12x^2 + 4x^2 + 12x + x + 3}{3} \\ &= \frac{4}{3}x^3 + \frac{16}{3}x^2 + \frac{13}{3}x + 1. \end{aligned}$$

Volume du cylindre :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \times h &= \pi(3x-5)^2 \times (2x+3) \\ &= \pi(9x^2 - 30x + 25)(2x+3) \\ &= \pi(18x^3 + 27x^2 - 60x^2 - 90x + 50x + 75) \\ &= 18\pi x^3 - 33\pi x^2 - 40\pi x + 75\pi. \end{aligned}$$

Exercice 67 Factorisations

$$\begin{aligned} \text{a. } A &= (x-1)^2 - 121 = (x-1)^2 - 11^2 \\ A &= (x-1+11)(x-1-11) \\ A &= (x+10)(x-12). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } B &= (2x+1)^2 - 16 = (2x+1)^2 - 4^2 \\ B &= (2x+1+4)(2x+1-4) \\ B &= (2x+5)(2x-3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } C &= 25x^2 - 16 = (5x)^2 - 4^2 \\ C &= (5x+4)(5x-4). \end{aligned}$$

Exercice 68 Questionnaire à choix multiples

1. La forme développée et réduite de $P = (3x+1)^2$, suivant les puissances décroissantes de x est : $9x^2 + 6x + 1$;

en effet : $P = (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 1 + 1^2$.

2. La forme factorisée de

$$Q = 9x^2 + 6x + 1 - (3x+1)(4x+5)$$

est : $(3x+1)(-4-x)$;

en effet : $Q = (3x+1)^2 - (3x+1)(4x+5)$
 $Q = (3x+1)[(3x+1) - (4x+5)] = (3x+1)(-x-4)$.

Exercice 69 Polynômes et fractions rationnelles

1. La forme développée de :

$$A = (3-2x)(4x+5) + 5(9-4x^2)$$

est : $-28x^2 + 2x + 60$;

en effet : $A = 12x + 15 - 8x^2 - 10x + 45 - 20x^2$.

2. La forme factorisée de :

$$A = (3-2x)(4x+5) + 5(9-4x^2)$$

est : $(3-2x)(14x+20)$;

en effet : $A = (3-2x)(4x+5) + 5(3-2x)(3+2x)$
 $A = (3-2x)[(4x+5) + 5(3+2x)]$.

3. La condition d'existence de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(2+2x)(x-5)}$$

est : $x \neq -1$ et $x \neq 5$.

Exercice 70 Simplifier une fraction rationnelle

$$\text{a. } A = x^2 - 169 = (x+13)(x-13).$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{A}{B} &= \frac{x^2 - 169}{(x-13)(x+2)} \\ \frac{A}{B} &= \frac{(x+13)(x-13)}{(x-13)(x+2)} = \frac{x+13}{x+2}, \text{ pour } x \neq 13. \end{aligned}$$

Activités d'intégration

Exercice 72 L'enclos

1. L'aire d'un enclos de 35 m de longueur et 15 m de largeur est : $35 \times 15 = 525 \text{ m}^2$.
2. En augmentant la largeur de x mètres et diminuant la longueur de x mètres :
 - a. les dimensions du nouvel enclos sont : en longueur $(35-x)$ m, en largeur $(15+x)$ m ;
 - b. l'aire de ce nouvel enclos est : $\mathcal{A} = (35-x)(15+x) \text{ m}^2$;
 - c. on a : $\mathcal{A} = 525 + 35x - 15x - x^2 = -x^2 + 20x + 525$.

3.a.

x (en m)	4	6	8	10	12
$\mathcal{A} = -x^2 + 20x + 525$ (en m^2)	589	609	621	625	621

- b. L'aire est la plus grande pour $x = 10$ m. L'enclos est alors un carré de 25 m de côté.
- c. Pour $x = 8$, les dimensions de l'enclos sont, en m, de : 27 $(35-8)$ et 23 $(15+8)$;
pour $x = 12$, les dimensions de l'enclos sont, en m, de : 23 $(35-12)$ et 27 $(15+12)$;
donc l'aire est la même dans les deux cas.

Exercice 73 La masse idéale

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Pour une femme : <ol style="list-style-type: none"> a. $M_F = T - 100 - \frac{T-150}{2,5} = \left(1 - \frac{1}{2,5}\right) T - 100 + \frac{150}{2,5}$
$M_F = 0,6 T - 40$; b. Masse idéale d'une femme mesurant 170 cm :
$M_F = 0,6 \times 170 - 40 = 62 \text{ kg}$; | <ol style="list-style-type: none"> 1. Pour un homme : <ol style="list-style-type: none"> a. $M_H = T - 100 - \frac{T-150}{4} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) T - 100 + \frac{150}{4}$
$M_H = 0,75 T - 62,5$. b. Masse idéale d'un homme mesurant 190 cm :
$M_H = 0,75 \times 190 - 62,5 = 80 \text{ kg}$. |
|---|--|

- 2.a. Différence de masse entre un homme et une femme de même taille T :

$$M_H - M_F = 0,75 T - 62,5 - 0,6 T - 40 .$$

- b. $M_H - M_F = 0,15 T - 22,5$.

- c. Différence de masse entre un homme et une femme de 180 cm chacun :

$$M_H - M_F = 0,15 \times 180 - 22,5 = 4,5 \text{ kg} .$$

Exercice 74 Les boîtes à trésors

- 1.a. Volume de boîte cubique : $V_0 = 8^3 = 512 \text{ cm}^3$; volume de l'autre boîte : $V_1 = 9 \times 9 \times 7 = 567 \text{ cm}^3$.

- b. La deuxième boîte (non cubique) est la plus volumineuse. La différence de volume est de : 55 cm^3 .

- 2.a. Volume de la seconde boîte, en fonction de x : $V_x = (8+x)(8+x)(8-x)$.

$$b. V_x = (64 + 16x + x^2)(8-x) = 512 - 64x + 128x - 16x^2 + 8x^2 - x^3$$

$$V_x = -x^3 - 8x^2 + 64x + 512 .$$

- c. $V_x - V_0 = -x^3 - 8x^2 + 64x + 512 - 512 = -x^3 - 8x^2 + 64x$.

3.a.

x (en cm)	1	2	3	4	5	6	7
$V_x - V_0 = -x^3 - 8x^2 + 64x$ (en cm^3)	55	88	93	64	-5	-120	-287

La différence de volume entre la première boîte (cubique) et la seconde boîte (non cubique) est la plus grande :

- « en faveur de la seconde » pour $x = 3$,
- « en faveur de la première » pour $x = 7$.

- b. Le volume de la seconde boîte est plus petit que celui de la boîte cubique pour $x = 5, 6$ et 7 .

12 Equations, inéquations dans R

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Equation du premier degré à une inconnue [1a p 145]	15, 16, 17, 18, 19	33, 34	39, 40, 41, 42, 46, 47, 49, 51
	Equation produit [1b p 145]	20, 21, 22, 23, 24		
	Equation se ramenant à une équation produit [1c p 145]		35, 36	43, 45, 48, 52, 54
	Apprendre à résoudre une équation [p 146]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14		
2	Inéquation du premier degré à une inconnue [2a p 145]	25, 26, 27, 28	35, 37	41, 44, 50, 53
	Système d'inéquations du premier degré à une inconnue [2b p 145]	29, 30, 31	35, 38	

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

Le cinéma

Soit l et h les largeur et hauteur respectives de l'image.

Partie ① Le cinéma muet

Ici $l = 2$ et on cherche h tel que $\frac{4}{3} = \frac{24}{h}$. On a $4h = 72$; c'est-à-dire : $h = 18$.

La hauteur d'une telle pellicule est 18 mm.

Partie ② Le cinéma sonore

1. Maintenant $l = 24 - 2 = 22$ mm.

2. On cherche h tel que $1,37 = \frac{22}{h}$. On a $1,37 \times h = 22$; c'est-à-dire : $h = \frac{22}{1,37} \approx 16$.

La hauteur d'une telle pellicule est 16 mm.

Partie ③ Le DVD

Ici $h = 18$ et on cherche l tel que $1,25 = \frac{l}{18}$. On a $l = 1,25 \times 18$; c'est-à-dire : $l = 22,5$.

La largeur d'une telle pellicule est 22,5 mm.

Activités de découverte

1 Une nouvelle équation

Situation ①

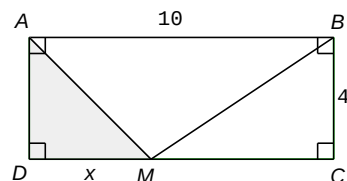
ADM est un triangle rectangle en D , donc son aire est : $\mathcal{A} = \frac{AD \times DM}{2} = \frac{4 \times x}{2} = 2x \text{ cm}^2$.

1. $\mathcal{A} = 8 \text{ cm}^2$ équivaut à $2x = 8$, c'est-à-dire : $x = 4$; donc : $DM = 4 \text{ cm}$.

2. $\mathcal{A} = 12 \text{ cm}^2$ équivaut à $2x = 12$, c'est-à-dire : $x = 6$; donc : $DM = 6 \text{ cm}$.

3. Il n'y a pas de point M sur le segment $[BC]$ pour lequel l'aire de ADM est de 25 cm^2 .

En effet l'aire de ADM est maximale lorsque $M = C$; elle est alors égale à : $\frac{4 \times 10}{2} = 20 \text{ cm}^2$.



Situation ②

1. a. ADM est un triangle rectangle en D .

D'après la propriété de Pythagore, on a : $AM^2 = AD^2 + DM^2 = 4^2 + x^2$;

c'est-à-dire : $AM^2 = x^2 + 16$.

b. BCM est un triangle rectangle en C et $CM = 10 - x$.

D'après la propriété de Pythagore, on a : $BM^2 = BC^2 + CM^2 = 4^2 + (10 - x)^2$;

c'est-à-dire : $BM^2 = 16 + 100 - 20x + x^2 = x^2 - 20x + 116$.

2. a. $2(x-2)(x-8) = (2x-4)(x-8) = 2x^2 - 16x - 4x + 32 = 2x^2 - 20x + 32$.

b. D'après les propriétés de Pythagore, ABM est rectangle en M si et seulement si $AB^2 = AM^2 + MB^2$

si et seulement si $10^2 = x^2 + 16 + x^2 - 20x + 116$

si et seulement si $100 = 2x^2 - 20x + 132$

si et seulement si $2x^2 - 20x + 32 = 0$

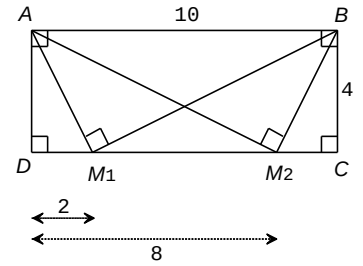
si et seulement si $2(x-2)(x-8) = 0$.

3.a.

Valeur de x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur de $x-2$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de $x-8$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Valeur de $2(x-2)(x-8)$	32	14	0	-10	-16	-18	-16	-10	0	14	32

b. 2 et 8 sont deux solutions de l'équation $2(x-2)(x-8) = 0$.

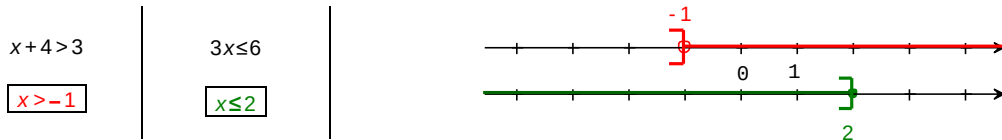
c. Il existe au moins deux points du segment $[BC]$, pour lequel ABM est rectangle en M : M_1 , à 2 cm de D , et M_2 à 8 cm de D .



2 Résoudre une inéquation

1.	Inéquation	Opération effectuée	Solutions	Représentations	Intervalle
	$x-5 \leq 3$	J'ajoute 5 aux deux membres de l'inéquation	$x \leq 8$		$] \leftarrow ; 8]$
	$x+4 > 3$	Je soustrais 4 aux deux membres de l'inéquation	$x > -1$		$] -1 ; \rightarrow [$
	$3x < 6$	Je divise par 3 les deux membres de l'inéquation	$x < 2$		$] \leftarrow ; 2[$
	$-5x > 15$	Je divise par -5 les deux membres de l'inéquation	$x < -3$		$] \leftarrow ; -3[$

2.a.



b. • -2 est solution de $3x \leq 6$ mais n'est pas solution de $x+4 > 3$; donc -2 n'est pas solution de $x+4 > 3$ et de $3x \leq 6$;

• 1 est solution de $x+4 > 3$ et de $3x \leq 6$;

• 4 est solution de $x+4 > 3$ mais n'est pas solution de $3x \leq 6$; donc 4 n'est pas solution de $x+4 > 3$ et de $3x \leq 6$.

c. L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} x+4 > 3 \\ 3x \leq 6 \end{cases}$ est l'intervalle $] -1 ; 2]$.

Apprendre à résoudre une équation

Exercice 1

a. $(x+3)(x-7) = 0$ équivaut à $x+3 = 0$ ou $x-7 = 0$
 $x = -3$ ou $x = 7$.

Donc 3 et 7 sont les solutions de cette équation.

b. $(x+1)(2x-6) = 0$ équivaut à $x+1 = 0$ ou $2x-6 = 0$
 $x = -1$ ou $x = 3$.

Donc -1 et 3 sont les solutions de cette équation.

Exercice 2

a. $(1-x)(2+x) = 0$ équivaut à $1-x = 0$ ou $2+x = 0$
 $1 = x$ ou $x = -2$.

Donc 1 et 2 sont les solutions de cette équation.

b. $(3+x)(1-4x) = 0$ équivaut à $3+x = 0$ ou $1-4x = 0$
 $x = -3$ ou $1 = 4x$
 $x = -3$ ou $\frac{1}{4} = x$.

Donc -3 et $\frac{1}{4}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 3

a. $(2x+3)(3x+7) = 0$ équivaut à $2x+3 = 0$ ou $3x+7 = 0$
 $2x = -3$ ou $3x = -7$
 $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{7}{3}$.

Donc $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{7}{3}$ sont les solutions de cette équation.

b. $(2-5x)(-4-5x) = 0$ équivaut à $2-5x = 0$ ou $-4-5x = 0$
 $2 = 5x$ ou $-4 = 5x$
 $\frac{2}{5} = x$ ou $-\frac{4}{5} = x$.

Donc $-\frac{4}{5}$ et $\frac{2}{5}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 4

a. $(2+3x)(1-7x) = 0$ équivaut à $2+3x = 0$ ou $1-7x = 0$
 $3x = -2$ ou $1 = 7x$
 $x = -\frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{7} = x$.

Donc $-\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{7}$ sont les solutions de cette équation.

b. $(1+3x)(-1-4x) = 0$ équivaut à $1+3x = 0$ ou $-1-4x = 0$
 $3x = -1$ ou $-1 = 4x$
 $x = -\frac{1}{3}$ ou $-\frac{1}{4} = x$.

Donc $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{3}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 5

a. $\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{2}{3}x\right) = 0$ équivaut à $x + \frac{1}{4} = 0$ ou $1 - \frac{2}{3}x = 0$
 $x = -\frac{1}{4}$ ou $1 = \frac{2}{3}x$
 $x = -\frac{1}{4}$ ou $x = \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Donc $-\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{2}$ sont les solutions de cette équation.

b. $\left(2x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = 0$ équivaut à $2x + \frac{1}{3} = 0$ ou $x - \frac{1}{4} = 0$
 $2x = -\frac{1}{3}$ ou $x = \frac{1}{4}$
 $x = -\frac{1}{6}$ ou $x = \frac{1}{4}$.

Donc $-\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{4}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 6

a. $\left(3x - \frac{1}{7}\right)\left(5x + \frac{1}{4}\right) = 0$ équivaut à $3x - \frac{1}{7} = 0$ ou $5x + \frac{1}{4} = 0$
 $3x = \frac{1}{7}$ ou $5x = -\frac{1}{4}$
 $x = \frac{1}{21}$ ou $x = -\frac{1}{20}$.

Donc $-\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{21}$ sont les solutions de cette équation.

b. $\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}x - \frac{7}{12}\right) = 0$ équivaut à
 $\frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = 0$ ou $\frac{1}{5}x - \frac{7}{12} = 0$.
 $\frac{2}{3}x = -\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}x = \frac{7}{12}$
 $x = -\frac{3}{8}$ ou $x = \frac{35}{12}$.

Donc $-\frac{3}{8}$ et $\frac{35}{12}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 7

1. Si $x = \frac{1}{9}$, alors :

$$\left(3x - \frac{1}{3}\right)\left(-2x + \frac{4}{5}\right) = \left(3 \times \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right)\left(-2 \times \frac{1}{9} + \frac{4}{5}\right) \\ = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{-2}{9} + \frac{4}{5}\right) = 0 \times \left(\frac{-2}{9} + \frac{4}{5}\right) = 0.$$

Donc $\frac{1}{9}$ est une solution de cette équation.

2. $\left(3x - \frac{1}{3}\right)\left(-2x + \frac{4}{5}\right) = 0$ équivaut à :

$$3x - \frac{1}{3} = 0 \quad \text{ou} \quad -2x + \frac{4}{5} = 0$$

$$3x = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{5} = 2x$$

$$x = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\frac{4}{5}}{2} = \frac{4}{10}.$$

Donc $\frac{4}{10}$ est l'autre solution de cette équation.

Exercice 8

a. • $x^2 = 4$ équivaut à $x^2 - 4 = (x+2)(x-2) = 0$.

• $x^2 = 4$ équivaut à $x+2=0$ ou $x-2=0$
 $x = -2$ ou $x = 2$.

Donc -2 et 2 sont les solutions de cette équation.

b. • $x^2 = 100$ équivaut à $x^2 - 100 = (x+10)(x-10) = 0$.

• $x^2 = 100$ équivaut à $x+10=0$ ou $x-10=0$
 $x = -10$ ou $x = 10$.

Donc -10 et 10 sont les solutions de cette équation.

Exercice 9

a. • $x^2 = 121$ équivaut à $x^2 - 121 = (x+11)(x-11) = 0$.

• $x^2 = 121$ équivaut à $x+11=0$ ou $x-11=0$
 $x = -11$ ou $x = 11$.

Donc -11 et 11 sont les solutions de cette équation.

b. • $x^2 = 81$ équivaut à $x^2 - 81 = (x+9)(x-9) = 0$.

• $x^2 = 81$ équivaut à $x+9=0$ ou $x-9=0$
 $x = -9$ ou $x = 9$.

Donc -9 et 9 sont les solutions de cette équation.

Exercice 10

a. • $x^2 = 7$ équivaut à $x^2 - 7 = (x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7}) = 0$.

• $x^2 = 7$ équivaut à $x+\sqrt{7}=0$ ou $x-\sqrt{7}=0$
 $x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$.

Donc $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$ sont les solutions de cette équation.

b. • $x^2 = 15$ équivaut à $x^2 - 15 = (x+\sqrt{15})(x-\sqrt{15}) = 0$.

• $x^2 = 15$ équivaut à $x+\sqrt{15}=0$ ou $x-\sqrt{15}=0$
 $x = -\sqrt{15}$ ou $x = \sqrt{15}$.

Donc $-\sqrt{15}$ et $\sqrt{15}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 11

a. • $4x^2 = 6$ équivaut à $x^2 = \frac{6}{4}$

$$x^2 - \frac{6}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 0.$$

• $4x^2 = 6$ équivaut à $x + \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$ ou $x - \frac{\sqrt{6}}{2} = 0$

$$x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Donc $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ et $\frac{\sqrt{6}}{2}$ sont les solutions de cette équation.

b. • $3x^2 = 25$ équivaut à $x^2 = \frac{25}{3}$

$$x^2 - \frac{25}{3} = 0$$

$$\left(x + \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = 0.$$

• $3x^2 = 25$ équivaut à $x + \frac{5\sqrt{3}}{3} = 0$ ou $x - \frac{5\sqrt{3}}{3} = 0$

$$x = -\frac{5\sqrt{3}}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Donc $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 12

$$1. (2x+3)(x+4) - 5(2x+3) = (2x+3)[(x+4)-5] \\ = (2x+3)(x-1).$$

$$2. (2x+3)(x+4) - 5(2x+3) = 0 \\ (2x+3)(x-1) = 0$$

$$2x+3=0 \quad \text{ou} \quad x-1=0$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

Donc $-\frac{3}{2}$ et 1 sont les solutions de cette équation.

Exercice 13

$$1. (x+5)(1-4x) + 3(x+5) = (x+5)[(1-4x)+3] \\ = (x+5)(4-4x).$$

$$2. (x+5)(1-4x) + 3(x+5) = 0 \\ (x+5)(4-4x) = 0$$

$$x+5=0 \quad \text{ou} \quad 4-4x=0$$

$$x = -5 \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

Donc -5 et 1 sont les solutions de cette équation.

Exercice 14

$$1. (2x+1)(-5-x) + 2(2x+1) = (2x+1)[(-5-x)+2] \\ = (2x+1)(-x-3).$$

$$2. (2x+1)(-5-x) + 2(2x+1) = 0 \\ (2x+1)(-x-3) = 0$$

$$2x+1=0 \quad \text{ou} \quad -x-3=0$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = -3.$$

Donc $-\frac{1}{2}$ et -3 sont les solutions de cette équation.

Équations

Exercice 15

a. $7x + 3 = 3x - 2$

$$7x - 3x = -2 - 3$$

$$x = -\frac{5}{4}$$

$$S = \left\{ -\frac{5}{4} \right\}$$

b. $x + 40 = 3x$

$$40 = 3x - x$$

$$x = \frac{40}{2}$$

$$S = \{20\}$$

c. $\frac{1}{2} - x = \frac{5}{2}$

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = x$$

$$x = -\frac{4}{2}$$

$$S = \{-2\}$$

d. $3x + \sqrt{5} = 7\sqrt{5}$

$$3x = 7\sqrt{5} - \sqrt{5}$$

$$x = \frac{6\sqrt{5}}{3}$$

$$S = \{2\sqrt{5}\}$$

Exercice 16

a. $3x + 7 = 5(x + 1)$

$$7 - 5 = 5x - 3x$$

$$2 = 2x$$

$$x = 1$$

$$S = \{1\}$$

b. $4 - (5 - 2x) = 2(3x + 1)$

$$4 - 5 + 2x = 6x + 2$$

$$-3 = 4x$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

$$S = \left\{ -\frac{3}{4} \right\}$$

c. $-7(1 - 2x) = 4x$

$$-7 + 14x = 4x$$

$$10x = 7$$

$$x = \frac{7}{10}$$

$$S = \left\{ \frac{7}{10} \right\}$$

d. $\frac{x}{2} + 7 = -5 - \frac{x}{4}$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = -5 - 7$$

$$\frac{3}{4}x = -12$$

$$x = \frac{-12}{\frac{3}{4}} = -12 \times \frac{4}{3} = -16$$

$$S = \{-16\}$$

e. $5\sqrt{2} + x = 3x - \sqrt{2}$

$$5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3x - x$$

$$2x = 6\sqrt{2}$$

$$x = 3\sqrt{2}$$

$$S = \{3\sqrt{2}\}$$

f. $7 - \frac{1}{3}x = 2x + \frac{1}{4}$

$$7 - \frac{1}{4} = 2x + \frac{1}{3}x$$

$$\frac{7}{3}x = \frac{27}{4}$$

$$x = \frac{\frac{27}{4}}{\frac{7}{3}} = \frac{27}{4} \times \frac{3}{7} = \frac{81}{28}$$

$$S = \left\{ \frac{81}{28} \right\}$$

Exercice 17

Un nombre x , dont le triple augmenté de 2 est égal à son double diminué de 3, est tel que : $3x + 2 = 2x - 3$

$$3x - 2x = -3 - 2$$

$$x = -5$$

Ce nombre est -5.

Exercice 18

$$x + \frac{5}{100}x = 840 \text{ équivaut à } \frac{105}{100}x = 840$$

$$x = 840 \times \frac{100}{105} = 800$$

Donc le prix de l'article avant augmentation était de 800 F CFA.

Exercice 19

Le volume de la sphère (de rayon r) est égal à celui du cylindre (de hauteur h et de base le disque de rayon r)

$$\text{si et seulement si } \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h$$

$$\text{si et seulement si } h = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2} = \frac{4}{3}r$$

$$\text{Lorsque } r = 5 \text{ cm, } h = \frac{20}{3} \text{ cm.}$$

Exercice 20

a. $(x + 1)(2x + 3) = 0$ équivaut à

$$x + 1 = 0 \text{ ou } 2x + 3 = 0$$

Donc $-\frac{3}{2}$ et -1 sont les solutions de cette équation.

b. $3x(2x + 5) = 0$ équivaut à

$$3x = 0 \text{ ou } 2x + 5 = 0$$

Donc $-\frac{5}{2}$ et 0 sont les solutions de cette équation.

c. $(2x + 7)(3x - 12) = 0$ équivaut à

$$2x + 7 = 0 \text{ ou } 3x - 12 = 0$$

Donc $-\frac{7}{2}$ et 4 sont les solutions de cette équation.

d. $(3 - 2x)(4x - 5) = 0$ équivaut à

$$3 - 2x = 0 \text{ ou } 4x - 5 = 0$$

Donc $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 21

a. $x^2 - 9 = 0$ équivaut à $(x + 3)(x - 3) = 0$
 $x + 3 = 0$ ou $x - 3 = 0$.
 Donc -3 et 3 sont les solutions de cette équation.

b. $3x^2 - 4x = 0$ équivaut à $x(3x - 4) = 0$
 $x = 0$ ou $3x - 4 = 0$.
 Donc 0 et $\frac{4}{3}$ sont les solutions de cette équation.

c. $4x^2 - 25 = 0$ équivaut à $(2x + 5)(2x - 5) = 0$
 $2x + 5 = 0$ ou $2x - 5 = 0$.
 Donc $-\frac{5}{2}$ et $\frac{5}{2}$ sont les solutions de cette équation.

d. $3x(x + 2) + 6(x + 2) = 0$ équivaut à $(3x + 6)(x + 2) = 0$
 $3(x + 2)(x + 2) = 0$
 $x + 2 = 0$.
 Donc -2 est la solution de cette équation.

Exercice 22

a. $x^2 = 16$ équivaut à $(x + 4)(x - 4) = 0$
 $x + 4 = 0$ ou $x - 4 = 0$.
 Donc -4 et 4 sont les solutions de cette équation.

b. $x^2 = 5$ équivaut à $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$
 $x + \sqrt{5} = 0$ ou $x - \sqrt{5} = 0$.
 Donc $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$ sont les solutions de cette équation.

c. $4x^2 = 1$ équivaut à $(2x + 1)(2x - 1) = 0$
 $2x + 1 = 0$ ou $2x - 1 = 0$.
 Donc $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ sont les solutions de cette équation.

d. $\frac{x^2}{9} = \frac{25}{4}$ équivaut à $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0$
 $\left(\frac{x}{3} + \frac{5}{2}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{5}{2}\right) = 0$
 $\frac{x}{3} + \frac{5}{2} = 0$ ou $\frac{x}{3} - \frac{5}{2} = 0$.
 Donc $-\frac{15}{2}$ et $\frac{15}{2}$ sont les solutions de cette équation.

Exercice 23

(AB) // (CD) donc, d'après la propriété de Thalès,

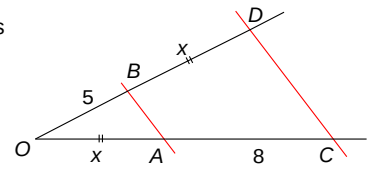
$$\text{on a : } \frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD} ;$$

$$\text{c'est-à-dire : } \frac{x}{8} = \frac{5}{x}.$$

$$\text{Finalement : } x^2 = 40 \text{ équivaut à } x^2 - 40 = 0$$

$$(x + 2\sqrt{10})(x - 2\sqrt{10}) = 0.$$

Donc $x = 2\sqrt{10}$ (puisque une longueur est positive).



Exercice 24

$$1. \bullet \underline{(3x + 1)^2 - 49 = 9x^2 + 6x + 1 - 49 = 9x^2 + 6x - 48} ;$$

$$\bullet \underline{(3x + 1)^2 - 49 = (3x + 1)^2 - 7^2 = (3x + 1 + 7)(3x + 1 - 7)}$$

$$= \underline{(3x + 8)(3x - 6)}.$$

$$2. E(x) = (3x + 1)^2 - 49 = 9x^2 + 6x - 48 = (3x + 8)(3x - 6).$$

$$\bullet E(x) = 0 \text{ équivaut à } (3x + 8)(3x - 6) = 0$$

$$3x + 8 = 0 \text{ ou } 3x - 6 = 0.$$

Donc $-\frac{8}{3}$ et 2 sont les solutions de l'équation $E(x) = 0$.

$$\bullet E(x) = 9x^2 \text{ équivaut à } 9x^2 + 6x - 48 = 9x^2$$

$$6x - 48 = 0.$$

Donc 8 est la solution de l'équation $E(x) = 9x^2$.

$$\bullet E(x) = 15 \text{ équivaut à } (3x + 1)^2 - 49 = 15$$

$$(3x + 1)^2 - 64 = 0$$

$$(3x + 1 + 8)(3x + 1 - 8) = 0$$

$$(3x + 9)(3x - 7) = 0.$$

Donc -3 et $\frac{7}{3}$ sont les solutions de l'équation $E(x) = 15$.

Inéquations

Exercice 25

- a. $x - 3 > 5$ équivaut à $8 < x$;
donc l'intervalle solution est $]8 ; \rightarrow[$.
- b. $x + 3 \leq 2$ équivaut à $x \leq -1$;
donc l'intervalle solution est $]\leftarrow ; -1]$.
- c. $2 < 1 + x$ équivaut à $1 < x$;
donc l'intervalle solution est $]1 ; \rightarrow[$.
- d. $-5x \geq 7$ équivaut à $x \leq -\frac{7}{5}$;
donc l'intervalle solution est $]\leftarrow ; -\frac{7}{5}]$.
- e. $\frac{x}{9} \leq 4$ équivaut à $x \leq 36$;
donc l'intervalle solution est $]\leftarrow ; 36]$.
- f. $7 - 3x \geq -2$ équivaut à $x \leq 3$;
donc l'intervalle solution est $]\leftarrow ; 3]$.

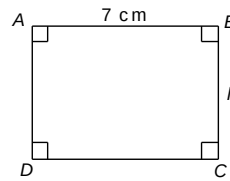
Exercice 26

- a. $2x + 3 \leq 3x + 1$ équivaut à $2 \leq x$;
donc l'intervalle solution est $[2 ; \rightarrow[$.
- b. $-13x + 15 > -6x + 6$ équivaut à $7x < 9$
c'est-à-dire $x < \frac{9}{7}$;
donc l'intervalle solution est $]\leftarrow ; \frac{9}{7}[$.
- c. $x > -2x + 1$ équivaut à $\frac{1}{3} < x$;
donc l'intervalle solution est $]\frac{1}{3} ; \rightarrow[$.
- d. $5x - 10 \leq 3x + 2$ équivaut à $x \leq 6$;
donc l'intervalle solution est $]\leftarrow ; 6]$.
- e. $8 - (x - 7) \leq 4 + 3x$ équivaut à $\frac{11}{4} \leq x$;
donc l'intervalle solution est $[\frac{11}{4} ; \rightarrow[$.
- f. $\frac{1}{2}x - 3 \geq \frac{5x}{6} + 2$ équivaut à $-5 \geq \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right)x$
équivaut à $-5 \geq \frac{2}{6}x$
c'est-à-dire $x \leq -15$;
donc l'intervalle solution est $]\leftarrow ; -15]$.

Exercice 27

Soit x le nombre de poissons vendus sur une semaine.
Le vendeur réalise un bénéfice lorsque : $40x \geq 290 \times 7$
c'est-à-dire : $x \geq \frac{2\,030}{40} = 50,75$.
C'est en vendant plus de 51 poissons, que le vendeur fera un bénéfice.

Exercice 28



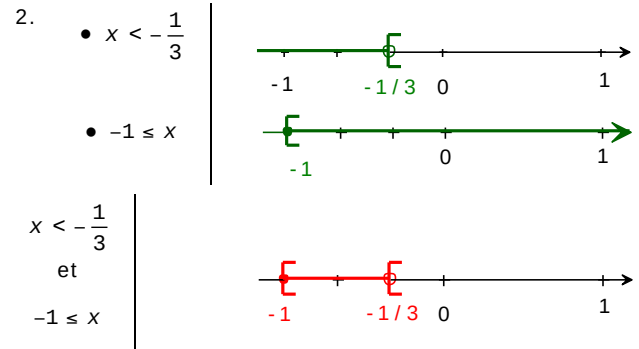
Périmètre du rectangle ABCD :
 $2 \times 7 + 2 \times l = 14 + 2l$.

1. Ce périmètre est égal à 36 cm
équivaut à $14 + 2l = 36$
c'est-à-dire $l = \frac{36 - 14}{2} = 11$ cm.

2. Ce périmètre est inférieur ou égal à 32 cm
équivaut à $14 + 2l \leq 32$ ou $l \leq \frac{32 - 14}{2}$;
c'est-à-dire $l \in]0 ; 9]$.

Exercice 29

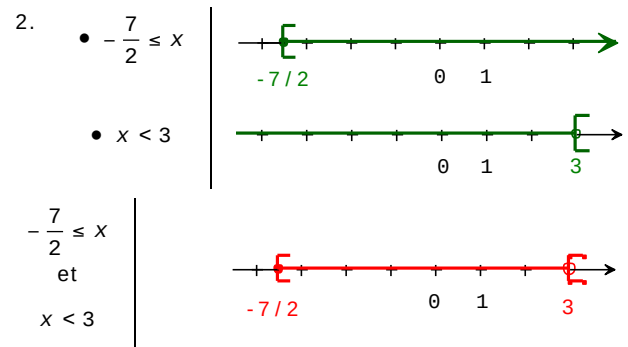
1. • $3x + 1 < 0$ équivaut à $x < -\frac{1}{3}$;
- $2x + 3 \leq 5x + 6$ équivaut à $-3 \leq 3x$
équivaut à $-1 \leq x$.



3. Donc l'intervalle solution du système $\begin{cases} 3x + 1 < 0 \\ 2x + 3 \leq 5x + 6 \end{cases}$
est : $\left[-1 ; -\frac{1}{3}\right[$.

Exercice 30

1. • $2x + 7 \geq 0$ équivaut à $2x \geq -7$
équivaut à $-\frac{7}{2} \leq x$;
- $12 - 4x > 0$ équivaut à $12 > 4x$
équivaut à $x < 3$.

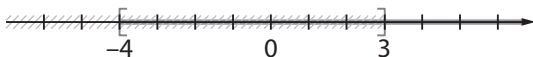


3. Donc l'intervalle solution du système $\begin{cases} 2x + 7 \geq 0 \\ 12 - 4x > 0 \end{cases}$
est : $\left[-\frac{7}{2} ; 3\right[$.

Exercice 31

a. $\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ 2x - 6 \leq 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -4 \leq x \\ x \leq 3 \end{cases}$.

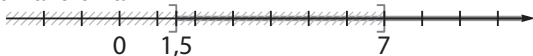
Sur un axe on a :



L'intervalle solution du système est $[-4 ; 3]$.

b. $\begin{cases} -2x + 3 < 0 \\ 7x - 49 \leq 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \frac{3}{2} < x \\ x \leq 7 \end{cases}$.

Sur un axe on a :



L'intervalle solution du système est $\left[\frac{3}{2} ; 7\right]$.

c. $\begin{cases} 2x + 7 > 0 \\ -4x + 1 > 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -\frac{7}{2} < x \\ x < \frac{1}{4} \end{cases}$.

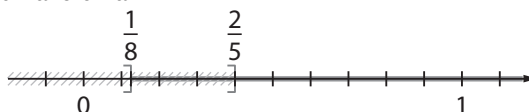
Sur un axe on a :



L'intervalle solution du système est $x \in \left]-\frac{7}{2} ; \frac{1}{4}\right[$.

d. $\begin{cases} 2x - \frac{1}{4} > 0 \\ -5x + 2 \geq 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \frac{1}{8} < x \\ x \leq \frac{2}{5} \end{cases}$.

Sur un axe on a :



L'intervalle solution du système est $x \in \left]\frac{1}{8} ; \frac{2}{5}\right]$.

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 32 Bien s'exprimer

Le double produit de x et y est $2xy$.

La différence des carrés de x et de y est $x^2 - y^2$.

Le double de la somme de x et y est $2(x + y)$.

Le carré de la somme de x et y est $(x + y)^2$.

Exercice 33 Éviter des erreurs fréquentes

Paul
 $5x + 3 = 2x + 7$
 $3x = 4$
 $x = \frac{4}{-3} \leftarrow \text{erreur}$

Résolution correcte
 $5x + 3 = 2x + 7$
 $3x = 4$
 $x = \frac{4}{3}$

Claire
 $7x - 3 \leq 9x + 3$
 $-2x \leq 6$
 $x \leq -3$
 $\uparrow$
 erreur

Résolution correcte
 $7x - 3 \leq 9x + 3$
 $-2x \leq 6$
 $x \geq \frac{6}{-2}$
 $x \geq -3$

Exercice 34 Bien traduire

1. Si x désigne le nombre de spectateurs dans les tribunes, alors $50\,000 - x$ désigne le nombre de spectateurs dans les populaires.

2. L'équation qui correspond au problème est :
 $300x + 180(50\,000 - x) = 1\,140\,000$.

3. $300x + 900\,000 - 180x = 1\,140\,000$
 $120x = 240\,000$
 $x = 2\,000$.

Il y a donc 2 000 spectateurs dans les tribunes et 49 800 dans les populaires.

Exercice 35 Vrai ou faux ?

1. Faux ; l'équation $2x^2 = 32$ a deux solutions : -4 et 4 .

2. Faux ; les solutions de l'équation $(3x + 7)(4x + 1) = 0$ sont $-\frac{7}{3}$ et $-\frac{1}{4}$ (opposés de $\frac{7}{3}$ et $\frac{1}{4}$).

3. Vrai ; $3x + 7 \leq 5x - 1$ équivaut à $8 \leq 2x$
 équivaut à $4 \leq x$.

4. Faux ; $\begin{cases} 2x - 6 \geq 0 \\ 20 - 5x > 5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2x \geq 6 \\ 15 > 5x \end{cases}$
 équivaut à $\begin{cases} 3 \leq x \\ x < 3 \end{cases}$,

donc ce système n'a pas de solution.

Exercice 36 Se ramener à une équation du 1^{er} degré

Situation ①

$(3x + 7)(4x - 5) = 0$ équivaut à $3x + 7 = 0$ ou $4x - 5 = 0$,

c'est-à-dire $x = -\frac{7}{3}$ ou $x = \frac{5}{4}$;

les solutions de cette équation sont $-\frac{7}{3}$ et $\frac{5}{4}$.

Situation ②

$4x^2 = 5x$ équivaut à $4x^2 - 5x = 0$,

c'est-à-dire $x(4x - 5) = 0$,

ou encore $x = 0$ ou $x = \frac{5}{4}$;

les solutions de cette équation sont 0 et $\frac{5}{4}$.

Situation ③

$(3x + 7)^2 - (3x + 7)(x + 5) = 0$

équivaut à $(3x + 7)[(3x + 7) - (x + 5)] = 0$,

c'est-à-dire $(3x + 7)(2x + 2) = 0$,

ou encore $x = -\frac{7}{3}$ ou $x = -1$;

les solutions de cette équation sont $-\frac{7}{3}$ et -1 .

Situation ④

$2x^2 = 6$ équivaut à $x^2 = 3$, c'est-à-dire $x^2 - 3 = 0$,

ou encore $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$,

ou encore $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$;

les solutions de cette équation sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

Exercice 37 Intervalle solution

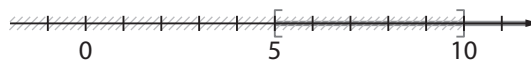
Inéquation de départ	Opération effectuée sur chaque membre	Inéquation équivalente
$3x < 6$	diviser par 3	$x < 2$
$x - 2 \leq 4$	ajouter 2	$x \leq 6$
$-3x > 9$	diviser par -3	$x < -3$
$-x < -3$	diviser par -1	$x > 3$
$\frac{x}{2} > 4$	multiplier par 2	$x > 8$

2. $x < 2$ équivaut à $x \in]-\infty ; 2[$;
 $x \leq 6$ équivaut à $x \in]-\infty ; 6]$;
 $x < -3$ équivaut à $x \in]-\infty ; -3[$;
 $x > 3$ équivaut à $x \in]3 ; +\infty[$;
 $x > 8$ équivaut à $x \in]8 ; +\infty[$.

Exercice 38 Texte à trous

1. Un des côtés d'un rectangle mesure 12 cm. Quelle doit être la mesure de l'autre côté pour que le périmètre soit *inférieur* à 44 cm et l'aire *supérieure* à 60 cm² ?

$$\begin{array}{l|l} 12x \geq 60 & 2(x + 12) \leq 44 \\ x \geq \frac{60}{12} & x + 12 \leq 22 \\ x \geq 5 & x \leq 10 \end{array}$$



3. L'autre côté mesure entre 5 cm et 10 cm ; cette mesure étant un nombre entier naturel, les valeurs possibles sont : 5, 6, 7, 8, 9 et 10.

Exercices d'approfondissement

Exercice 39 Calcul de bénéfice

1. Si x est le nombre d'œufs achetés à la foire, alors le nombre d'œufs non cassés est $x - 10$.

Prix d'achat : $40x$; prix de vente : $60(x - 10)$;

bénéfice : $\frac{1}{4} \times 40x = 10x$.

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } 60(x - 10) - 40x &= 10x \\ 60x - 600 - 40x &= 10x \\ 10x &= 600 \\ x &= 60. \end{aligned}$$

Yempo a acheté 60 œufs.

2. Bénéfice réalisé par Yempo : $10 \times 60 = 600$ F CFA.
(Vérification : $60 \times 50 - 40 \times 60 = 600$.)

Exercice 40 Notes et moyenne

Soit x la note de mathématiques de Rakoto.

$$\text{On a : } \frac{14 \times 4 + 13 \times 3 + x \times 4}{4 + 3 + 4} = 15.$$

$$\text{C'est-à-dire : } \frac{56 + 39 + 4x}{11} = 15$$

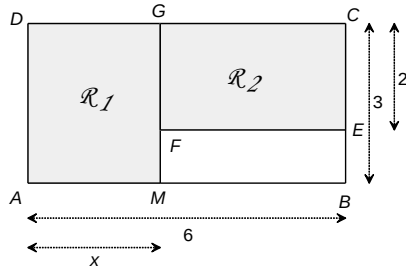
$$95 + 4x = 165$$

$$4x = 70$$

$$x = 17,5.$$

Donc 17,5 est la note de mathématiques de Rakoto.

Exercice 41 En géométrie



1. Périmètres de R_1 et R_2 : $2(3+x)$ et $2[2+(6-x)]$.
Ces périmètres sont égaux lorsque :

$$\begin{aligned} 2(3+x) &= 2[2+(6-x)] \\ 3+x &= 8-x \\ 2x &= 5 \\ x &= \frac{5}{2} = 2,5 \text{ cm.} \end{aligned}$$

2. Aires de R_1 et R_2 : $3x$ et $2(6-x)$.

L'aire de R_1 est strictement inférieure à celle de R_2 lorsque :

$$\begin{aligned} 3x &< 2(6-x) \\ 3x &< 12-2x \\ 5x &< 12 \\ x &< \frac{12}{5} \\ x &< 2,4 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Exercice 42 Élection

Si x le nombre de voix obtenues par le vainqueur, alors $x-22$, $x-30$ et $x-73$ sont les nombres de voix obtenues par les trois autres candidats.

$$\begin{aligned} \text{On a : } x + (x-22) + (x-30) + (x-73) &= 5\,219 \\ 4x - 125 &= 5\,219 \\ 4x &= 5\,344 \\ x &= 1\,336. \end{aligned}$$

Le vainqueur a obtenu 1 336 voix et les trois autres 1 314, 1 306 et 1 263 voix.

Exercice 43 Avec des identités remarquables

1.a. $81x^2 - 9 = 9(9x^2 - 1) = 9(3x+1)(3x-1)$.

b. $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$.

c. $25x^2 - 20x + 4 = (5x-2)^2$.

2.a. $81x^2 - 9 = 0$ équivaut à $9(3x+1)(3x-1) = 0$;
les solutions de cette équation sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$.

b. $4x^2 + 4x + 1 = 0$ équivaut à $(2x+1)^2 = 0$;
la solution de cette équation est $-\frac{1}{2}$.

c. $25x^2 - 20x + 4 = 0$ équivaut à $(5x-2)^2 = 0$
la solution de cette équation est $\frac{2}{5}$.

Exercice 44 Charge maximale

Soit x le nombre d'enfants transportés.

Masse du bus avec les enfants : $6\,000 + 70 + 35x$.

Pour respecter la réglementation, il faut que :

$$\begin{aligned} 6\,070 + 35x &< 8\,000 \\ 35x &< 1\,930 \\ x &< \frac{1\,930}{35} \end{aligned}$$

Donc le nombre maximum d'enfants, qui peuvent être transportés avec ce bus, est égal à 55.

S'entraîner au BEPC

Exercice 45 Factorisations

a. $A = (x-1)^2 - 121 = (x-1)^2 - 11^2$
 $A = [(x-1)+11][(x-1)-11] = (x+10)(x-12)$.

b. $B = (2x+1)^2 - 16 = (2x+1)^2 - 4^2$
 $B = [(2x+1)+4][(2x+1)-4] = (2x+5)(2x-3)$.

c. $C = 25x^2 - 16 = (5x)^2 - 4^2 = (5x+4)(5x-4)$.

Exercice 46 Les mangues d'Atangana

Soit x le nombre de mangues achetées par Atangana.

Prix d'achat : $20x$; recette : $50(x-15)$;

bénéfice : $\frac{1}{4} \times 20x = 5x$.

On a : (mise en équation) : $50(x-15) - 20x = 5x$.

Donc (résolution) : $50x - 750 - 20x = 5x$
 $25x = 750$
 $x = 30$.

Atangana a acheté 30 mangues.

Exercice 47 Une aire égale au périmètre

1. Périmètre du rectangle : $2(6+x)$;
aire du rectangle : $6x$.

Dire que le périmètre et l'aire sont exprimés par le même nombre entier naturel équivaut à : $2(6+x) = 6x$
c'est-à-dire : $12 = 4x$
ou encore : $4x - 12 = 0$.

2. $4x - 12 = 0$ équivaut à $x = 3$;
La mesure de l'autre côté est 3 cm.

Exercice 48 Une équation produit

a. $P = (x+1)^2 + (x+1)(3x-5)$

$$P = x^2 + 2x + 1 + 3x^2 + 3x - 5x - 5 = 4x^2 - 4.$$

b. $P = 4(x^2 - 1) = 4(x+1)(x-1).$

c. $(x+1)(4x-4) = 0$ équivaut à $x+1 = 0$ ou $4x-4 = 0$
 $x = -1$ ou $x = 1$;
les solutions de cette équation sont -1 et 1 .

Exercice 49 Équation et rectangle

Soit x la largeur du rectangle.

On a : $2[(x+5)+x] = 50$

c'est-à-dire : $(x+5)+x = 25$

ou encore : $2x = 20$.

Les deux dimensions du rectangle sont : 10 cm et 15 cm.

Exercice 50 Quatre expressions

1. $p(x) = 25x^2 - 81 = (5x)^2 - 9^2 = (5x+9)(5x-9).$

$$q(x) = x^2 + 14x + 49 = x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 = (x+7)^2.$$

2. $(x+3)(x-5) = 0$ équivaut à $x+3 = 0$ ou $x-5 = 0$
 $x = -3$ ou $x = 5$;

les solutions de cette équation sont -3 et 5 .

• $(x+4)^2 = 0$ équivaut à $x+4 = 0$
 $x = -4$

La solution de cette équation est -4 .

Exercice 51 Location d'une machine

1. $15x+20 = 110$ équivaut à $15x = 90$
 $x = 6.$

2. Soit x le nombre d'heures passées sur la machine.

On a : $2\,000 + 1\,500x = 11\,000$

$$1\,500x = 9\,000$$

$$x = \frac{9\,000}{1\,500} = 6 ;$$

M. Kafinda a passé 6 heures sur la machine.

Activités d'intégration

Exercice 52 Un tableau harmonieux

1.a. Aire de la partie verte : $(4-2x)(3-2x) = 12 - 6x - 8x + 4x^2 = 4x^2 - 14x + 12.$

b. Le contour en blanc et la partie verte ont la même aire si et seulement si l'aire de la partie verte est égale à la moitié de l'aire totale du tableau,

c'est-à-dire : $4x^2 - 14x + 12 = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

$$4x^2 - 14x + 6 = 0$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0.$$

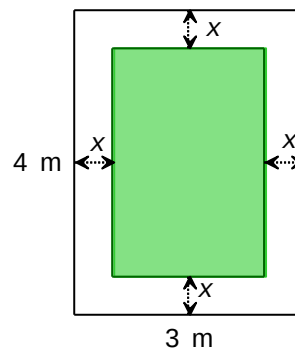
2. $(x-3)(2x-1) = 2x^2 - 6x - x + 3 = 2x^2 - 7x + 3.$

3. On en déduit que $2x^2 - 7x + 3 = 0$ équivaut à $(x-3)(2x-1) = 0$
 $x-3 = 0$ ou $2x-1 = 0$
 $x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}.$

Vues les dimensions du tableau :

• la largeur du contour est égale à 0,5 m ;

• l'aire de la portion à peindre est égale à $(4-2 \times 0,5)(3-2 \times 0,5) = 3 \times 2 = 6 \text{ m}^2$ (résultat déjà établi à la question 1.b).



Exercice 53 Téléphonie mobile

1. Pour x minutes de communication :
 - $980+13x$ est le montant d'une facture de l'abonnement OLA ;
 - $950+14,5x$ est le montant d'une facture de l'abonnement BYE.
2. Le forfait OLA est plus rentable lorsque : $980+13x < 950+14,5x$.
3. $980+13x < 950+14,5x$ équivaut à $980-950 < 14,5x-13x$
 $30 < 1,5x$
 $20 < x$.

Si Mr Bieme téléphone moins de 20 minutes, il doit choisir BYE ; sinon, il doit choisir OLA.

Exercice 54 Créer un logo

1. Si x est la longueur, en cm, du côté du carré rouge, alors l'aire de ce carré rouge est x^2 ; l'aire du carré jaune est $(x+2)^2$; l'aire du carré vert est $(x+4)^2$.
2. On a : $x^2 + (x+2)^2 + (x+4)^2 = 116$.
- 3.a. $x^2 + (x+2)^2 + (x+4)^2 = x^2 + (x^2 + 4x + 4) + (x^2 + 8x + 16) = 3x^2 + 12x + 20$.
- b. $(x+8)(x-4) = x^2 - 4x + 8x - 32 = x^2 + 4x - 32$.
4. $x^2 + (x+2)^2 + (x+4)^2 = 116$ équivaut à $3x^2 + 12x + 20 = 116$
 $3x^2 + 12x - 96 = 0$
 $3(x^2 + 4x - 32) = 0$
 $3(x+8)(x-4) = 0$

Finalement, la longueur x (*nombre positif*) du côté du carré rouge est égale à 4 cm ; celles des côtés des carrés jaune et vert sont respectivement égales à 6 cm et à 8 cm ; la longueur totale du logo est alors de 18 cm.

13 Systèmes d'équations et d'inéquations

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1, 2, 3	Système de deux équations à deux inconnues [1 p 154]	21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32	45, 46, 47, 48	51, 52, 53, 54, 56, 57, 59, 60, 61
	Apprendre à résoudre un système d'équations [1 p 156]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10		
4	Inéquation à deux inconnues [2 p 155]	33, 34, 35, 36, 37, 38	49, 50	58
5	Système d'inéquations à deux inconnues [3 p 155]	39, 40, 41, 42, 43, 44		55, 62
	Apprendre à résoudre un système d'inéquations [2 p 157]	11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20		

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

Artisanat en métal

1. a. $4 \times 10 + 3 \times 35 = 145$.

b. Cela ne correspond pas au temps mis par Joseph l'après-midi.
On peut en conclure que l'hypothèse de Vincent n'est pas correcte.

2.a. $2 \times 50 + 5 \times 5 = 125$.

b. Cela ne correspond pas au temps mis par Joseph le matin.
On peut en conclure que l'hypothèse de Linda n'est pas correcte.

3. $2 \times 35 + 5 \times 25 = 195$;
 $4 \times 35 + 3 \times 25 = 215$.

Cette proposition est en accord avec le temps de travail du matin et de l'après-midi de Joseph.

Activités de découverte

1. Méthode par substitution

1. $18x + 3y$ correspond à l'épaisseur de 18 livres de poche et 3 dictionnaires.
On sait qu'elle vaut 75 cm. Donc : $18x + 3y = 75$.

L'épaisseur d'un dictionnaire correspond à celle de quatre livres de poche donc : $y = 4x$.

2.a. On peut remplacer les 3 dictionnaires par $3 \times 4 = 12$ livres de poche.
Donc on peut mettre $18 + 12 =$ 30 livres de poche sur une étagère.

b. $30x = 75$.

3.a. On a $x = \frac{75}{30}$, c'est-à-dire : $x = 2,5$.

L'épaisseur d'un livre de poche vaut donc 2,5 cm.

b. On a $y = 4x$, c'est-à-dire : $y = 4 \times 2,5 = 10$.
L'épaisseur d'un dictionnaire vaut donc 10 cm.

2 Méthode par combinaisons linéaires

1. $6x$ est le prix de 6 cartes rouges et $2y$ est le prix de 2 cartes jaunes.

Donc $6x+2y$ correspond à la somme d'argent reçue par Joseph en une heure.

On sait qu'il a gagné 36 000 F CFA ; donc $6x+2y = 36\ 000$.

De la même manière, $4x+5y$ correspond à la somme d'argent reçue par Fatoumata en une heure.

On sait qu'elle a gagné 35 000 F CFA ; donc $4x+5y = 35\ 000$.

2.a. En travaillant 2 heures, Joseph vendra $2 \times 6 = 12$ cartes rouges.

En travaillant 3 heures, Fatoumata vendra $3 \times 4 = 12$ cartes rouges.

Fatoumata a donc raison en affirmant qu'ils vendront alors le même nombre de cartes rouges.

b. L'équation « $12x+4y = 72\ 000$ » correspond à la somme d'argent gagnée par Joseph en 2 heures.

L'équation « $12x+15y = 105\ 000$ » correspond à la somme d'argent gagnée par Fatoumata en 3 heures.

c. En soustrayant terme à terme ces deux équations, on obtient $11y = 33\ 000$.

Donc le prix de 11 cartes jaunes est de 33 000 F CFA et celui d'une seule carte jaune est de $\frac{33\ 000}{11} = \underline{3\ 000 \text{ F CFA}}$.

d. On obtient : $6x+2 \times 3\ 000 = 36\ 000$

$$6x+6\ 000 = 36\ 000$$

$$6x = 30\ 000$$

$$x = \frac{30\ 000}{6}$$

$$x = 5\ 000.$$

Le prix d'une carte rouge est de 5 000 F CFA.

3. $6 \times 5\ 000 + 2 \times 3\ 000 = 30\ 000 + 6\ 000 = 36\ 000$ et $4 \times 5\ 000 + 5 \times 3\ 000 = 20\ 000 + 15\ 000 = 35\ 000$;
les égalités établies à la question 1. sont bien vérifiées.

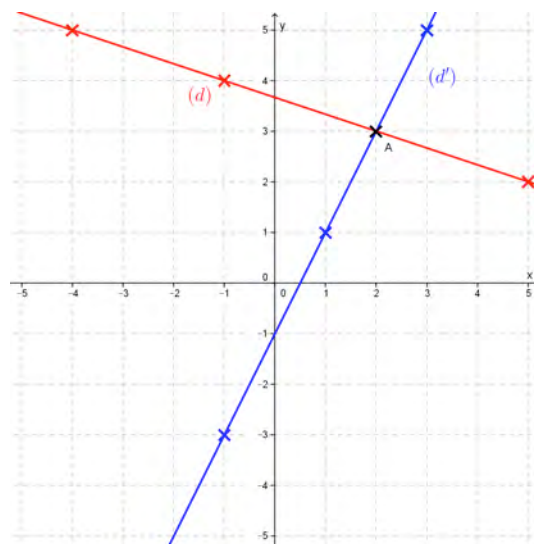
3 Interprétation graphique d'un système

1. On donne les droites

$$(d) : x + 3y = 11 ;$$

$$(d') : 2x - y = 1 .$$

2.a.b.



c. Le point A, qui est à la fois en rouge et en bleu, a pour coordonnées (2 ; 3).

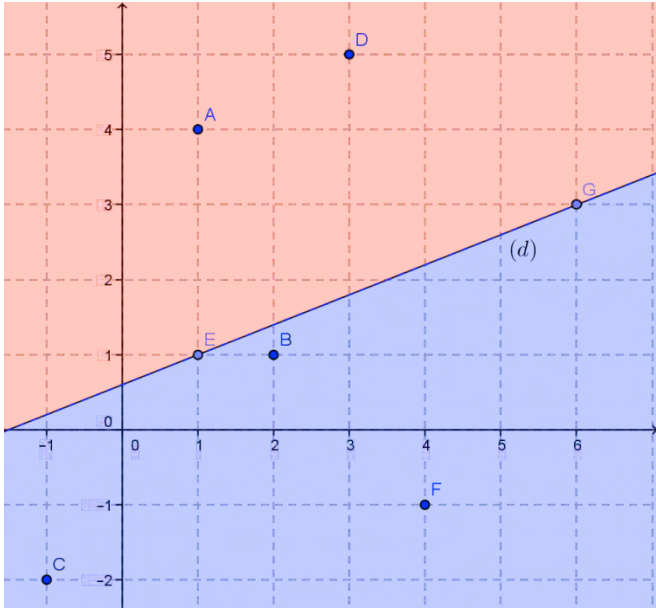
3. On souhaite résoudre le système (S) :
$$\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 2x - y = 1 \end{cases} .$$

a. Un point, dont les coordonnées vérifient les deux égalités de ce système, est à la fois sur les droites (d) et (d') ;
il s'agit donc du point A.

b. En résolvant le système, on obtient comme solution $(x ; y) = (2 ; 3)$, ce qui est bien les coordonnées du point A.

4 Demi-plan

(d) est la droite d'équation $2x - 5y + 3 = 0$.

1. 

2.

Point	Coordonnées (x ; y)	$2x - 5y + 3$	A-t-on $2x - 5y + 3 > 0$?
A	(1 ; 4)	-15	Non
B	(2 ; 1)	2	Oui
C	(-1 ; -2)	11	Oui
D	(3 ; 5)	-16	Non
E	(1 ; 1)	0	Non
F	(4 ; -1)	16	Oui
G	(6 ; 3)	0	Non

3.a. Les points dont les coordonnées vérifient l'inégalité $2x - 5y + 3 > 0$ sont situés en-dessous de la droite (d).

b. Les points dont les coordonnées vérifient $2x - 5y + 3 = 0$ sont situés sur de la droite (d).

c. Les points dont les coordonnées vérifient $2x - 5y + 3 < 0$ sont situés au-dessus de la droite (d).

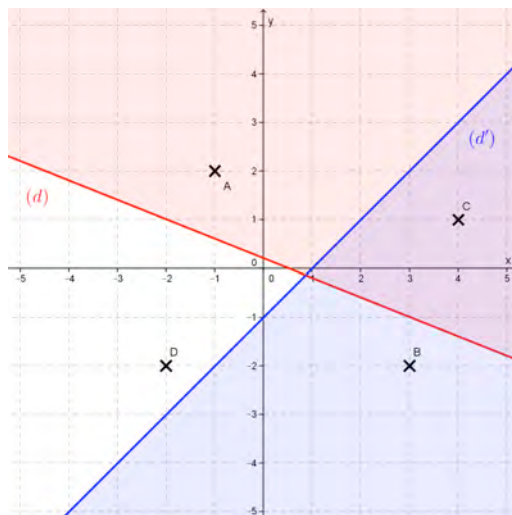
4. Le demi-plan situé au dessus de la droite (d) a pour inéquation $2x - 5y + 3 < 0$; c'est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient cette inéquation.

5 Système d'inéquations à deux inconnues

1.a. Sur le graphique 1, le point A est dans la zone colorée. Il n'est donc pas solution de l'inéquation $2x + 5y < 1$.
Sur le graphique 2, le point A est dans la zone non colorée. Il est donc solution de l'inéquation $-x + y > 1$.

b. Le point B est solution de l'inéquation $2x + 5y < 1$ et n'est pas solution de l'inéquation $-x + y > 1$.
Le point C n'est pas solution de l'inéquation $2x + 5y < 1$ et n'est pas solution de l'inéquation $-x + y > 1$.
Le point D est solution de l'inéquation $2x + 5y < 1$ et est solution de l'inéquation $-x + y > 1$.

2.



3.a. Le point A n'est pas solution du système (S) car il n'est pas solution de la première inéquation.

b. Le point B n'est pas solution du système (S) car il n'est pas solution de la seconde inéquation.

Le point C n'est pas solution du système (S) car il n'est solution d'aucune des deux inéquations du système (S).

Le point D est solution du système (S) car il est solution des deux inéquations du système (S).

c. Les solutions du système (S) sont les points qui ne sont dans aucune partie colorée.

1 Apprendre à résoudre un système d'équations

Exercice 1

$4 \times 1 + 5 \times 2 = 4 + 10 = 14$ et $2 \times 1 - 3 \times 2 = 2 - 6 = -4$,
donc $(1 ; 2)$ est solution du système $\begin{cases} 4x + 5y = 14 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$.

Exercice 2

$-5 - 6 \times 5 = -35$ et $-7 \times (-5) + 2 \times 5 = 45$,
donc $(-5 ; 5)$ est solution du système $\begin{cases} x - 6y = -35 \\ -7x + 2y = 45 \end{cases}$.

Exercice 3

$2 \times 5 + 7 \times 2 = 10 + 14 = 24$ et $3 \times 5 - 4 \times 2 = 15 - 8 = 7$,
donc $(5 ; 2)$ est la solution du système $\begin{cases} 2x + 7y = 24 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$,
c'est-à-dire $A(5 ; 2)$ est le point d'intersection des
droites $(d) : 2x + 7y = 24$ et $(d') : 3x - 4y = 7$.

Exercice 4

a. $(x ; y) = (2 ; 4)$; b. $(x ; y) = (-11 ; 2)$.

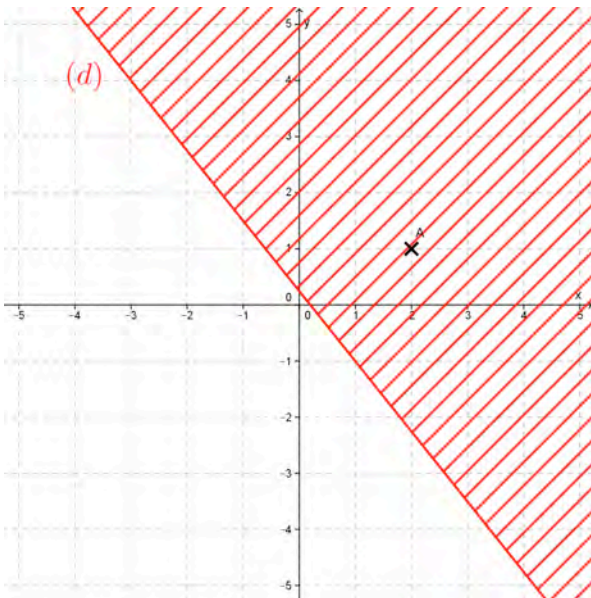
Exercice 5

a. $(x ; y) = (0 ; 2)$; b. $(x ; y) = (-2 ; 1,5)$.

2 Apprendre à résoudre un système d'inéquations

Exercice 11

1.2. (d) est la droite d'équation $5x + 4y - 1 = 0$,
 A est le point de coordonnées $(2 ; 1)$.



3.a. $5 \times 2 + 4 \times 1 - 1 = 13 > 0$, donc les coordonnées du point A ne vérifient pas l'inéquation $5x + 4y - 1 < 0$.
b. L'ensemble des solutions de l'inéquation $5x + 4y - 1 < 0$ est le demi-plan non coloré, situé en-dessous de (d) , droite non comprise.

Exercice 6

a. $(e ; f) = (1,2 ; -0,2)$; b. $(e ; f) = (-4 ; -2)$.

Exercice 7

a. $(x ; y) = (-18 ; 5)$; b. $(x ; y) = (3 ; -1)$.

Exercice 8

a. $(x ; y) = (-1 ; 1)$; b. $(x ; y) = (-2 ; 0)$.

Exercice 9

a. $(i ; j) = (3 ; 1)$; b. $(i ; j) = (0,6 ; 0,2)$.

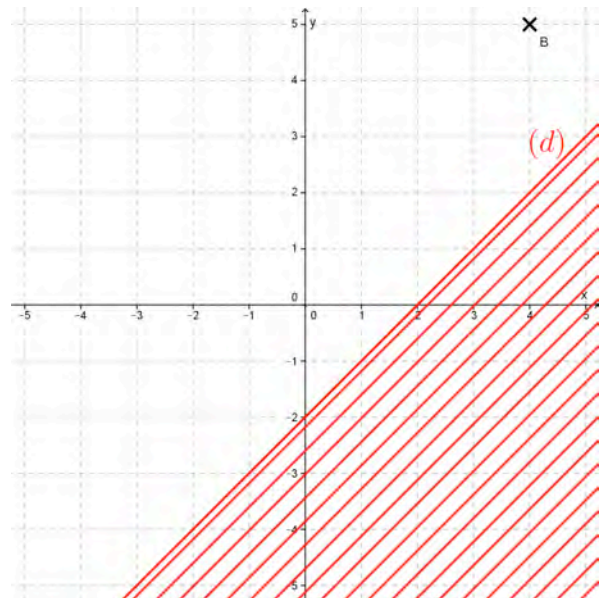
Exercice 10

On donne les droites $(d) : 3x + 4y = 5$,
 $(d') : -6x + 5y = 16$.

- $(-1 ; 2)$ est la solution du système $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ -6x + 15y = 16 \end{cases}$.
- $A(-1 ; 2)$ est le point d'intersection de (d) et (d') .

Exercice 12

1. 2. (d') est la droite d'équation $y = x - 2$,
 B est le point de coordonnées $(4 ; 5)$.



3.a. $5 \geq 4 - 2$, donc les coordonnées du point B vérifient donc l'inéquation $y \geq x - 2$.
b. L'ensemble des solutions de l'inéquation $y \geq x - 2$ est le demi-plan non coloré, situé au-dessus de (d') , droite comprise.

Exercice 13

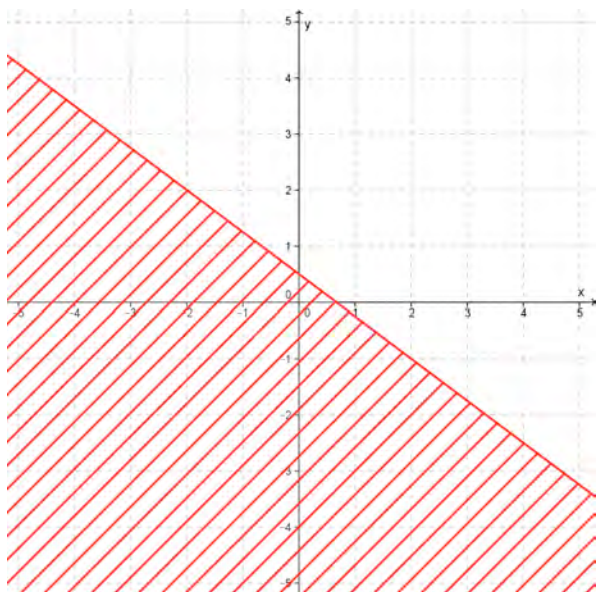
(d) est la droite d'équation $x - 2y + 2 = 0$.

a. Inéquation du demi-plan rouge : $x - 2y + 2 < 0$;

b. inéquation du demi-plan bleu : $x - 2y + 2 > 0$.

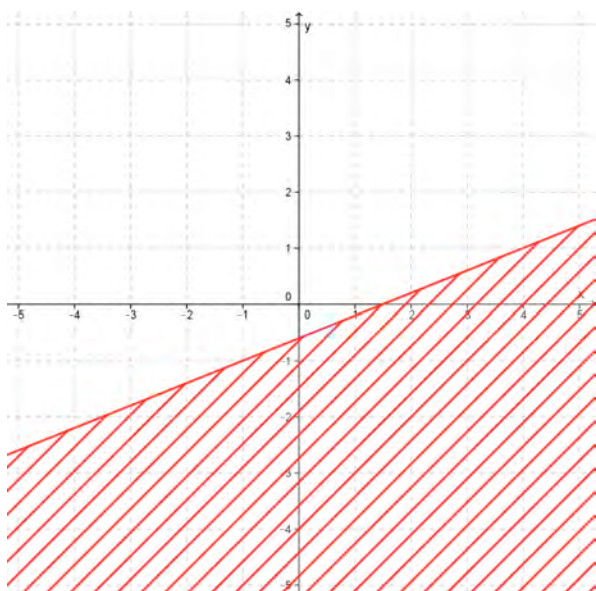
Exercice 14

a. (d) est la droite d'équation $3x + 4y - 2 = 0$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x + 4y - 2 > 0$ est le demi-plan non coloré, situé au-dessus de (d), droite non comprise.

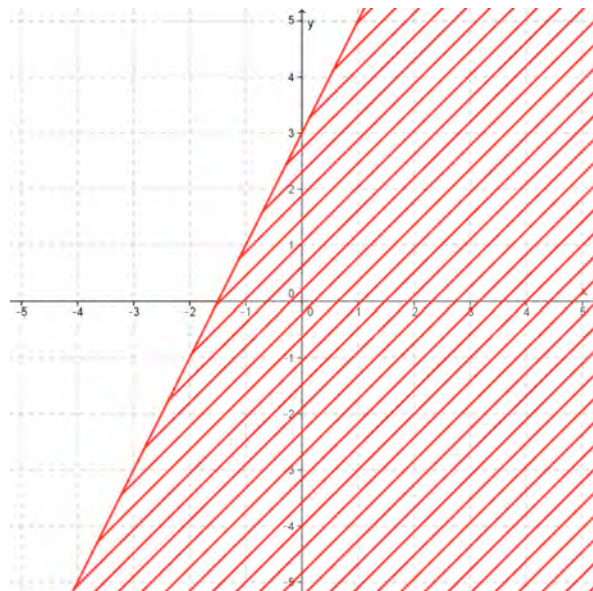
b. (d') est la droite d'équation $2x - 5y - 3 = 0$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x - 5y - 3 \leq 0$ est le demi-plan non coloré, situé au-dessus de (d'), droite comprise.

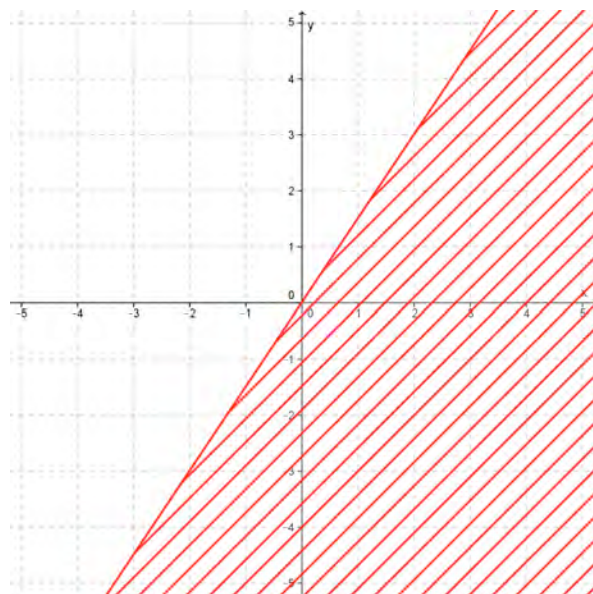
Exercice 15

a. (d) est la droite d'équation $2x - y + 3 = 0$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x - y + 3 < 0$ est le demi-plan non coloré, situé au-dessus de (d), droite non comprise.

b. (d') est la droite d'équation $-3x + 2y = 0$.



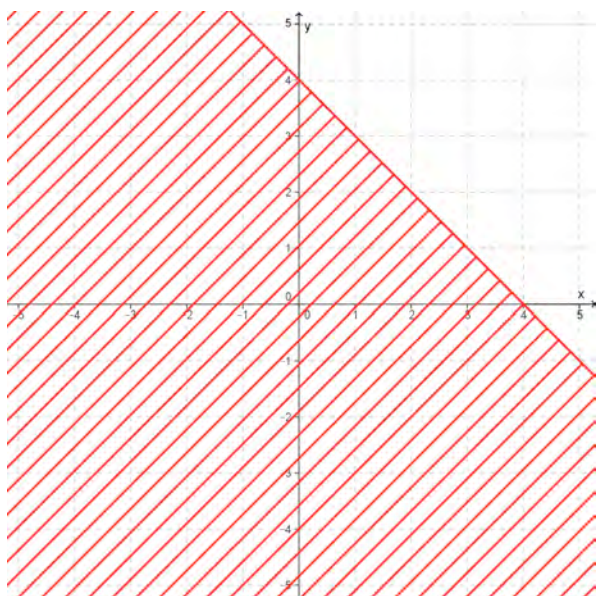
L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x + 2y \geq 0$ est le demi-plan non coloré, situé au-dessus de (d'), droite comprise.

Exercice 16

a. (d) est la droite d'équation $y = 2x + 1$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $y < 2x + 1$ est le demi-plan non coloré, situé en-dessous de (d) , droite non comprise.

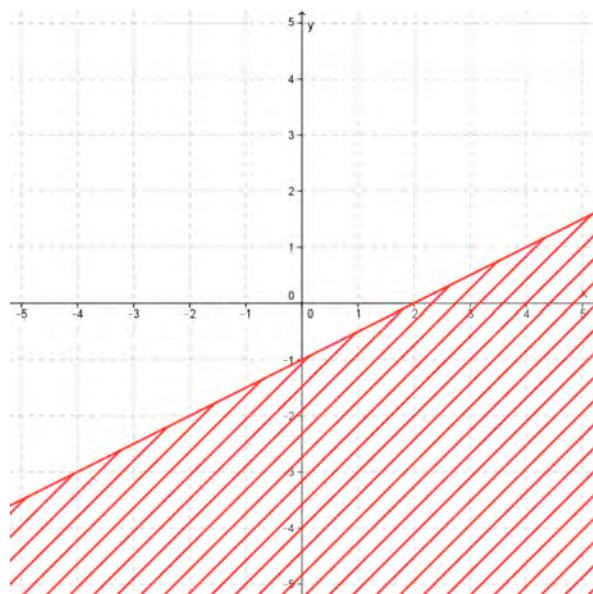
b. (d') est la droite d'équation $y = -x + 4$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $y \geq -x + 4$ est le demi-plan non coloré, situé au-dessus de (d') , droite comprise.

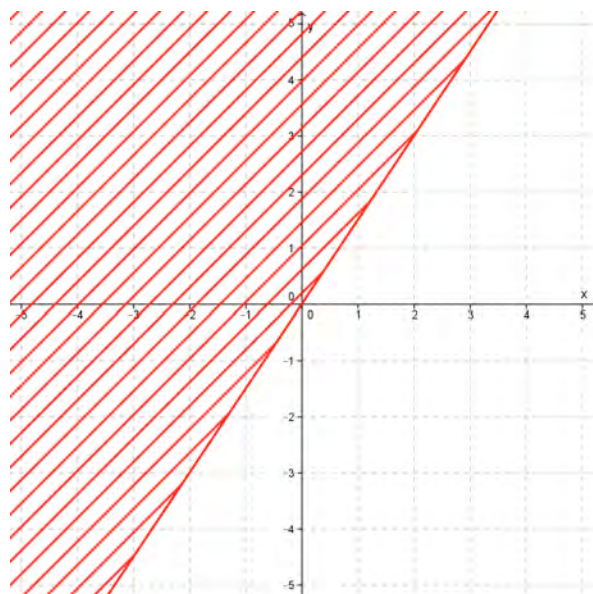
Exercice 17

a. (d) est la droite d'équation $y = 0,5x - 1$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $y > 0,5x - 1$ est le demi-plan non coloré, situé au-dessus de (d) , droite non comprise.

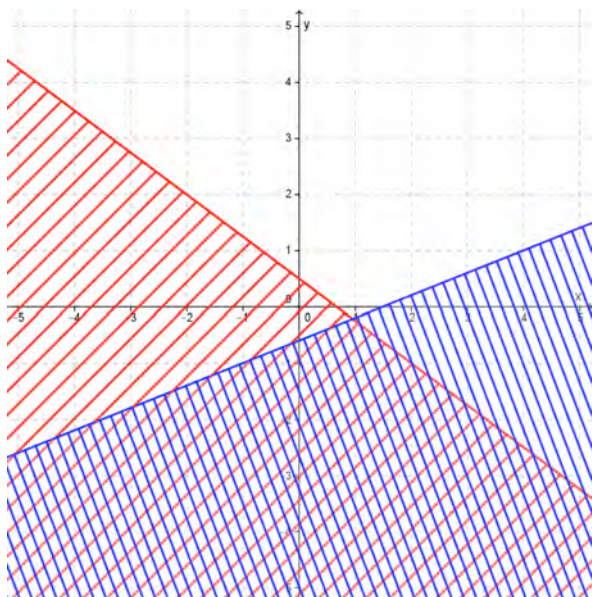
b. (d') est la droite d'équation $y = 1,5x$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $y \leq 1,5x$ est le demi-plan non coloré, situé en-dessous de (d') , droite comprise.

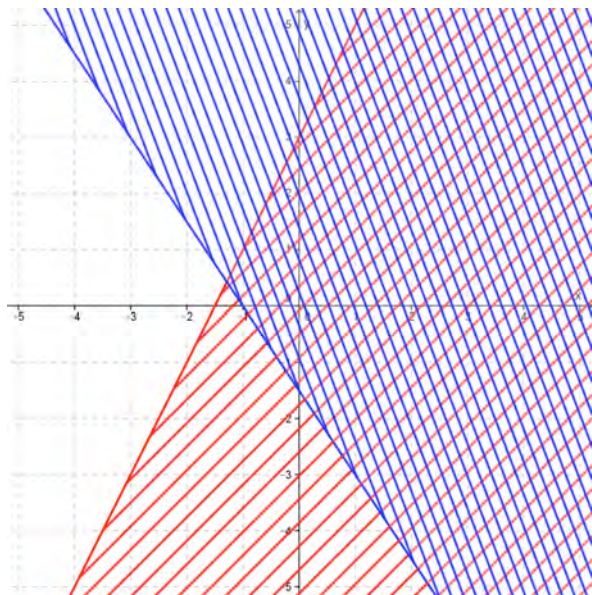
Exercice 18

- a. (d) est la droite (rouge) d'équation $3x + 4y - 2 = 0$.
 (d') est la droite (bleue) d'équation $2x - 5y - 3 = 0$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} 3x + 4y - 2 > 0 \\ 2x - 5y - 3 \leq 0 \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge non comprise et demi-droite bleue comprise.

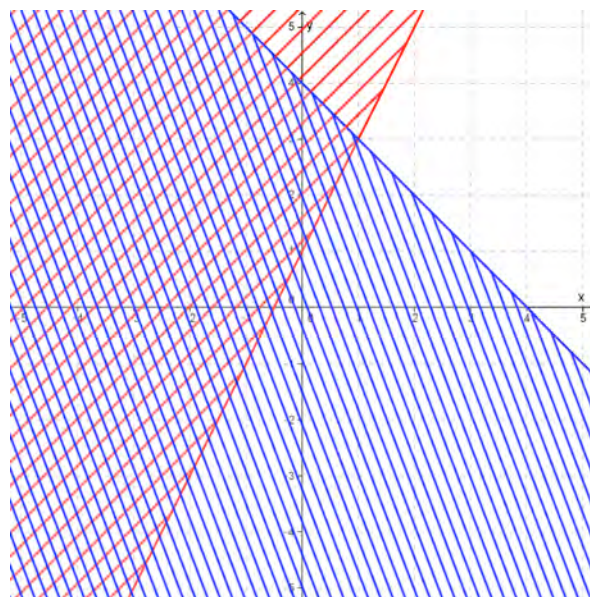
- b. (d) est la droite (rouge) d'équation $2x - y + 3 = 0$.
 (d') est la droite (bleue) d'équation $-3x - 2y - 3 = 0$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} 2x - y + 3 < 0 \\ -3x - 2y - 3 \geq 0 \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge non comprise et demi-droite bleue comprise.

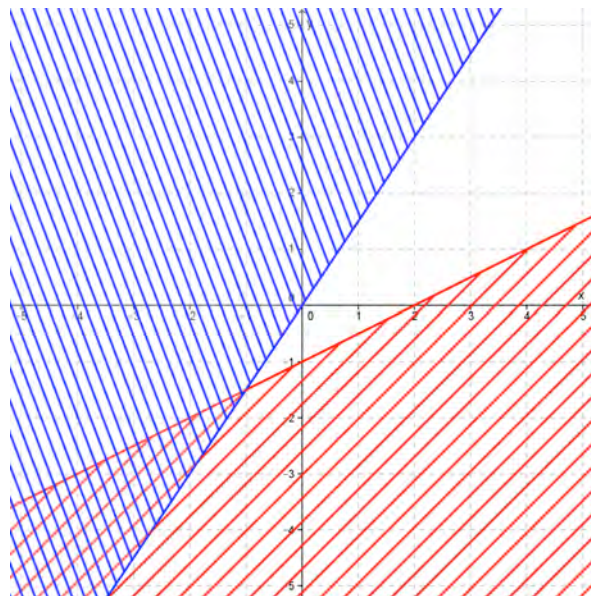
Exercice 19

- a. (d) est la droite (rouge) d'équation $y = 2x + 1$.
 (d') est la droite (bleue) d'équation $y = -x + 4$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} y < 2x + 1 \\ y \geq -x + 4 \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge non comprise et demi-droite bleue comprise.

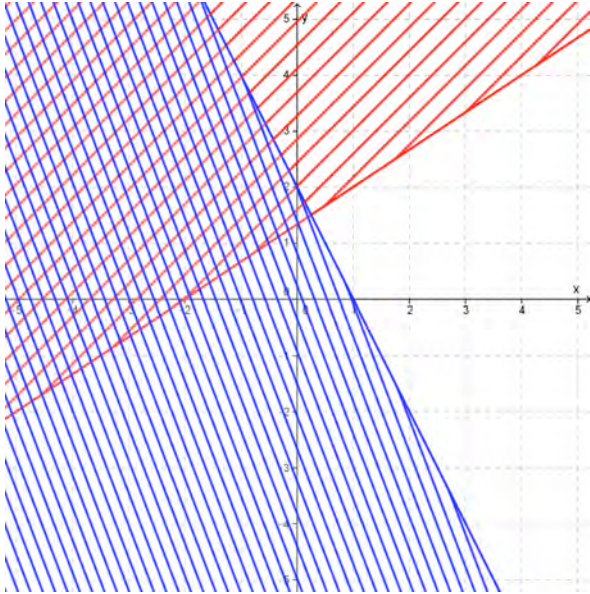
- b. (d) est la droite (rouge) d'équation $y = 0,5x - 1$.
 (d') est la droite (bleue) d'équation $y = 1,5x$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} y > 0,5x - 1 \\ y \leq 1,5x \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge non comprise et demi-droite bleue comprise.

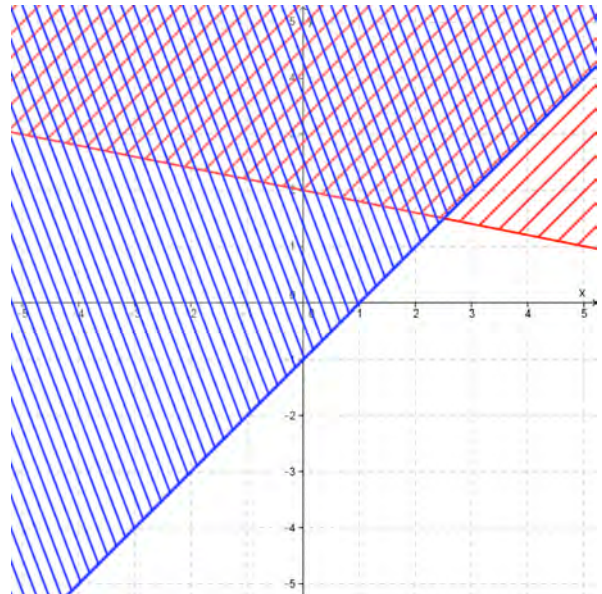
Exercice 20

a. (d) est la droite (rouge) d'équation $-2x + 3y - 4 = 0$.
 (d') est la droite (bleue) d'équation $y = -2x + 2$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} -2x + 3y - 4 \leq 0 \\ y \geq -2x + 2 \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge et demi-droite bleue comprises.

b. (d) est la droite (rouge) d'équation $x + 5y - 10 = 0$.
 (d') est la droite (bleue) d'équation $y = x - 1$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} x + 5y - 10 < 0 \\ y \leq x - 1 \end{cases}$ est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge non comprise et demi-droite bleue comprise.

Activités d'application

Systèmes d'équations

Exercice 21

a. $(x ; y) = (1 ; -1)$ est la solution du système

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$$

b. $(x ; y) = (-2 ; -1)$ est la solution du système

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = -8 \end{cases}$$

Exercice 22

a. $(a ; b) = (3 ; -1)$ est la solution du système

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 4 \end{cases}$$

b. $(a ; b) = (2 ; 1)$ est la solution du système

$$\begin{cases} 3a - b = 5 \\ -a + 3b = 1 \end{cases}$$

Exercice 23

a. $(x ; y) = (-4 ; -39)$ est la solution du système

$$\begin{cases} 3x = -12 \\ 6x - y = 15 \end{cases}$$

b. $(s ; t) = \left(-\frac{4}{3} ; \frac{5}{3}\right)$ est la solution du système

$$\begin{cases} 3s + 3t = 1 \\ 4s + 2t = -2 \end{cases}$$

Problèmes

Exercice 24

1. $4x + 6y$ représente la masse de 4 bananes et 6 mangues, c'est-à-dire 3 kg.

$8x + 7y$ représente la masse de 8 bananes et 7 mangues, c'est-à-dire 4 kg.

2.a. $(x ; y) = (0,15 ; 0,4)$ est la solution du système

$$\begin{cases} 4x + 6y = 3 \\ 8x + 7y = 4 \end{cases}$$

b. La masse d'une banane est de 0,15 kg = 150 g et celle d'une mangue est 0,4 kg = 400 g.

Exercice 25

1. $a + e$ représente le nombre total d'entrées, c'est-à-dire 420.

$600a + 200e$ représente la recette totale, c'est-à-dire 204 000 F CFA.

2.a. $(a ; e) = (390 ; 30)$ est la solution du système

$$\begin{cases} a + e = 420 \\ 600a + 200e = 204\,000 \end{cases}$$

b. Le nombre d'entrées adultes est de 390 et celui d'entrées enfants est de 30.

Intersection de droites

Exercice 30

(d_1) est la droite (rouge) d'équation $2x - y + 5 = 0$.

(d_2) est la droite (bleue) d'équation $3x + 5y + 1 = 0$.

1. Coordonnées (lues sur le manuel) du point d'intersection de (d_1) et (d_2) : $A(-2 ; 1)$.

2.a. On retrouve les coordonnées du point A, en

résolvant le système : $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + 5y + 1 = 1 \end{cases}$

Exercice 26

1. $\begin{cases} 11x + 6y = 1\,000 \\ 8x + 8y = 1\,000 \end{cases}$

2. $(x ; y) = (50 ; 75)$ est la solution de ce système.

Le nombre de places dans un bus moyen est de 50 et celui d'un grand bus est de 75.

Exercice 27

1. $\begin{cases} b + a = 150 \\ b - a = 60 \end{cases}$

2. $(a ; b) = (45 ; 105)$ est la solution de ce système.

Exercice 28

1. $\begin{cases} 9f = h \\ f + h = 14\,500 \end{cases}$

2. $(h ; f) = (13\,050 ; 1\,450)$ est la solution de ce système. On en déduit qu'il y a eu 13 050 hommes et 1 450 femmes dans le stade.

Exercice 29

1. $\begin{cases} 2L + 2l = 16 \\ 4L + 2l = 26 \end{cases}$

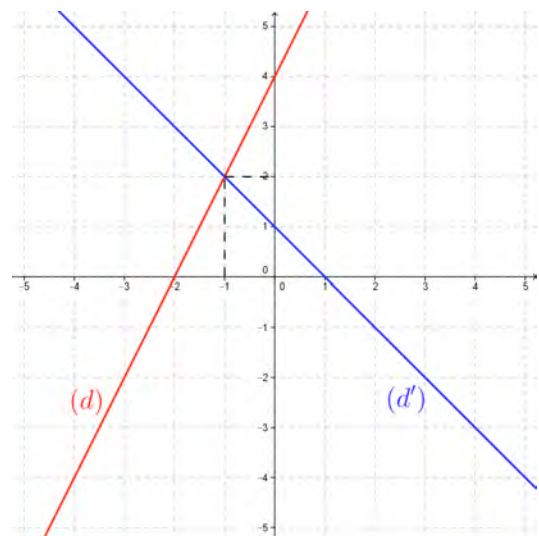
2. $(L ; l) = (5 ; 3)$ est la solution de ce système.

On en déduit que la longueur du rectangle vaut 5 cm et sa largeur 3 cm.

Exercice 31

1. (d) est la droite (rouge) d'équation $y = 2x + 4$.

(d') est la droite (bleue) d'équation $y = -x + 1$.



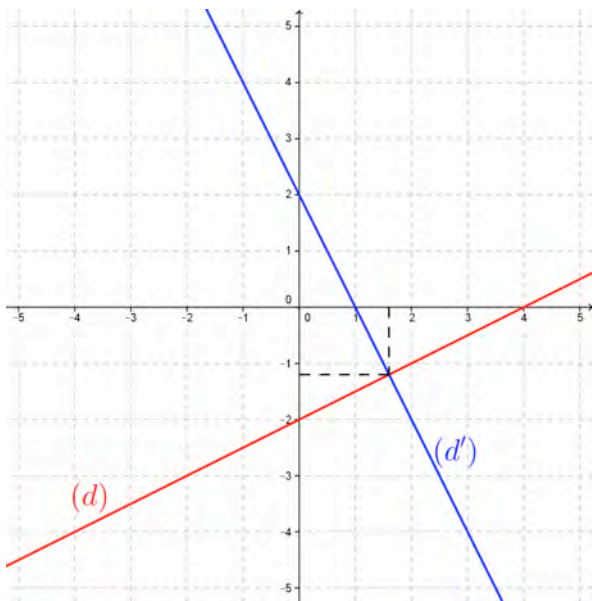
2. a. Coordonnées (lues sur le manuel) du point d'intersection de (d) et (d') : $A(-1 ; 2)$.

b. On retrouve les coordonnées du point A, en

résolvant le système : $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x + 1 \end{cases}$

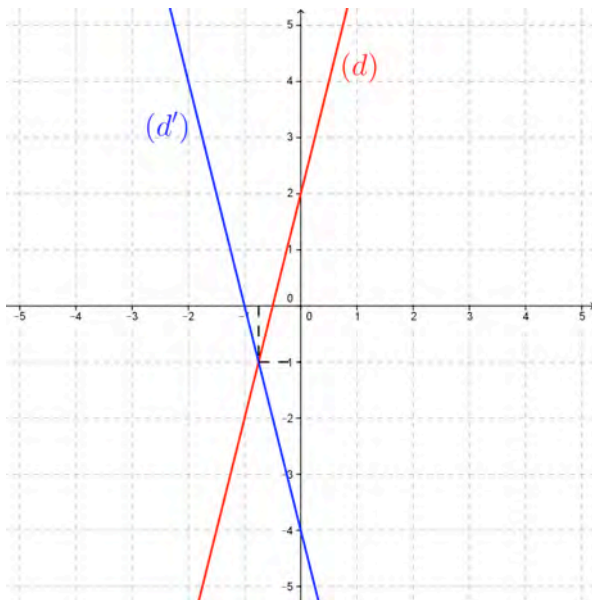
Exercice 32

- a. (d) est la droite (rouge) d'équation $x - 2y = 4$.
 (d') est la droite (bleue) d'équation $2x + y = 2$.



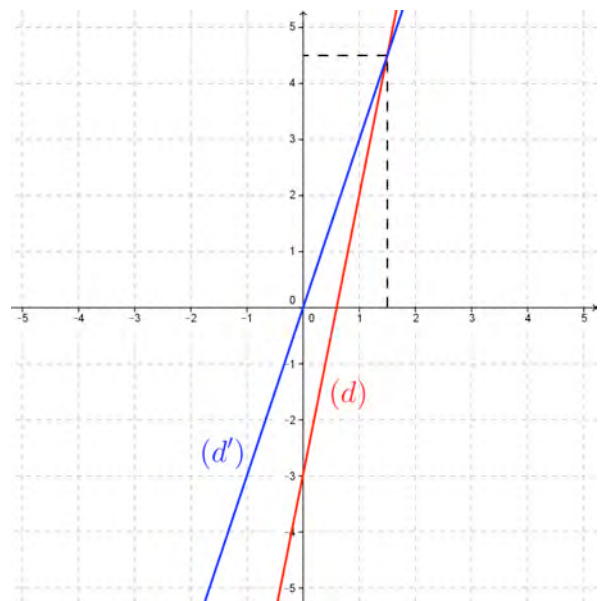
Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d'), on résout le système $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$;
 la solution est $(x ; y) = (1,6 ; -1,2)$.

- b. (d) est la droite (rouge) d'équation $y = 4x + 2$.
 (d') est la droite (bleue) d'équation $y = -4x - 4$.



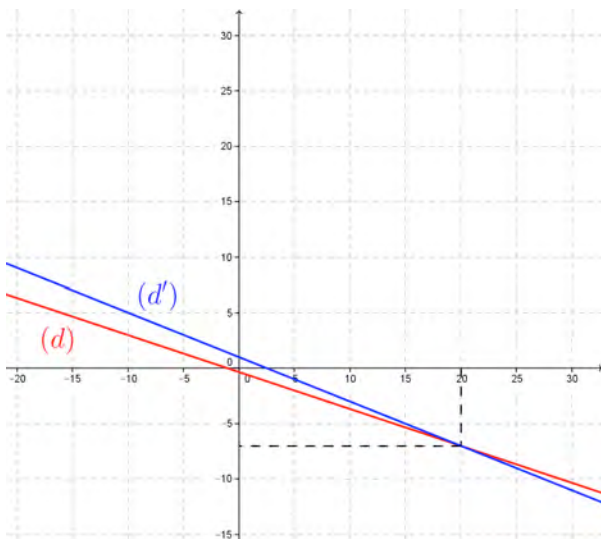
Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d'), on résout le système $\begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = -4x - 4 \end{cases}$;
 la solution est $(x ; y) = (-0,75 ; -1)$.

- c. (d) est la droite (rouge) d'équation $5x - y = 3$.
 (d') est la droite (bleue) d'équation $y = 3x$.



Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d'), on résout le système $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ y = 3x \end{cases}$;
 la solution est $(x ; y) = (1,5 ; 4,5)$.

- d. (d) est la droite (rouge) d'équation $x + 3y + 1 = 0$.
 (d') est la droite (bleue) d'équation $2x + 5y - 5 = 0$.



Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d'), on résout le système $\begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ 2x + 5y - 5 = 0 \end{cases}$;
 la solution est $(x ; y) = (20 ; -7)$.

Demi-plan et inéquation à deux inconnues

Exercice 33

Les points $A(1; 2)$, $D(2; 2)$ et $F(0; 0)$ appartiennent au demi-plan d'inéquation $4x - y + 2 > 0$.

Exercice 34

Les demi-plans qui contiennent le point $A(3; 1)$ sont ceux d'inéquations :

$$\begin{aligned} 2x - y - 1 &> 0 ; \\ -5x + 3y - 2 &\leq 0 ; \\ -x + 2y + 1 &\geq 0 ; \\ x - 5 &< 0 . \end{aligned}$$

Exercice 35

(d) est la droite d'équation $2x - 5y + 3 = 0$.

1.a. Les coordonnées de A (lues sur le manuel) sont $(2; 3)$.

b. $2x_A - 5y_A + 3 = 2 \times 2 - 5 \times 3 + 3 = -8 < 0$.

2. Inéquation du demi-plan non coloré, de frontière (d) comprise : $2x - 5y + 3 \leq 0$.

Exercice 36

(d') est la droite d'équation $y = -1,5x + 2$.

1.a. Les coordonnées de B sont $(-2; 1)$.

b. $-1,5x_B + 2 = -1,5 \times (-2) + 2 = 5$; donc $y_B < -1,5x_B + 2$.

2. Inéquation du demi-plan non coloré, de frontière (d') non comprise : $y < -1,5x + 2$.

Système d'inéquations

Exercice 39

$J(-2; -3)$, $N(1; -3)$ et $O(0; 0)$ appartiennent à l'ensemble des solutions du système :
$$\begin{cases} 3x + y - 1 < 0 \\ 2x - 3y + 4 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 40

(d) est la droite d'équation $4x - y + 2 = 0$;

(d') est la droite d'équation $x + 2y - 1 = 0$.

1.a. Coordonnées de A (lues sur le manuel) : $(-2; 3)$.

b. $4x_A - y_A + 2 = 4 \times (-2) - 3 + 2 = -9 < 0$;

$x_A + 2y_A - 1 = -2 + 2 \times 3 - 1 = 3 > 0$.

2. Donc les points de la partie non colorée du plan sont les solutions du système :
$$\begin{cases} 4x - y + 2 < 0 \\ x + 2y - 1 > 0 \end{cases}$$

Exercice 41

(d) est la droite d'équation $x - 2y + 1 = 0$;

(d') est la droite d'équation $4x + 5y - 1 = 0$.

$A(0; 1)$ appartient à la partie non colorée du plan ;
or : $0 - 2 \times 1 + 1 = -1 < 0$ et $4 \times 0 + 5 \times 1 - 1 = 4 > 0$;
donc les points de la partie non colorée du plan sont

les solutions du système :
$$\begin{cases} x - 2y + 1 < 0 \\ 4x + 5y - 1 > 0 \end{cases}$$

Exercice 37

a. • (d_1) est la droite d'équation $3x + y - 1 = 0$;

- $O(0; 0)$ appartient au demi-plan non coloré, de frontière (d_1) ;
- $3 \times 0 + 0 - 1 = -1 < 0$.

Donc l'inéquation du demi-plan non coloré, de frontière (d_1) , est : $3x + y - 1 < 0$.

b. • (d_2) est la droite d'équation $x - y + 1 = 0$.

- $O(0; 0)$ n'appartient pas au demi-plan non coloré, de frontière (d_2) ;
- $0 - 0 + 1 = 1 > 0$.

Donc l'inéquation du demi-plan non coloré, de frontière (d_2) , est : $x - y + 1 < 0$.

Exercice 38

a. • (d_1) est la droite d'équation $y = -0,25x + 2$;

- $O(0; 0)$ appartient au demi-plan non coloré, de frontière (d_1) ;
- $0 < -0,25 \times 0 + 2$.

Donc l'inéquation du demi-plan non coloré, de frontière (d_1) , est : $y < -0,25x + 2$.

b. • (d_2) est la droite d'équation $y = 6x - 3$;

- $O(0; 0)$ n'appartient pas au demi-plan non coloré, de frontière (d_2) ;
- $0 > 6 \times 0 - 3$.

Donc l'inéquation du demi-plan non coloré, de frontière (d_2) , est : $y < 6x - 3$.

Exercice 42

(d) est la droite d'équation $x - 4y + 7 = 0$;

(d') est la droite d'équation $4x - y + 5 = 0$.

a. $0 - 4 \times 0 + 7 = 7 > 0$ et $4 \times 0 - 0 + 5 = 5 > 0$;

donc les points de la partie du plan colorée en **rouge**

sont les solutions du système :
$$\begin{cases} x - 4y + 7 > 0 \\ 4x - y + 5 > 0 \end{cases}$$

b. les points de la partie du plan colorée en **bleu**
[changement de position par rapport à la droite (d)]

sont les solutions du système :
$$\begin{cases} x - 4y + 7 < 0 \\ 4x - y + 5 > 0 \end{cases}$$

c. les points de la partie du plan colorée en **vert**
[changement de position par rapport à la droite (d')]

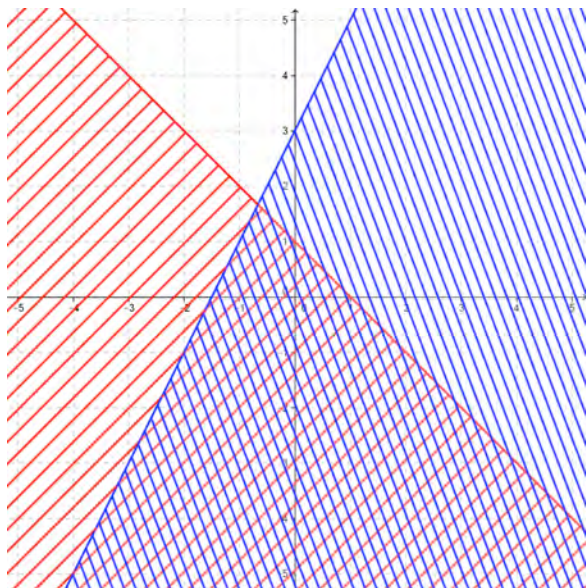
sont les solutions du système :
$$\begin{cases} x - 4y + 7 > 0 \\ 4x - y + 5 < 0 \end{cases}$$

d. les points de la partie du plan colorée en **jaune**
[changement de position par rapport aux droites (d) et (d')]

sont les solutions du système :
$$\begin{cases} x - 4y + 7 < 0 \\ 4x - y + 5 < 0 \end{cases}$$

Exercice 43

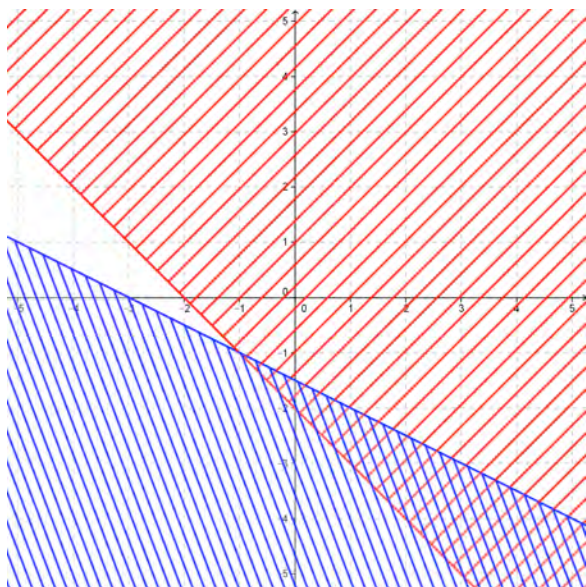
- a. (d) est la droite (rouge) d'équation $x + y - 1 = 0$.
 (d') est la droite (bleue) d'équation $4x - 2y + 6 = 0$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations

$$\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ 4x - 2y + 6 < 0 \end{cases}$$
 est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge comprise et demi-droite bleue non comprise.

- b. (d) est la droite (rouge) d'équation $x + y + 2 = 0$.
 (d') est la droite (bleue) d'équation $2x + 4y + 6 = 0$.

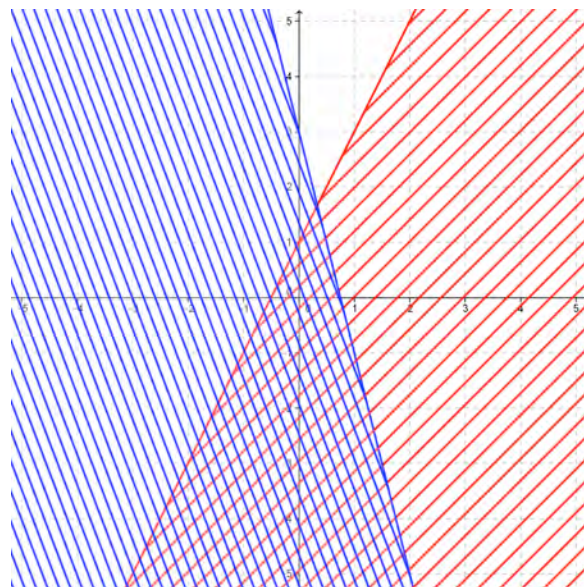


L'ensemble des solutions du système d'inéquations

$$\begin{cases} x + y + 2 \leq 0 \\ 2x + 4y + 6 > 0 \end{cases}$$
 est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge comprise et demi-droite bleue non comprise.

Exercice 44

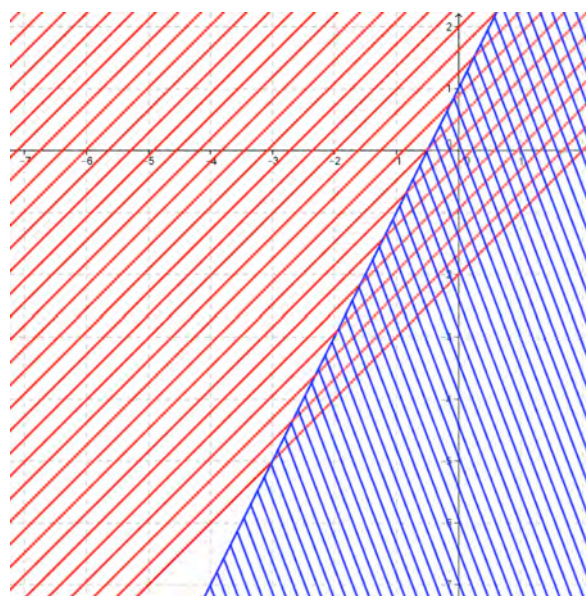
- a. (d) est la droite (rouge) d'équation $y = 2x + 1$.
 (d') est la droite (bleue) d'équation $y = -4x + 3$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations

$$\begin{cases} y \geq 2x + 1 \\ y > -4x + 3 \end{cases}$$
 est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge comprise et demi-droite bleue non comprise.

- b. (d) est la droite (rouge) d'équation $y = x - 2$.
 (d') est la droite (bleue) d'équation $y = 2x + 1$.



L'ensemble des solutions du système d'inéquations

$$\begin{cases} y \leq x - 2 \\ y > 2x + 1 \end{cases}$$
 est l'ensemble des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge comprise et demi-droite bleue non comprise.

Exercice 45 Résolution par substitution

Résolution du système (S) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$.

1. Finalisation des travaux :

Mouafo $2x - 3y = 5$ $2x + 3\left(\frac{6-x}{2}\right) = 5$ $4x - 3(6-x) = 10$ $4x - 18 + 3x = 10$ $7x = 28$ $x = 4.$ D'où : $y = \frac{6-4}{2} = 1.$ Solution de (S) : $(4 ; 1).$	René $2x - 3y = 5$ $2(6-2y) - 3y = 5$ $12 - 4y - 3y = 5$ $-7y = -7$ $y = 1.$ D'où $x = 6 - 2 \times 1 = 4.$ Solution de (S) : $(4 ; 1).$
---	---

2.a. Les deux solutions trouvées sont identiques.

b. C'est René qui a effectué les calculs les plus rapides.

Exercice 46 Un système, plusieurs méthodes

(S) est le système $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 11x + 3y = 12 \end{cases}$.

1. Elimination de l'inconnue x.

a. $\begin{cases} 55x + 22y = 11 \\ -55x - 15y = -60 \end{cases}$.

b. On additionne les deux nouvelles égalités :

$$7y = -49$$

$$y = -7 ;$$

d'où : $5x + 2 \times (-7) = 1$

$$5x = 15$$

$$x = 3.$$

La solution du système (S) est $(3 ; -7).$

2. Elimination de l'inconnue y.

a. $\begin{cases} 15x + 6y = 3 \\ -22x - 6y = -24 \end{cases}$.

b. On additionne les deux nouvelles égalités. :

$$-7x = -21$$

$$x = 3 ;$$

d'où : $5 \times 3 + 2y = 1$

$$2y = -14$$

$$y = -7.$$

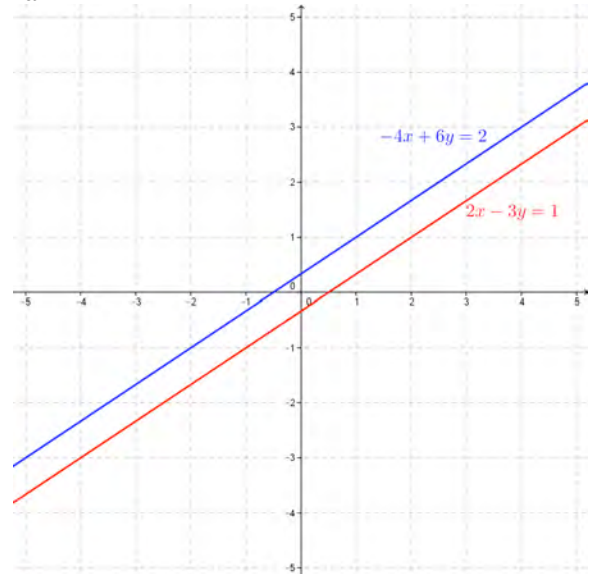
La solution du système (S) est $(3 ; -7).$

3. Les deux solutions sont identiques.

Exercice 47 Système sans solution

1. Le produit d'un nombre a par 0 vaut toujours 0. Il n'existe donc pas de nombre a tel que $0 \times a = 5$.

2.a.



b. Les deux droites sont parallèles.

En effet : $2 \times 6 - (-4) \times (-3) = 12 - 12 = 0$.

3. (S) est le système $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = 2 \end{cases}$.

a. On multiplie la première équation par 2 :

$$\begin{cases} 4x - 6y = 2 \\ -4x + 6y = 2 \end{cases}$$

on additionne les deux équations : $0x + 0y = 4$.
Donc le système (S) n'a pas de solution.

b. Si le système (S) avait une solution, elle correspondrait aux coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $2x - 3y = 1$ et $-4x + 6y = 2$.

Or ces deux droites sont strictement parallèles ; donc elles n'ont pas de point d'intersection et le système (S) n'a pas de solution.

Exercice 48 Calculer pour contrôler la lecture

1. Résolution du système $\begin{cases} 13x + 12y = 50 \\ x - y = -2 \end{cases}$.

On multiplie la seconde équation par 12 :

$$\begin{cases} 13x + 12y = 50 \\ 12x - 12y = -24 \end{cases}$$

On additionne les deux nouvelles égalités :

$$25x = 26$$

$$x = \frac{26}{25}$$

$$x = 1,04 ;$$

d'où : $1,04 - y = -2$

$$-y = -3,04$$

$$y = 3,04.$$

La solution du système est $(1,04 ; 3,04).$

2. Le professeur rappelle à l'élève qu'on ne peut pas affirmer à partir d'une représentation graphique.

Exercice 49 Pas de conclusion hâtive

(d) est la droite d'équation $x - 2y - 3 = 0$.

1.a. Points situés « au-dessus » de (d) :

(1 ; 2), (3 ; 1), ... ;

b. points situés « en-dessous » de (d) :

(3 ; -1), (4 ; 0), ...

2. (3 ; -1) et (4 ; 0) vérifient l'inégalité $x - 2y - 3 > 0$.

3. Kadidiatou pense à tort qu'on peut relier le signe d'inégalité figurant dans une inéquation avec la position par rapport à la droite d'équation associée.

Exercice 50 Sur la frontière

(d) est la droite d'équation $3x + 2y - 4 = 0$.

1.	Point	Coordonnées (x ; y)	$3x + 2y - 4$
	A	(2 ; -1)	0
	B	(2 ; 1)	4

2.a. A n'appartient pas au plan d'inéquation

$$3x + 2y - 4 > 0 ;$$

b. A appartient au plan d'inéquation

$$3x + 2y - 4 \geq 0 .$$

3.a. B appartient au plan d'inéquation

$$3x + 2y - 4 > 0 ;$$

b. B appartient au plan d'inéquation

$$3x + 2y - 4 \geq 0 .$$

4.a. Le point A appartient au demi-plan de frontière (d) et au-dessus de (d), droite comprise, et n'appartient pas au demi-plan de frontière (d) et au-dessus de (d), droite non comprise.

b. Le point B appartient au demi-plan de frontière (d) et au-dessus de (d), droite comprise, et appartient au demi-plan de frontière (d) et au-dessus de (d), droite non comprise.

Exercices d'approfondissement

Exercice 51 Système et racines carrées

a. Par combinaisons linéaires, en multipliant la première ligne par $\sqrt{3}$ et la seconde par $-\sqrt{2}$,

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases} \text{ équivaut à}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sqrt{2}x + \sqrt{3}\sqrt{3}y = \sqrt{3}\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}\sqrt{3}x - \sqrt{2}\sqrt{2}y = -\sqrt{2}\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{6}x + 3y = \sqrt{6} \\ -\sqrt{6}x - 2y = -\sqrt{6} \end{cases}$$

Solution de ce système : $(x ; y) = (1 ; 0)$.

b. . Par combinaisons linéaires, en multipliant la première ligne par $\sqrt{3}$ et la seconde par $-\sqrt{2}$,

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = -\sqrt{3} \end{cases} \text{ équivaut}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sqrt{2}x + \sqrt{3}\sqrt{3}y = \sqrt{3}\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}\sqrt{3}x - \sqrt{2}\sqrt{2}y = \sqrt{2}\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{6}x + 3y = \sqrt{6} \\ -\sqrt{6}x - 2y = \sqrt{6} \end{cases}$$

Solution de ce système : $(x ; y) = (-5 ; 2\sqrt{6})$.

Exercice 52 Système et fractions

1.a. Par combinaisons linéaires, en multipliant la première ligne par 15 et la seconde par 4,

$$\begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{4y}{5} = \frac{2}{15} \\ \frac{3x}{2} - \frac{5y}{4} = \frac{11}{4} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 10x + 12y = 2 \\ 6x - 5y = 11 \end{cases}$$

b. Par combinaisons linéaires, en multipliant la première ligne par 6 et la seconde par -10,

$$\begin{cases} 10x + 12y = 2 \\ 6x - 5y = 11 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 60x + 72y = 12 \\ -60x + 50y = -110 \end{cases}$$

Solution de ce système : $(x ; y) = \left(\frac{71}{61} ; \frac{-49}{61}\right)$.

2.a. Par combinaisons linéaires, en multipliant la première ligne par 12 et la seconde par -15,

$$\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-x}{3} + \frac{y}{5} = \frac{-1}{15} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

Solution de ce système : $(x ; y) = \left(1 ; \frac{4}{3}\right)$.

b. Par combinaisons linéaires, en multipliant la première ligne par 8 et la seconde par -60,

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{9y}{8} = \frac{-15}{8} \\ \frac{x}{5} - \frac{2y}{15} = \frac{-8}{15} \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 12x + 9y = -15 \\ -12x + 8y = 32 \end{cases}$$

Solution de ce système : $(x ; y) = (-2 ; 1)$.

Exercice 53 Sodas citron et sodas orange

On note c le prix d'un soda citron et o le prix d'un soda orange ; $(c ; o)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 3c + 5o = 3\,300 \\ 6c + 2o = 3\,000 \end{cases}$$

La solution de ce système est : $(c ; o) = (350 ; 450)$.

Donc les clients de la 3^e table vont payer :
 $5 \times 350 + 4 \times 450 = 3\,550$ F CFA.

Exercice 54 Intersection de droites

a. Equation de la droite (d) , qui passe par les points $A(4 ; 2)$ et $B(-2 ; -1)$: $x - 2y = 0$;

équation de la droite (d') , qui passe par les points $C(-1 ; 2)$ et $D(8 ; -1)$: $x + 3y = 5$.

Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d') , on résout le système $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$;

la solution de ce système est : $(x ; y) = (2 ; 1)$,
 donc les droites (d) et (d') se coupent au point de coordonnées $(2 ; 1)$.

b. Equation de la droite (d) , qui passe par les points $A(1 ; 4)$ et $B(4 ; -2)$: $2x + y = 6$;

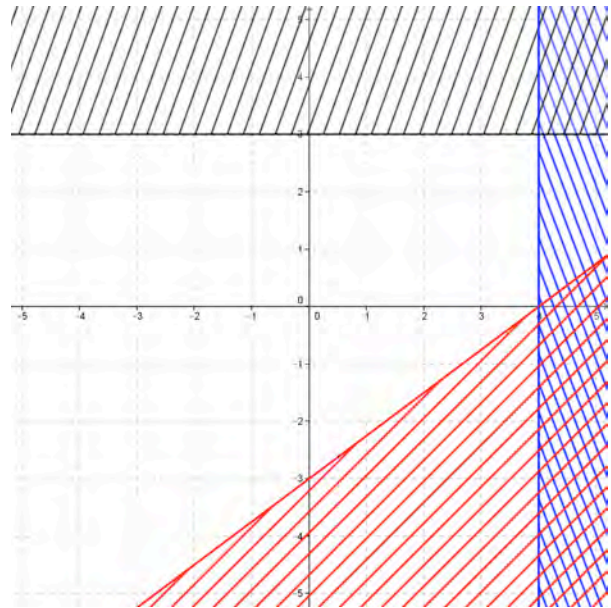
équation de la droite (d') , qui est perpendiculaire à (d) et passe par le point $C(-1 ; -2)$: $x - 2y = 3$.

Pour calculer les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d') , on résout le système $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$;

la solution de ce système est : $(x ; y) = (3 ; 0)$,
 donc les droites (d) et (d') se coupent au point de coordonnées $(3 ; 0)$.

Exercice 55 Points à coordonnées entières

1. La droite *bleue* a pour équation : $x = 4$,
 la droite *noire* a pour équation : $y = 3$,
 la droite *rouge* a pour équation : $3x - 4y - 12 = 0$.



Le domaine du plan qui correspond au système

$$\begin{cases} x < 4 \\ y \leq 3 \\ 3x - 4y - 12 \leq 0 \end{cases} \text{ est l'ensemble des}$$

points de la partie non colorée de ce plan, segment bleu non compris, demi-droites noire et rouge comprises.

2. $(1 ; 3)$, $(2 ; 2)$, $(3 ; 1)$, $(1 ; -1)$, $(-2 ; 3)$, $(-4 ; -2)$
 ... sont des exemples de coordonnées de points qui conviennent.

S'entraîner au BEPC

Exercice 56 Dimensions d'un rectangle

1. La solution du système $\begin{cases} x + y = 25 \\ y - x = 5 \end{cases}$ est $(10 ; 15)$.

2. Soit y et x la longueur et la largeur, en cm, du rectangle ;

- le périmètre vaut 50 cm équivaut à $2(x + y) = 50$
 c'est-à-dire $x + y = 25$,
- la longueur a 5 cm de plus que la largeur équivaut à $y - x = 5$,
- finalement x et y vérifient le système $\begin{cases} x + y = 25 \\ y - x = 5 \end{cases}$.

Donc la longueur du rectangle vaut 15 cm et sa largeur vaut 10 cm.

Exercice 57 L'âge du père

La solution du système $\begin{cases} x - 2y - 12 = 0 \\ x = 3y \end{cases}$ est $(36 ; 12)$.

2. Soit x et y les âges respectifs du père et du cousin ;
 • on a $x = 3y$, car l'âge du père est le triple de l'âge du cousin,

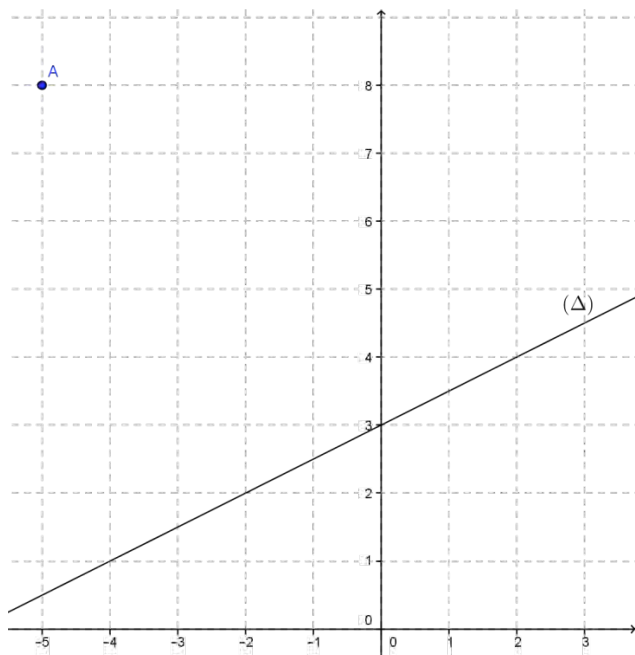
• on a $x - 12 = 2y$, car l'âge du père, diminué de 12, est le double de l'âge du cousin.

• finalement x et y vérifient le système $\begin{cases} x - 2y - 12 = 0 \\ x = 3y \end{cases}$.

Donc l'âge du père est 36 ans, celui du cousin est 12 ans.

Exercice 58 Recherche d'inéquation

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) , (Δ) est la droite d'équation $x - 2y + 6 = 0$.



2.a. Le point $A(-5 ; 8)$ n'appartient pas au demi-plan de frontière (Δ) et contenant le point $O(0 ; 0)$;
en effet : $x_O - 2y_O + 6 = 0 - 2 \times 0 - 6 = \underline{6 > 0}$,

$$x_A - 2y_A + 6 = -5 - 2 \times 8 + 6 = \underline{-15 < 0}.$$

b. Inéquation du demi-plan limité par (Δ) et contenant le point A : $x - 2y + 6 < 0$.

Exercice 59 Fèves de Cacao

1. La solution du système $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$ est $(7 ; 5)$.

2. Soit x et y les productions respectives en tonnes des villages A et B ;

- on a $x + y = 12$, car A et B ont produit ensemble 12 tonnes de fèves,
- on a $x + 3 = 2y$, car si on ajoute 3 tonnes à la production de A , on obtient le double de la production de B ,

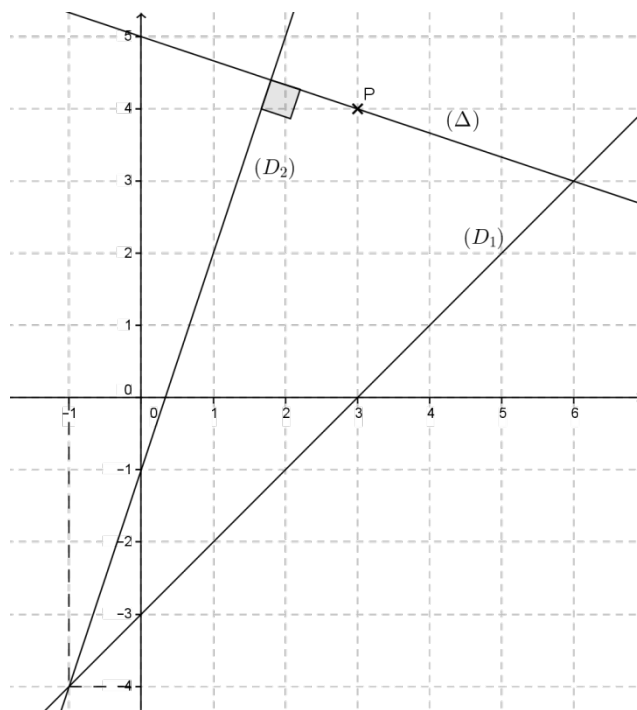
- finalement x et y vérifient le système $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$.

Donc la production du village A est de 7 tonnes et celle du village B est de 5 tonnes.

Exercice 60 Équations cartésiennes de droites

1. La solution du système $\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$ est $(-1 ; -4)$.

2.a. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , (D_1) et (D_2) sont les droites d'équations respectives $x - y - 3 = 0$ et $3x - y - 1 = 0$.



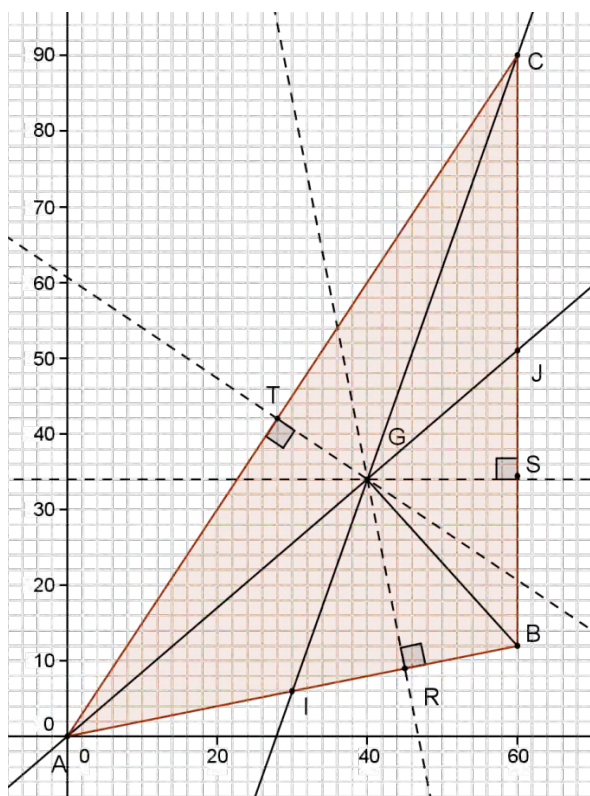
b. Les coordonnées du point d'intersection de (D_1) et (D_2) sont $(-1 ; -4)$.

c. Equation de la droite (Δ) , passant par $P(3 ; 4)$ et perpendiculaire à (D_2) : $x + 3y = 15$.

Activités d'intégration

Exercice 61 Terrain à partager

1.



Dans le plan muni d'un repère orthonormé :

$A(0;0)$, $B(60;12)$, $C(60;90)$.

2.a. $I(30;6)$ est le milieu de $[AB]$;

$J(60;51)$ est le milieu de $[BC]$.

b. Équation de la médiane (IC) : $14x - 5y = 390$;

Équation de la médiane (JA) : $17x - 20y = 0$.

c. G , centre de gravité du triangle ABC , a pour coordonnées la solution du système $\begin{cases} 14x - 5y = 390 \\ 17x - 20y = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire : $G(40;34)$.

3. Aire du triangle ABG

a. La droite perpendiculaire à (AB) et passant par G a pour équation : $5x + y = 234$.

b. La droite (AB) a pour équation : $x - 5y = 0$.

R , pied de la hauteur issue de G dans le triangle ABG , a pour coordonnées la solution du système $\begin{cases} 5x + y = 234 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire : $R(45;9)$.

$$c. AB = \sqrt{(60-0)^2 + (12-0)^2} = 12\sqrt{26} ;$$

$$RG = \sqrt{(40-45)^2 + (34-9)^2} = \sqrt{5^2 + 25^2} = 5\sqrt{26} .$$

$$d. \mathcal{A}_{ABG} = \frac{AB \times RG}{2} = \frac{12\sqrt{26} \times 5\sqrt{26}}{2} = \underline{780}.$$

e. Aire du triangle BCG

• La droite perpendiculaire à (BC) et passant par G a pour équation : $y = 34$.

• La droite (BC) a pour équation : $x = 60$.

• S , pied de la hauteur issue de G dans le triangle BCG , a pour coordonnées la solution du système $\begin{cases} y = 34 \\ x = 60 \end{cases}$, c'est-à-dire : $S(60;34)$.

$$\bullet BC = \sqrt{(60-60)^2 + (90-12)^2} = 78 ;$$

$$SG = \sqrt{(40-60)^2 + (34-34)^2} = 20 ;$$

$$\text{donc } \mathcal{A}_{BCG} = \frac{BC \times SG}{2} = \frac{78 \times 20}{2} = \underline{780}.$$

Aire du triangle CAG

• La droite perpendiculaire à (CA) et passant par G a pour équation : $2x + 3y = 182$.

• La droite (CA) a pour équation : $3x - 2y = 0$.

• T , pied de la hauteur issue de G dans le triangle CAG , a pour coordonnées la solution du système $\begin{cases} 2x + 3y = 182 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire : $T(28;42)$.

$$\bullet CA = \sqrt{(60-0)^2 + (90-0)^2} = 30\sqrt{13} ;$$

$$TG = \sqrt{(40-28)^2 + (34-42)^2} = \sqrt{12^2 + 8^2} = 4\sqrt{13} ;$$

$$\text{donc } \mathcal{A}_{CAG} = \frac{CA \times TG}{2} = \frac{30\sqrt{13} \times 4\sqrt{13}}{2} = \underline{780}.$$

f. Les aires des triangles ABG , BCG et CAG étant égales, le partage est équitable.

Exercice 62 Recherche d'un bénéfice maximum

Soit x le nombre de rouleaux de type A et y le nombre de rouleaux de type B.

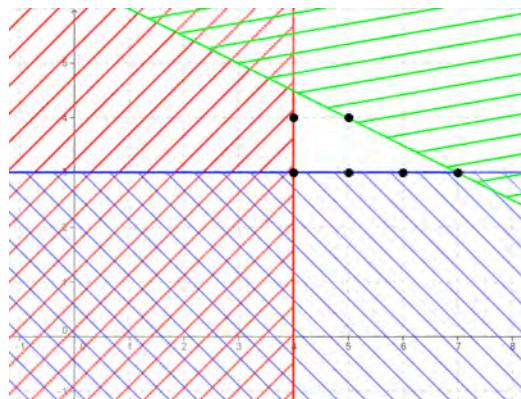
- D'après la contrainte $\square$, x doit être supérieur ou égal à 4, c'est-à-dire : $x \geq 4$.
- D'après la contrainte $\square$, y doit être supérieur ou égal à 3, c'est-à-dire : $y \geq 3$.
- D'après la contrainte $\square$, x et y vérifient l'inégalité : $x + 2y \leq 13$.

2. Résolution graphique du système
$$\begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq 3 \\ x + 2y \leq 13 \end{cases} :$$

les solutions sont les coordonnées des points de la partie non colorée du plan, demi-droite rouge ($x = 4$), demi-droite bleue ($y = 3$) et demi-droite verte ($x + 2y = 13$) comprises.

3. Les points à coordonnées entières de la partie du plan précédente correspondent aux productions possibles :

$(4 ; 3)$, $(5 ; 3)$, $(6 ; 3)$, $(7 ; 3)$, $(4 ; 4)$ et $(5 ; 4)$.



4.

Point	$(4 ; 3)$	$(5 ; 3)$	$(6 ; 3)$	$(7 ; 3)$	$(4 ; 4)$	$(5 ; 4)$
Bénéfice en milliers de F CFA	231	252	273	294	280	301

La production qui assure le plus grand bénéfice est 7 rouleaux de type A et 3 rouleaux de type B.

14 Applications linéaires et affines

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Applications linéaires - Définitions [1a p 166]	18, 19, 24, 25, 27, 36, 37	40, 41, 42, 46	50, 52
2	Applications linéaires - Propriétés [1b p 166]	22, 23, 27	43	47
3	Applications linéaires - Représentation graphique [1c p 166]	24, 26	43	48, 51, 52
4	Applications affines - Définitions [2a p 167]	28, 29, 30	40, 41, 42	50,
5	Applications affines - Représentation graphique [2b p 167]	33, 34, 35, 38, 39	44, 46	48, 49, 51, 52, 53
	Apprendre déterminer une image et un antécédent [1 p 168]	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7		
	Apprendre à représenter une application [2 p 169]	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17		
6	Sens de variation [3 p 167]	20, 21, 31, 32	45	

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

Les avions de ligne

Un avion de ligne vole à la vitesse constante de 800 km/h.

1.a. Distance parcourue en 2 heures : $800 \times 2 = 1\,600$ km.

b. Distance parcourue en 3 heures et 30 minutes : $800 \times 3,5 = 2\,800$ km.

2.a. Si t , d et v désignent respectivement le temps (en h) de vol, la distance (en km) parcourue et la vitesse moyenne (en km/h), alors $v = \frac{d}{t}$ ou $d = v \times t$.

b.

Temps t (en h)	2	3,5	4	5,25	8,5
Distance d (en km)	1 600	2 800	3 200	4 200	6 800

Ce tableau est un tableau de proportionnalité, dont le coefficient de proportionnalité vaut 800.

3. La vitesse moyenne de ce second avion est : $\frac{1\,935}{2,25} = 860$ km/h.

Activités de découverte

1 Application linéaire

Le débit moyen du fleuve Sanaga est de $2\,100 \text{ m}^3/\text{s}$.

1. Soit V le volume d'eau écoulé ;

- pour $t = 2 \text{ s}$, $V = 2\,100 \times 2 = 4\,200 \text{ m}^3$ (en 2 s, il s'écoule $4\,200 \text{ m}^3$ d'eau) ;
- pour $t = 30 \text{ s}$, $V = 2\,100 \times 30 = 63\,000 \text{ m}^3$ (en 30 s, il s'écoule $63\,000 \text{ m}^3$ d'eau) ;
- pour $t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$, $V = 2\,100 \times 60 = 126\,000 \text{ m}^3$ (en 1 min, il s'écoule $126\,000 \text{ m}^3$ d'eau).

2.a. $V(2)$ correspond au volume d'eau, en m^3 , écoulé en 2 s ;

$V(30)$ correspond au volume d'eau, en m^3 , écoulé en 30 s ;

$V(60)$ correspond au volume d'eau, en m^3 , écoulé en 60 s, c'est-à-dire en 1 min.

b. On a : $2\,100 = \frac{V(t)}{t}$; donc : $V(t) = 2\,100 \times t$.

3.a.

Durée de l'écoulement t (en s)	1	2	10	30	60	100
Volume écoule $V(t)$ (en m^3)	2 100	4 200	21 000	63 000	126 000	210 000

b. On a un tableau de proportionnalité, puisque : $\frac{2\,100}{1} = \frac{4\,200}{2} = \frac{21\,000}{10} = \frac{63\,000}{30} = \frac{126\,000}{60} = \frac{210\,000}{100} = 2\,100$.

c. Son coefficient de proportionnalité est égal à 2 100.

2 Propriétés des applications linéaires

Partie A : Observations sur un exemple

f est l'application linéaire définie par $f(x) = 6x$.

1.

x	10	20	40	50	70	80	100	120
$f(x)$	60	120	240	300	420	480	600	720

Il s'agit d'un tableau de proportionnalité, dont l'un des coefficients de proportionnalité est égal à 6.

2.a. $720 = 120 + 600$, donc : $f(120) = f(20) + f(100)$.

b. $420 = 120 + 300$, donc : $f(70) = f(20) + f(50)$.

3.a. $300 = 5 \times 60$, donc : $f(50) = 5 \times f(10)$.

b. $480 = 4 \times 120$, donc : $f(80) = 4 \times f(20)$.

Partie B : Cas général

f est l'application linéaire définie par $f(x) = ax$.

On a $f(u) = a \times u$ et $f(v) = a \times v$, donc :

- $f(u+v) = a \times (u+v) = a \times u + a \times v = f(u) + f(v)$.
- $f(ku) = a \times (ku) = k \times (a \times u) = k \times f(u)$.

3 Représentation graphique des applications linéaires

1.a. L'application f qui, à une somme x , exprimée en RWF, fait correspondre sa valeur en F CFA est : $f(x) = 0,8x$.

b.

x	1 000	2 000	5 000	10 000
$f(x)$	800	1 600	4 000	8 000

Interprétation :

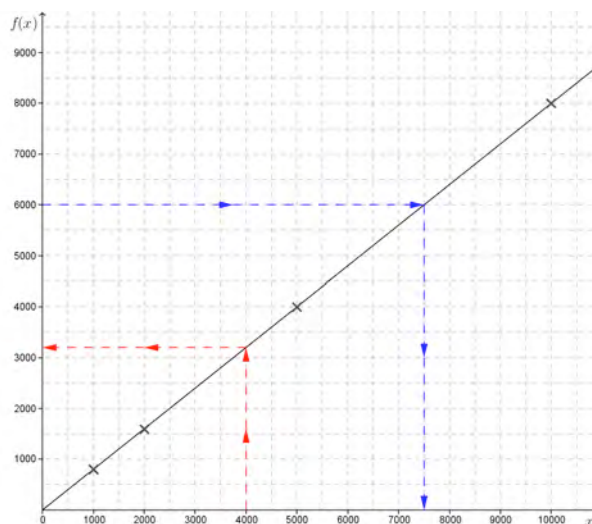
1 000 RWF correspondent à 800 F CFA,
2 000 RWF correspondent à 1 600 F CFA,
5 000 RWF correspondent à 4 000 F CFA,
10 000 RWF correspondent à 8 000 F CFA.

3. D'après le graphique ci-contre :

- a. un prix de 4 000 RWF correspond à 3 200 F CFA ;
b. une somme de 6 000 F CFA correspond à 7 500 RWF.

Ces résultats peuvent être vérifiés par calculs.

2.a.



- b. Constat : tous les points sont alignés et la droite qui passe par tous ces points passe également par l'origine du repère.

4 Application affine

1.a. Les 200 minutes ont coûté : $75 \times 200 = 15\,000$ F CFA ; on y ajoute le prix du forfait : $15\,000 + 8\,000 = 23\,000$; montant de la facture de Mireille : 23 000 F CFA.

b. Les 300 minutes ont coûté : $75 \times 300 = 22\,500$ F CFA ; on y ajoute le prix du forfait : $22\,500 + 8\,000 = 30\,500$; montant de la facture d'Henri : 30 500 F CFA.

2. x désigne la durée mensuelle de communication (en min) et $f(x)$ le montant de la facture correspondante (en F CFA)

a. $f(100)$ correspond au montant de la facture, en F CFA, quand on téléphone 100 minutes.

$f(400)$ correspond au montant de la facture, en F CFA, quand on téléphone 400 minutes.

b. Les x minutes coûtent, en F CFA, $75 \times x = 75x$; on y ajoute le prix du forfait : $75x + 8\,000$; finalement : $f(x) = 75x + 8\,000$.

c. $f(100) = 75 \times 100 + 8\,000 = 7\,500 + 8\,000 = 15\,500$;

$f(400) = 75 \times 400 + 8\,000 = 30\,000 + 8\,000 = 38\,000$.

5 Représentation graphique des applications affines

f désigne l'application affine définie par : $f(x) = 0,5x + 2$.

1. a. $f(-5) = 0,5 \times (-5) + 2 = -2,5 + 2 = -0,5$.

b. $f(-2) = 0,5 \times (-2) + 2 = -1 + 2 = 1$, donc l'image de -2 par f est 1 ;

$f(0) = 0,5 \times 0 + 2 = 0 + 2 = 2$, donc l'image de 0 par f est 2 ;

$f(1) = 0,5 \times 1 + 2 = 0,5 + 2 = 2,5$, donc l'image de 1 par f est $2,5$;

$f(3) = 0,5 \times 3 + 2 = 1,5 + 2 = 3,5$, donc l'image de 3 par f est $3,5$;

$f(4) = 0,5 \times 4 + 2 = 2 + 2 = 4$, donc l'image de 4 par f est 4 .

c. $f(x) = 0,5x + 2$; pour que $f(x) = 7$, il faut que $0,5x + 2 = 7$.

On résout l'équation $0,5x + 2 = 7$

$$0,5x = 5$$

$$x = 10.$$

d. On cherche x tel que $f(x) = -1$.

On résout alors $0,5x + 2 = -1$

$$0,5x = -3$$

$$x = -6.$$

Donc l'antécédent de -1 par f est -6 .

On cherche x tel que $f(x) = 2,5$.

On résout alors $0,5x + 2 = 2,5$

$$0,5x = 0,5$$

$$x = 1.$$

Donc l'antécédent de $2,5$ par f est 1 .

On cherche x tel que $f(x) = 5$.

On résout alors $0,5x + 2 = 5$

$$0,5x = 3$$

$$x = 6.$$

Donc l'antécédent de 5 par f est 6 .

e.

x	-6	-5	-2	0	1	3	4	6	10
$f(x)$	-1	$-0,5$	1	2	$2,5$	$3,5$	4	5	7

2. a. $A(-5 ; -0,5)$,

$C(0 ; 2)$,

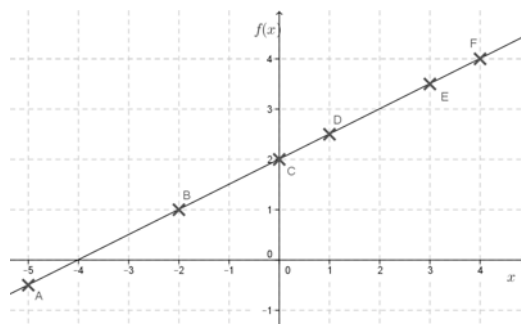
$E(3 ; 3,5)$,

$B(-2 ; 1)$,

$D(1 ; 2,5)$,

$F(4 ; 4)$.

b.



Constat : les points sont alignés.

3. a. L'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$ est l'ensemble des points d'abscisse x et d'ordonnée $y = 0,5x + 2$.

Or il a été vu dans le chapitre sur les équations de droite qu'un tel ensemble est une droite.

b. Equation de cette droite : $y = 0,5x + 2$.

6 Sens de variation

1. g est l'application affine définie par : $g(x) = -2x + 3$.

a. $g(-5) = -2 \times (-5) + 3 = 13$,

$g(3) = -2 \times 3 + 3 = -3$,

$g(-1) = -2 \times (-1) + 3 = 5$,

$g(10) = -2 \times 10 + 3 = -17$.

$g(0) = -2 \times 0 + 3 = 3$,

b. $-5 < -1 < 0 < 3 < 10$ et $g(-5) > g(-1) > g(0) > g(3) > g(10)$.

c. Les nombres -5 , -1 , 0 , 3 et 10 ne sont pas rangés dans le même ordre que leurs images.

2. h est l'application affine définie par : $h(x) = 5x - 2$.

a. $h(-5) = 5 \times (-5) - 2 = -27$,

$h(3) = 5 \times 3 - 2 = 13$,

$h(-1) = 5 \times (-1) - 2 = -7$,

$h(10) = 5 \times 10 - 2 = 48$.

$h(0) = 5 \times 0 - 2 = -2$,

b. $-5 < -1 < 0 < 3 < 10$ et $h(-5) < h(-1) < h(0) < h(3) < h(10)$.

c. Les nombres -5 , -1 , 0 , 3 et 10 sont rangés dans le même ordre que leurs images.

3. f est l'application affine définie par : $f(x) = ax + b$.

a. f est croissante quand a est strictement positif.

b. f est décroissante quand a est strictement négatif.

1 Apprendre à déterminer une image et un antécédent

Exercice 1

- a. L'image de -2 par f_1 est 1 ;
- b. l'image de 2 par f_1 est 3 ;
- c. l'antécédent de 3 par f_1 est 2 ;
- d. l'antécédent de 1 par f_1 est -2 .

Exercice 2

- a. L'image de 4 par f_2 est -3 ;
- b. l'image de -4 par f_2 est 1 ;
- c. l'antécédent de -3 par f_2 est 4 ;
- d. l'antécédent de 0 par f_2 est -1 .

Exercice 3

- a. L'image de -1 par f_3 est 1 ;
- b. l'image de 3 par f_3 est -3 ;
- c. l'antécédent de -2 par f_3 est 2 ;
- d. l'antécédent de 2 par f_3 est -2 .

Exercice 4

f est l'application définie par : $f(x) = -2,5x$.

- 1.a. $f(1) = -2,5 \times 1 = -2,5$; b. $f(-4) = -2,5 \times (-4) = 10$;
- c. $f(6) = -2,5 \times 6 = -15$; d. $f(-7) = -2,5 \times (-7) = 17,5$.
- 2.a. L'antécédent par f de -5 est 2 ;
- b. l'antécédent par f de $7,5$ est -3 ;
- c. l'antécédent par f de $-12,5$ est 5 ;
- d. l'antécédent par f de 25 est -10 .

Exercice 5

g est l'application définie par : $g(x) = -4x + 6$.

- 1.a. $g(0) = -4 \times 0 + 6 = 6$; b. $g(-1) = -4 \times (-1) + 6 = 10$;
- c. $g(4) = -4 \times 4 + 6 = -10$; d. $g(-5) = -4 \times (-5) + 6 = 26$.
- 2.a. L'antécédent par g de 2 est 1 ;
- b. l'antécédent par g de -6 est 3 ;
- c. l'antécédent par g de 8 est $-0,5$;
- d. l'antécédent par g de -5 est $2,75$.

Exercice 6

- 1. La distance parcourue $f(t)$ est égale au produit de la vitesse (75) par le temps écoulé (t) ; donc : $f(t) = 75t$.
- 2.a. $f(5) = 375$; l'antécédent de 600 par f est 8 .
- b. La distance parcourue par le bus en 5 heures est de 375 km ; il faut 8 heures pour parcourir 600 km.

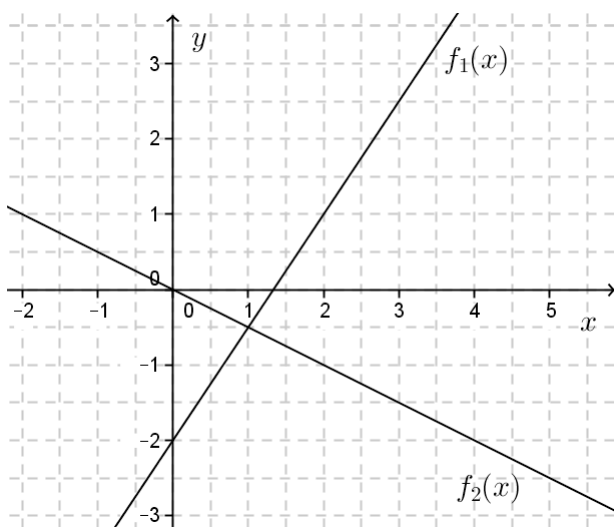
Exercice 7

- 1. La masse $g(v)$ d'un morceau d'acajou est égale au produit de sa masse volumique (700) par son volume (v).
Donc $g(v) = 700v$.
- 2.a. $g(0,5) = 350$; l'antécédent de 210 par g est $0,3$.
- b. $0,5 \text{ m}^3$ d'acajou pèse 350 kg ; 210 kg d'acajou ont un volume de $0,3 \text{ m}^3$.

2 Apprendre à représenter une application

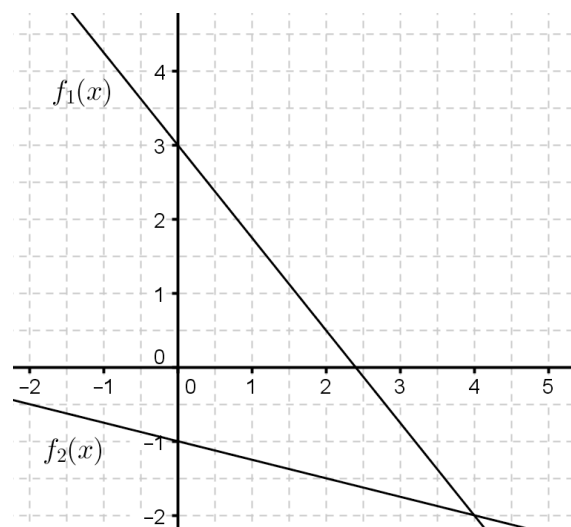
Exercice 8

$$f_1(x) = 1,5x - 2 \quad \text{et} \quad f_2(x) = -0,5x.$$

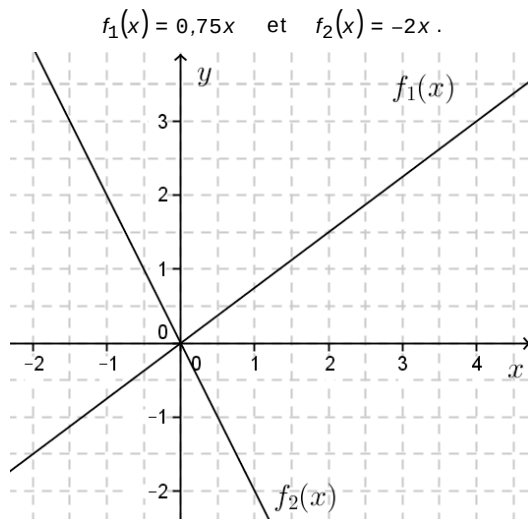


Exercice 9

$$f_1(x) = -1,25x + 3 \quad \text{et} \quad f_2(x) = -0,25x - 1.$$



Exercice 10



Exercice 11

f_1 est décroissante et f_2 est croissante.

Exercice 12

f_1 est croissante et f_2 est décroissante.

Exercice 13

$f_1(x) = 3x + 1$; $f_2(x) = -1,5x$; $f_3(x) = 4x$.
 f_1 est croissante ; f_2 est décroissante ; f_3 est croissante.

Exercice 14

$f_1(x) = -5x + 2$; $f_2(x) = -x + 3$; $f_3(x) = 2$.
 f_1 est décroissante ; f_2 est décroissante ; f_3 est constante.

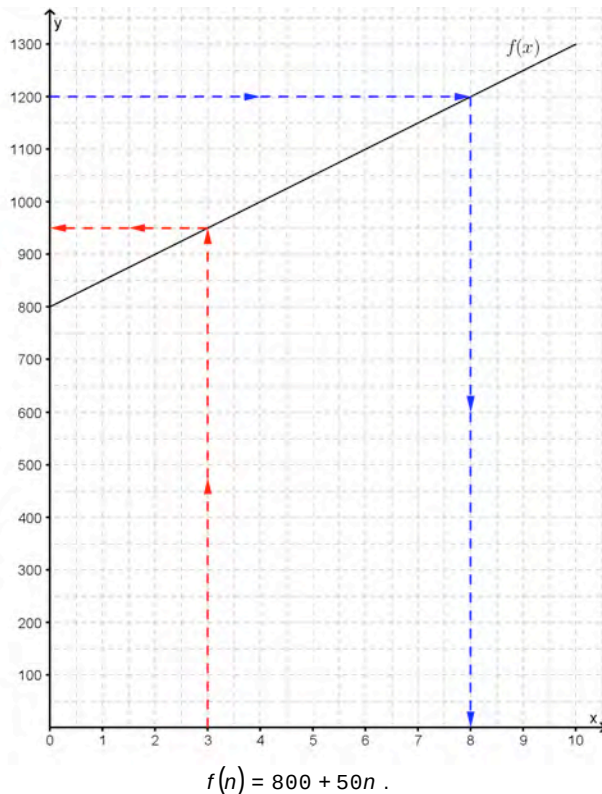
Exercice 15

$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 2$; $f_2(x) = -\frac{1}{4}x + 3$; $f_3(x) = \frac{1}{3}x + 1$.
 f_1 est croissante ; f_2 est décroissante ; f_3 est croissante.

Exercice 16

1.a. 2015 correspond à $n=5$; b. 2020 correspond à $n=10$.

2.



3.a. 2013 correspond à $n=3$, on lit graphiquement $f(3)$: la population en 2013 sera de 950 habitants.

b. L'antécédent de 1 200 est 8 et $n=8$ correspond à 2018 : il y aura 1 200 habitants en 2018.

Exercice 17

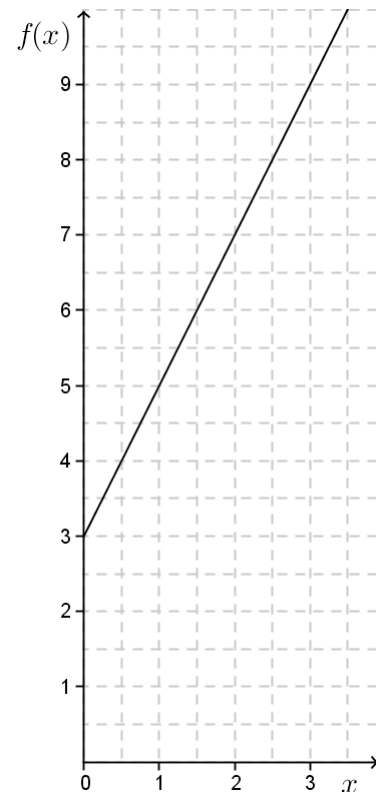
f est l'application qui à x fait correspondre le périmètre du triangle.

1. $AB+AC+BC=x+x+3=2x+3$; donc : $f(x)=2x+3$.

2.a. f est une application croissante.

b. Cela est cohérent avec la figure car, quand la valeur de x augmente, le contour de cette figure est plus long.

3.



Représentation graphique de f .

Activités d'application

Applications linéaires

Exercice 18

f est l'application linéaire définie par : $f(x) = -3,5x$.

1. a. $f(2) = -7$; b. $f(-4) = 14$;
c. $f(7) = -24,5$; d. $f(-10) = 35$.

2. a. L'antécédent de $-3,5$ par f est 1 ;
b. l'antécédent de $-10,5$ par f est 3 ;
c. l'antécédent de 21 par f est -6 ;
d. l'antécédent de 0 par f est 0 .

Exercice 19

f est l'application linéaire définie par : $f(x) = 4x$.

x	1	2	4	-4	5	16
$f(x)$	4	8	16	-16	20	64

Exercice 20

f est l'application linéaire telle que $f(2) = 3$.

1. $f(0) = 0$ donc $f(0) < f(2)$.
2. Une application linéaire ne pouvant être que croissante, décroissante ou constante, celle-ci est nécessairement croissante.

Exercice 21

Si f désigne une application linéaire, alors $f(0) = 0$;

- a. si $f(3) = -2$, alors $f(0) > f(3)$ et f est décroissante ;
b. si $f(5) = 1$, alors $f(0) < f(5)$ et f est croissante ;
c. si $f(-2) = -4$, alors $f(-2) < f(0)$ et f est croissante ;
d. si $f(-7) = 6$, alors $f(-7) > f(0)$ et f est décroissante.

Exercice 22

1. f est l'application linéaire telle que :
 $f(2) = -12$ et $f(7) = -42$.

a. $f(9) = f(2+7) = f(2) + f(7)$
 $= -12 + (-42) = -54$;

b. $f(8) = f(4 \times 2) = 4 \times f(2)$
 $= 4 \times (-12) = -48$;

c. $f(21) = f(3 \times 7) = 3 \times f(7)$
 $= 3 \times (-42) = -126$;

d. $f(29) = f(8+21) = f(8) + f(21)$
 $= -48 + (-126) = -174$.

2. g est l'application linéaire telle que :
 $g(15) = 66$ et $g(25) = 110$.

a. $176 = 66 + 110 = g(15) + g(25) = g(15+25) = g(40)$,
donc l'antécédent de 176 par g est 40 ;

b. $-66 = -1 \times 66 = -1 \times g(15) = g(-1 \times 15) = g(-15)$,
donc l'antécédent de -66 par g est -15 ;

c. $440 = 4 \times 110 = 4 \times g(25) = g(4 \times 25) = g(100)$,
donc l'antécédent de 440 par g est 100 ;

d. $374 = 440 + (-66) = g(100) + g(-15)$
 $= g(100 + (-15)) = g(85)$,
donc l'antécédent de 374 par g est 85 .

Exercice 23

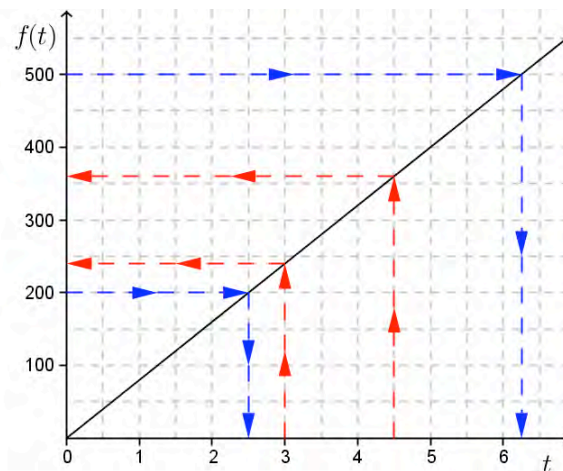
f est l'application linéaire telle que $f(6) = \sqrt{5}$.

- a. • $f(12) = f(2 \times 6) = 2 \times f(6) = 2\sqrt{5}$;
• $f(6\sqrt{5}) = \sqrt{5} \times f(6) = \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$.
b. • $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 2 \times f(6) = f(2 \times 6) = f(12)$,
donc l'antécédent de $\sqrt{20}$ par f est 12 ;
• $5\sqrt{5} = 5 \times f(6) = f(5 \times 6) = f(30)$,
donc l'antécédent de $5\sqrt{5}$ par f est 30 .

Exercice 24

1. a. La distance parcourue est égale au produit de la vitesse et du temps écoulé depuis le départ ;
donc : $f(t) = 80 \times t = 80t$.
b. $f(t)$ est de la forme ax , avec $a = 80$;
donc f est une application linéaire.

2.



Représentation graphique de f .

3. Déterminations graphiques :

- a. $f(3) = 240$ et $f(4,5) = 360$;
b. l'antécédent de 200 par f est $2,5$ et l'antécédent de 500 par f est $6,25$.
c. Interprétation des résultats précédents :
• la distance parcourue par le train en 3 h est de 240 km et celle parcourue en $4,5$ h (ou 4 h 30 min) est de 360 km ;
• le temps mis par le train pour effectuer 200 km est de $2,5$ h (ou 2 h 30 min) et celui mis pour effectuer 500 km est de $6,25$ h (ou 6 h 15 min).

Exercice 25

f est l'application qui à x associe le périmètre d'un triangle équilatéral ABC , de côté x cm.

1.a. $f(x) = x + x + x = 3x$.

b. $f(x)$ est de la forme ax , avec $a = 3$;
donc f est une application linéaire.

2.a. $f(1,5) = 3 \times 1,5 = 4,5$ et $f(6) = 3 \times 6 = 18$.

b. L'antécédent de 15 par f est 5 et l'antécédent de 33 par f est 11.

c. Interprétation des résultats précédents :

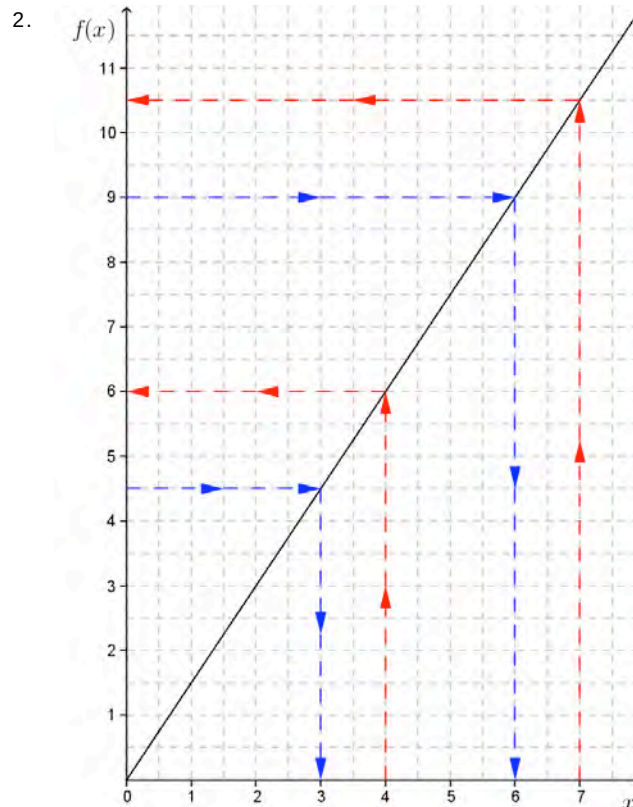
- le périmètre d'un triangle équilatéral, de côté 1,5 cm, est égal à 4,5 cm ; celui d'un triangle équilatéral, de côté 6 cm, est égal à 18 cm.
- un triangle équilatéral, de périmètre 15 cm, a ses côtés de longueur 5 cm ; celui, de périmètre 33 cm, a ses côtés de longueur 11 cm.

Exercice 26

Le débit d'une rivière a été mesuré à $1,5 \text{ m}^3/\text{s}$.

1.a. La quantité d'eau écoulee est égale au produit du débit et du temps d'écoulement ;
donc $f(t) = 1,5 \times t = 1,5t$.

b. $f(t)$ est de la forme ax , avec $a = 1,5$;
donc f est une application linéaire.



Représentation graphique de f .

3. Déterminations graphiques :

a. $f(4) = 6$ et $f(7) = 10,5$;

b. l'antécédent de 4,5 par f est 3 et l'antécédent de 9 par f est 6.

c. Interprétation des résultats précédents :

- la quantité d'eau écoulee en 4 h est de 6 m^3 et celle écoulee en 7 h est de $10,5 \text{ m}^3$.
- le temps d'écoulement de $4,5 \text{ m}^3$ est de 3 h et celui de 9 m^3 est de 6 h.

Exercice 27

1. La masse d'essence, contenue dans une cuve, est égale au produit de la masse volumique de l'essence par son volume. Or, d'après la pesée, la masse volumique de l'essence est égale à $0,75 \text{ kg/L}$.

Donc $f(V) = 0,75 \times V = 0,75V$.

2.a. $f(100) = 75$, $f(250) = 187,5$ et $f(800) = 600$.

b. Interprétation des résultats précédents :
une cuve de 100 L d'essence contient 75 kg d'essence,
une de 250 L en contient 187,5 kg et une de 800 L en contient 600 kg.

Applications affines

Exercice 28

f est l'application affine définie par $f : x \mapsto 3x - 4$.

1. a. $f(1) = -1$; b. $f(-2) = -10$;
c. $f(5) = 11$; d. $f(0) = -4$.
2. a. L'antécédent de 23 par f est 9 ;
b. l'antécédent de -16 par f est -4 ;
c. l'antécédent de 32 par f est 12 ;
d. l'antécédent de -19 par f est -5.

Exercice 29

f est l'application affine définie par $f : x \mapsto -2x + 3$.

x	0	-1	6	9	11	-29
$f(x)$	3	5	-9	-15	-19	61

Exercice 30

f est l'application affine définie par $f : x \mapsto \sqrt{2}x + 3$.

- a. • $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} + 3 = 5$;
• $f(\sqrt{18}) = \sqrt{2} \times \sqrt{18} + 3 = \sqrt{36} + 3 = 9$.
- b. • Résolution de l'équation : $\sqrt{2}x + 3 = 7$
 $\sqrt{2}x = 4$
 $x = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$,
donc l'antécédent de 7 par f est $2\sqrt{2}$;
• résolution de l'équation : $\sqrt{2}x + 3 = 13$
 $\sqrt{2}x = 10$
 $x = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$,
donc l'antécédent de 13 par f est $5\sqrt{2}$.

Exercice 31

f est l'application affine telle que $f(4) = 6$ et $f(7) = 3$.

1. On a : $f(4) > f(7)$.
2. Une application affine ne pouvant être que croissante, décroissante ou constante, celle-ci est nécessairement décroissante.

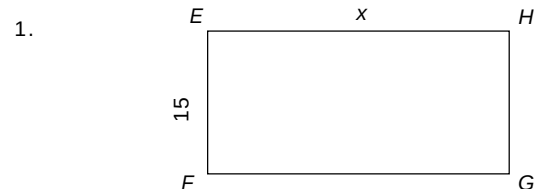
Exercice 32

f est une application affine.

- a. Si $f(3) = -2$ et $f(5) = -4$, alors $f(3) > f(5)$;
donc f est nécessairement décroissante ;
- b. si $f(-1) = 3$ et $f(0) = 4$, alors $f(-1) < f(0)$;
donc f est nécessairement croissante ;
- c. si $f(4) = 6$ et $f(0) = 2$, alors $f(4) > f(0)$;
donc f est nécessairement croissante ;
- d. si $f(-2) = 5$ et $f(-6) = -4$, alors $f(-2) > f(-6)$;
donc f est nécessairement croissante.

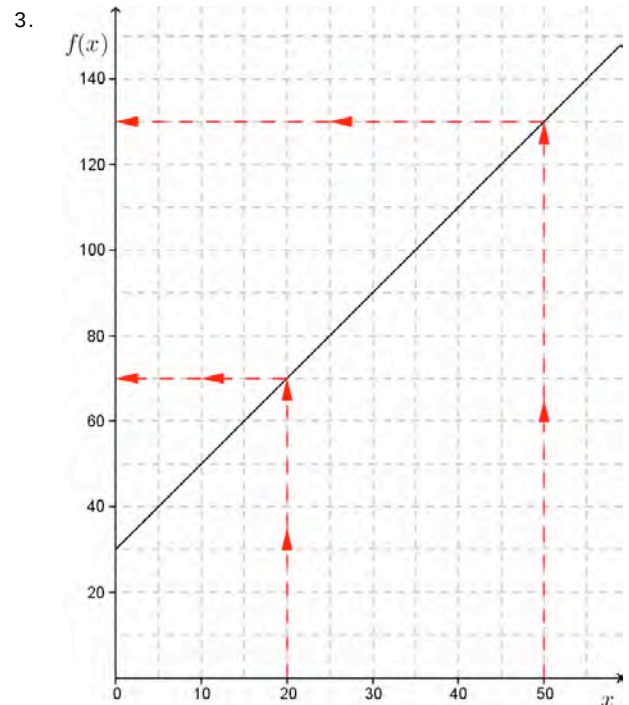
Exercice 33

$EFGH$ est un rectangle tel que $EF = 18$ mm et $FG = x$ mm.



2. Soit f l'application qui à x fait correspondre le périmètre, en mm, de $EFGH$.

On a : $f(x) = 2 \times (FG + EF) = 2 \times (x + 15) = 2x + 30$.



Représentation graphique de f .

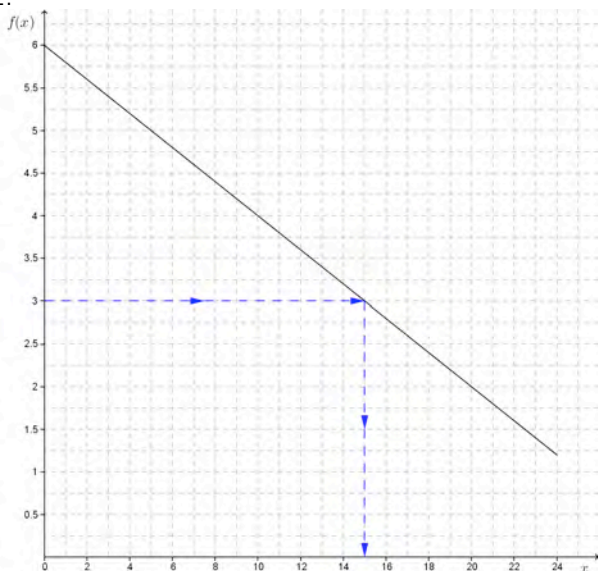
4. a. Déterminations graphiques :
 $f(20) = 70$ et $f(50) = 130$.
- b. • Vérifications par un calcul :
 $f(20) = 2 \times 20 + 30 = 70$ et $f(50) = 2 \times 50 + 30 = 130$;
• interprétation de ces résultats :
le périmètre d'un rectangle, de longueur 20 mm et de largeur 15 mm, est égal à 70 mm ;
le périmètre d'un rectangle, de longueur 50 mm et de largeur 15 mm, est égal à 130 mm.

Exercice 34

f est l'application définie par $f(h) = 6 - 0,2h$.

1. f est une application affine, dont le coefficient $(-0,2)$ est négatif ; cette application est donc décroissante. On en déduit que le bassin se vide.

2.



Représentation graphique de f .

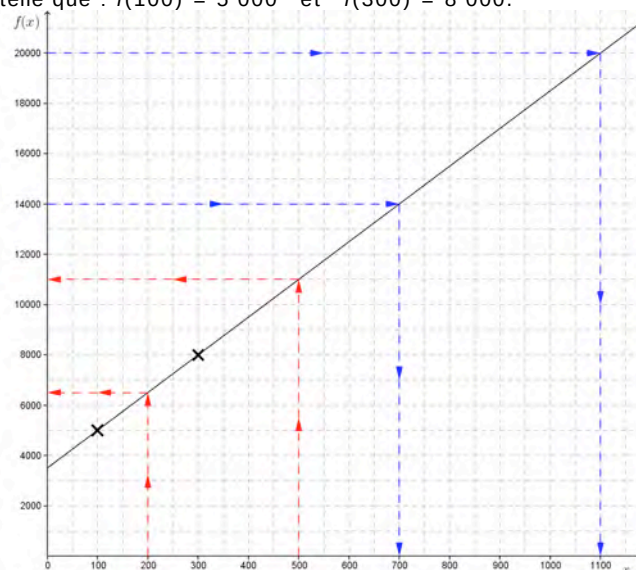
3.a. À la fin de la journée, le bassin ne sera pas vide car on lit sur le graphique que $h(24) > 0$.

b. Le bassin faisant 6 m de profondeur, il sera à moitié vide quand le niveau d'eau sera à 3 m ; on cherche donc un antécédent de 3 par f :

- détermination graphique : l'antécédent de 3 par f est 15 ; le bassin sera donc vidé de moitié à 15 h ;
- vérification par un calcul : $f(15) = 6 - 0,2 \times 15 = 3$.

Exercice 35

1.a.b. Représentation graphique de l'application affine f telle que : $f(100) = 5\,000$ et $f(300) = 8\,000$.



2. Déterminations graphiques :

a. $f(200) \approx 6\,500$ et $f(500) \approx 11\,000$; donc le coût de fabrication :
 • de 200 objets est d'environ 6 500 F CFA,
 • de 500 objets est de 11 000 F CFA ;

b. l'antécédent de 14 000 par f est 700 et l'antécédent de 20 000 par f vaut 1 100 ; donc on peut fabriquer :
 • environ 700 objets avec 14 000 F CFA,
 • environ 1 100 objets avec 20 000 F CFA.

Exercice 36

f application affine telle que : $f(2) = -1$ et $f(6) = 7$.

1. Si $f(x) = ax + b$, alors $\begin{cases} f(2) = -1 \\ f(6) = 7 \end{cases}$,
 c'est-à-dire $\begin{cases} 2a + b = -1 \\ 6a + b = 7 \end{cases}$.

2. On soustrait ces deux lignes, on obtient alors :

$$\begin{aligned} 2a - 6a &= -1 - 7 \\ -4a &= -8 \\ a &= 2 ; \end{aligned}$$

on remplace a par 2 dans la première équation :

$$\begin{aligned} 2 \times 2 + b &= -1 \\ b &= -5. \end{aligned}$$

La solution de ce système est $(2 ; -5)$ et $f(x) = 2x - 5$.

Exercice 37

f application affine telle que : $f(1) = -2$ et $f(4) = -11$.

1. Si $f(x) = ax + b$, alors $\begin{cases} f(1) = -2 \\ f(4) = -11 \end{cases}$,
 c'est-à-dire $\begin{cases} a + b = -2 \\ 4a + b = -11 \end{cases}$.

2. On soustrait ces deux lignes, on obtient alors :

$$\begin{aligned} a - 4a &= -2 - (-11) \\ -3a &= 9 \\ a &= -3 ; \end{aligned}$$

on remplace a par -3 dans la première équation :

$$\begin{aligned} -3 + b &= -2 \\ b &= 2. \end{aligned}$$

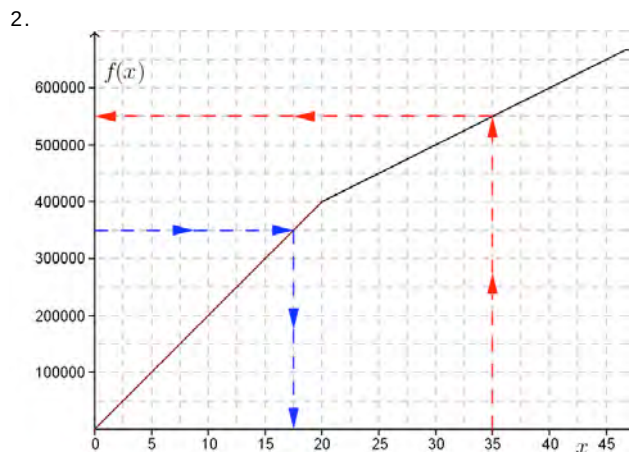
La solution du système est $(-3 ; 2)$ et $f(x) = -3x + 2$.

Applications affines par morceaux

Exercice 38

1.

Quantité (en t)	5	10	15	20	30	40
Prix (en millier de F CFA)	100	200	300	400	500	600



Représentation graphique

3. Déterminations graphiques :

- du prix d'une commande de 35 t : 550 000 F CFA (c'est l'image de 35) ;
- de la quantité correspondant à 350 000 F CFA : 17,5 t (c'est l'antécédent de 350 000).

Bien comprendre, mieux rédiger

Exercice 40 Vocabulaire

f et g sont les applications définies par :

$$f : x \mapsto 3x + 2 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto -5x.$$

- $f(4) = 3 \times 4 + 2 = 14$ et $g(7) = -5 \times 7 = -35$.
- a. L'application f est une application *affine*.
b. L'application g est une application *linéaire* et aussi une application *affine*.
c. 14 est l'*image* de 4 par l'application f .
d. 4 est l'*antécédent* de 14 par l'application f .
e. L'*image* de 7 par l'application g vaut -35.
f. L'*antécédent* de -35 par l'application g est 7.

Exercice 41 Situations concrètes

La situation ☐ correspond à l'application
 $h : x \mapsto 200 - 60x$;

la situation ☐ correspond à l'application
 $g : x \mapsto 200 + 60x$;

la situation ☐ correspond à l'application
 $f : x \mapsto 60x$.

Exercice 39

- a. 20 minutes après son départ, Charline se trouvait à 2 km de son village (c'est l'image de 20).
b. Pour parcourir 3 km, Charline a mis 30 min (c'est le premier antécédent de 3).
- a. Le moment où Charline a dû rebrousser chemin correspond à l'abscisse du point à partir duquel la fonction devient décroissante. Graphiquement, on lit que ce moment est arrivé 40 min après son départ.
b. Le moment où Charline est repartie vers le village voisin correspond à l'abscisse du point à partir duquel la fonction redevient croissante. Graphiquement, on lit que ce moment est arrivé 60 min après son départ.
- Pour arriver au village voisin, Charline a finalement mis 80 min (c'est l'antécédent de 6).

Exercice 42 Reconnaître graphiquement

La droite (d_1) est la représentation graphique de l'application $k : x \mapsto 0,5x + 2$;

la droite (d_2) est la représentation graphique de l'application $g : x \mapsto 0,5x - 1$;

la droite (d_3) est la représentation graphique de l'application $h : x \mapsto 1,5x$;

la droite (d_4) est la représentation graphique de l'application $f : x \mapsto -x + 2$.

Exercice 43 Bien comprendre des propriétés

f est une application linéaire.

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$; • $f(ku) = k \times f(u)$.
- On sait que $f(3) = -2$ et $f(-6) = 4$.

x	-3	6	30	24	-12	12
$f(x)$	2	-4	-20	-16	8	-8

Exercice 44 Procéder dans le bon sens

1.a. Jean a repéré le nombre 3 sur l'axe des abscisses. Il a ensuite repéré le point de la représentation graphique ayant même abscisse puis a lu l'ordonnée de ce point.

b. *Erreur commise :*

Jean n'a pas repéré le nombre 3 sur le bon axe.

Bonne réponse :

il aurait dû repérer le nombre 3 sur l'axe des ordonnées, puis lire graphiquement l'antécédent de 3 par f , qui est 4.

c. Jean aurait bien répondu si la question posée avait été « Détermine graphiquement l'image de 3 par f ».

2.a. L'image de 5 par f est 4 ;

b. l'antécédent de 5 par f est 6.

Exercice 45 Sens de variation

1. Le coefficient a de f vaut $5 > 0$;
donc f est croissante.

Le coefficient a de g vaut $-5 < 0$;
donc g est décroissante.

2. La droite (d) bleue est la représentation graphique d'une application croissante.
C'est donc celle de l'application f .

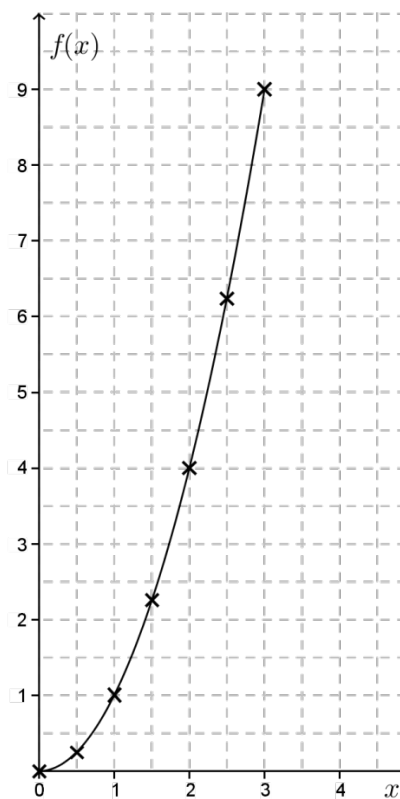
La droite (Δ) rouge est la représentation graphique d'une application décroissante.
C'est donc celle de l'application g .

Exercice 46 Ni affine, ni linéaire

1. Aire d'un carré de côté x : $\mathcal{A}(x) = x^2$.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\mathcal{A}(x)$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

3.

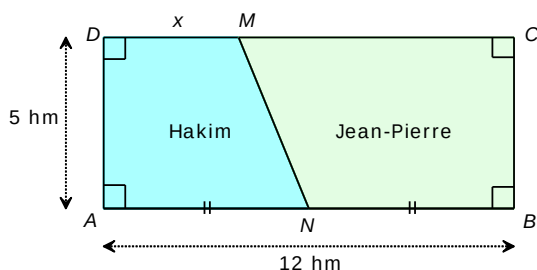


Représentation graphique

4. L'application, qui à x fait correspondre $\mathcal{A}(x)$, n'est ni linéaire, ni affine, car les points ne sont pas alignés.

Exercices d'approfondissement

Exercice 47 Partage de terrain



1. Aire de rectangle $ABCD$: $5 \times 12 = 60 \text{ hm}^2$.

Donc l'aire du terrain de Hakim sera de $\frac{60}{3} = 20 \text{ hm}^2$.

2. Le terrain $ADMN$ de Hakim est un trapèze rectangle de bases $[AN]$ et $[DM]$, de hauteur $[AD]$;

N étant le milieu de $[AB]$, $AN = 6 \text{ hm}$; posons $DM = x$.

a. L'aire de $ADMN$ est : $\frac{AN + DM}{2} \times AD$
c'est-à-dire : $f(x) = \frac{5(6 + x)}{2}$.

b. $f(x) = \frac{30 + 5x}{2} = 2,5x + 15$; f est une application affine.

3.a. $f(x) = 20$
 $2,5x + 15 = 20$
 $2,5x = 5$
 $x = 2$;

donc l'antécédent de 20 par f est 2.

b. Pour réaliser le partage attendu, placer le point M à 2 hm du point D sur $[DC]$.

Exercice 48 Augmentation et diminution

1. Les prix d'un magasin augmentent de 10%.

a.	Ancien prix (en F CFA)	100	200	500	1 000
	Nouveau prix (en F CFA)	110	220	550	1 100

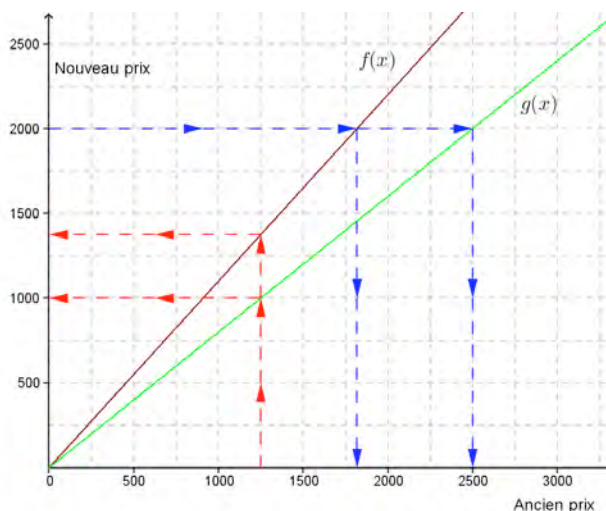
b. L'application f , qui à un ancien prix x fait correspondre le nouveau prix $f(x)$, est définie par :

$$f(x) = x + x \times 10\% = 1,1x.$$

2. Les prix d'un autre magasin diminuent de 20%.

L'application g , qui à un ancien prix x fait correspondre le nouveau prix $g(x)$, est définie par :

$$g(x) = x - x \times 20\% = 0,8x.$$



Représentation graphique des applications f et g .

4.a. Si le coût initial d'un article est de 1 250 F CFA :

lecture graphique de son nouveau prix :

- 1^{er} magasin : $\approx 1\,375$ F CFA,
- 2^e magasin : 1 000 F CFA ;

calcul de son nouveau prix :

- 1^{er} magasin : $f(1\,250) = 1,1 \times 1\,250 = 1\,375$ F CFA,
- 2^e magasin : $g(1\,250) = 0,8 \times 1\,250 = 1\,000$ F CFA.

b. Si le nouveau prix d'un article est de 2 000 F CFA :

lecture graphique de son coût initial :

- 1^{er} magasin : $\approx 1\,800$ F CFA,
- 2^e magasin : 2 500 F CFA ;

calcul de son coût initial x :

- 1^{er} magasin : on résout $f(x) = 2\,000$
 $1,1x = 2\,000$
 $x \approx 1\,818$ F CFA,
- 2^e magasin : on résout $g(x) = 2\,000$
 $0,8x = 2\,000$
 $x = 2\,500$ F CFA.

Exercice 49 Changements de températures

1. $86 - 32 = 54$, $54 \times 5 = 270$ et $270 \div 9 = 30$.

Donc une température de 86°F correspond bien à une température de 30°C .

2. On note f l'application qui à une température x , en degrés Fahrenheit ($^\circ\text{F}$), fait correspondre cette température en degrés Celsius ($^\circ\text{C}$).

Expression de $f(x)$ en fonction de x :

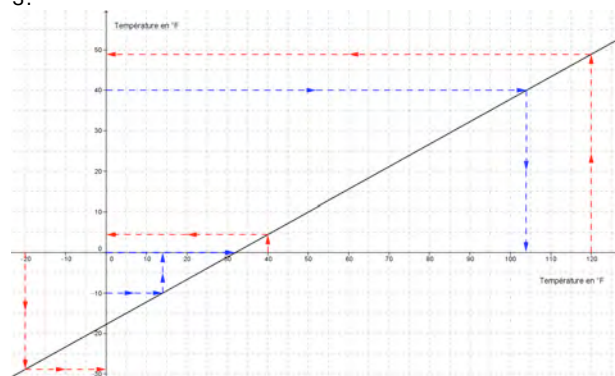
on soustrait 32 : $x - 32$

on multiplie par 5 : $5(x - 32) = 5x - 160$

on divise par 9 : $\frac{5x - 160}{9} = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$;

$$\text{donc : } f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}.$$

3.



Représentation graphique de l'application f

4. Détermination graphique de conversions :

- a. -20°F , 40°F et 120°F correspondent respectivement à $\approx -29^\circ\text{C}$, $\approx 4^\circ\text{C}$ et $\approx 49^\circ\text{C}$;
- b. -10°C , 0°C et 40°C correspondent respectivement à $\approx 14^\circ\text{F}$, $\approx 32^\circ\text{F}$ et $\approx 104^\circ\text{F}$.

5. Détermination des mêmes conversions par calculs :

$$\begin{aligned} \text{a. } \bullet f(-20) &= \frac{5}{9} \times (-20) - \frac{160}{9} = -\frac{260}{9} \approx -29, \\ \text{donc : } -20^\circ\text{F} &\approx -29^\circ\text{C} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(40) &= \frac{5}{9} \times (40) - \frac{160}{9} = \frac{40}{9} \approx 4, \\ \text{donc : } 40^\circ\text{F} &\approx 4^\circ\text{C} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(120) &= \frac{5}{9} \times (120) - \frac{160}{9} = \frac{440}{9} \approx 49, \\ \text{donc : } 120^\circ\text{F} &\approx 49^\circ\text{C} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \bullet f(x) = -10 &\text{ équivaut à } \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = -10 \\ 5x - 160 &= -90 \\ 5x &= 70 \\ x &= 14, \\ \text{donc : } -10^\circ\text{C} &= 14^\circ\text{F} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(x) = 0 &\text{ équivaut à } \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = 0 \\ 5x - 160 &= 0 \\ 5x &= 160 \\ x &= 32, \\ \text{donc : } 0^\circ\text{C} &= 32^\circ\text{F} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f(x) = 40 &\text{ équivaut à } \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = 40 \\ 5x - 160 &= 360 \\ 5x &= 520 \\ x &= 104, \\ \text{donc : } 40^\circ\text{C} &= 104^\circ\text{F} ; \end{aligned}$$

Exercice 50 Voyage Yaoundé - Kribi

1.a. Coût de x voyages par la formule 1 :

$$Y_1 = 2\,500x.$$

b. Coût de x voyages par la formule 2 :

$$Y_2 = 1\,500x + 10\,000.$$

2. f et g sont les applications affines définies par :

$$f(x) = 2\,500x \text{ et } g(x) = 1\,500x + 10\,000.$$

$$f(0) = 2\,500 \times 0 = 0 ;$$

$$g(0) = 1\,500 \times 0 + 10\,000 = 10\,000 ;$$

$$f(4) = 2\,500 \times 4 = 10\,000 ;$$

$$g(6) = 1\,500 \times 6 + 10\,000 = 19\,000.$$

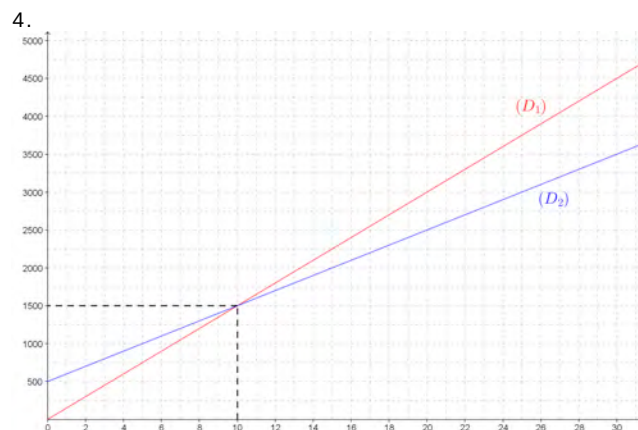
Exercice 51 Animaux de labour

1.	Nombre de jours de location	9	17	30
	Montant de la location avec un âne	1 350	2 550	4 500
	Montant de la location avec un bœuf	1 400	2 200	3 500
	Montant de la location avec un cheval	3 000	3 000	3 000

2. Pour 9 jours, il est plus avantageux de louer un âne ;
pour 17 jours, il est plus avantageux de louer un bœuf ;
pour 30 jours, il est plus avantageux de louer un cheval.

3.a. $y_A = 150x$; $y_B = 100x + 500$; $y_C = 3\,000$.

b. y_C est toujours égal à 3 000.



(D_1) et (D_2) sont les droites d'équations respectives :
 $y = 150x$ et $y = 100x + 500$.

5. Le nombre de jours, où les locations d'un âne et d'un bœuf reviennent au même coût, est l'abscisse du point d'intersection de (D_1) et (D_2) :

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 150x &= 100x + 500 \\ 50x &= 500 \\ x &= 10. \end{aligned}$$

Donc un âne et un bœuf reviennent au même coût pour 10 jours de location.

Exercice 52 Choisir sa formule

1. Coûts de la location d'une voiture pour effectuer un trajet de 60 km :

formule A : $100 \times 60 + 15\,000 = 6\,000 + 15\,000 = 21\,000$ F CFA ;

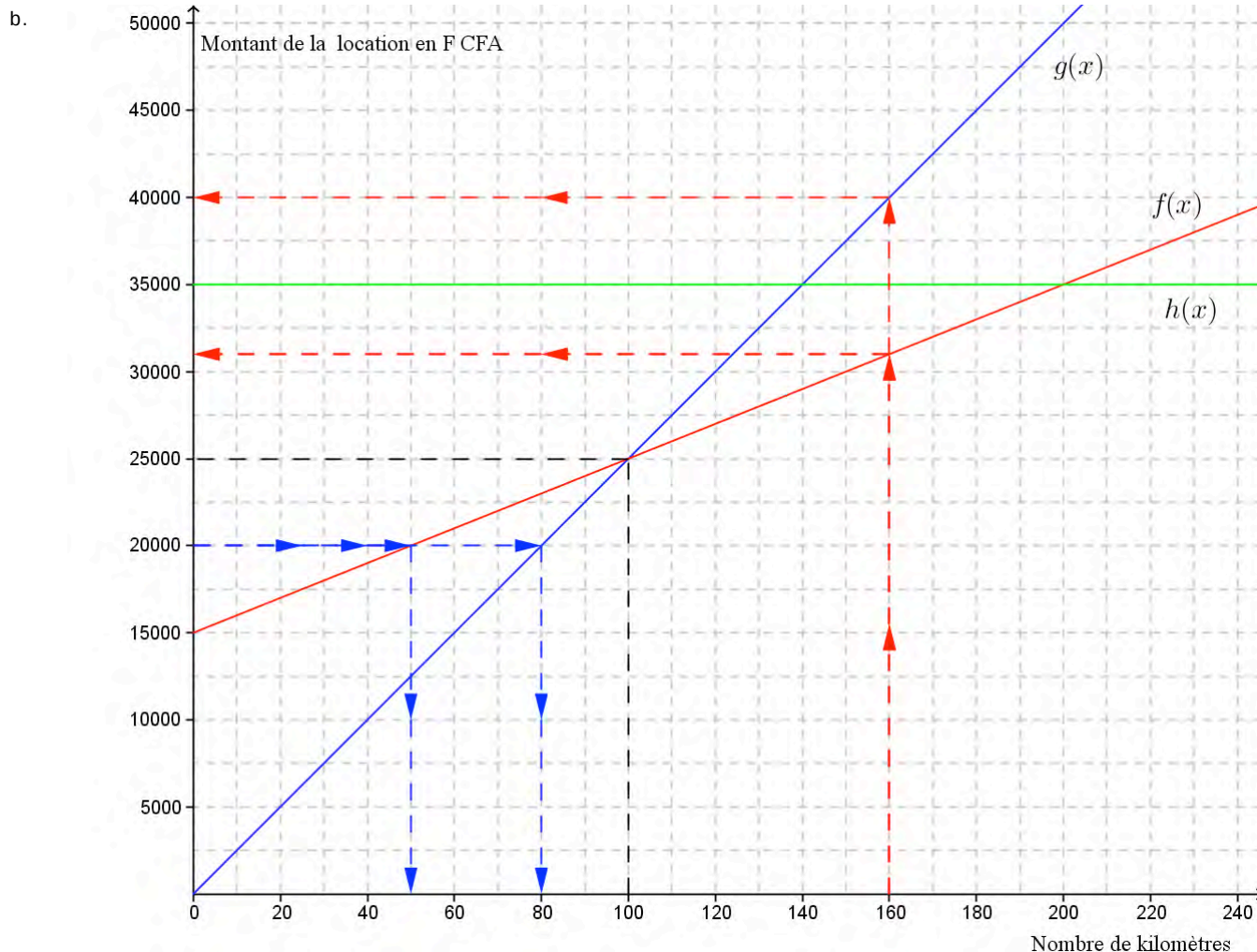
formule B : $250 \times 60 = 15\,000$ F CFA ;

formule C : 35 000 F CFA (ne dépend pas du nombre de kilomètres parcourus).

2.a. Formule A : $f(x) = 100x + 15\,000$;

formule B : $g(x) = 250x$;

formule C : $h(x) = 35\,000$.



Représentations graphiques des applications f , g et h .

3. Lectures graphiques :

a. la formule A est la plus avantageuse pour un trajet de 160 km ;

prix alors payé : $f(160) = 100 \times 160 + 15\,000 = 16\,000 + 15\,000 = 31\,000$ F CFA ;

b. la formule B permet de parcourir le plus grand nombre de kilomètres, avec un budget de 20 000 F CFA ;

on résout $g(x) = 20\,000$

$$250x = 20\,000$$

$$x = 80 ;$$

on pourra alors parcourir 80 km.

4.a. Les représentations graphiques des applications f et g se croisent au point d'abscisse 100 ; pour un trajet de 100 km, on a donc le choix entre les deux formules A et B, qui coûtent autant.

b. $f(100) = 100 \times 100 + 15\,000 = 10\,000 + 15\,000 = 25\,000$ et $g(100) = 250 \times 100 = 25\,000$; pour un trajet de 100 km, le coût des formules A et B est bien identique (25 000 F CFA).

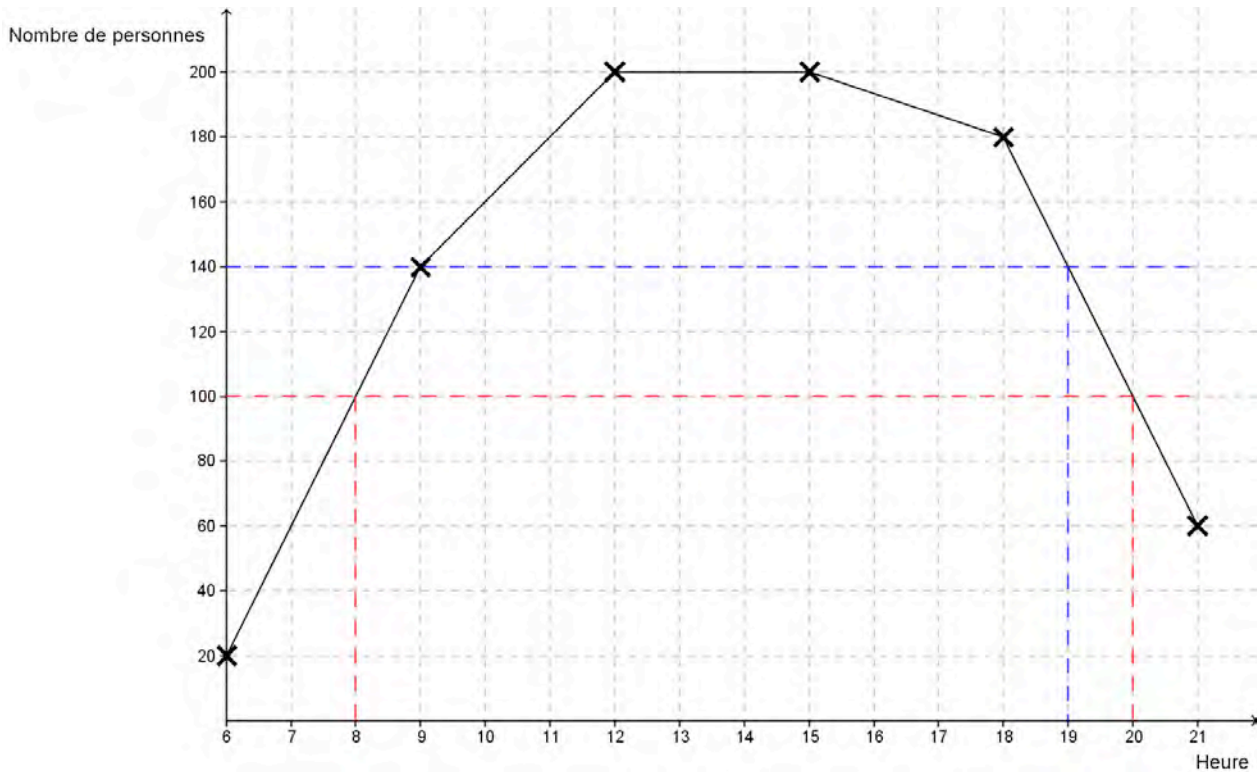
5. Lectures graphiques :

- pour un trajet de moins de 100 km, la formule B est la plus avantageuse ;
- pour un trajet compris entre 100 km et 200 km, la formule A est la plus avantageuse ;
- pour un trajet de plus de 200 km, la formule C est la plus avantageuse.

Exercice 53 Gestion de flux

Heure de la journée	6 h	9 h	15 h	15 h	18 h	21 h
Nombre de personnes présentes dans l'aéroport	20	140	200	200	180	60

1.a. Représentation des points correspondant aux données ci-dessus :



b. En joignant les points successifs à la règle, on obtient une indication sur l'évolution, en fonction de l'heure, du nombre de personnes présentes dans l'aéroport.

2.a. Le nombre de personnes présentes dans l'aéroport augmente entre 6 h et 12 h ;

b. le nombre de personnes présentes dans l'aéroport diminue entre 15 h et 21 h ;

c. le nombre de personnes présentes dans l'aéroport est stable entre 12 h et 15 h.

3. Le nombre de personnes présentes dans l'aéroport est supérieur à 100 entre 8 h et 20 h.

4. En fin de journée, le nombre de personnes présentes dans l'aéroport est inférieur à 140 à partir de 19 h (jusqu'à 21 h).

Activités de découverte	Cours Méthodes et savoir-faire	Application	Bien comprendre Mieux rédiger	Approfondissement
1	Vocabulaire statistique	1, 2, 3, 4, 6, 11	16, 17	19, 20, 21, 22, 23, 25
1	Calculer des fréquences en écriture fractionnaire, en pourcentages	3, 4, 7, 8, 14	15, 18	21, 23, 24, 26
Pour démarrer 1	Calculer une moyenne et l'interpréter	7, 8, 9		20, 21, 24, 27
Pour démarrer	Lire un diagramme statistique	5, 6, 11, 12, 14	15, 18	20, 21, 24
1	Représenter un diagramme circulaire ou semi-circulaire		18	19, 23
2	Ranger des données statistiques en classes	1, 2, 3, 4, 13	18	19, 20, 26, 27
2	Représenter un histogramme	1, 2, 3, 4, 13, 14	15, 16, 18	19, 20, 25, 26, 27

*Les caractères gras signalent des pages ou des exercices de Méthodes et savoir-faire.

Pour démarrer

Parc national de Waza

1. a. C'est lors de la 8^e journée qu'il a aperçu le plus de lion.
- b. Durant ces dix dernières journées, il a aperçu 40 éléphants.
- c. Durant ces dix dernières journées, il a aperçu 46 lions. Donc il a aperçu plus de lions.

2. Nombre moyen de lions aperçus lors de ces dix journées : $m_l = \frac{3 + 7 + 2 + 6 + 5 + 1 + 8 + 9 + 2 + 3}{10} = 4,6.$

Nombre moyen d'éléphants aperçus lors de ces dix journées : $m_e = \frac{1 + 5 + 4 + 9 + 2 + 5 + 5 + 9}{10} = 4.$

3. a. $\frac{5}{10} \times 100 = 50\%$. Il a aperçu plus de 3 lions durant 50% de ces 10 journées.

b. $\frac{5}{10} \times 100 = 50\%$. Il a aperçu moins de 5 éléphants durant 50% de ces 10 journées.

Activités de découverte

1 Vocabulaire et diagramme semi-circulaire (rappel)

- Le caractère étudié est le nombre de buts par match.
- Les valeurs prises par le caractère sont 0, 1, 2 et 3.
- L'effectif correspondant à la valeur 2 est 15.
- L'effectif total est : $8+10+15+7 = 40$. Cela signifie que Samy a joué 40 matchs.

Nombre de buts marqués	0	1	2	3	Total
Nombre de matchs	8	10	15	7	40
Fréquence (écriture fractionnaire)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{40}$	1
Fréquence (en pourcentage)	20	25	37,5	17,5	100

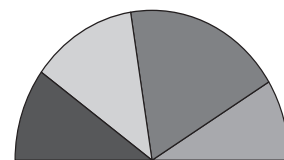
2. a. $m = \frac{8 \times 0 + 10 \times 1 + 15 \times 2 + 7 \times 3}{40} = \frac{61}{40} = 1,525$.

b. Durant ces 40 matchs, Samy a marqué (en moyenne) 1,525 but par match.

3. a. Le coefficient de proportionnalité est $\frac{180}{100} = 1,8$.

Nombre de buts marqués	0	1	2	3	Total
Nombre de matchs	20	25	37,5	17,5	100
Fréquence (en pourcentage)	36	45	67,5	31,5	180

b.



■ 0 but marqué □ 1 but marqué
■ 2 buts marqués ■ 3 buts marqués

2 Regroupement en classes et histogramme

1. a. 10 exploitations agricoles ont une superficie inférieure à 3 ha.

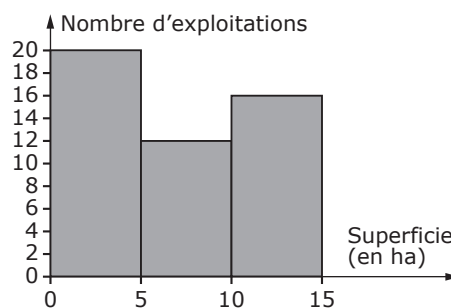
Superficie (en ha)	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15]
Nombre d'exploitations	10	12	9	6	11

2. a.



b.

Superficie (en ha)	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15]
Nombre d'exploitations	20	12	16



1 Apprendre à construire et à interpréter un histogramme

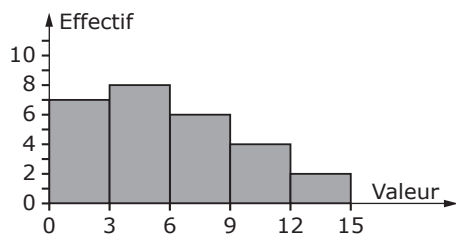
Exercice 1

1. a.

Classe	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[
Effectif	7	8	6	4	2

b. La classe modale est [3 ; 6[.

2.



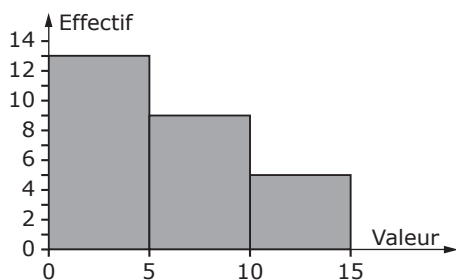
Exercice 2

1. a.

Classe	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[12 ; 15[
Effectif	13	9	5

b. La classe modale est [0 ; 5[.

2.



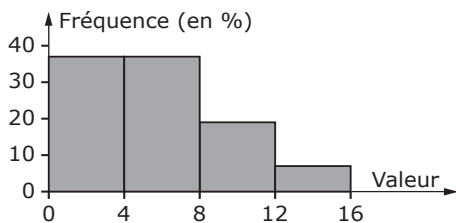
Exercice 3

1. a.

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[
Fréquence (en %)	37	37	19	7

b. Les classes modales sont [0 ; 4[et [4 ; 8[.

2.



Exercice 4

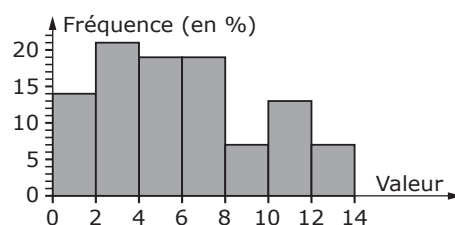
1. a.

Classe	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[
Fréquence (en %)	15	22	19	19

Classe	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 14[
Fréquence (en %)	7	11	7

b. La classe modale est [2 ; 4[.

2.



Exercice 5

a. L'étude a été menée sur 20 jours.

b. $\frac{14}{20} \times 100 = 70$.

70% de ses trajets ont duré moins de 40 min.

Exercice 6

a. $100 - (10 + 20 + 15 + 25) = 30$.

30% des poissons pèsent entre 2 et 3 kg.

b. La classe modale est [2 ; 3[.

Activités d'application

Moyenne – Fréquence

Exercice 7

$$m = \frac{3+7+8+1+2+4+3+7+4+2}{10} = 4,1.$$

Exercice 8

$$a. m = \frac{73+75+77+78}{4} = 75,75.$$

b. En moyenne, entre 2008 et 2011, 75,75% de la population camerounaise a un accès à l'eau traitée.

Exercice 9

$$m = \frac{5 \times 10 + 25 \times 20 + 30 \times 30 + 15 \times 40 + 5 \times 50}{80} = 28,75.$$

Valeur	10	20	30	40	50	Total
Effectif	5	25	30	15	5	80
Fréquence (en fraction)	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1
Fréquence (en %)	6,25	31,25	18,75	18,75	6,25	100

Regroupement en classes – Histogramme

Exercice 11

1. Cette enquête a porté sur 40 jours.

2.a. La classe modale est $[80 ; 100[$; son effectif est de 11 jours.

b. $6+1+3 = 10$; il y a eu au moins 100 visiteurs par jour durant 10 jours.

Exercice 12

a. Faux, elle a porté sur 27 jours.

b. Vrai, $[4 ; 5[$ est la classe modale.

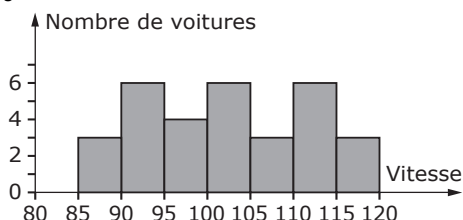
c. Vrai, $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$.

Exercice 13

1.a.	Vitesse (en km/h)	$[80 ; 85[$	$[85 ; 90[$	$[90 ; 95[$	$[95 ; 100[$
	Nombre de voitures	0	3	5	4

	Vitesse (en km/h)	$[100 ; 105[$	$[105 ; 110[$	$[110 ; 115[$	$[115 ; 120[$
	Nombre de voitures	6	3	6	3

b. Histogramme associé :



Exercice 10

$$1. m = \frac{13 \times 0 + 10 \times 1 + 7 \times 2 + 6 \times 3 + 2 \times 4}{38} = \frac{50}{38} \approx 1,32.$$

Durant cette saison, Lionel Messi a marqué environ 1,32 buts par match.

2.a. $\frac{23}{38} \times 100 \approx 61$; Lionel Messi a marqué moins de 2 buts lors de 61% des matches.

b. $\frac{8}{38} \times 100 \approx 21$; Lionel Messi a marqué au moins 3 buts lors de 21% des matches.

c. $\frac{2}{38} \times 100 \approx 5$; Lionel Messi a marqué plus de 3 buts lors de 5% des matches.

2.a. 9 voitures étaient en excès de vitesse.

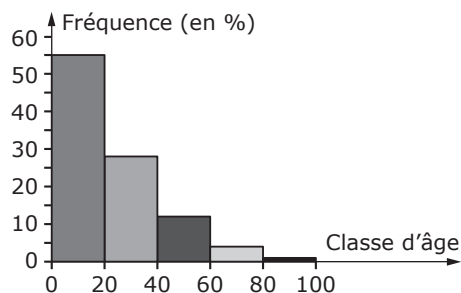
b. $\frac{9}{30} \times 100 = 30$; 30% des véhicules étaient en excès de vitesse.

Exercice 14

a. et b.

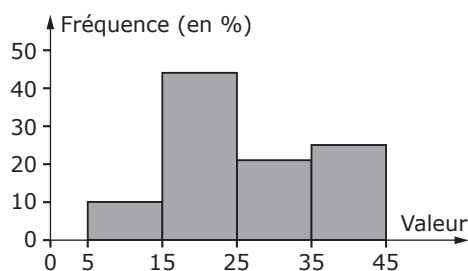
Classe d'âge	$[0 ; 20[$	$[20 ; 40[$	$[40 ; 60[$	$[60 ; 80[$	$[80 ; 100[$	Total
Mesure de l'angle	197	102	43	15	3	360
Fréquence (en %)	55	28	12	4	1	100

c.

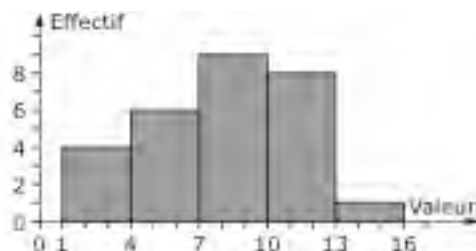


Exercice 15 Vérifier ses calculs

Classe	[5 ; 15[	[15 ; 25[	[25 ; 35[	[35 ; 45[
Fréquence (en %)	10	45	20	25

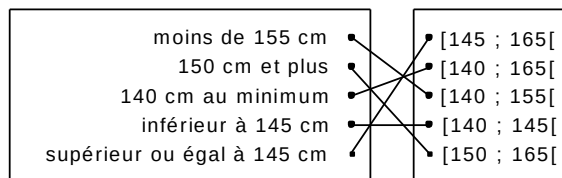


Exercice 16 Construire un exemple



Exercice 17 Plus de..., moins de ...

1. Expression Intervalle



2.a. $\frac{14}{40} \times 100 = 35$; donc 35% des élèves de cette classe mesurent moins de 150 cm.

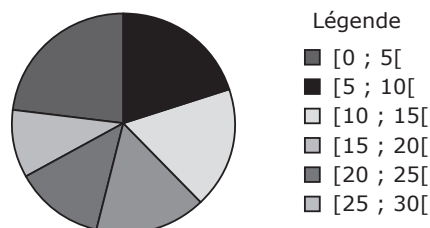
b. $\frac{13}{40} \times 100 = 32,5$; donc 32,5% des élèves de cette classe sont de taille supérieure ou égale à 155 cm.

Exercice 18 D'un graphique à un autre

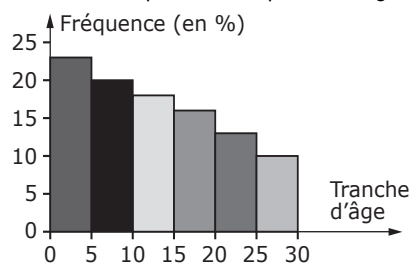
Tranche d'âge	Nombre de pers.(en milliers)	Fréquence (en %)	Mesure (en degrés)
[0 ; 5[	2 464	23	83
[5 ; 10[	2 154	20	72
[10 ; 15[	1 969	18	65
[15 ; 20[	1 704	16	57
[20 ; 25[	1 430	13	47
[25 ; 30[	1 150	10	36
Total	10 871	100	360

- 2.a. • La colonne 4 est utile pour construire le diagramme circulaire ;
 • la colonne 3 est utile pour construire l'histogramme des fréquences en pourcentage.

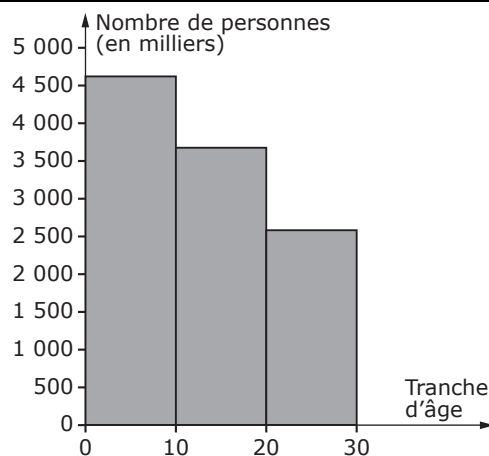
- b. • Diagramme circulaire



- Histogramme des fréquences en pourcentage



Tranche d'âge	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[
Nombre de pers. (en milliers)	4 618	3 673	2 580



Exercices d'approfondissement

Exercice 19 Capitales africaines

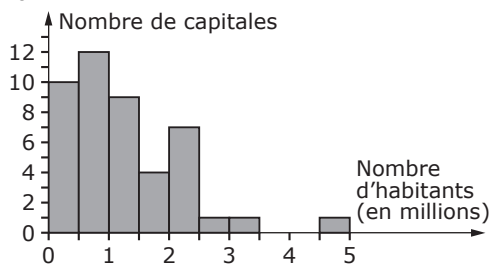
1. a. 45 capitales sont concernées.

Nombre d'habitants (en millions)	[0 ; 0,5[	[0,5 ; 1[	[1 ; 1,5[	[1,5 ; 2[	[2 ; 2,5[
Nombre de capitales	10	12	9	4	6

Nombre d'habitants (en millions)	[2,5 ; 3[	[3 ; 3,5[	[3,5 ; 4[	[4 ; 4,5[	[4,5 ; 5[
Nombre de capitales	2	1	0	0	1

c. La classe modale est [0,5 ; 1[.

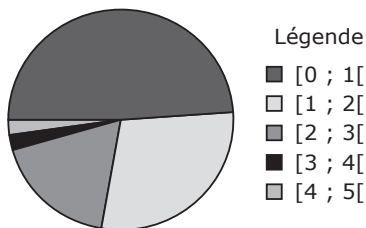
d. Histogramme associé :



2.a.

Nombre d'habitants (en millions)	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[	Total
Nombre de capitales	22	13	8	1	1	45
Mesure (en degrés)	176	104	64	8	8	360

b. Diagramme circulaire associé :



Exercice 20 Morceaux de musique

1. a. Le baladeur de la jeune fille contient 25 morceaux de musique.

b. La classe modale est [210 ; 240[. Elle contient 9 morceaux de musique, c'est-à-dire 36% des morceaux.

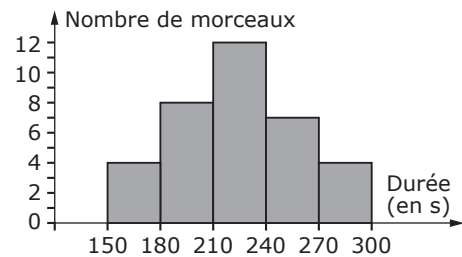
2.a.

$$m = \frac{2 \times 160 + 2 \times 180 + 2 \times 210 + 1 \times 230 + 2 \times 255 + 1 \times 280}{10}$$

$$m = \frac{2120}{10} = 212 \text{ s.}$$

La durée moyenne de ces morceaux est de 212 s.

Durée (en s)	[150 ; 180[	[180 ; 210[	[210 ; 240[	[240 ; 270[	[270 ; 300[
Nombre de morceaux	4	8	12	7	4

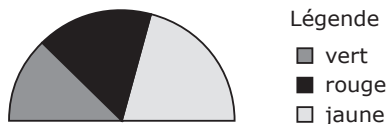


Exercice 21 Les tenues de sport

1. Le caractère étudié est la couleur de la tenue de sport.

Couleur	VERT	ROUGE	JAUNE	Total
Angle	45°	60°	75°	180°
Effectif	225	300	375	900

3.



Exercice 22 Récolte de café

1. 100 (= 14+18+12+16+30+10) planteurs ont été interrogés.

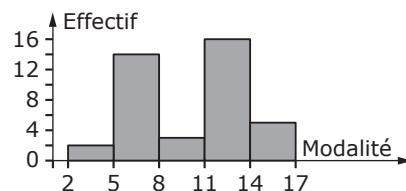
Classe	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[
Effectif	14	18	12	16	30	10
Fréquence (en %)	14	18	12	16	30	10

3. $14+18+12+16 = 60$; donc 60 planteurs ont récolté moins de 40 tonnes de café.

Exercice 23 Grande consommation de cahiers

1. La classe modale est [11 ; 14[.

2.



3. • Cette classe compte 40 élèves.

• $2+14+3 = 19$; donc 19 élèves ont utilisé moins de 11 cahiers.

Activités d'intégration

Exercice 26 Espérance de vie

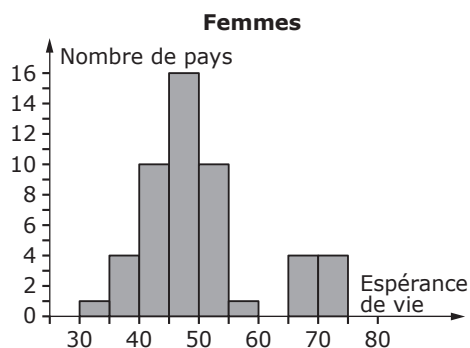
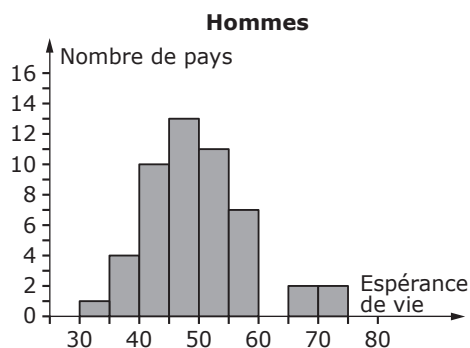
1.a. Hommes :

Espérance de vie	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	[60 ; 65[	[65 ; 70[	[70 ; 75[	[75 ; 80[	Total
Nombre de pays	1	4	10	13	11	7	0	2	2	0	50
Fréquence (en %)	2	8	20	26	22	14	0	4	4	0	100

Femmes :

Espérance de vie	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	[60 ; 65[	[65 ; 70[	[70 ; 75[	[75 ; 80[	Total
Nombre de pays	1	4	10	4	16	10	1	0	2	2	50
Fréquence (en %)	2	8	20	8	32	20	2	0	4	4	100

b. Histogrammes associés à ces deux séries :



2.a. $1+4+10+13 = 28$ et $\frac{28}{50} \times 100 = 56$; donc dans 56% des pays, les hommes ont moins de 50 ans d'espérance de vie.

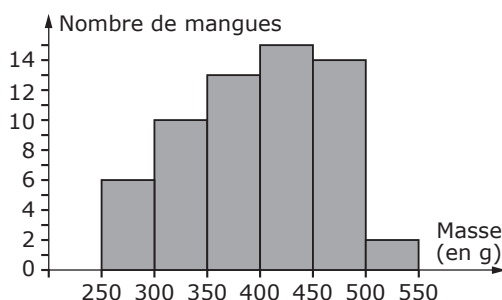
b. $10+1+2+2 = 15$ et $\frac{15}{50} \times 100 = 30$; donc dans 30% des pays, les femmes ont 55 ans ou davantage d'espérance de vie.

Exercice 27 Les mangues de Mariam

1.a. • $60 - (6+10+13+14+2) = 15$; donc la donnée manquante est 15.

• La classe modale est [400 ; 450[.

b.



c. $6+10+13+15 = 44$ et $\frac{44}{60} \times 100 \approx 73$; donc 73% des mangues pèsent moins de 450 g.

2.a. $m = \frac{2 \times 300 + 5 \times 305 + 6 \times 310 + 5 \times 315 + 2 \times 320}{20} = \frac{6\,200}{20} = 310$;

donc les mangues achetées par Ahmed pèsent en moyenne 310 g.

b. $\frac{6\,200}{100} \times 60 = 3\,720$; donc Ahmed a payé 3 720 F CFA à Mariam.