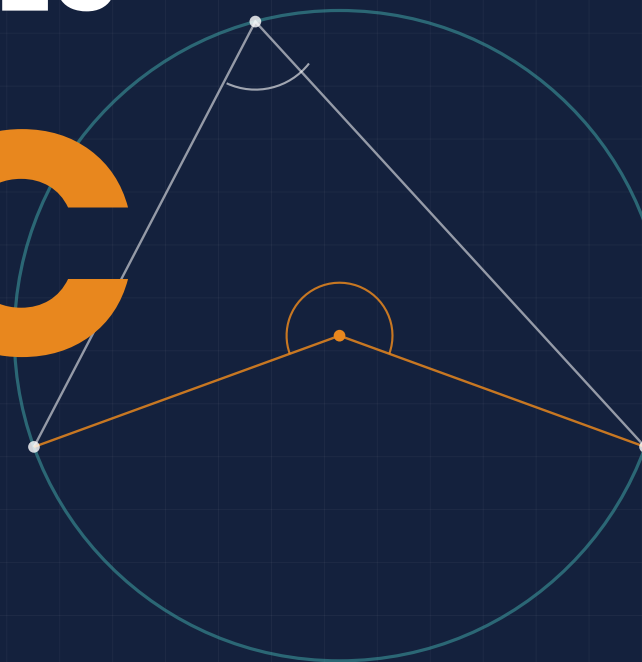


$$10^{-n}$$

MATHÉMATIQUES

3A PIC

Cours essentiel · Méthodes & astuces
Exercices gradués · Défis olympiades
Corrigés détaillés



16 chapitres

131 exercices corrigés

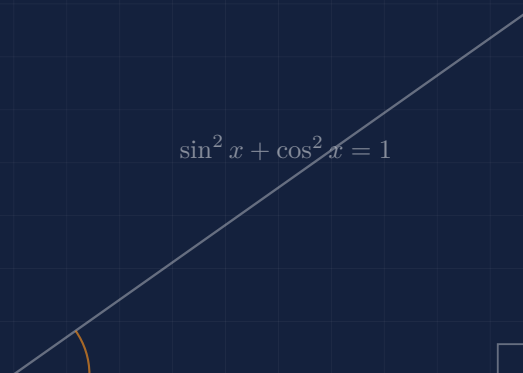
32 défis olympiades

2 sujets type examen régional

$$(a+b)^2$$

$$y = mx + p$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$



Auteur



Maths Olympiad

Préparation à l'examen régional
et aux olympiades de mathématiques

Comment utiliser ce livret ?

Ce livret couvre **tout le programme de mathématiques de la 3APIC** en 16 chapitres. Il est conçu pour **comprendre, s'entraîner et réussir l'examen régional**, tout en donnant aux plus curieux le goût des **olympiades**. Chaque chapitre suit toujours le même parcours en quatre étapes :

- | | |
|---|--|
| 1 L'essentiel du cours : définitions, propriétés et exemples, sans bavardage. | 2 Méthodes & astuces : les savoir-faire pas à pas, les raccourcis et les pièges. |
| 3 Exercices : du plus simple au plus exigeant, dont des sujets type examen. | 4 Défis olympiades : des problèmes astucieux pour aller plus loin. |

► Les encadrés

DÉFINITION	Le vocabulaire à connaître par cœur.	MÉTHODE	La démarche à suivre, étape par étape.
PROPRIÉTÉ	Une règle de calcul ou de raisonnement.	★ ASTUCE DU PROF	Le raccourci qui fait gagner du temps.
THÉORÈME	Un résultat important et sa condition d'emploi.	✗ PIÈGE À ÉVITER	L'erreur la plus fréquente sur les copies.
EXEMPLE	Une application commentée du cours.	LE SAVAIS-TU ?	Un peu d'histoire et de culture mathématique.

► Les niveaux de difficulté

- ☆☆☆ Application directe du cours : à réussir sans hésiter.
- ☆☆☆ Approfondissement : plusieurs étapes ou une petite idée.
- ☆☆☆ Niveau examen régional ou exercice de réflexion.
- DÉFI OLYMPIADE** Problème de concours : il faut chercher, essayer, se tromper... et trouver l'astuce !

► Bien travailler avec ce livret

- 1. Lis le cours, puis refais les exemples seul**, sans regarder la solution.
- 2. Cherche chaque exercice au moins 10 à 15 minutes** avant d'ouvrir les corrigés (à partir de la page 69). Un exercice cherché, même raté, s'apprend beaucoup mieux qu'un exercice lu.
- 3. Note tes erreurs** dans un petit carnet : relis-le avant chaque contrôle.
- 4. Avant l'examen**, révise avec le formulaire (page 64) et traite les deux sujets types en conditions réelles : 2 heures, sans corrigé.

► Une progression conseillée

- 1^{er} semestre** Chapitres 1 à 4 (nombres et calcul) et chapitres 9 à 12 (Thalès, trigonométrie, angles, triangles).
2^e semestre Chapitres 5 à 8 (équations, systèmes, fonctions, statistiques) et chapitres 13 à 16 (vecteurs, repère, droites, espace).
Mai – juin Formulaire, sujets types d'examen régional, puis les défis pour le plaisir !

La progression exacte peut varier selon l'établissement : suis l'ordre de ton professeur, chaque chapitre se lit de façon indépendante.

► Pour les parents et les enseignants

Les exercices sont classés par difficulté et leurs corrigés sont séparés des énoncés : le livret se prête aussi bien au travail autonome qu'aux séances de soutien, aux devoirs à la maison ou à la préparation des contrôles. Les deux sujets types reprennent la structure de l'examen régional (barème sur 20 points) et peuvent servir d'examens blancs.

Sommaire

Partie A — Nombres et calcul	4
1 Identités remarquables	4
2 Les racines carrées	8
3 Les puissances	12
4 Ordre et opérations	16
5 Équations et inéquations	19
6 Systèmes de deux équations à deux inconnues	23
7 Fonctions linéaires et fonctions affines	27
8 Statistiques	31
Partie B — Géométrie	34
9 Le théorème de Thalès	34
10 Trigonométrie dans le triangle rectangle	38
11 Angles inscrits et angles au centre	42
12 Triangles isométriques et triangles semblables	46
13 Vecteurs et translation	50
14 Repère dans le plan	54
15 Équation d'une droite	57
16 Géométrie dans l'espace : pyramide, cône, agrandissement et réduction	61
Partie C — Préparer l'examen régional	64
F Formulaire : l'essentiel à retenir	64
S1 Sujet type examen régional n°1	65
S2 Sujet type examen régional n°2	67
Corrigés détaillés	69

Rappel des repères. Les corrigés de tous les exercices, des défis et des sujets types sont regroupés à la fin du livret, chapitre par chapitre : chaque exercice porte un numéro (par exemple **Exercice 7.3** = chapitre 7, exercice 3) qui permet de retrouver immédiatement sa solution.

Identités remarquables

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Développer et réduire une expression avec la distributivité et les identités remarquables.
- ✓ Factoriser : facteur commun, différence de deux carrés, carré parfait.
- ✓ Calculer mentalement et simplifier des expressions contenant des racines carrées.

1 L'essentiel du cours

PROPRIÉTÉ — Distributivité

Pour tous nombres réels k, a, b, c, d :

simple : $k(a + b) = ka + kb$

double : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

DÉFINITION — Développer, factoriser

Développer un produit, c'est l'écrire sous forme d'une somme ; **factoriser** une somme, c'est l'écrire sous forme d'un produit.

$$\underbrace{3(x + 2)}_{\text{produit}} \xrightarrow{\text{développer}} \underbrace{3x + 6}_{\text{somme}} \quad \underbrace{3x + 6}_{\text{somme}} \xrightarrow{\text{factoriser}} \underbrace{3(x + 2)}_{\text{produit}}$$

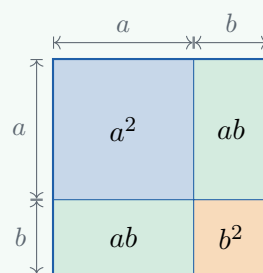
PROPRIÉTÉ — Les trois identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b :

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ carré d'une somme ;
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ carré d'une différence ;
3. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ différence de deux carrés.

Preuve de 1. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

La figure ci-contre le montre : le grand carré de côté $a + b$ est formé d'un carré a^2 , d'un carré b^2 et de deux rectangles ab .



EXEMPLE — développer et réduire

$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$(2x + 7)(2x - 7) = 4x^2 - 49$$

$$(x + 3)(2x - 1) = 2x^2 - x + 6x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$$

EXEMPLE — factoriser

$$5x^2 - 15x = 5x(x - 3) \quad (\text{facteur commun}) \quad x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2 \quad (a^2 + 2ab + b^2)$$

$$x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6) \quad (a^2 - b^2) \quad 25x^2 - 10x + 1 = (5x - 1)^2 \quad (a^2 - 2ab + b^2)$$

2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Factoriser : les trois réflexes, dans cet ordre

- Facteur commun ?** Chercher un facteur présent dans tous les termes, même s'il est « caché » :
 $(x+1)(2x-3) - (x+1)^2 = (x+1)[(2x-3) - (x+1)] = (x+1)(x-4)$.
- Deux carrés séparés par un - ?** $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, même si A et B sont des expressions :
 $(2x+1)^2 - 9 = (2x+1-3)(2x+1+3) = (2x-2)(2x+4) = 4(x-1)(x+2)$.
- Trois termes ?** Tester un carré parfait : repérer a^2 et b^2 , puis *vérifier le double produit* $2ab$.
 $9x^2 + 30x + 25 : a = 3x, b = 5$ et $2ab = 2 \times 3x \times 5 = 30x$ ✓ donc $9x^2 + 30x + 25 = (3x+5)^2$.

Contrôle express : pour vérifier un développement ou une factorisation, remplacer x par une valeur simple (0, 1 ou 2) des deux côtés : les deux résultats doivent être égaux.

MÉTHODE — Calcul mental avec les identités

On se ramène à un nombre « rond » (10, 100, 1 000...) :

$$\begin{aligned} 101^2 &= (100+1)^2 \\ &= 10\,000 + 200 + 1 \\ &= 10\,201 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 99 \times 101 &= (100-1)(100+1) \\ &= 10\,000 - 1 \\ &= 9\,999 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 49^2 &= (50-1)^2 \\ &= 2\,500 - 100 + 1 \\ &= 2\,401 \end{aligned}$$

★ ASTUCE DU PROF — Identités et racines carrées

Les identités s'appliquent aussi quand a ou b est une racine carrée, sachant que $(\sqrt{a})^2 = a$:

$$(\sqrt{3}+1)^2 = 3+2\sqrt{3}+1 = 4+2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad (\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2) = 7-4 = 3 \quad (\text{la racine disparaît !}).$$

Et pour $a^2 - b^2$ avec de grands nombres : $2025^2 - 2024^2 = (2025-2024)(2025+2024) = 1 \times 4049 = 4049$.

⚠ PIÈGE À ÉVITER

- $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$: on oublie souvent le double produit. Exemple : $(3+4)^2 = 49$ mais $3^2 + 4^2 = 25$.
- Un signe - devant une parenthèse change *tous* les signes : $-(x-3)^2 = -(x^2 - 6x + 9) = -x^2 + 6x - 9$.
- $x^2 + 9$ ne se factorise pas avec $a^2 - b^2$: c'est une *somme* de deux carrés.

REMARQUE — Ouverture : à quoi sert la factorisation ?

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Factoriser permet donc de résoudre des équations : $x^2 - 9 = 0 \iff (x-3)(x+3) = 0 \iff x = 3$ ou $x = -3$. (Voir le chapitre sur les équations.)

LE SAVAIS-TU ?

Au IX^e siècle, le savant de Bagdad **Al-Khwârizmî** démontrait ces identités sans lettres, uniquement avec des carrés et des rectangles, comme dans la figure du cours. Son livre *Al-jabr* a donné son nom à l'algèbre.

3 Exercices

EXERCICE 1.1 ★☆☆

Développer et réduire :

a) $A = (x + 4)^2$

b) $B = (3x - 2)^2$

c) $C = (2x - 5)(2x + 5)$

d) $D = (x + 3)(2x - 1) - 2x^2$

EXERCICE 1.2 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

a) Pour tout x , $(x + 3)^2 = x^2 + 9$.

b) Pour tout x , $(x - 1)^2 - (x + 2)(x - 2) = 5 - 2x$.

c) $49x^2 - 1 = (7x - 1)(7x + 1)$.

d) Pour tous a et b , $(-a - b)^2 = (a + b)^2$.

EXERCICE 1.3 ★☆☆

Factoriser :

a) $E = (x + 1)(2x - 3) + (x + 1)(x + 4)$

b) $F = 9x^2 - 12x + 4$

c) $G = (x + 2)^2 - 9$

d) $H = (3x - 2)^2 - (x + 4)^2$

EXERCICE 1.4 ★☆☆

Calculer **sans calculatrice**, en utilisant une identité remarquable :

a) 102^2

b) 998^2

c) 49×51

d) $1\,001 \times 999$

e) 65^2

f) $2026^2 - 2025 \times 2027$

EXERCICE 1.5 ★☆☆

QCM. Pour chaque ligne, choisir la bonne réponse (une seule est correcte).

1. $(x - 5)^2 =$

a) $x^2 - 25$

b) $x^2 - 10x + 25$

c) $x^2 - 5x + 25$

2. $16x^2 - 24x + 9 =$

a) $(4x - 3)^2$

b) $(16x - 3)^2$

c) $(4x - 3)(4x + 3)$

3. $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) =$

a) $\sqrt{2}$

b) 8

c) 2

4. Si $a + b = 7$ et $ab = 10$, alors $a^2 + b^2 =$

a) 49

b) 29

c) 39

EXERCICE 1.6 ★☆☆

Écrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$ ou sous forme d'un entier :

a) $A = (\sqrt{3} + 1)^2$

b) $B = (2\sqrt{5} - 3)(2\sqrt{5} + 3)$

c) $C = (\sqrt{2} + 1)^2 - (\sqrt{2} - 1)^2$

d) $D = (1 - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}$

EXERCICE 1.7 ★★☆☆

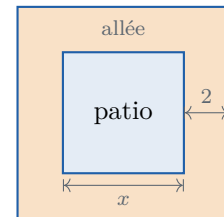
Type examen régional. On considère $E = (2x - 1)^2 - (x + 3)(2x - 1)$.

1. Développer et réduire E .
2. Factoriser E .
3. Calculer E pour $x = \sqrt{2}$.
4. Résoudre l'équation $E = 0$.

EXERCICE 1.8 ★★☆☆

Le riad de Fès. Le patio d'un riad est un carré de côté x mètres. Il est entouré d'une allée de 2 m de large (voir figure).

1. Montrer que l'aire de l'allée, en m^2 , est $\mathcal{A} = (x + 4)^2 - x^2$, puis la factoriser et la réduire.
2. Pour $x = 6$, l'allée est recouverte de zellige à 250 DH le m^2 . Calculer le coût.
3. Pour un autre patio, une allée de même largeur a coûté 22 000 DH : trouver x .

**EXERCICE 1.9** ★★☆☆

1. Vérifier que pour tout x : $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1$.
2. En déduire que $x^2 - 6x + 10 > 0$ pour tout x , et donner sa plus petite valeur.
3. De même, montrer que $4x^2 + 4x + 3 \geq 2$ pour tout x .
4. Montrer que pour tous réels a et b : $a^2 + b^2 - 2a + 4b + 5 \geq 0$. Quand a-t-on l'égalité ?

4 Défis olympiades**○ DÉFI OLYMPIADE 1.1 — Somme alternée**

1. Calculer astucieusement : $S = 2025^2 - 2024^2 + 2023^2 - 2022^2 + \dots + 3^2 - 2^2 + 1^2$.
2. Montrer que tout nombre impair est la différence des carrés de deux entiers consécutifs. Application : écrire 2025 sous cette forme.

○ DÉFI OLYMPIADE 1.2 — Quatre entiers consécutifs

On observe : $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 5^2$; $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 11^2$; $3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 19^2$... Hasard ?

1. Développer $(n^2 + 3n + 1)^2$ et $n(n+1)(n+2)(n+3)$. (Astuce : regrouper $n(n+3)$ et $(n+1)(n+2)$.)
2. En déduire que le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est toujours un carré parfait.
3. Calculer $\sqrt{2024 \times 2025 \times 2026 \times 2027 + 1}$ sans calculatrice.

Les racines carrées

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Connaître la définition et les propriétés de la racine carrée d'un nombre positif.
- ✓ Simplifier, réduire des sommes et rendre rationnel un dénominateur.
- ✓ Résoudre $x^2 = a$, comparer et encadrer des racines carrées.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Racine carrée d'un nombre positif

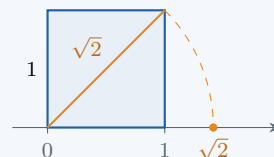
Soit a un nombre réel **positif**. La **racine carrée** de a , notée $\sqrt{a}$, est le nombre **positif** dont le carré est égal à a .

$$\sqrt{a} \geq 0 \quad \text{et} \quad (\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0)$$

Exemples : $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0,25} = 0,5$;
 $(\sqrt{13})^2 = 13$.

$\sqrt{-4}$ **n'existe pas** : aucun carré n'est négatif.

La diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1,414$ (Pythagore) : on peut placer $\sqrt{2}$ sur la droite graduée au compas.



PROPRIÉTÉ — Racine d'un carré

Pour tout nombre $a \geq 0$: $\sqrt{a^2} = a$. Exemples : $\sqrt{7^2} = 7$; $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ (et non -3 !).

Plus généralement : si $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$; si $a \leq 0$, $\sqrt{a^2} = -a$.

PROPRIÉTÉ — Produit et quotient

Pour tous nombres positifs a et b (avec $b \neq 0$ pour le quotient) :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemples : $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$; $\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$; $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{36} = 6$.

PROPRIÉTÉ — Équation $x^2 = a$

Si $a > 0$: deux solutions

$x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

Ex. : $x^2 = 7 \iff x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$.

Si $a = 0$: une seule solution : $x = 0$.

Si $a < 0$: aucune solution (un carré est toujours positif).

Ex. : $x^2 = -9$: impossible.

❌ PIÈGE À ÉVITER — La racine d'une somme

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ en général ! Exemple : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.
De même $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$. La racine carrée « passe » dans les produits et les quotients, *jamais* dans les sommes.

2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Simplifier une racine : $\sqrt{a} = k\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible

On cherche le **plus grand carré parfait** qui divise le nombre sous la racine.

Carrés à connaître : 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225.

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \quad \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2} \quad \sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = 10\sqrt{3}$$

Réduire une somme : on simplifie chaque racine, puis on regroupe les termes « semblables » comme $3x + 5x = 8x$:

$$3\sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{27} = 3 \times 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

MÉTHODE — Rendre rationnel un dénominateur

- **Dénominateur $\sqrt{b}$** : on multiplie en haut et en bas par $\sqrt{b}$: $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.
- **Dénominateur $\sqrt{b+c}$ ou $\sqrt{b-c}$** : on multiplie par l'**expression conjuguée** ($\sqrt{b-c}$ ou $\sqrt{b+c}$), puis on utilise $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$:

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

MÉTHODE — Comparer et encadrer

- Deux nombres **positifs** sont rangés dans le même ordre que leurs carrés. Pour comparer $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$: $(2\sqrt{3})^2 = 12$ et $(3\sqrt{2})^2 = 18$; comme $12 < 18$, $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.
- **Encadrer par deux entiers consécutifs** : on encadre le nombre sous la racine par deux carrés parfaits consécutifs.
 $36 < 45 < 49$ donc $6 < \sqrt{45} < 7$. $2025 = 45^2$ donc $45 < \sqrt{2026} < 46$.

★ ASTUCE DU PROF — Faire entrer un facteur sous la racine

Pour un nombre $k \geq 0$: $k\sqrt{b} = \sqrt{k^2 b}$. Ainsi $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ et $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$: comme $48 < 49$, $4\sqrt{3} < 7$.
Très pratique pour ranger plusieurs nombres d'un coup !

REMARQUE — Valeurs approchées à connaître

$$\begin{array}{llll} \sqrt{2} \approx 1,414 & \sqrt{5} \approx 2,236 & \sqrt{7} \approx 2,646 & \sqrt{0,01} = 0,1 \\ \sqrt{3} \approx 1,732 & \sqrt{6} \approx 2,449 & \sqrt{10} \approx 3,162 & \sqrt{10^6} = 10^3 \end{array}$$

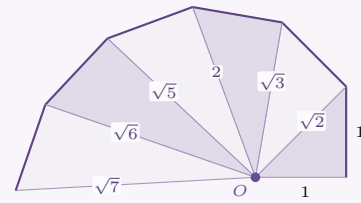
Elles servent à *contrôler* un résultat exact : par exemple $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx \frac{2,236}{2} = 1,618$ (le célèbre « nombre d'or »).

LE SAVAIS-TU ?

Une tablette babylonienne d'argile vieille de près de 3 800 ans (la tablette *YBC 7289*) montre un carré et sa diagonale, avec une valeur de $\sqrt{2}$ exacte à six décimales : 1,414213.

Vers 400 av. J.-C., **Théodore de Cyrène** construisait $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$... avec une « spirale » de triangles rectangles dont un côté de l'angle droit mesure toujours 1 : d'après Pythagore, si l'hypoténuse d'un triangle mesure $\sqrt{n}$, celle du suivant mesure $\sqrt{n+1}$.

Les Grecs ont aussi prouvé que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous forme de fraction : c'est un nombre *irrationnel*.



3 Exercices

EXERCICE 2.1 ★☆☆

Calculer (sans calculatrice) :

- | | | | |
|--------------------|-----------------------|-------------------------------|---------------------|
| a) $\sqrt{81}$ | b) $\sqrt{0,36}$ | c) $\sqrt{\frac{9}{25}}$ | d) $(\sqrt{11})^2$ |
| e) $\sqrt{(-5)^2}$ | f) $\sqrt{3^2 + 4^2}$ | g) $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ | h) $(-2\sqrt{3})^2$ |

EXERCICE 2.2 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier.

- | | |
|---|---|
| a) $\sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{25}$. | c) $\sqrt{2} \times \sqrt{18}$ est un entier. |
| b) $\sqrt{(-4)^2} = -4$. | d) L'équation $x^2 = -9$ a deux solutions. |

EXERCICE 2.3 ★☆☆

- Simplifier : $\sqrt{50}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{45}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt{98}$.
- Réduire : $A = \sqrt{50} + \sqrt{18} - 2\sqrt{8}$; $B = 2\sqrt{45} - \sqrt{20} + \sqrt{80}$; $C = \sqrt{98} - 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{72}}{3}$.

EXERCICE 2.4 ★☆☆

Écrire sans racine carrée au dénominateur :

- | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|------------------------------------|-----------------------------|--|
| a) $\frac{10}{\sqrt{5}}$ | b) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$ | c) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ | d) $\frac{4}{3 - \sqrt{5}}$ | e) $\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1}$ |
|--------------------------|--------------------------|------------------------------------|-----------------------------|--|

EXERCICE 2.5 ★☆☆

Résoudre les équations :

- | | | |
|---------------|--------------------|---------------------|
| a) $x^2 = 49$ | c) $x^2 + 4 = 0$ | e) $4x^2 = 5$ |
| b) $x^2 = 7$ | d) $2x^2 - 18 = 0$ | f) $(x - 1)^2 = 16$ |

EXERCICE 2.6 ★★☆☆

1. Comparer : a) $2\sqrt{3}$ et $\sqrt{11}$ b) $5\sqrt{2}$ et 7 c) $3\sqrt{5}$ et $2\sqrt{11}$.
2. Encadrer par deux entiers consécutifs : $\sqrt{30}$; $\sqrt{200}$; $3\sqrt{7}$.

EXERCICE 2.7 ★★☆☆

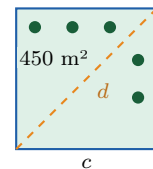
Type examen régional. On pose $a = 2 - \sqrt{3}$ et $b = 2 + \sqrt{3}$.

1. Calculer $a + b$ et $a \times b$.
2. En déduire $a^2 + b^2$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
3. Montrer que $\frac{a}{b} = 7 - 4\sqrt{3}$.

EXERCICE 2.8 ★★☆☆

Un terrain à Ifrane. Un terrain carré a une aire de 450 m^2 .

1. Donner la valeur exacte de son côté sous la forme $a\sqrt{b}$ (b entier le plus petit possible).
2. Montrer que sa diagonale mesure exactement 30 m.
3. On clôture le terrain avec un grillage à 35 DH le mètre. Calculer le prix exact, puis son arrondi au dirham.

**EXERCICE 2.9** ★★☆☆

1. Développer $(2 + \sqrt{3})^2$ et $(2 - \sqrt{3})^2$.
2. En déduire une écriture simple de $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ et de $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. (Attention au signe !)
3. Calculer $A = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ et $B = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \times \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

4 Défis olympiades**○ DÉFI OLYMPIADE 2.1 — Une somme télescopique**

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$: $\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.
2. En déduire la valeur de $S = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$.

○ DÉFI OLYMPIADE 2.2 — Comparer sans calculatrice

1. Comparer $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ et $\sqrt{3} + \sqrt{9}$.
2. Comparer $\sqrt{2026} - \sqrt{2025}$ et $\sqrt{2025} - \sqrt{2024}$. (Indication : utiliser le défi précédent.)
3. La calculatrice affiche $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3,146$ et $\sqrt{10} \approx 3,162$. Prouver, *sans aucune valeur approchée*, que $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$.

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Connaître et utiliser les puissances d'exposant entier relatif et leurs règles de calcul.
- ✓ Utiliser les puissances de 10, l'écriture scientifique et les ordres de grandeur.
- ✓ Simplifier des expressions et comparer de très grands nombres.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Puissance d'exposant entier

Soit a un nombre réel et n un entier naturel non nul.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}} \quad a^1 = a$$

Pour $a \neq 0$: $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (a^{-n} est l'inverse de a^n).

Exemples : $2^5 = 32$; $(-3)^2 = 9$; $7^0 = 1$; $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$; $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$.

PROPRIÉTÉ — Règles de calcul

Pour tous réels a et b non nuls et tous entiers relatifs m et n :

Produit de puissances $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $5^3 \times 5^{-7} = 5^{3+(-7)} = 5^{-4}$

Quotient de puissances $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\frac{7^8}{7^{-3}} = 7^{8-(-3)} = 7^{11}$

Puissance d'une puissance $(a^m)^n = a^{m \times n}$ $(2^{-3})^4 = 2^{-12}$

Puissance d'un produit $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ $(2x)^3 = 8x^3$; $2^5 \times 5^5 = 10^5$

Puissance d'un quotient $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100} = 0,09$

PROPRIÉTÉ — Signe d'une puissance

Pour $a > 0$ et n entier : $a^n > 0$. Pour un nombre négatif $-a$:

- si n est **pair** : $(-a)^n = a^n$ (positif) ;
- si n est **impair** : $(-a)^n = -a^n$ (négatif).

En particulier : $(-1)^n = 1$ si n est pair et $(-1)^n = -1$ si n est impair.

$$\begin{aligned} (-2)^4 &= 16 & (4 \text{ est pair}) \\ (-2)^5 &= -32 & (5 \text{ est impair}) \\ (-1)^{2026} &= 1 & ; \quad (-1)^{2025} = -1 \\ (-5)^{-2} &= \frac{1}{25} > 0 \end{aligned}$$

DÉFINITION — Puissances de 10 et écriture scientifique

Pour tout entier $n \geq 1$: $10^n = 1 \underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ zéros}}$ et $10^{-n} = 0, \underbrace{0 \dots 0}_{n-1 \text{ zéros}} 1$. Ex. : $10^6 = 1\,000\,000$;

$10^{-4} = 0,0001$.

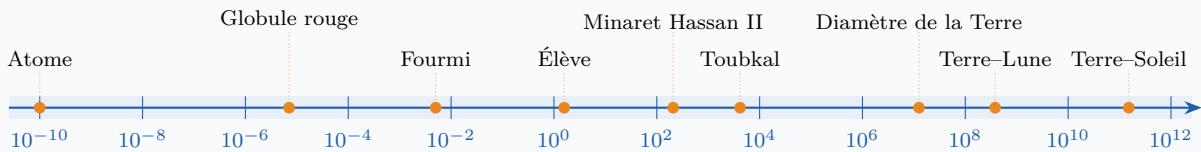
Tout nombre décimal strictement positif s'écrit de façon unique $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$ et n entier relatif : c'est son **écriture scientifique**.

$$345\,000 = 3,45 \times 10^5$$

$$0,000\,72 = 7,2 \times 10^{-4}$$

$$52 \times 10^{-3} = 5,2 \times 10^1 \times 10^{-3} = 5,2 \times 10^{-2}$$

L'ordre de grandeur d'un nombre $a \times 10^n$ est 10^n si $a < 5$, et 10^{n+1} si $a \geq 5$.

EXEMPLE — l'échelle des tailles, en mètres

Atome $\approx 10^{-10}$ m ; globule rouge $\approx 7 \times 10^{-6}$ m ; minaret de la mosquée Hassan II $\approx 2,1 \times 10^2$ m ; Toubkal $\approx 4,2 \times 10^3$ m ; Terre-Lune $\approx 3,8 \times 10^8$ m ; Terre-Soleil $\approx 1,5 \times 10^{11}$ m.

2 Méthodes & astuces**MÉTHODE — Simplifier une expression avec des puissances**

- Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers : $6 = 2 \times 3$, $12 = 2^2 \times 3$, $15 = 3 \times 5$...
- Appliquer les règles pour chaque nombre premier séparément.

$$\frac{6^4}{2^4 \times 3^3} = \frac{2^4 \times 3^4}{2^4 \times 3^3} = 2^{4-4} \times 3^{4-3} = 2^0 \times 3^1 = 3$$

$$\frac{12^3}{2^5 \times 3^2} = \frac{(2^2)^3 \times 3^3}{2^5 \times 3^2} = 2^{6-5} \times 3^{3-2} = 2 \times 3 = 6$$

MÉTHODE — Calculer en écriture scientifique

On regroupe les nombres « ordinaires » d'un côté et les puissances de 10 de l'autre, puis on rectifie si besoin :

$$\frac{(3 \times 10^5) \times (4 \times 10^{-2})}{6 \times 10^{-3}} = \frac{3 \times 4}{6} \times \frac{10^5 \times 10^{-2}}{10^{-3}} = 2 \times 10^{5-2+3} = 2 \times 10^6.$$

★ ASTUCE DU PROF — Factoriser par la plus petite puissance

Dans une *somme* de puissances, on met en facteur la plus petite :

$$2^{10} + 2^{10} = 2 \times 2^{10} = 2^{11} \quad 3^{2025} - 3^{2024} = 3^{2024}(3-1) = 2 \times 3^{2024} \quad 5^{n+1} + 5^n = 5^n(5+1) = 6 \times 5^n$$

× PIÈGE À ÉVITER

- $-3^2 = -9$ mais $(-3)^2 = 9$: sans parenthèses, l'exposant ne porte que sur 3.
- 2^{-3} n'est pas négatif : $2^{-3} = \frac{1}{8} = 0,125$.
- Pas de règle pour une somme : $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$ alors que $2^{3+4} = 128$. De même $(a+b)^n \neq a^n + b^n$.

- $(a^m)^n = a^{m \times n}$, mais $a^m \times a^n = a^{m+n}$: ne pas confondre ! $(2^3)^2 = 2^6$ et $2^3 \times 2^2 = 2^5$.

LE SAVAIS-TU ?

Selon une légende indienne, l'inventeur des échecs demanda au roi 1 grain de riz sur la première case, 2 sur la deuxième, 4 sur la troisième... en doublant à chaque case. Sur la 64^e case, il faudrait $2^{63} \approx 9,2 \times 10^{18}$ grains : des centaines de fois la récolte mondiale annuelle ! En informatique aussi, tout est puissance de 2 : 1 octet = 2^3 bits, et $2^{10} = 1\,024 \approx 10^3$.

3 Exercices

EXERCICE 3.1 ★☆☆

Calculer (résultat sous forme d'entier ou de fraction) :

- | | | | |
|-------------|------------------|-------------------------|--------------|
| a) 2^6 | c) -2^4 | e) 3^{-2} | g) 10^{-3} |
| b) $(-2)^5$ | d) $(-1)^{2025}$ | f) $(\frac{2}{5})^{-1}$ | h) $(-4)^0$ |

EXERCICE 3.2 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier.

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| a) $2^3 \times 2^4 = 2^{12}$. | c) $(-5)^{-2}$ est négatif. |
| b) $3^2 + 3^2 + 3^2 = 3^3$. | d) $(10^{-2})^3 = 10^{-6}$. |

EXERCICE 3.3 ★☆☆

QCM. Une seule bonne réponse par ligne.

- | | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|-----------------------|
| 1. $0,0005 \times 10^4 =$ | a) 5 | b) 50 | c) 0,5 |
| 2. L'écriture scientifique de 0,0203 est | a) $2,03 \times 10^{-2}$ | b) $20,3 \times 10^{-3}$ | c) $2,03 \times 10^2$ |
| 3. $(-2)^{-3} =$ | a) 8 | b) $-\frac{1}{8}$ | c) $\frac{1}{8}$ |
| 4. $2^{10} \times 5^{10} =$ | a) 10^{20} | b) 10^{10} | c) 7^{10} |

EXERCICE 3.4 ★☆☆

Écrire sous la forme d'une seule puissance :

- | | | | | | |
|------------------------|-------------------------|-------------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------------------|
| a) $5^3 \times 5^{-7}$ | b) $\frac{7^8}{7^{-3}}$ | c) $(2^{-3})^4 \times 2^{15}$ | d) $3^5 \times 2^5$ | e) $\frac{(-4)^6}{4^2}$ | f) $\frac{2^7 \times 4^3}{8^2}$ |
|------------------------|-------------------------|-------------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------------------|

EXERCICE 3.5 ★☆☆

Simplifier en décomposant en facteurs premiers :

- | | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--|
| a) $A = \frac{15^3}{3^2 \times 5^4}$ | b) $B = 2^3 \times 3^{-2} \times 6^2$ | c) $C = \frac{25^3 \times 4^2}{10^4}$ | d) $D = \frac{36^2 \times 5^3}{15^2 \times 6^3}$ |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--|

EXERCICE 3.6 ★★☆☆

- Donner l'écriture scientifique : $52\,000\,000$; $0,000\,038$; 245×10^{-7} ; $0,06 \times 10^5$.
- Donner l'écriture scientifique puis l'ordre de grandeur de $F = \frac{1,2 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^8}{4 \times 10^2}$.

EXERCICE 3.7 ★★☆☆

Type examen régional.

- Écrire sous la forme a^n : $A = \frac{(3^2)^3 \times 3^{-4}}{3^5}$ et $B = \frac{5^{-2} \times 5^7}{(5^{-1})^3}$.
- Donner l'écriture scientifique de $C = \frac{15 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^5}{3 \times 10^{-2}}$.

EXERCICE 3.8 ★★☆☆

L'observatoire de l'Oukaïmeden. Près de Marrakech, cet observatoire étudie le ciel. La lumière se déplace à environ 3×10^5 km/s.

- La distance Terre–Soleil vaut environ $1,5 \times 10^8$ km. Combien de temps met la lumière du Soleil pour nous parvenir ? (en secondes, puis en minutes et secondes)
- Une *année-lumière* est la distance parcourue par la lumière en un an (365 jours). Montrer qu'elle vaut environ $9,46 \times 10^{12}$ km.
- Une caméra de l'observatoire produit des images de 25 Mo (1 Mo = 10^6 octets). Combien d'images peut contenir un disque de 2 To (1 To = 10^{12} octets) ?

EXERCICE 3.9 ★★☆☆

- Simplifier : $A = \frac{2^{10} + 2^{10}}{2^9}$; $B = \frac{3^{2025} - 3^{2024}}{3^{2023}}$; $C = \frac{5^{12} + 5^{11}}{5^{12} - 5^{11}}$.
- Combien de chiffres compte l'écriture décimale du nombre $N = 4^{10} \times 5^{18}$?

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 3.1 — Le dernier chiffre

- Calculer les chiffres des unités de $7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5$. Que remarque-t-on ?
- En déduire le chiffre des unités de 7^{2026} .
- Quel est le chiffre des unités de $2^{2026} + 3^{2026}$?

○ DÉFI OLYMPIADE 3.2 — Le plus grand ?

Sans calculatrice, comparer : a) 2^{300} et 3^{200} b) 2^{700} et 5^{300} c) 31^{11} et 17^{14} .
d) Ranger dans l'ordre croissant : $2^{100}, 3^{75}, 5^{50}$.

Ordre et opérations

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Comparer deux nombres en étudiant le signe de leur différence.
- ✓ Utiliser les propriétés de l'ordre avec l'addition et la multiplication, encadrer une expression.
- ✓ Comparer a , a^2 , $\sqrt{a}$ et $\frac{1}{a}$; donner une valeur approchée ou un arrondi.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Comparer par la différence

Pour tous réels a et b : $a \leq b \iff a - b \leq 0$ et $a \geq b \iff a - b \geq 0$.

Exemple : comparer $A = \frac{2025}{2026}$ et $B = \frac{2026}{2027}$.

$$A - B = \frac{2025 \times 2027 - 2026^2}{2026 \times 2027} = \frac{(2026 - 1)(2026 + 1) - 2026^2}{2026 \times 2027} = \frac{-1}{2026 \times 2027} < 0, \text{ donc } A < B.$$

PROPRIÉTÉ — Ordre, addition et multiplication

Soient a, b, c des réels.

- **Addition** : $a \leq b \iff a + c \leq b + c$ (on peut ajouter ou retrancher un même nombre).
- **Multiplication par $c > 0$** : $a \leq b \iff ac \leq bc$ (l'ordre est **conservé**).
- **Multiplication par $c < 0$** : $a \leq b \iff ac \geq bc$ (l'ordre est **inversé**). Ex. : $2 < 5$ donc $-3 \times 2 > -3 \times 5$.

PROPRIÉTÉ — Opérations membre à membre

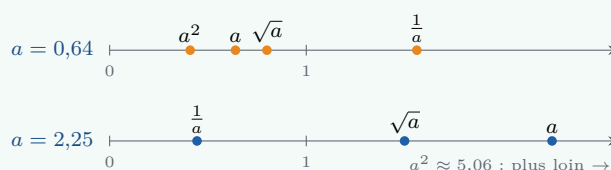
- **Somme** : si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
- **Produit (nombres positifs)** : si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.
- **Carrés, racines, inverses** : pour a et b strictement positifs :

$$a \leq b \iff a^2 \leq b^2 \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \quad a \leq b \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}.$$

PROPRIÉTÉ — Comparer $a, a^2, \sqrt{a}$ et $\frac{1}{a}$ pour $a > 0$

- Si $a > 1$: $\frac{1}{a} < 1 < \sqrt{a} < a < a^2$.
- Si $0 < a < 1$: $a^2 < a < \sqrt{a} < 1 < \frac{1}{a}$.
- Si $a = 1$: tous valent 1.

Preuve : $a^2 - a = a(a - 1)$ est du signe de $a - 1$.



DÉFINITION — Valeur approchée, arrondi

Si $a \leq x \leq a + 10^{-n}$, a est une **valeur approchée de x par défaut** à 10^{-n} près et $a + 10^{-n}$ une valeur approchée **par excès**. L'**arrondi** à 10^{-n} est celle des deux qui est la plus proche de x .

Exemple : $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$ (car $1,414^2 = 1,999396$ et $1,415^2 = 2,002225$) ; l'arrondi de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} est 1,414.

2 Méthodes & astuces**MÉTHODE — Encadrer une expression**

On part des encadrements donnés et on construit l'expression **étape par étape**, en vérifiant à chaque étape le signe du nombre par lequel on multiplie.

Exemple : $2 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq -1$. Encadrer $x - 2y$.

On multiplie par $-2 < 0$ (l'ordre s'inverse) : $-2 \times (-1) \leq -2y \leq -2 \times (-3)$, soit $2 \leq -2y \leq 6$.

On additionne membre à membre avec $2 \leq x \leq 5$: $4 \leq x - 2y \leq 11$.

× PIÈGE À ÉVITER — On ne soustrait pas et on ne divise pas membre à membre !

$2 \leq x \leq 5$
 $1 \leq y \leq 3$ n'entraîne **pas** $2 - 1 \leq x - y \leq 5 - 3$.

Contre-exemple : $x = 2, y = 3$ donne $x - y = -1 < 1$.

Bonne méthode : on encadre $-y$, puis on additionne : $-3 \leq -y \leq -1$, donc $-1 \leq x - y \leq 4$.

Pour $\frac{x}{y}$ (positifs) : on encadre $\frac{1}{y}$, puis on multiplie.

3 Exercices**EXERCICE 4.1** ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier.

- a) Si $a < b$, alors $-5a < -5b$.
- b) Si $a \leq 3$ et $b \leq 4$, alors $ab \leq 12$.
- c) Si $0 < a < 1$, alors $a^3 < a$.
- d) Si $x < y$, alors $x^2 < y^2$.

EXERCICE 4.2 ★☆☆

Comparer par la différence (et factoriser si besoin) :

- a) $A = x^2 + 5$ et $B = 4x$, pour tout réel x ;
- b) $C = \frac{n}{n+1}$ et $D = \frac{n+1}{n+2}$, pour tout entier naturel n ;
- c) $E = \frac{3}{\sqrt{5}}$ et $F = \sqrt{5} - 1$.

EXERCICE 4.3 ★☆☆

On donne $2 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq -1$. Encadrer :

- a) $x + y$
- b) $x - y$
- c) $3x - 4$
- d) xy
- e) $\frac{1}{x}$

EXERCICE 4.4 ★★☆☆

Soit $a = 0,64$. Calculer a^2 , $\sqrt{a}$ et $\frac{1}{a}$, puis ranger les nombres a , a^2 , $\sqrt{a}$, 1 et $\frac{1}{a}$ dans l'ordre croissant. Reprendre avec $a = \frac{9}{4}$.

EXERCICE 4.5 ★★☆☆

Type examen régional. On donne $1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$ et $1,73 \leq \sqrt{3} \leq 1,74$.

1. Encadrer $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ et $\sqrt{6}$.
2. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, puis en déduire un encadrement de $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

EXERCICE 4.6 ★★☆☆

Une parcelle à Meknès. Un agriculteur mesure une parcelle rectangulaire : sa longueur L et sa largeur ℓ , en mètres, vérifient $12,4 \leq L \leq 12,6$ et $8,3 \leq \ell \leq 8,5$.

1. Encadrer le périmètre P et l'aire $\mathcal{A}$ de la parcelle.
2. Il veut la clôturer avec un grillage vendu en rouleaux de 10 m. Combien de rouleaux doit-il acheter pour être sûr d'en avoir assez ?

EXERCICE 4.7 ★★☆☆

Le nombre d'or. On pose $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et on donne $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$.

1. Encadrer φ , puis donner son arrondi à 10^{-3} .
2. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$, puis que $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.
3. En déduire un encadrement de $\frac{1}{\varphi}$ et de φ^2 .

4 Défis olympiades**○ DÉFI OLYMPIADE 4.1 — Une inégalité très utile**

1. Montrer que pour tous réels a et b : $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Quand a-t-on l'égalité ?
2. En déduire que pour tous réels $a, b > 0$: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
3. Parmi tous les rectangles d'aire 36 m^2 , lequel a le plus petit périmètre ?

○ DÉFI OLYMPIADE 4.2 — Un encadrement très fin

1. Montrer que $45 < \sqrt{2026} < 46$.
2. Montrer que $\sqrt{2026} - 45 = \frac{1}{\sqrt{2026} + 45}$.
3. En déduire que $45 + \frac{1}{91} < \sqrt{2026} < 45 + \frac{1}{90}$, puis l'arrondi de $\sqrt{2026}$ à 10^{-3} sans calculatrice.

Équations et inéquations

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Résoudre une équation du premier degré et les équations qui s'y ramènent (produit nul, $x^2 = a$, dénominateurs).
- ✓ Mettre un problème en équation ou en inéquation, le résoudre et conclure.
- ✓ Résoudre une inéquation du premier degré et représenter ses solutions sur une droite graduée.

1 L'essentiel du cours

➤ Équations du premier degré à une inconnue

DÉFINITION

Une **équation du premier degré** d'inconnue x est une égalité qui peut s'écrire $ax + b = 0$ où a et b sont des réels donnés. **Résoudre** l'équation, c'est trouver *toutes* ses solutions, c'est-à-dire toutes les valeurs de x qui rendent l'égalité vraie.

PROPRIÉTÉ — Règles de transformation

On obtient une équation qui a les mêmes solutions (équation *équivalente*) si l'on :

- ajoute ou retranche un même nombre aux deux membres ;
- multiplie ou divise les deux membres par un même nombre **non nul**.

PROPRIÉTÉ — Solutions de $ax + b = 0$

Si $a \neq 0$: une seule solution,

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Si $a = 0$ et $b = 0$: on obtient
 $0x = 0$; *tout réel* est solution.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$: par exemple $0x = 5$; *aucune* solution.

EXEMPLE $5x - 7 = 2x + 8 \iff 5x - 2x = 8 + 7 \iff 3x = 15 \iff x = 5$. Vérification : $5 \times 5 - 7 = 18$ et $2 \times 5 + 8 = 18$. ✓

➤ Équation produit nul, équation $x^2 = a$

PROPRIÉTÉ — Produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

EXEMPLE $(2x + 1)^2 - 9 = 0 \iff (2x + 1 - 3)(2x + 1 + 3) = 0 \iff (2x - 2)(2x + 4) = 0 \iff x = 1$
ou $x = -2$.

PROPRIÉTÉ — Équation $x^2 = a$

Si $a > 0$: deux solutions, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Si $a = 0$: une seule solution, 0.

Si $a < 0$: aucune solution (un carré est toujours positif).

Exemples : $x^2 = 36 \iff x = 6$ ou $x = -6$; $x^2 = 7 \iff x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$; $x^2 = -4$ n'a pas de solution.

► Inéquations du premier degré**PROPRIÉTÉ — Règles pour les inéquations**

- Ajouter ou retrancher un même nombre aux deux membres **conserve** le sens de l'inégalité.
- Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre **strictement positif conserve** le sens.
- Multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre **strictement négatif change** le sens.

EXEMPLE — droite graduée Résolvons $-3x + 4 \geq x - 8$.

$-3x - x \geq -8 - 4$, soit $-4x \geq -12$,

donc $x \leq \frac{-12}{-4}$, c'est-à-dire $x \leq 3$.

(On divise par $-4 < 0$: le sens change.)

Les solutions sont les nombres x tels que $x \leq 3$.



Crochet tourné **vers** la partie colorée : 3 est solution ; tourné vers l'extérieur : il **ne l'est pas**.

2 Méthodes & astuces**MÉTHODE — Mettre un problème en équation : 4 étapes**

Au souk, un stylo coûte 4 DH de plus qu'un cahier. Hamza paie 68 DH pour 3 cahiers et 2 stylos. Prix d'un cahier ?

1. **Choix de l'inconnue** : soit x le prix d'un cahier (en DH) ; un stylo coûte $x + 4$.
2. **Mise en équation** : $3x + 2(x + 4) = 68$.
3. **Résolution** : $5x + 8 = 68 \iff 5x = 60 \iff x = 12$.
4. **Vérification et conclusion** : $3 \times 12 + 2 \times 16 = 36 + 32 = 68$. ✓ Un cahier coûte **12 DH**, un stylo 16 DH.

MÉTHODE — Équation avec des dénominateurs

On multiplie les deux membres par le **plus petit commun multiple** des dénominateurs, sans oublier les parenthèses :

$$\frac{x}{3} - \frac{x-1}{4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 12} 4x - 3(x-1) = 6 \iff x + 3 = 6 \iff x = 3.$$

MÉTHODE — Équation « du second degré » : factoriser d'abord !

1. Tout ramener dans un seul membre : $\dots = 0$.
2. Factoriser (facteur commun, identité remarquable $a^2 - b^2$, ...).
3. Appliquer la règle du produit nul.

✗ **PIÈGE À ÉVITER** — Ne jamais diviser par une expression qui contient x

Pour $(x-1)(x-2) = (x-1)(2x+3)$, « simplifier par $x-1$ » donne $x-2 = 2x+3$, soit $x = -5$: on **perd** la solution $x = 1$!

Bonne méthode : $(x-1)(x-2) - (x-1)(2x+3) = 0 \iff (x-1)(-x-5) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -5$.

★ **ASTUCE DU PROF** — Le réflexe du signe

Dans une inéquation, regrouper les x du côté où leur coefficient est **positif** : on évite de diviser par un négatif. Ex. : $2 - 5x \geq 3x + 18 \iff 2 - 18 \geq 3x + 5x \iff -16 \geq 8x \iff x \leq -2$.

LE SAVAIS-TU ?

Le mot « algèbre » vient de *al-jabr*, titre du livre d'**al-Khwārizmī** (Bagdad, IX^e siècle) : *al-jabr* désigne l'opération qui fait passer un terme soustrait dans l'autre membre. Au XIII^e siècle, le Marrakchi **Ibn al-Bannā** enseignait ces méthodes dans son célèbre *Talkhīs a'māl al-hisāb*.

3 Exercices

EXERCICE 5.1 ★☆☆

Résoudre les équations suivantes.

a) $4x - 9 = 11$

b) $7 - 2x = 3x + 22$

c) $3(x - 2) = 2(x + 1) - 5$

d) $2(x + 3) = 2x + 6$

e) $5x - (2x - 1) = 3x + 4$

f) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$

EXERCICE 5.2 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier.

a) -2 est une solution de l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$.

b) L'équation $x^2 = -9$ a deux solutions : 3 et -3 .

c) Si $-2x > 6$, alors $x > -3$.

d) Les équations $2x = 6$ et $x^2 = 9$ ont exactement les mêmes solutions.

EXERCICE 5.3 ★☆☆

Résoudre en utilisant la règle du produit nul.

a) $(3x - 6)(x + 5) = 0$

b) $x^2 = 7x$

c) $(x + 1)^2 - 4x^2 = 0$

d) $(2x - 1)(x + 3) = (2x - 1)(4x - 2)$

EXERCICE 5.4 ★☆☆

Résoudre :

a) $x^2 = 49$

b) $2x^2 - 10 = 0$

c) $(x - 3)^2 = 16$

d) $\frac{x+1}{4} - \frac{x-2}{6} = 1$

EXERCICE 5.5 ★★☆☆

Résoudre chaque inéquation, puis représenter ses solutions sur une droite graduée.

a) $3x - 5 < 7$

b) $2 - 5x \geq 17$

c) $\frac{x}{2} - 1 > \frac{x+1}{3}$

d) $3(x - 2) \leq x + 7$

EXERCICE 5.6 ★★☆☆

Un père a 41 ans et son fils 9 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de celui de son fils ? (Appliquer les 4 étapes.)

EXERCICE 5.7 ★★☆☆

Une piscine de Rabat propose deux tarifs : **A** : 40 DH par séance ; **B** : abonnement annuel de 180 DH, puis 25 DH par séance.

1. Calculer le prix payé avec chaque tarif pour 10 séances, puis pour 12 séances.
2. À partir de combien de séances le tarif B est-il strictement plus avantageux ?

EXERCICE 5.8 ★★★

(Type examen régional) On considère $E = (3x - 1)^2 - (3x - 1)(x + 4)$.

1. Développer et réduire E .
2. Factoriser E .
3. Résoudre l'équation $E = 0$.
4. En utilisant la forme développée, résoudre l'équation $E = 5$.

EXERCICE 5.9 ★★★

Un marchand d'oranges de Berkane vend le tiers de son stock le matin, puis le quart de ce qui reste l'après-midi. Le soir, il lui reste 90 kg. Quel était son stock initial ?

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 5.1 — Le bon coup d'œil

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\frac{x-1}{2025} + \frac{x-2}{2024} + \frac{x-3}{2023} = 3$.

○ DÉFI OLYMPIADE 5.2 — Nombre mystère

Un nombre N de deux chiffres est égal à 4 fois la somme de ses chiffres.

1. Montrer que son chiffre des unités est le double de son chiffre des dizaines, puis donner toutes les valeurs possibles de N .
2. En permutant ses deux chiffres, on obtient un nombre qui dépasse N de 27. Trouver N .

Systemes de deux equations à deux inconnues

- ✓ Vérifier qu'un couple est solution d'un système de deux équations du premier degré.
- ✓ Résoudre un système par substitution ou par combinaison linéaire, et l'interpréter graphiquement.
- ✓ Mettre en équation un problème concret à deux inconnues et le résoudre.

1 L'essentiel du cours

Un **système** de deux telles équations s'écrit $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$. **Résoudre** le système, c'est trouver tous les couples $(x; y)$ qui vérifient **les deux équations à la fois**.

EXEMPLE – vérifier un couple Pour le système $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$: $(1; 2) : 3 + 2 = 5 \checkmark$ mais $1 - 4 = -3 \neq 4$: **non solution.** $(2; -1) : 6 - 1 = 5 \checkmark$ et $2 + 2 = 4 \checkmark$: **solution.**

► Deux méthodes de résolution par le calcul

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 8 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$$

On remplace : $x + 2(3x - 3) = 8$, soit $7x - 6 = 8$, donc $x = 2$.

Puis $y = 3 \times 2 - 3 = 3$. Solution : $(2; 3)$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 & (\times 2) \\ 5x - 2y = 11 & (\times 3) \end{cases} \text{ donne } \begin{cases} 4x + 6y = 24 \\ 15x - 6y = 33 \end{cases}$$

On additionne : $19x = 57$, donc $x = 3$. Puis $6 + 3y = 12$, $y = 2$.

Solution : $(3; 2)$

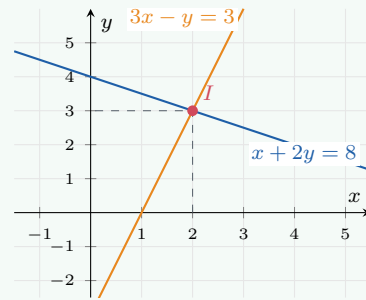
► Interprétation graphique

PROPRIÉTÉ

Lorsque $b \neq 0$, les couples solutions de $ax + by = c$ sont les coordonnées des points d'une **droite**.

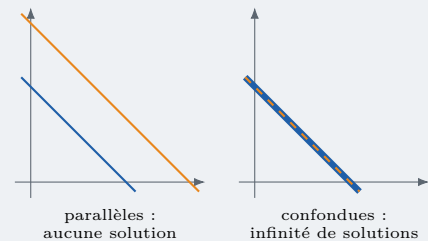
Résoudre un système revient donc à chercher le **point d'intersection** de deux droites.

Ici $x + 2y = 8 \iff y = -\frac{1}{2}x + 4$ et $3x - y = 3 \iff y = 3x - 3$: les deux droites se coupent en $I(2; 3)$, et $(2; 3)$ est bien la solution trouvée par substitution.


REMARQUE — Cas particuliers

Droites parallèles $\Rightarrow$ aucune solution. Ex. :
 $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ on aurait à la fois $x + y = 3$ et $x + y = 5$: impossible.

Droites confondues $\Rightarrow$ une **infinité** de solutions. Ex. :
 $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ la 2^e équation est la 1^{re} multipliée par 2 : tous les couples $(x; 3 - x)$ conviennent.


2 Méthodes & astuces
MÉTHODE — Résoudre un problème à l'aide d'un système

Au souk de Meknès, 3 cahiers et 2 stylos coûtent 26 DH ; 2 cahiers et 5 stylos coûtent 32 DH. Prix d'un cahier et d'un stylo ?

- Choix des inconnues** : x = prix d'un cahier, y = prix d'un stylo (en DH).
- Mise en système** : $\begin{cases} 3x + 2y = 26 \\ 2x + 5y = 32 \end{cases}$
- Résolution** : $(\times 2)$ et $(\times 3)$ donnent $6x + 4y = 52$ et $6x + 15y = 96$; on soustrait : $11y = 44$, $y = 4$, puis $x = 6$.
- Vérification et conclusion** : $18 + 8 = 26 \checkmark$ et $12 + 20 = 32 \checkmark$. Un cahier coûte **6 DH** et un stylo **4 DH**.

★ ASTUCE DU PROF — Choisir la bonne méthode

- Une inconnue a pour coefficient 1 ou $-1 \Rightarrow$ **substitution**, rapide et sans fractions.
- Tous les coefficients sont « gros » $\Rightarrow$ **combinaison** : on évite les fractions.
- Coefficients **croisés** ($ax + by$ et $bx + ay$) $\Rightarrow$ on **additionne** puis on **soustrait** les équations.

Ex. : $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ donne $x + y = 3$ et $x - y = 1$, d'où $x = 2$, $y = 1$.

❌ PIÈGE À ÉVITER

- En multipliant une équation, on multiplie **tous** les termes, y compris le second membre.
- En soustrayant deux équations, on change le signe de **tous** les termes de l'équation retranchée.
- Un couple solution doit vérifier **les deux** équations : toujours vérifier dans les deux !

LE SAVAIS-TU ?

Il y a plus de 2000 ans, le traité chinois *Les Neuf Chapitres sur l'art du calcul* résolvait déjà des systèmes en disposant les coefficients dans un tableau et en éliminant les inconnues une à une : c'est exactement l'idée de la combinaison linéaire, encore utilisée aujourd'hui par les ordinateurs.

3 Exercices

EXERCICE 6.1 ★☆☆

QCM. Choisir la bonne réponse (une seule par question).

- La solution de $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$ est : a) (6 ; 4) b) (7 ; 3) c) (3 ; 7).
- Le couple (2 ; -1) est solution de : a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$
- Le système $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ a : a) une solution b) aucune solution c) une infinité de solutions.

EXERCICE 6.2 ★☆☆

Résoudre par **substitution** : a) $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$

EXERCICE 6.3 ★☆☆

Résoudre par **combinaison linéaire** : a) $\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$

EXERCICE 6.4 ★☆☆

Résoudre le système $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = \frac{13}{10} \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -\frac{5}{3} \end{cases}$ (commencer par supprimer les dénominateurs).

EXERCICE 6.5 ★☆☆

On considère les droites (D) : $y = x - 1$ et (Δ) : $y = -2x + 5$.

- Tracer (D) et (Δ) dans un repère orthonormé.
- Lire les coordonnées de leur point d'intersection K.
- En déduire la solution du système $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$, puis la vérifier par le calcul.

EXERCICE 6.6 ★☆☆

Dans un cinéma de Casablanca, une famille de 2 adultes et 3 enfants paie 190 DH ; une autre famille de 3 adultes et 2 enfants paie 210 DH.

- Quel est le prix d'un billet adulte ? d'un billet enfant ?
- Combien paiera une famille de 3 adultes et 5 enfants ?

EXERCICE 6.7 ★★★*(Type examen régional)*

- Résoudre le système $\begin{cases} 2x + y = 85 \\ x + 3y = 105 \end{cases}$
- Chez une fleuriste de Rabat, Salma paie 85 DH pour 2 bouquets de roses et 1 bouquet de tulipes ; Omar paie 105 DH pour 1 bouquet de roses et 3 bouquets de tulipes. Quel est le prix de chaque bouquet ?

EXERCICE 6.8 ★★★

Un torréfacteur de Fès mélange un café à 120 DH le kg et un café à 80 DH le kg.

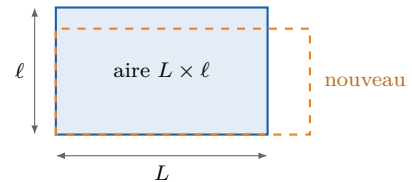
- Il veut obtenir 20 kg d'un mélange vendu 95 DH le kg (sans gain ni perte). Quelle masse de chaque café utilise-t-il ?
- Quel serait le prix d'un kg de mélange s'il prenait 5 kg du premier café et 15 kg du second ?

EXERCICE 6.9 ★★★

Un terrain rectangulaire de la région de Settat a un périmètre de 64 m. Si l'on augmente sa longueur de 4 m et que l'on diminue sa largeur de 2 m, son aire ne change pas.

On note L sa longueur et ℓ sa largeur (en m).

- Montrer que $L + \ell = 32$ et que $L = 2\ell - 4$.
- En déduire les dimensions du terrain.

**4 Défis olympiades****○ DÉFI OLYMPIADE 6.1 — Somme et produit**

Les réels x et y vérifient $x + y = 7$ et $x^2 + y^2 = 25$.

- Calculer xy , puis $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.
- Calculer $(x - y)^2$, puis trouver toutes les valeurs possibles de x et y .
- Sans utiliser le résultat de la question 2, calculer $x^3 + y^3$.
(On pourra développer $(x + y)^3 = (x + y)^2(x + y)$.)

○ DÉFI OLYMPIADE 6.2 — Coefficients jumeaux

Résoudre, sans calculatrice : a) $\begin{cases} 2025x + 2026y = 2027 \\ 2026x + 2025y = 2024 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 99x + 101y = 499 \\ 101x + 99y = 501 \end{cases}$

Fonctions linéaires et fonctions affines

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Calculer une image, un antécédent, et déterminer une fonction linéaire ou affine à partir de données.
- ✓ Représenter graphiquement une fonction linéaire ou affine et exploiter une lecture graphique.
- ✓ Modéliser des pourcentages et comparer des tarifs à l'aide de fonctions.

1 L'essentiel du cours

► Fonctions linéaires

DÉFINITION — Fonction linéaire

Soit a un réel. La fonction f qui à tout réel x associe le réel ax est appelée **fonction linéaire de coefficient a** . On note $f : x \mapsto ax$ ou $f(x) = ax$.

- $f(x)$ est l'**image** de x par f ; si $f(x) = y$, on dit que x est un **antécédent** de y .

EXEMPLE $f(x) = -3x$: l'image de 2 est $f(2) = -6$; l'antécédent de 12 vérifie $-3x = 12$, soit $x = -4$.

PROPRIÉTÉ — Fonction linéaire et proportionnalité

- Les images $f(x)$ sont **proportionnelles** aux nombres x ; le coefficient de proportionnalité est a .
- Pour tout $x \neq 0$: $a = \frac{f(x)}{x}$. Ex. : si $f(4) = 10$, alors $a = \frac{10}{4} = 2,5$.
- $f(x + x') = f(x) + f(x')$ et $f(kx) = k f(x)$.

x	1	2	4	10
$f(x)$	2,5	5	10	25

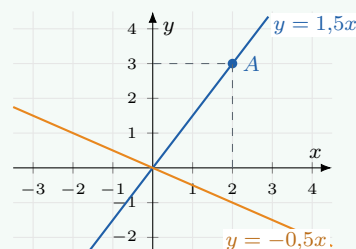
$\times 2,5$ pour passer d'une ligne à l'autre

PROPRIÉTÉ — Représentation graphique

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire $f : x \mapsto ax$ est une **droite qui passe par l'origine O** du repère.

Le nombre a est le **coefficient directeur** (ou pente) de cette droite : quand x augmente de 1, y varie de a .

Pour la tracer, il suffit de placer **un seul point** autre que O : par exemple $A(2; 3)$ pour $f(x) = 1,5x$.



PROPRIÉTÉ — Pourcentages

- **Augmenter** une quantité de $t\%$, c'est la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$. Ex. : 250 DH + 20 % : $250 \times 1,2 = 300$ DH.
- **Diminuer** une quantité de $t\%$, c'est la multiplier par $1 - \frac{t}{100}$. Ex. : 250 DH - 30 % : $250 \times 0,7 = 175$ DH.

Une variation de $t\%$ est donc modélisée par une **fonction linéaire**.

► Fonctions affines

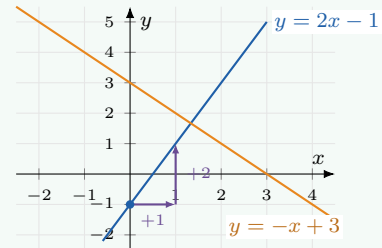
DÉFINITION — Fonction affine

Soient a et b deux réels. La fonction $f : x \mapsto ax + b$ est appelée **fonction affine**; a est son **coefficient directeur** et b son **ordonnée à l'origine**.

Cas particuliers : si $b = 0$, f est **linéaire**; si $a = 0$, f est **constante**.

PROPRIÉTÉ — Représentation graphique, variations

- La représentation graphique de $f : x \mapsto ax + b$ est une **droite** qui coupe l'axe des ordonnées au point $(0; b)$.
- Pour tous $x_1 \neq x_2$:
$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
- Si $a > 0$, f est **croissante**; si $a < 0$, f est **décroissante**; si $a = 0$, f est **constante**.



2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Déterminer une fonction affine connaissant deux images

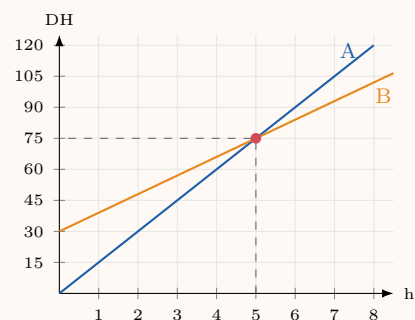
Trouver la fonction affine f telle que $f(1) = 5$ et $f(3) = 11$.

- On calcule a : $a = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{11 - 5}{2} = 3$.
- On calcule b avec une des images : $f(1) = 3 \times 1 + b = 5$, donc $b = 2$. Conclusion : $f(x) = 3x + 2$
- On vérifie avec l'autre image : $f(3) = 9 + 2 = 11$ ✓

MÉTHODE — Comparer deux tarifs

À Essaouira, on loue un vélo : tarif A, 15 DH l'heure ; tarif B, 30 DH de caution non remboursée puis 9 DH l'heure.

- On modélise : $A(x) = 15x$ (linéaire), $B(x) = 9x + 30$ (affine), x en heures.
- On résout $A(x) = B(x)$: $15x = 9x + 30 \iff x = 5$; les deux tarifs coûtent alors 75 DH.
- On lit la position des droites : en dessous de 5 h, le tarif A est moins cher ; au-delà, c'est le tarif B.



❌ PIÈGE À ÉVITER — Les pourcentages ne s'additionnent pas

Un prix qui augmente de 20% puis baisse de 20% est multiplié par $1,2 \times 0,8 = 0,96$: il a **baissé de 4%**, il ne revient pas à sa valeur initiale ! Autre piège : pour $f(x) = 3 - 2x$, le coefficient est $a = -2$ et l'ordonnée à l'origine $b = 3$ (et non l'inverse).

LE SAVAIS-TU ?

Au Maroc, le taux normal de la TVA est de 20 % : le prix TTC s'obtient en multipliant le prix HT par 1,2. La fonction « prix HT $\mapsto$ prix TTC » est donc une fonction linéaire de coefficient 1,2.

3 Exercices

EXERCICE 7.1 ★☆☆

QCM. Parmi les fonctions $f(x) = 5x$; $g(x) = 2x + 1$; $h(x) = x^2$; $k(x) = 3 - x$; $m(x) = (x + 1)^2 - x^2$:

- lesquelles sont linéaires ? a) f seulement b) f et h c) f et k
- lesquelles sont affines ? a) f, g, k b) f, g, k, m c) toutes

EXERCICE 7.2 ★☆☆

f est une fonction linéaire telle que $f(5) = -15$.

- Déterminer $f(x)$.
- Calculer l'image de -2 .
- Trouver l'antécédent de 21.

EXERCICE 7.3 ★★☆☆

Au souk de Marrakech :

- Un tapis coûte 2 400 DH ; son prix augmente de 15 %. Quel est son nouveau prix ?
- Après une remise de 25 %, un caftan coûte 1 350 DH. Quel était son prix initial ?
- Un prix augmente de 10 %, puis diminue de 10 %. Quelle est l'évolution globale ?

EXERCICE 7.4 ★★☆☆

Dans un magasin de Rabat, le prix TTC s'obtient en ajoutant au prix HT une TVA de 20 %.

- Exprimer le prix TTC $p(x)$ en fonction du prix HT x . Quelle est la nature de la fonction p ?
- Un téléphone coûte 2 400 DH HT : quel est son prix TTC ? Un casque coûte 540 DH TTC : quel est son prix HT ?
- Pendant les soldes, tous les prix TTC baissent de 15 %. Exprimer le prix soldé $s(x)$ en fonction du prix HT x . Le prix soldé est-il inférieur au prix HT ?

EXERCICE 7.5 ★★☆☆

f est une fonction affine telle que $f(-1) = 7$ et $f(3) = -1$.

- Déterminer l'expression de $f(x)$.
- Calculer l'antécédent de 0 par f .
- Préciser le sens de variation de f .

EXERCICE 7.6 ★★☆☆

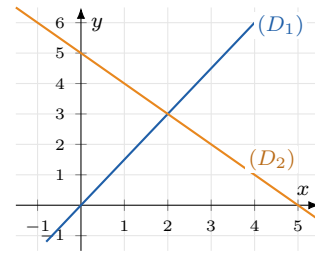
Un réservoir d'eau d'un village près d'Ouarzazate contient 1 200 L. On en consomme 80 L par jour. On note $V(x)$ le volume restant après x jours.

- Exprimer $V(x)$ en fonction de x . Quelle est la nature de la fonction V ?
- Calculer $V(6)$.
- Au bout de combien de jours le réservoir sera-t-il vide ?

EXERCICE 7.7 ★★☆☆

Ci-contre, (D_1) et (D_2) représentent une fonction linéaire f et une fonction affine g .

1. Quelle droite représente f ? Pourquoi ?
2. Lire $f(2)$, $g(0)$ et l'antécédent de 5 par g .
3. Déterminer $f(x)$ et $g(x)$.
4. Lire les coordonnées du point d'intersection des deux droites et le vérifier par le calcul.

**EXERCICE 7.8** ★★☆☆

(Type examen régional) On considère les fonctions $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x$.

1. Calculer $f(2)$ et déterminer l'antécédent de 5 par f .
2. Quelle est la nature de g ? Préciser son coefficient.
3. Tracer (D_f) et (D_g) dans un même repère orthonormé.
4. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ et en déduire les coordonnées du point d'intersection de (D_f) et (D_g) .

EXERCICE 7.9 ★★☆☆

Une salle de sport de Tanger propose trois formules mensuelles : **A** : 50 DH la séance ; **B** : 150 DH d'abonnement puis 30 DH la séance ; **C** : forfait illimité à 500 DH.

1. Exprimer le prix $A(n)$ et $B(n)$ pour n séances dans le mois.
2. Quelle est la formule la moins chère pour 6 séances ? pour 10 séances ?
3. À partir de combien de séances la formule B est-elle moins chère que A ? Et C moins chère que B ?

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 7.1 — Fonction composée

1. Trouver toutes les fonctions affines f telles que, pour tout réel x : $f(f(x)) = 4x + 3$.
2. Existe-t-il une fonction affine g telle que, pour tout réel x : $g(g(x)) = -x + 1$?

○ DÉFI OLYMPIADE 7.2 — Hausse et baisse

1. Le prix d'un article augmente de $t\%$, puis baisse de $t\%$. Au total, il a baissé de 4% . Trouver t .
2. Un prix augmente de 25% . De quel pourcentage doit-il baisser pour revenir à sa valeur initiale ?

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Organiser une série statistique : effectifs, fréquences, effectifs cumulés, regroupement en classes.
- ✓ Calculer et interpréter la moyenne, le mode, la médiane et l'étendue d'une série.
- ✓ Lire et construire un diagramme en bâtons, un diagramme circulaire et un histogramme.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Vocabulaire

On étudie un **caractère** (note, taille...) sur une **population**. Il est **quantitatif discret** s'il prend des valeurs isolées (note entière, pointure), **continu** s'il peut prendre toutes les valeurs d'un domaine (taille, durée) : on regroupe alors les valeurs en **classes**.

- **Effectif** d'une valeur : nombre d'individus ayant cette valeur. **Effectif total** : N .
- **Fréquence** : $f = \frac{\text{effectif}}{N}$, souvent en % ; la somme des fréquences vaut 1 (100 %).
- **Effectif cumulé croissant** (ECC) : somme des effectifs des valeurs inférieures ou égales.

DÉFINITION — Paramètres d'une série

- **Moyenne** (pondérée par les effectifs) : $\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{N}$. Pour des classes, on utilise les **centres** des classes (centre de $150 \leq t < 155$: 152,5).
- **Mode** : valeur de plus grand effectif (**classe modale** pour des classes). **Étendue** : plus grande valeur – plus petite valeur.
- **Médiane** M : elle partage la série *rangée dans l'ordre croissant* en deux groupes de même effectif. N impair : valeur de rang $\frac{N+1}{2}$; N pair : moyenne des valeurs de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$.

EXEMPLE — notes sur 20 d'une classe de 3APIC à Kénitra

Note	8	10	12	14	16
Effectif	2	4	7	5	2
Fréquence	10 %	20 %	35 %	25 %	10 %
ECC	2	6	13	18	20
Angle	36°	72°	126°	90°	36°

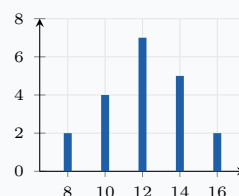


Diagramme en bâtons

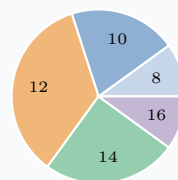


Diagramme circulaire

$N = 20$; $\bar{x} = \frac{2 \times 8 + 4 \times 10 + 7 \times 12 + 5 \times 14 + 2 \times 16}{20} = \frac{242}{20} = 12,1$; mode : 12 ; étendue : $16 - 8 = 8$.

Médiane : N est pair, M est la moyenne des 10^e et 11^e notes ; d'après les ECC, ces deux notes valent 12 (rangs 7 à 13), donc $M = 12$.

Diagramme circulaire : $\text{angle} = f \times 360^\circ$ (ex. : $35\% \times 360^\circ = 126^\circ$) ; la somme des angles vaut 360° .

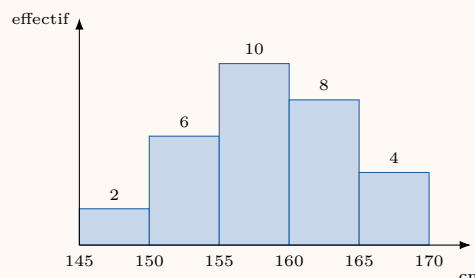
2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Histogramme et moyenne pour des classes

Tailles (en cm) de 30 élèves d'un collège de Fès. Pour des classes de même amplitude, on trace des rectangles **accollés** de hauteurs proportionnelles aux effectifs. Avec les centres 147,5 ; 152,5 ; ... ; 167,5 :

$$\bar{x} = \frac{2 \times 147,5 + 6 \times 152,5 + \dots + 4 \times 167,5}{30} = \frac{4755}{30} = 158,5 \text{ cm.}$$

Classe modale : $155 \leq t < 160$.



★ ASTUCE DU PROF — Moyenne astucieuse

Pour 498 ; 503 ; 501 ; 497 ; 506, les écarts à 500 (−2 ; 3 ; 1 ; −3 ; 6) ont pour moyenne 1, donc $\bar{x} = 501$. Ajouter 1 point à toutes les notes augmente moyenne et médiane de 1, sans changer l'étendue.

✗ PIÈGE À ÉVITER

- La médiane se cherche sur la série **rangée** : pour 3 ; 9 ; 4, elle vaut 4, pas 9.
- Pas de moyenne de deux moyennes ! 20 élèves ont 12 de moyenne, 30 élèves ont 13 : la moyenne des 50 élèves est $\frac{20 \times 12 + 30 \times 13}{50} = 12,6$ (et non 12,5).

3 Exercices

EXERCICE 8.1 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier.

- La série 4 ; 7 ; 7 ; 10 ; 12 a pour moyenne 8 et pour mode 7.
- La médiane de la série 3 ; 9 ; 4 ; 12 ; 7 ; 1 est 7.
- Si on multiplie toutes les valeurs d'une série par 2, sa moyenne est multipliée par 2.

EXERCICE 8.2 ★☆☆

Températures minimales (en °C) relevées à Ifrane pendant 8 jours de janvier :

−6 ; −4 ; 1 ; −2 ; 0 ; −5 ; 3 ; −3.

- Calculer la moyenne, la médiane et l'étendue.
- Combien de jours dépassent la moyenne ?

EXERCICE 8.3 ★☆☆

Pointures de 40 élèves d'un collège de Safi :

Pointure	38	39	40	41	42	43
Effectif	4	7	12	9	6	2

- Calculer les fréquences (en %) et les effectifs cumulés croissants.
- Calculer la moyenne ; donner le mode et la médiane.
- Quel pourcentage d'élèves chausse du 41 ou plus ?

EXERCICE 8.4 ★★☆☆

Dans le tableau ci-contre, l'effectif x a été effacé. On sait que la moyenne de la série est 11. Calculer x , puis l'effectif total.

Note	8	10	12	15
Effectif	3	x	6	4

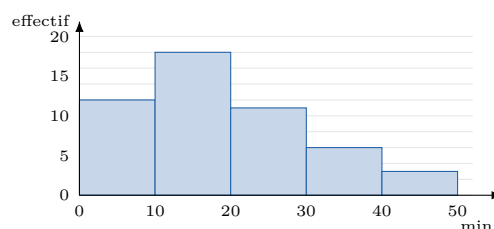
EXERCICE 8.5 ★★☆☆

On a demandé à 72 élèves d'un collège d'Agadir leur sport préféré : football 30, basket-ball 18, natation 12, athlétisme 8, tennis 4. 1. Calculer la fréquence du basket-ball. 2. Calculer l'angle de chaque secteur, puis construire le diagramme circulaire.

EXERCICE 8.6 ★★☆☆

L'histogramme ci-contre donne la durée (en minutes) du trajet domicile-collège de 50 élèves de Tétouan.

1. Dresser le tableau des effectifs par classes.
2. Quelle est la classe modale ?
3. Calculer une valeur approchée de la durée moyenne.
4. Quel pourcentage d'élèves met moins de 20 minutes ?


EXERCICE 8.7 ★★☆☆

(Type examen régional) Notes de 30 élèves :

Note	6	9	11	13	16
Effectif	3	4	10	9	4

1. Calculer la moyenne de la classe.
2. Déterminer les effectifs cumulés croissants, puis la médiane. Interpréter.
3. Quel pourcentage d'élèves a obtenu la moyenne (10 ou plus) ? (arrondir à 0,1 près)
4. Le professeur ajoute 1 point à chaque copie. Donner sans calcul la nouvelle moyenne, la nouvelle médiane et la nouvelle étendue.

4 Défis olympiades
○ DÉFI OLYMPIADE 8.1 — La note qui manque

1. Dans une classe de 30 élèves, la moyenne est 12. Les 18 filles ont une moyenne de 13. Quelle est la moyenne des garçons ?
2. Après 4 contrôles sur 20, Amine a 11 de moyenne. Il en reste deux. Peut-il finir avec au moins 13 de moyenne ? Quelle note minimale lui faut-il au 5^e s'il a 20 au 6^e ?

○ DÉFI OLYMPIADE 8.2 — Moyenne et médiane ne réagissent pas pareil

Notes de 9 élèves : 7 ; 9 ; 10 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 18 ; 19. Un 10^e élève arrive avec la note x ($0 \leq x \leq 20$).

1. Calculer la moyenne et la médiane des 9 notes.
2. Exprimer la nouvelle moyenne en fonction de x . Peut-elle augmenter d'un point ?
3. Montrer que la nouvelle médiane est toujours comprise entre 12,5 et 13,5.

Le théorème de Thalès

OBJECTIFS DU CHAPITRE

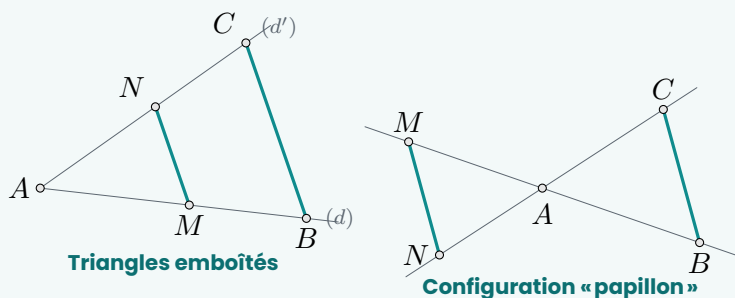
- ✓ Calculer une longueur avec le théorème de Thalès (triangles emboîtés ou « papillon »).
- ✓ Démontrer que deux droites sont parallèles (réciproque) ou ne le sont pas (contraposée).
- ✓ Utiliser Thalès dans la vie courante : partage d'un segment, agrandissement, hauteur d'une tour.

1 L'essentiel du cours

THÉORÈME — de Thalès

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A . Soient B et M deux points de (d) , C et N deux points de (d') , tous distincts de A . **Si** les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**, **alors** :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



REMARQUE — un tableau de proportionnalité

Les longueurs du « petit » triangle AMN sont proportionnelles à celles du « grand » triangle ABC : on écrit toujours les côtés **issus du sommet commun** A d'abord, puis les côtés parallèles.

Triangle AMN	AM	AN	MN
Triangle ABC	AB	AC	BC

THÉORÈME — réciproque de Thalès

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A , B et M deux points de (d) , C et N deux points de (d') , distincts de A . **Si** $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ **et si** les points A, M, B et A, N, C sont **alignés dans le même ordre**, **alors** les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

PROPRIÉTÉ — conséquence : la contraposée

Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$, **alors** les droites (MN) et (BC) **ne sont pas** parallèles.

PROPRIÉTÉ — agrandissement — réduction

Dans une configuration de Thalès, le triangle AMN est une réduction ($k < 1$) ou un agrandissement ($k > 1$) du triangle ABC de rapport $k = \frac{AM}{AB}$:

$$\text{longueurs} \times k \quad \bullet \quad \text{angles conservés} \quad \bullet \quad \text{aires} \times k^2.$$

2 Méthodes & astuces**MÉTHODE — Calculer une longueur : la rédaction modèle**

Sur la figure « triangles emboîtés », $(MN) \parallel (BC)$, $AM = 2$ cm, $AB = 5$ cm, $AC = 6$ cm et $BC = 4,5$ cm.

« Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et $(MN) \parallel (BC)$. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad \text{soit} \quad \frac{2}{5} = \frac{AN}{6} = \frac{MN}{4,5}.$$

Par produit en croix : $AN = \frac{2 \times 6}{5} = 2,4$ cm et $MN = \frac{2 \times 4,5}{5} = 1,8$ cm. »

MÉTHODE — Parallèles ou pas ?

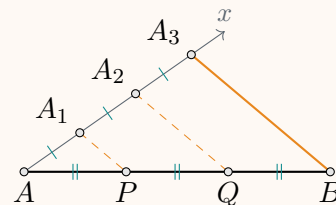
1. Calculer **séparément** $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ (on n'écrit pas « = » avant de l'avoir prouvé!).
2. S'ils sont égaux et si les points sont dans le même ordre : réciproque $\Rightarrow$ droites parallèles.
3. S'ils sont différents : conséquence du théorème $\Rightarrow$ droites non parallèles.

★ ASTUCE DU PROF — comparer avec les produits en croix, pas avec des arrondis

$\frac{3}{7} \approx 0,43$ et $\frac{4,3}{10} = 0,43 \dots$ mais $3 \times 10 = 30 \neq 7 \times 4,3 = 30,1$: les rapports sont **différents**, donc les droites ne sont pas parallèles. Une valeur approchée ne prouve jamais une égalité.

MÉTHODE — Partager un segment en 3 parts égales (règle et compas)

1. Tracer une demi-droite $[Ax)$ et y reporter au compas 3 fois la même longueur : A_1, A_2, A_3 .
2. Tracer (A_3B) , puis les parallèles à (A_3B) passant par A_1 et A_2 : elles coupent $[AB]$ en P et Q .
3. D'après Thalès : $\frac{AP}{AB} = \frac{AA_1}{AA_3} = \frac{1}{3}$.

**❌ PIÈGE À ÉVITER**

- $\frac{MN}{BC}$ n'est **pas** égal à $\frac{AM}{MB}$: le troisième rapport utilise les côtés entiers AM et AB , issus de A .
- Dans la réciproque, l'égalité des rapports ne suffit pas : si $M \in [AB]$ mais que N est « de l'autre côté » de A , les droites (MN) et (BC) ne sont jamais parallèles.

LE SAVAIS-TU ?

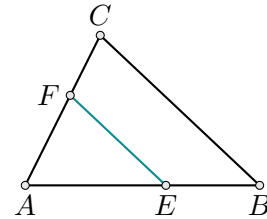
Selon la légende, Thalès de Milet (vers 600 av. J.-C.) mesura la hauteur de la pyramide de Khéops sans y grimper : les rayons du soleil étant parallèles, la pyramide et un simple bâton vertical forment avec leurs ombres une configuration de Thalès. C'est exactement la méthode de l'exercice 9.5 !

3 Exercices

EXERCICE 9.1 ★☆☆

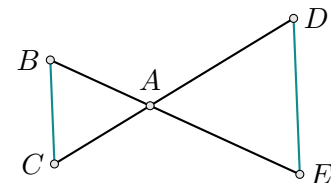
Sur la figure ci-contre, $E \in [AB]$, $F \in [AC]$ et $(EF) \parallel (BC)$.
On donne $AE = 3$ cm, $AB = 5$ cm, $AF = 4,2$ cm et $BC = 6$ cm.

1. Calculer AC .
2. Calculer EF .
3. En déduire la longueur FC .



EXERCICE 9.2 ★☆☆

Les droites (BE) et (CD) se coupent en A et $(BC) \parallel (DE)$.
On donne $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm, $BC = 4,8$ cm et $AE = 6$ cm.
Calculer AD et DE .



EXERCICE 9.3 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier. Dans un triangle ABC , $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$.

- a) $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$
- b) $\frac{AM}{MB} = \frac{MN}{BC}$
- c) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$
- d) Si $AB = 3 AM$, alors l'aire de ABC est le triple de celle de AMN .

EXERCICE 9.4 ★☆☆

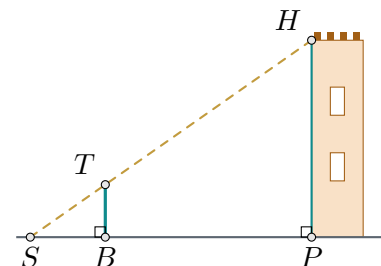
Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

1. A, M, B alignés dans cet ordre, ainsi que A, N, C ; $AM = 2,8$ cm, $AB = 4$ cm, $AN = 4,2$ cm, $AC = 6$ cm.
2. (MB) et (NC) se coupent en A , avec A entre M et B et entre N et C ; $AM = 3$ cm, $AB = 5$ cm, $AN = 4$ cm, $AC = 6,5$ cm.

EXERCICE 9.5 ★☆☆

La Koutoubia. Pour estimer la hauteur PH du minaret de la Koutoubia à Marrakech, Yassine plante verticalement un bâton $[BT]$ de 1,4 m, de sorte que l'extrémité de son ombre coïncide avec celle de l'ombre du minaret, au point S . Il mesure $SB = 1,8$ m et $SP = 99$ m.

1. Justifier que $(BT) \parallel (PH)$.
2. Calculer la hauteur du minaret.



EXERCICE 9.6 ★★☆☆

ABC est un triangle rectangle en A avec $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm. M est le point de $[AB]$ tel que $AM = 4,5$ cm ; la parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N .

1. Calculer BC , puis le rapport de réduction k qui transforme ABC en AMN .
2. En déduire AN , MN et le périmètre du triangle AMN .
3. Calculer l'aire de ABC et en déduire, sans autre mesure, celle de AMN .

EXERCICE 9.7 ★★☆☆

Type examen régional. ABC est un triangle tel que $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm et $BC = 7,5$ cm. E est le point de $[AB]$ tel que $AE = 2$ cm. La parallèle à (BC) passant par E coupe $[AC]$ en F ; la parallèle à (AC) passant par E coupe $[BC]$ en G .

1. Calculer AF et EF .
2. Calculer BG et EG .
3. Montrer que $EFCG$ est un parallélogramme et vérifier que $EF = GC$.
4. L est le point de $[AC]$ tel que $CL = 3$ cm. Montrer que $(GL) \parallel (AB)$.

EXERCICE 9.8 ★★☆☆

On dispose d'une règle **non graduée** et d'un compas. Sur un segment $[AB]$ quelconque, construire le point M tel que $AM = \frac{3}{5}AB$, puis justifier la construction.

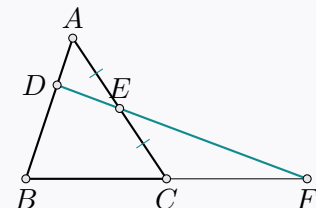
4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 9.1 — deux Thalès enchaînés

Dans un triangle ABC , D est le point de $[AB]$ tel que $AD = \frac{1}{3}AB$ et E est le milieu de $[AC]$. La droite (DE) coupe la droite (BC) en F .

Montrer que C est le milieu de $[BF]$.

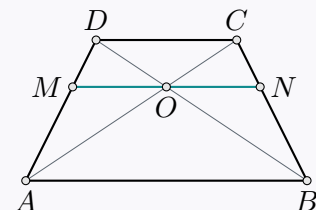
Piste : tracer la parallèle à (AB) passant par C ...



○ DÉFI OLYMPIADE 9.2 — le trapèze et ses diagonales

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, avec $AB = a$ et $CD = b$. Ses diagonales se coupent en O . La parallèle aux bases passant par O coupe $[AD]$ en M et $[BC]$ en N .

1. Montrer que $\frac{OM}{a} + \frac{ON}{b} = 1$.
2. En déduire que O est le milieu de $[MN]$, puis calculer MN lorsque $a = 6$ cm et $b = 3$ cm.



Trigonométrie dans le triangle rectangle

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Connaître et utiliser le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu.
- ✓ Utiliser les relations $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et les angles complémentaires.
- ✓ Calculer une longueur ou un angle et résoudre des problèmes concrets (échelle, rampe, élévation).

1 L'essentiel du cours

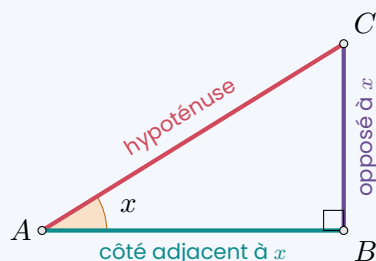
DÉFINITION — cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu

Dans un triangle ABC rectangle en B , pour l'angle aigu $x = \widehat{BAC}$:

$$\cos x = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin x = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan x = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BC}{AB}$$



PROPRIÉTÉ — encadrement et relations fondamentales

Pour tout angle aigu x :

- $0 < \cos x < 1$ et $0 < \sin x < 1$ (l'hypoténuse est le plus long côté) ;
- $\tan x > 0$ (elle peut dépasser 1).

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Preuve : $\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$ (Pythagore) et $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{BC}{AC} \times \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB} = \tan x$.

PROPRIÉTÉ — angles complémentaires

Dans le triangle ABC rectangle en B , $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 90^\circ$: le côté **opposé** à l'un est le côté **adjacent** à l'autre. Donc, pour tout angle aigu x :

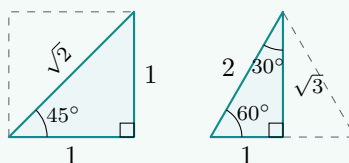
$$\sin(90^\circ - x) = \cos x$$

$$\cos(90^\circ - x) = \sin x$$

$$\tan x \times \tan(90^\circ - x) = 1$$

PROPRIÉTÉ — valeurs remarquables

x	30°	45°	60°
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



Demi-carré de côté 1 : diagonale $\sqrt{2}$. Demi-triangle équilatéral de côté 2 : hauteur $\sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.

2 Méthodes & astuces

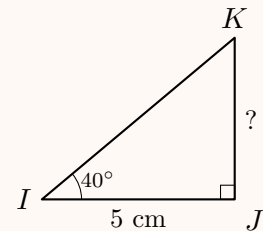
★ ASTUCE DU PROF — CAH — SOH — TOA

Pour ne jamais confondre : **C**osinus = **A**djacent / **H**ypoténuse ; **S**inus = **O**pposé / **H**ypoténuse ; **T**angente = **O**pposé / **A**djacent. On retient « **CAH-SOH-TOA** » (prononcer « casse-toi »!).

MÉTHODE — Calculer une longueur

1. Repérer l'angle connu, le côté connu et le côté cherché (adjacent, opposé ou hypoténuse).
2. Choisir la formule (CAH, SOH ou TOA) qui contient ces **deux** côtés.
3. Remplacer, puis isoler par produit en croix.

Exemple : IJK rectangle en J , $IJ = 5$ cm et $\widehat{JIK} = 40^\circ$. On cherche JK (opposé), on connaît IJ (adjacent) : TOA. $\tan 40^\circ = \frac{JK}{5}$, donc $JK = 5 \tan 40^\circ \approx 4,2$ cm.



MÉTHODE — Calculer un angle avec la calculatrice

On calcule d'abord un rapport, puis on utilise la touche $\boxed{\cos^{-1}}$, $\boxed{\sin^{-1}}$ ou $\boxed{\tan^{-1}}$ (souvent $\boxed{\text{SHIFT}}$ + $\boxed{\cos}$). *Exemple* : si $\cos x = \frac{4}{5} = 0,8$, alors $x = \cos^{-1}(0,8) \approx 36,9^\circ$.

✗ PIÈGE À ÉVITER

- La calculatrice doit être en mode **degrés** (« D » ou « DEG » à l'écran), sinon tous les résultats sont faux.
- Ces formules ne s'appliquent que dans un triangle **rectangle**, et pour un angle **aigu**.
- $\cos^2 x$ signifie $(\cos x)^2$; et $\sin 60^\circ \neq 2 \sin 30^\circ$: sin n'est pas proportionnel à l'angle !

LE SAVAIS-TU ?

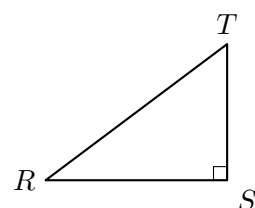
Le mot « sinus » vient d'une erreur de traduction ! Le mot sanskrit *jya* (« corde ») est devenu en arabe *jiba*, écrit sans voyelles *jb*, puis lu *jayb* (« repli, poche ») et traduit en latin par *sinus*, qui a le même sens. Les astronomes du monde arabo-musulman, comme Al-Battani (IX^e-X^e siècle), ont calculé des tables de sinus et de tangentes très précises, utilisées notamment pour déterminer la direction de la qibla.

3 Exercices

EXERCICE 10.1 ★☆☆

RST est rectangle en S , avec $RS = 8$ cm, $ST = 6$ cm et $RT = 10$ cm.

1. Nommer l'hypoténuse, le côté adjacent et le côté opposé à l'angle $\widehat{SRT}$.
2. Écrire $\cos \widehat{SRT}$, $\sin \widehat{SRT}$ et $\tan \widehat{SRT}$ sous forme irréductible.
3. Même question pour l'angle $\widehat{STR}$. Que remarque-t-on ?



EXERCICE 10.2 ★☆☆

Calculer les longueurs demandées (arrondir au dixième).

1. ABC est rectangle en A , $BC = 8$ cm et $\widehat{ABC} = 35^\circ$. Calculer AB et AC .
2. EFG est rectangle en E , $EF = 5$ cm et $\widehat{EFG} = 50^\circ$. Calculer EG et FG .

EXERCICE 10.3 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier (x désigne un angle aigu).

- a) Il existe un angle aigu x tel que $\cos x = 1,2$.
- b) $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$.
- c) $\sin 60^\circ = 2 \sin 30^\circ$.
- d) Si $\tan x = 1$, alors $x = 45^\circ$.
- e) $\cos^2 25^\circ + \cos^2 65^\circ = 1$.

EXERCICE 10.4 ★☆☆

Donner une valeur approchée au dixième de degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

1. ABC est rectangle en B , $AB = 7$ cm et $BC = 4$ cm.
2. ABC est rectangle en B , $AB = 5$ cm et $AC = 13$ cm. Calculer aussi BC et donner la valeur exacte de $\sin \widehat{BAC}$.

EXERCICE 10.5 ★☆☆

Sans calculatrice. x est un angle aigu tel que $\cos x = 0,6$.

1. Calculer $\sin x$ puis $\tan x$.
2. En déduire $\sin(90^\circ - x)$ et $\tan(90^\circ - x)$.
3. Pour tout angle aigu a , simplifier : $A = (\cos a + \sin a)^2 + (\cos a - \sin a)^2$ et $B = \frac{\sin a}{\cos(90^\circ - a)} + \tan a \tan(90^\circ - a)$.

EXERCICE 10.6 ★☆☆

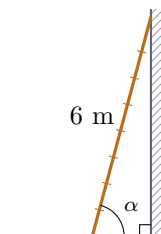
La rampe d'accès. Une école de Tanger doit construire une rampe pour fauteuils roulants permettant de franchir une marche de 45 cm. La norme impose une rampe faisant un angle d'au plus 5° avec le sol.

1. Une rampe de 5 m de long respecte-t-elle la norme ?
2. Quelle doit être la longueur minimale de la rampe (au cm près) ?

EXERCICE 10.7 ★☆☆

L'échelle. Pour repeindre la façade d'un riad à Fès, Karim pose une échelle de 6 m contre un mur vertical. Pour être stable, l'échelle doit faire avec le sol un angle compris entre 65° et 75° .

1. L'angle avec le sol est de 75° . À quelle hauteur arrive le haut de l'échelle ? À quelle distance du mur est son pied ? (au cm près)
2. Karim place le pied de l'échelle à 2 m du mur. L'échelle est-elle stable ?

**EXERCICE 10.8** ★★★

Type examen régional. ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ cm et $\widehat{ABC} = 60^\circ$; H est le pied de la hauteur issue de A .

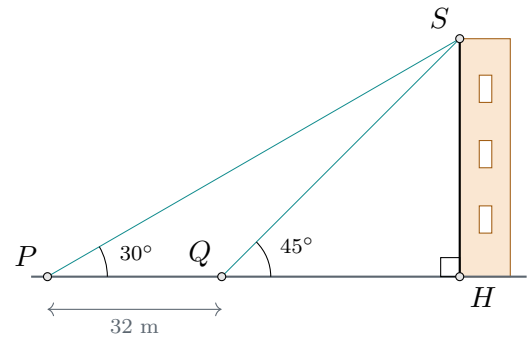
1. Calculer les valeurs exactes de BC et de AC .
2. Calculer AH et BH dans le triangle ABH . En déduire HC .
3. Vérifier que $AB \times AC = BC \times AH$ et interpréter ce résultat avec l'aire de ABC .
4. Calculer $\widehat{HAC}$, puis $\tan \widehat{HAC}$ dans le triangle AHC . Retrouver ainsi la valeur de $\tan 60^\circ$.

EXERCICE 10.9 ★★★

La tour Hassan. D'un point P de l'esplanade, Salma voit le sommet S de la tour Hassan à Rabat sous un angle d'élévation de 30° . Elle avance de 32 m jusqu'au point Q et voit alors le sommet sous un angle de 45° . On néglige la taille de Salma.

On note $h = SH$ la hauteur de la tour et $d = QH$.

1. Montrer que $d = h$, puis que $h + 32 = h\sqrt{3}$.
2. Calculer la valeur exacte de h , puis une valeur approchée au mètre près.
3. En déduire la valeur exacte de la distance PH .


4 Défis olympiades
○ DÉFI OLYMPIADE 10.1 — sans calculatrice

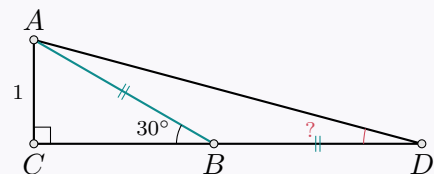
x est un angle aigu tel que $\tan x = 2$.

1. Calculer $E = \frac{3 \sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x}$ sans calculer $\sin x$ ni $\cos x$.
2. Calculer ensuite les valeurs exactes de $\cos x$ et $\sin x$.
3. y est l'angle aigu tel que $\tan y = \frac{1}{2}$. Sans calculatrice, montrer que $x + y = 90^\circ$.

○ DÉFI OLYMPIADE 10.2 — le secret de $\cos 15^\circ$

ABC est rectangle en C avec $AC = 1$ et $\widehat{ABC} = 30^\circ$. On place D sur la demi-droite $[CB)$, au-delà de B , tel que $BD = BA$.

1. Calculer AB et BC , puis montrer que $\widehat{ADB} = 15^\circ$.
2. Montrer que $AD^2 = 8 + 4\sqrt{3}$, puis que $AD = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.
3. En déduire $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ et $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.



Angles inscrits et angles au centre

OBJECTIFS DU CHAPITRE

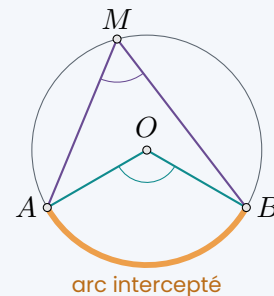
- ✓ Reconnaître un angle inscrit, un angle au centre et l'arc qu'ils interceptent.
- ✓ Utiliser la relation entre angle inscrit et angle au centre, et l'égalité des angles inscrits.
- ✓ Calculer les angles d'un polygone régulier et construire triangle équilatéral, carré, hexagone.

1 L'essentiel du cours

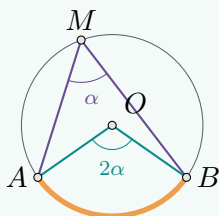
DÉFINITION — angle au centre, angle inscrit, arc intercepté

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et A, B, M trois points de $(\mathcal{C})$.

- $\widehat{AOB}$ est un **angle au centre** : son sommet est le centre du cercle.
- $\widehat{AMB}$ est un **angle inscrit** : son sommet est sur le cercle et ses côtés recoupent le cercle en A et B .
- L'arc $\widehat{AB}$ situé « à l'intérieur » de l'angle (celui qui ne contient pas M) est l'**arc intercepté** par ces deux angles.

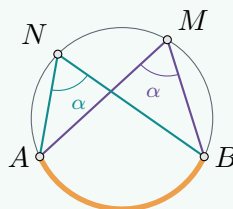


PROPRIÉTÉ — les trois propriétés fondamentales



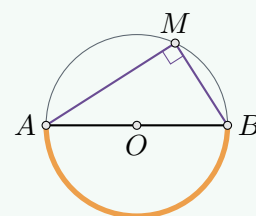
1. Un angle inscrit mesure la **moitié** de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$$



2. Deux angles inscrits qui interceptent le **même arc** sont égaux.

$$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$$



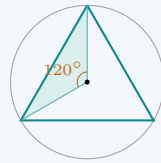
3. Un angle inscrit qui intercepte un **demi-cercle** est **droit**.

$$[AB] \text{ diamètre} \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$$

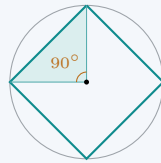
DÉFINITION — polygone régulier

Un **polygone régulier** a tous ses côtés de même longueur et tous ses angles de même mesure. Il est inscrit dans un cercle de centre O et, s'il a n côtés, ses n angles au centre $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$... sont égaux :

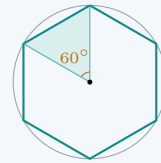
$$\text{angle au centre} = \frac{360^\circ}{n}$$



Triangle équilatéral



Carré



Hexagone régulier

REMARQUE — pour aller plus loin : le quadrilatère inscrit

Si $ABCD$ est un quadrilatère inscrit dans un cercle, ses angles opposés sont **supplémentaires** : $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$. En effet, ces deux angles inscrits interceptent les deux arcs $\widehat{AC}$ qui, réunis, forment le cercle entier : la somme vaut $\frac{1}{2} \times 360^\circ$.

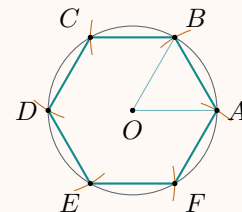
2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Calculer un angle inscrit

1. Repérer l'**arc intercepté** : il est « entre » les côtés de l'angle et ne contient pas le sommet.
2. Chercher un angle connu interceptant le **même** arc : au centre ($\div 2$) ou inscrit (même mesure).
3. Rédiger : « Les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$, donc ils sont égaux. »

MÉTHODE — Construire un polygone régulier à n côtés

1. Tracer un cercle de centre O et placer un point A dessus.
2. Au rapporteur, construire des angles au centre successifs de $\frac{360^\circ}{n}$: on obtient $B, C, \dots$
3. **Hexagone** : pas besoin de rapporteur ! Les triangles $OAB, OBC \dots$ sont équilatéraux (60° et $OA = OB$), donc le côté est égal au rayon : on reporte **6 fois le rayon** au compas.


★ ASTUCE DU PROF — diamètre $\iff$ angle droit

Un diamètre dans l'énoncé ? Cherchez un angle droit. Deux angles droits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$? Alors M et N sont sur le cercle de diamètre $[AB]$ (Défi 11.1). Pour trouver le centre d'une assiette : poser le coin d'une équerre sur le bord, ses côtés recoupent le cercle aux extrémités d'un diamètre ; deux diamètres se coupent au centre.

✗ PIÈGE À ÉVITER

- La relation « moitié » n'est valable que si les deux angles interceptent le **même arc**.
- Un angle inscrit n'est pas forcément aigu : s'il intercepte le « grand » arc, il est obtus. Exemple : si $\widehat{AOB} = 100^\circ$ et M est sur le petit arc $\widehat{AB}$, alors $\widehat{AMB} = \frac{360^\circ - 100^\circ}{2} = 130^\circ$.

LE SAVAIS-TU ?

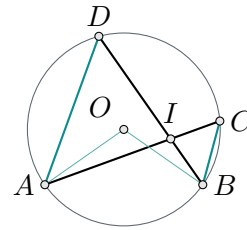
Les *maâlems* du zellige de Fès tracent leurs rosaces avec un simple compas : des polygones réguliers inscrits (à 8, 12 ou 16 côtés) donnent les célèbres étoiles à 8, 12 ou 16 branches (voir le Défi 11.2).

3 Exercices

EXERCICE 11.1 ☆☆☆

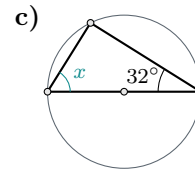
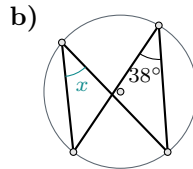
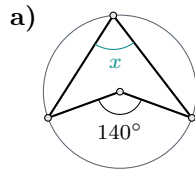
Sur la figure, A, B, C, D sont sur le cercle de centre O , et I est le point d'intersection de $[AC]$ et $[BD]$.

- Pour chaque angle, dire s'il est inscrit, au centre, ou ni l'un ni l'autre, et nommer l'arc intercepté le cas échéant : $\widehat{AOB}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{ADB}$, $\widehat{AIB}$, $\widehat{CAD}$.
- On sait que $\widehat{AOB} = 110^\circ$. Calculer $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$.



EXERCICE 11.2 ☆☆☆

Dans chaque cas, O est le centre du cercle. Calculer la mesure x en justifiant.



EXERCICE 11.3 ☆☆☆

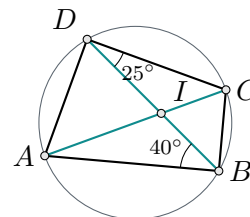
Vrai ou faux ? Justifier.

- Un angle inscrit mesure toujours moins de 90° .
- Le côté d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 5 cm mesure 5 cm.
- L'angle au centre d'un pentagone régulier mesure 60° .
- Si $\widehat{AMB} = 90^\circ$ avec A, B, M sur un cercle, alors $[AB]$ est un diamètre.

EXERCICE 11.4 ☆☆☆

A, B, C, D sont quatre points d'un cercle ; les cordes $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en I . On donne $\widehat{ABD} = 40^\circ$ et $\widehat{BDC} = 25^\circ$.

- Calculer $\widehat{ACD}$ et $\widehat{BAC}$.
- Calculer $\widehat{AIB}$.
- Montrer que les triangles IAB et IDC ont les mêmes angles.



EXERCICE 11.5 ☆☆☆

On construit un hexagone régulier $ABCDEF$ inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 4 cm.

- Quelle est la nature du triangle OAB ? En déduire le périmètre de l'hexagone.
- Calculer $\widehat{ADB}$.
- Montrer que le triangle ACD est rectangle en C , puis calculer la valeur exacte de AC .
- Calculer la valeur exacte de l'aire de l'hexagone, puis une valeur approchée au dixième.

EXERCICE 11.6 ☆☆☆

Rosaces de zellige. Un maâlem de Fès trace ses motifs à partir de polygones réguliers inscrits dans un cercle.

1. Calculer l'angle au centre d'un octogone régulier et d'un dodécagone régulier (12 côtés).
2. Un polygone régulier a un angle au centre de 24° . Combien a-t-il de côtés ?
3. Peut-il exister un polygone régulier dont l'angle au centre mesure 25° ? Justifier.
4. Montrer que chaque angle d'un polygone régulier à n côtés mesure $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$. Application : l'octogone.

EXERCICE 11.7 ★★★

Type examen régional. (C) est un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 8$ cm. C est un point de (C) tel que $\widehat{BAC} = 30^\circ$, et D un point de (C) qui n'est pas sur le même demi-cercle que C .

1. Faire une figure. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C .
2. Calculer BC et la valeur exacte de AC .
3. Calculer $\widehat{BOC}$ et en déduire la nature du triangle OBC .
4. Calculer $\widehat{ADC}$ et $\widehat{BDC}$.

EXERCICE 11.8 ★★★

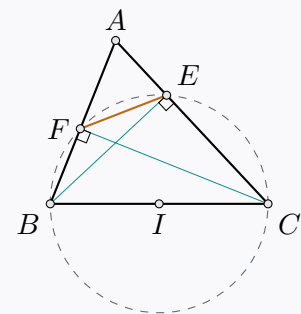
Deux cordes $[AC]$ et $[BD]$ d'un cercle de centre O se coupent en un point I intérieur au disque (comme dans l'exercice 11.4).

1. Justifier que $\widehat{AIB} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB}$.
2. En déduire que $\widehat{AIB} = \frac{\widehat{AOB} + \widehat{COD}}{2}$.
3. Avec les données de l'exercice 11.4, calculer $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$; en appliquant le même raisonnement à l'angle $\widehat{AID}$, retrouver $\widehat{AIB} = 115^\circ$.

4 Défis olympiades**○ DÉFI OLYMPIADE 11.1 — quatre points sur un même cercle**

ABC est un triangle dont les angles sont aigus. $[BE]$ et $[CF]$ sont deux de ses hauteurs ($E \in [AC]$, $F \in [AB]$).

1. Montrer que B, C, E et F sont sur un même cercle, dont on précisera le centre.
2. En déduire que $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$.

**○ DÉFI OLYMPIADE 11.2 — les pointes des étoiles**

1. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sont cinq points placés dans cet ordre sur un cercle (pas forcément régulièrement). On trace l'étoile $A_1A_3A_5A_2A_4$. Montrer que la somme des angles des cinq pointes vaut toujours 180° .
2. Une étoile de zellige à 8 branches s'obtient en reliant chaque sommet d'un octogone régulier au **troisième** sommet suivant. Calculer l'angle d'une pointe.

Triangles isométriques et triangles semblables

OBJECTIFS DU CHAPITRE

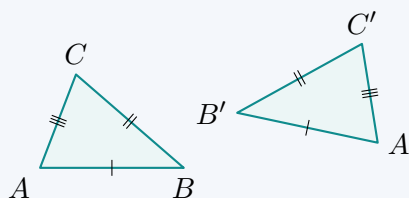
- ✓ Reconnaître et utiliser les trois cas d'isométrie des triangles.
- ✓ Démontrer que deux triangles sont semblables et utiliser le rapport de similitude k (longueurs $\times k$, aires $\times k^2$).
- ✓ Résoudre des problèmes de géométrie en choisissant les bons triangles.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — triangles isométriques

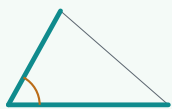
Deux triangles sont **isométriques** lorsque leurs côtés sont **respectivement égaux** : on peut les superposer (éventuellement après les avoir retournés). Leurs angles sont alors aussi respectivement égaux.

Ici ABC et $A'B'C'$ sont isométriques : A et A' , B et B' , C et C' sont des **sommets homologues**.



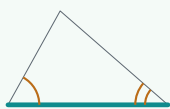
PROPRIÉTÉ — les trois cas d'isométrie

Deux triangles sont isométriques s'ils ont **respectivement égaux** :



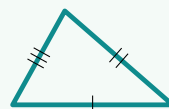
1. C - A - C

un **angle** compris entre deux **côtés** respectivement égaux



2. A - C - A

un **côté** compris entre deux **angles** respectivement égaux



3. C - C - C

les trois **côtés** respectivement égaux

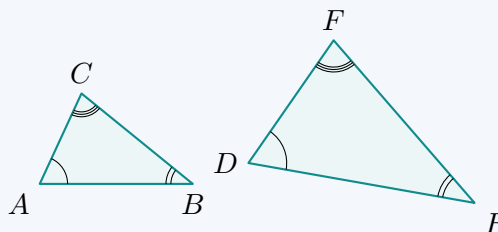
DÉFINITION — triangles semblables

Deux triangles sont **semblables** (ou « de même forme ») lorsque leurs angles sont **respectivement égaux**.

Alors leurs côtés homologues sont **proportionnels** :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = k$$

k est le **rapport de similitude** : DEF est un agrandissement ($k > 1$) ou une réduction ($k < 1$) de ABC .



Triangle ABC	A	B	C
Triangle DEF	D	E	F

PROPRIÉTÉ — les trois cas de similitude

Deux triangles sont semblables dans chacun des cas suivants :

- ils ont **deux angles** respectivement égaux (le troisième l'est alors aussi : la somme vaut 180°) ;
- les longueurs de leurs **trois côtés** sont proportionnelles ;
- ils ont un **angle égal compris entre deux côtés** de longueurs proportionnelles.

PROPRIÉTÉ — effet sur les longueurs et les aires

Si DEF est semblable à ABC avec le rapport k :

longueurs (et périmètres) $\times k$

aires $\times k^2$

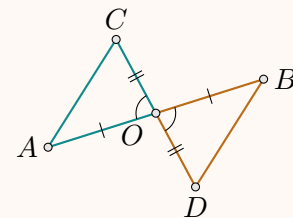
Deux triangles isométriques sont semblables avec $k = 1$. Dans une configuration de Thalès, les triangles AMN et ABC sont semblables.

2 Méthodes & astuces
MÉTHODE — Démontrer que deux triangles sont isométriques, puis en profiter

Exemple : O est le milieu commun de $[AB]$ et $[CD]$.

« Dans les triangles OAC et OBD : $OA = OB$ et $OC = OD$ (O milieu), et $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (angles opposés par le sommet). D'après le cas C-A-C, ils sont isométriques. »

On en **déduit** les égalités des éléments homologues : $AC = BD$ et $\widehat{OAC} = \widehat{OBD}$, donc $(AC) \parallel (BD)$ (angles alternes-internes égaux).


MÉTHODE — Triangles semblables : écrire les bons rapports

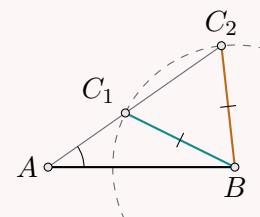
- Repérer les **sommets homologues** grâce aux angles égaux et les écrire dans un tableau.
- Former les rapports « côté de DEF / côté homologue de ABC » : chaque côté est entre deux sommets homologues.
- Utiliser k : on calcule une longueur par produit en croix, une aire en multipliant par k^2 .

★ ASTUCE DU PROF — ranger les côtés dans l'ordre

Pour tester si les côtés de deux triangles sont proportionnels, on range les côtés de chaque triangle **par ordre croissant** et on compare les rapports dans cet ordre : le plus petit avec le plus petit, etc. Exemple : 4, 5, 6 et 8, 10, 12 : $\frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Le plus grand angle est toujours face au plus grand côté.

❌ PIÈGE À ÉVITER

- Deux côtés égaux et un angle égal **non compris** entre eux ne suffisent pas ! Sur la figure, ABC_1 et ABC_2 ont AB commun, $BC_1 = BC_2$ et l'angle en A commun... mais ils ne sont pas isométriques.
- Trois angles égaux donnent des triangles **semblables**, pas forcément isométriques.



3 Exercices

EXERCICE 12.1 ★☆☆

Dans chaque cas, les triangles ABC et DEF sont-ils isométriques ? Si oui, préciser le cas utilisé.

- $AB = DE = 5$, $BC = EF = 7$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 40^\circ$.
- $BC = EF = 4$, $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 50^\circ$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE} = 60^\circ$.
- $\widehat{A} = \widehat{D} = 70^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{E} = 50^\circ$ et $\widehat{C} = \widehat{F} = 60^\circ$.
- $AB = DE = 7$, $AC = DF = 5$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 40^\circ$.

EXERCICE 12.2 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier.

- Deux triangles équilatéraux sont toujours semblables.
- Deux triangles isocèles sont toujours semblables.
- Deux triangles rectangles isocèles sont toujours semblables.
- Si on triple les côtés d'un triangle, son aire est triplée.

EXERCICE 12.3 ★☆☆

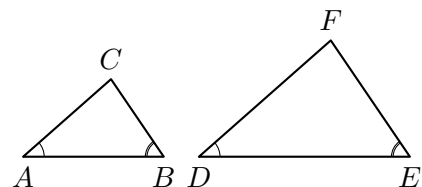
ABC est un triangle isocèle en A et M est le milieu de $[BC]$.

- Montrer que les triangles ABM et ACM sont isométriques.
- En déduire que $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ et que $(AM) \perp (BC)$.
- Que représente la droite (AM) pour le triangle ABC ?

EXERCICE 12.4 ★☆☆

Les triangles ABC et DEF sont tels que $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$. On donne $AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm et $DE = 9$ cm.

- Justifier que les triangles sont semblables et compléter un tableau des sommets homologues.
- Calculer le rapport k , puis EF et DF .
- Par combien est multipliée l'aire ?



EXERCICE 12.5 ★☆☆

ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $BC = 5$, $CA = 6$ et DEF un triangle tel que $DE = 12$, $EF = 8$, $FD = 10$ (en cm).

- Montrer que ces triangles sont semblables et donner le rapport k .
- Préciser les sommets homologues, puis les angles égaux.

EXERCICE 12.6 ★☆☆

Le jardin d'Ifrane. Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{1200}$, un jardin public d'Ifrane est représenté par un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm et 4 cm.

- Calculer les dimensions réelles du jardin (en m) et son périmètre.
- Calculer l'aire du triangle sur le plan, puis l'aire réelle du jardin en m^2 en utilisant le rapport k .
- Le gazon coûte 25 DH le m^2 . Quel est le coût pour engazonner tout le jardin ?

EXERCICE 12.7 ★★★

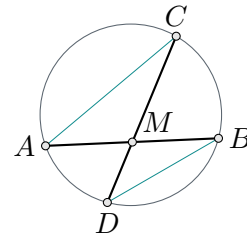
Type examen régional. ABC est un triangle tel que $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm et $BC = 7$ cm. D est le point de $[AB]$ tel que $AD = 3$ cm et E le point de $[AC]$ tel que $AE = 4$ cm.

1. Calculer $\frac{AD}{AC}$ et $\frac{AE}{AB}$. En déduire que les triangles ADE et ACB sont semblables.
2. Calculer DE et comparer $\widehat{ADE}$ et $\widehat{ACB}$.
3. Les droites (DE) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.
4. Calculer le rapport $\frac{\text{aire}(ADE)}{\text{aire}(ACB)}$.

EXERCICE 12.8 ★★★

Deux cordes $[AB]$ et $[CD]$ d'un cercle se coupent en M .

1. Montrer que les triangles MAC et MDB sont semblables. (*Penser aux angles inscrits.*)
2. En déduire que $MA \times MB = MC \times MD$.
3. Application : $MA = 4$ cm, $MB = 3$ cm et $MC = 2$ cm. Calculer MD .

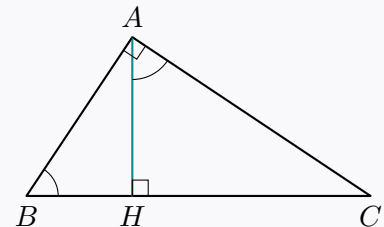


4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 12.1 — triangle rectangle et hauteur

ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A .

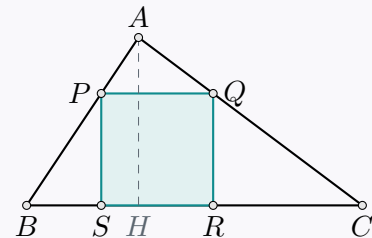
1. Montrer que les triangles HBA et HAC sont semblables, puis que $AH^2 = BH \times CH$.
2. Montrer de même que $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times BC$.
3. Application : $BH = 4$ cm et $CH = 9$ cm. Calculer AH , AB et AC sans utiliser Pythagore, puis vérifier avec Pythagore.



○ DÉFI OLYMPIADE 12.2 — le carré dans le triangle

ABC est un triangle de base $BC = a$ et de hauteur $AH = h$. On veut y inscrire un carré $PQRS$ avec $[SR]$ sur $[BC]$, $P \in [AB]$ et $Q \in [AC]$. On note x son côté.

1. Montrer que APQ et ABC sont semblables, puis que $\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$.
2. En déduire $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{h}$, puis x lorsque $a = 12$ cm et $h = 6$ cm.



OBJECTIFS DU CHAPITRE

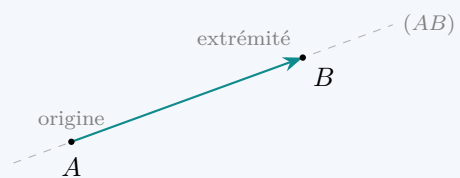
- ✓ Caractériser un vecteur (direction, sens, longueur) et reconnaître deux vecteurs égaux.
- ✓ Additionner des vecteurs : règle du parallélogramme et relation de Chasles.
- ✓ Construire l'image d'une figure par une translation et utiliser ses propriétés.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Vecteur

Deux points A et B définissent le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$, caractérisé (si $A \neq B$) par :

- sa **direction** : celle de la droite (AB) ;
- son **sens** : de A (l'origine) vers B (l'extrémité) ;
- sa **longueur** : la distance AB .

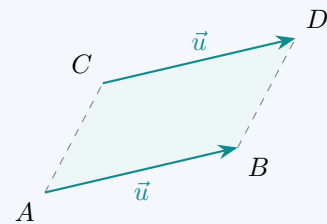


DÉFINITION — Vecteurs égaux

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même longueur :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC \text{ est un parallélogramme}$$

(éventuellement aplati). Un même vecteur $\vec{u}$ peut être tracé à partir de n'importe quel point.



DÉFINITION — Vecteur nul, vecteurs opposés, milieu

- $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$ est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$ (sa longueur est 0).
- $\overrightarrow{BA}$ est l'**opposé** de $\overrightarrow{AB}$ (même direction, même longueur, sens contraire) : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
- I est le **milieu** de $[AB]$ $\iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ $\iff \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ $\iff \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$, où $2\vec{u}$ désigne $\vec{u} + \vec{u}$ (même direction, même sens, longueur double).

► Somme de deux vecteurs

PROPRIÉTÉ — Deux façons d'additionner

Relation de Chasles (vecteurs « bout à bout ») :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Règle du parallélogramme (vecteurs de même origine) :

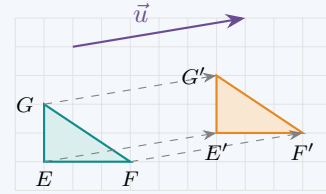
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

où $ABDC$ est un parallélogramme.

► Translation

DÉFINITION — Translation de vecteur $\vec{u}$

La **translation de vecteur** $\vec{u}$ associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$: M' est l'**image** de M .
Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$: $ABM'M$ est alors un parallélogramme.
Elle fait **glisser** la figure, sans la tourner ni la déformer.



PROPRIÉTÉ — Ce que conserve une translation

Si $M \mapsto M'$ et $N \mapsto N'$, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, donc $M'N' = MN$. La translation **conserve les distances, les angles, l'alignement, le parallélisme** (et les aires) :

- l'image d'une droite (d) est une droite **parallèle** à (d) ; celle d'un segment $[MN]$ est le segment $[M'N']$ de **même longueur** ;
- l'image du cercle de centre O et de rayon r est le cercle de centre O' et de **même rayon** r .

2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Construire l'image M' d'un point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

- **Au compas** (parallélogramme $ABM'M$) : arc de centre M de rayon AB , arc de centre B de rayon AM ; M' est leur intersection qui rend $ABM'M$ non croisé.
- **Sur quadrillage** : si l'on va de A à B par « 4 carreaux à droite, 1 vers le haut », on fait le même trajet depuis M .

★ ASTUCE DU PROF — Chasles en « dominos »

Dans $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, la lettre du milieu « s'élimine » comme dans un domino. Pour simplifier :
1) remplacer chaque soustraction par l'opposé ($-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$) ; 2) réordonner pour enchaîner les dominos. Exemple : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$. Dans l'autre sens, on peut **insérer** n'importe quel point : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$.

Parallélogramme : pour prouver que $ABCD$ en est un, **une seule** égalité suffit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

✗ PIÈGE À ÉVITER

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que $ABDC$ (et non $ABCD$) est un parallélogramme : attention à l'ordre des lettres !
- Chasles concerne les **vecteurs**, pas les longueurs : en général $AB + BC \neq AC$. Et $AB = CD$ ne suffit pas pour avoir $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

LE SAVAIS-TU ?

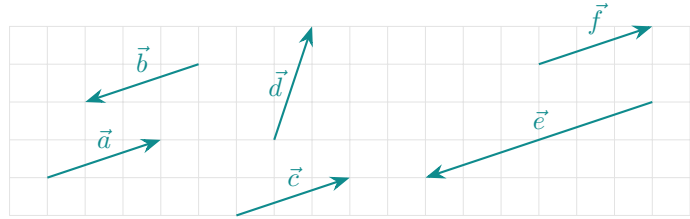
Le mot « vecteur » vient du latin *vehere*, « transporter » : un vecteur transporte les points, exactement comme une translation ! En physique, forces et vitesses sont représentées par des vecteurs : un avion qui vole vers l'est pendant qu'un vent souffle vers le nord avance selon la **somme** des deux vecteurs vitesse (règle du parallélogramme).

3 Exercices

EXERCICE 13.1 ★☆☆

D'après le quadrillage :

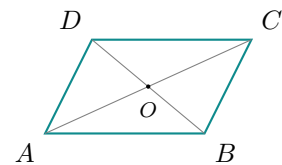
1. quels vecteurs sont égaux à $\vec{a}$?
2. lequel est l'opposé de $\vec{a}$?
3. lequel a la même longueur que $\vec{a}$, mais pas sa direction ?
4. lequel a la direction de $\vec{a}$ sans lui être égal ni opposé ?



EXERCICE 13.2 ★☆☆

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O . Vrai ou faux ? Justifier.

- | | |
|--------------------------|---|
| a) $\vec{AB} = \vec{DC}$ | e) $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ |
| b) $\vec{AD} = \vec{CB}$ | f) $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{AC}$ |
| c) $\vec{AO} = \vec{OC}$ | g) La translation de vecteur $\vec{AB}$ |
| d) $\vec{OB} = \vec{OD}$ | transforme D en C . |



EXERCICE 13.3 ★☆☆

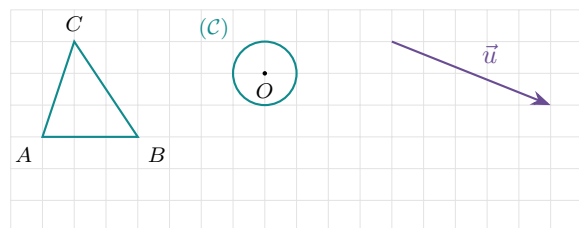
Simplifier au maximum à l'aide de la relation de Chasles.

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$ | c) $\vec{AB} - \vec{CB}$ | e) $\vec{OA} - \vec{OB}$ |
| b) $\vec{MN} + \vec{PM}$ | d) $\vec{AC} + \vec{BA} + \vec{CB}$ | f) $\vec{EF} - \vec{EG} + \vec{FG}$ |

EXERCICE 13.4 ★☆☆

Reproduire la figure sur un quadrillage.

1. Construire l'image $A'B'C'$ du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{u}$.
2. Construire l'image (C') du cercle (C) de centre O par cette translation. Quel est son rayon ?
3. Quelle est la nature du quadrilatère $AA'B'B$? Justifier.
4. Sans mesurer, comparer $\widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ABC}$.



EXERCICE 13.5 ★☆☆

(Type examen régional) ABC est un triangle et I le milieu de $[BC]$.

1. Construire le point E , image de C par la translation de vecteur $\vec{AB}$. Montrer que $ABEC$ est un parallélogramme.
2. Construire le point F tel que $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AC}$. Montrer que $F = E$.
3. Montrer que I est le milieu de $[AE]$.
4. Déterminer l'image de la droite (AC) par la translation de vecteur $\vec{AB}$.

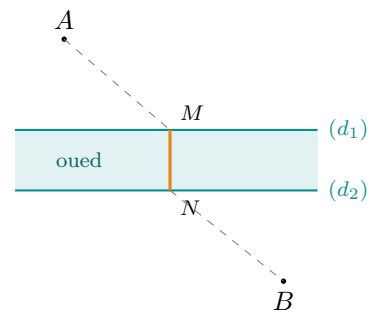
EXERCICE 13.6 ★★☆☆

Dans un entrepôt du port de **Tanger Med**, un robot se déplace sur un sol quadrillé (1 carreau = 10 m). Il effectue le déplacement $\vec{u}$: « 5 carreaux vers l'est et 1 vers le nord », puis le déplacement $\vec{v}$: « 3 carreaux vers l'est et 5 vers le nord ».

1. Représenter $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} + \vec{v}$ sur un quadrillage. Décrire le déplacement $\vec{u} + \vec{v}$.
2. Quelle est la distance à vol d'oiseau entre le départ et l'arrivée? Quelle distance le robot a-t-il parcourue (au mètre près)?
3. Le robot arriverait-il au même endroit en effectuant $\vec{v}$ puis $\vec{u}$? Justifier.

EXERCICE 13.7 ★★☆☆

Deux douars A et B sont séparés par un oued de 40 m de large aux rives parallèles (d_1) et (d_2) . On construit un pont $[MN]$ **perpendiculaire** aux rives ($M \in (d_1)$, $N \in (d_2)$). Où le placer pour que le trajet $A \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow B$ soit le **plus** court? Soit B' l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{NM}$ (vecteur identique pour tous les ponts possibles).



1. Montrer que $MB' = NB$, puis que $AM + MN + NB = AM + MB' + 40$.
2. En déduire la position optimale de M ; construire le pont.

4 Défis olympiades

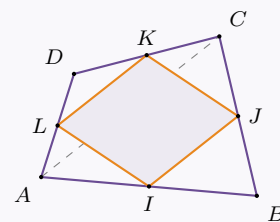
○ DÉFI OLYMPIADE 13.1 — Chasles en cascade

1. Montrer que pour tous points A, B, C, D, E, F : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.
2. A, B, C sont trois points non alignés. Montrer qu'il existe un **unique** point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$, et le construire.

○ DÉFI OLYMPIADE 13.2 — Le parallélogramme caché

$ABCD$ est un quadrilatère quelconque (même pas convexe!). I, J, K, L sont les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

1. En écrivant $\overrightarrow{IJ}$ de deux façons avec Chasles (en passant par B , puis par A et C), montrer que $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}$.
2. Montrer de même que $2\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AC}$. En déduire que $IJKL$ est un parallélogramme.
3. À quelle condition sur $ABCD$ le quadrilatère $IJKL$ est-il un losange?



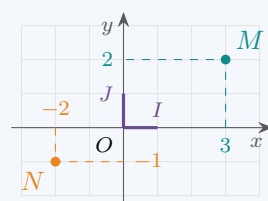
OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Lire et placer des points ; calculer les coordonnées d'un vecteur et d'un milieu.
- ✓ Calculer une distance dans un repère orthonormé.
- ✓ Démontrer la nature d'un triangle ou d'un quadrilatère par le calcul.

1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Repère orthonormé et coordonnées

Un **repère orthonormé** (O, I, J) est formé de deux axes gradués **perpendiculaires** de même origine O et de **même unité** ($OI = OJ = 1$). Tout point M est repéré par un unique couple $(x; y)$, ses **coordonnées** ; on note $M(x; y)$ où x est l'**abscisse** (axe horizontal) et y l'**ordonnée** (axe vertical).
Exemple : $O(0; 0)$, $I(1; 0)$, $J(0; 1)$, $M(3; 2)$, $N(-2; -1)$.

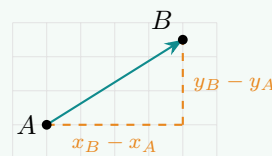


PROPRIÉTÉ — Coordonnées d'un vecteur, égalité

Pour $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, « extrémité **moins** origine » :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Ce sont les déplacements horizontal et vertical de A vers B . Deux vecteurs sont **égaux** $\iff$ ils ont les **mêmes coordonnées**.



PROPRIÉTÉ — Milieu et distance

Milieu K de $[AB]$ (moyenne des coordonnées) :

$$K\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Distance (repère **orthonormé**, par Pythagore) :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

EXEMPLE $A(-1; 4)$, $B(5; -4)$: $\overrightarrow{AB}(5 + 1; -4 - 4) = \overrightarrow{AB}(6; -8)$; $K\left(\frac{-1+5}{2}; \frac{4-4}{2}\right) = K(2; 0)$;
 $AB = \sqrt{36 + 64} = 10$.

2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Déterminer la nature d'un triangle ABC

1. Calculer AB^2 , AC^2 , BC^2 (garder les carrés : pas de racine inutile!). 2. Deux carrés égaux : **isocèle** ; trois : **équilatéral**. 3. Si le plus grand carré est la somme des deux autres : **rectangle** (réciproque de Pythagore), l'angle droit étant opposé au plus grand côté.

MÉTHODE — Parallélogramme et quatrième sommet

$ABCD$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff [AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. Pour trouver $D(x; y)$, on écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ coordonnée par coordonnée : deux équations simples. Ensuite : **rectangle** si de plus $AC = BD$; **losange** si $AB = AD$; **carré** si les deux.

★ ASTUCE DU PROF — Le raccourci du parallélogramme

Même milieu des diagonales : $x_A + x_C = x_B + x_D$ et $y_A + y_C = y_B + y_D$. Donc $x_D = x_A + x_C - x_B$ et $y_D = y_A + y_C - y_B$: le calcul se fait de tête !

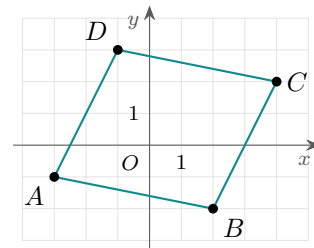
✗ PIÈGE À ÉVITER

- Vecteur : **extrémité moins origine**, et attention aux signes ($x_A = -3$ donne $x_B - x_A = x_B + 3$). Milieu : on **additionne** ; vecteur : on **soustrait**.
- $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$: $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ et non 7.

3 Exercices
EXERCICE 14.1 ★☆☆

On considère les points de la figure.

1. Lire les coordonnées des points A , B , C et D .
2. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire pour $ABCD$?
3. Calculer les coordonnées des milieux de $[AC]$ et de $[BD]$. Le résultat était-il prévisible ?


EXERCICE 14.2 ★☆☆

QCM. On donne $A(-3; 2)$ et $B(1; -4)$. Choisir la bonne réponse (a, b ou c).

1. Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: a) $(4; -6)$ b) $(-4; 6)$ c) $(-2; -2)$
2. Milieu de $[AB]$: a) $(-2; -2)$ b) $(-1; -1)$ c) $(2; -3)$
3. Distance AB : a) 10 b) $2\sqrt{13}$ c) $\sqrt{20}$
4. Point C tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}$: a) $(-7; 8)$ b) $(5; -10)$ c) $(-1; -1)$

EXERCICE 14.3 ★☆☆

Déterminer la nature de chacun des triangles suivants.

- a) $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(3; 4)$ b) $P(1; 1)$, $Q(7; 4)$, $R(0; 3)$ c) $U(0; 0)$, $V(5; 1)$, $W(2; 4)$

EXERCICE 14.4 ★☆☆

On donne $A(1; -1)$, $B(4; 1)$ et $C(3; 4)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du point E , image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Montrer que C est le milieu de $[DE]$.

EXERCICE 14.5 ★★☆☆

Le cercle $(\mathcal{C})$ a pour centre $\Omega(2; 1)$ et passe par $A(5; 5)$.

1. Calculer le rayon de $(\mathcal{C})$.
2. Les points $B(-1; -3)$, $C(6; -2)$ et $E(6; 3)$ appartiennent-ils à $(\mathcal{C})$?
3. Montrer que $[AB]$ est un diamètre de $(\mathcal{C})$.
4. Trouver les points de $(\mathcal{C})$ d'ordonnée 1.

EXERCICE 14.6 ★★☆☆

Sur un plan simplifié d'**Ifrane** muni d'un repère orthonormé (unité : 100 m), le célèbre lion de pierre est en $L(1; 2)$, l'école en $E(-3; -1)$ et le marché en $M(5; -1)$.

1. Calculer les distances réelles LE , LM et EM (en mètres). Quelle est la nature du triangle ELM ?
2. Une fontaine est au milieu H de $[EM]$. Calculer les coordonnées de H et la distance LH .
3. En déduire l'aire du triangle ELM en m^2 , puis en hectares.

EXERCICE 14.7 ★★☆☆

(Type examen régional) Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2; 1)$, $B(2; 3)$ et $C(4; -1)$.

1. Placer les points. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$.
2. Calculer AB , BC et AC . En déduire la nature précise du triangle ABC .
3. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AC]$, puis du point D symétrique de B par rapport à I .
4. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.
5. Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .

EXERCICE 14.8 ★★☆☆

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1; 1)$, $B(4; 2)$, $C(5; 5)$ et $D(2; 4)$.

1. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme, puis que c'est un losange.
2. Calculer AC et BD . Le losange $ABCD$ est-il un carré ? Calculer son aire.

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 14.1 — Le puits commun

Trois douars sont situés en $A(-2; 4)$, $B(6; 4)$ et $C(0; -2)$. On veut creuser un puits Ω à **égale distance** des trois douars.

1. Sans calcul, expliquer pourquoi Ω a pour abscisse 2.
2. Déterminer l'ordonnée de Ω , puis la distance commune.
3. Le douar $D(4; -2)$ est-il, lui aussi, à cette distance du puits ?

○ DÉFI OLYMPIADE 14.2 — Trois parallélogrammes pour le prix d'un

On donne $A(0; 0)$, $B(4; 1)$ et $C(1; 3)$.

1. Trouver **tous** les points D tels que A, B, C, D soient les sommets d'un parallélogramme (dans un ordre quelconque) : on en trouvera trois, D_1, D_2, D_3 .
2. Montrer que A, B, C sont les milieux des côtés du triangle $D_1D_2D_3$; comparer les périmètres.

Équation d'une droite

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Lire, interpréter et utiliser l'équation réduite $y = mx + p$ d'une droite.
- ✓ Déterminer l'équation d'une droite et la tracer.
- ✓ Reconnaître des droites parallèles ou perpendiculaires ; calculer un point d'intersection.

1 L'essentiel du cours

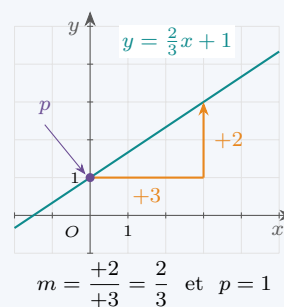
DÉFINITION — Équation réduite d'une droite

Dans un repère, toute droite **non parallèle à l'axe des ordonnées** a une équation de la forme

$$y = mx + p$$

- m est le **coefficient directeur** (la « pente ») : quand x augmente de 1, y varie de m ;
- p est l'**ordonnée à l'origine** : la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0; p)$.

Si $m > 0$ la droite « monte », si $m < 0$ elle « descend », si $m = 0$ elle est horizontale ($y = p$).

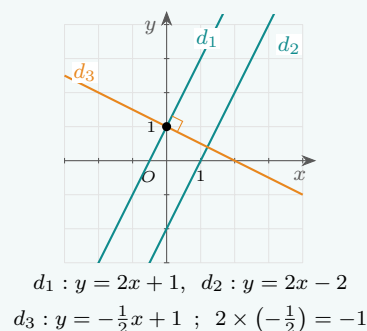


PROPRIÉTÉ — Droite verticale, coefficient directeur, appartenance

- Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation $x = k$ (tous ses points ont l'abscisse k).
- Si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $x_A \neq x_B$, le coefficient directeur de (AB) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- $M(x_0; y_0)$ appartient à la droite d'équation $y = mx + p \iff y_0 = mx_0 + p$.

THÉORÈME — Positions relatives de deux droites $(d) : y = mx + p$ et $(d') : y = m'x + p'$

- **Parallèles** : $(d) \parallel (d') \iff m = m'$
- **Perpendiculaires** (repère orthonormé) : $(d) \perp (d') \iff m \times m' = -1$
- **Sécantes** si $m \neq m'$: le point d'intersection a pour coordonnées la solution du système $\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$; on résout $mx + p = m'x + p'$.



EXEMPLE Intersection de $(d) : y = 2x - 3$ et $(d') : y = -x + 6$: $2x - 3 = -x + 6 \iff 3x = 9 \iff x = 3$, puis $y = 2 \times 3 - 3 = 3$. Le point d'intersection est $K(3; 3)$ (vérification dans (d') : $-3 + 6 = 3$ ✓).

2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Déterminer l'équation de la droite (AB)

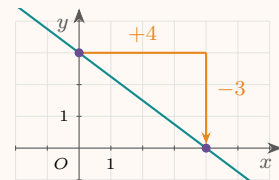
1. Si $x_A = x_B$: c'est la droite d'équation $x = x_A$. Sinon, calculer $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
2. Trouver p en écrivant que A est sur la droite : $y_A = mx_A + p$, donc $p = y_A - mx_A$.
3. **Vérifier** avec le point B : $y_B = mx_B + p$?

Même méthode pour une droite passant par un point A et de coefficient m **donné** (directement ou par parallélisme/perpendicularité).

MÉTHODE — Tracer la droite $y = mx + p$

- Placer le point $(0; p)$ sur l'axe des ordonnées.
- Utiliser la pente : si $m = \frac{a}{b}$, avancer de b carreaux vers la droite et monter de a (descendre si $a < 0$).
- Ou bien calculer un second point avec une valeur de x « pratique » (un multiple de b).

Exemple ci-contre : $y = -\frac{3}{4}x + 3$. On part de $(0; 3)$, on avance de 4, on descend de 3 : on arrive en $(4; 0)$.



★ ASTUCE DU PROF — Trois points alignés?

A, B, C (d'abscisses différentes) sont alignés $\iff (AB)$ et (AC) ont le **même coefficient directeur** (deux droites parallèles ayant un point commun A sont confondues). Exemple : $A(1; 2)$, $B(3; 6)$, $C(6; 12)$: $\frac{6-2}{3-1} = 2$ et $\frac{12-2}{6-1} = 2$: alignés.

❌ PIÈGE À ÉVITER

- $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$: les y en **haut**, les x en **bas**, et le **même ordre** (B puis A) en haut et en bas.
- Perpendiculaires : $m \times m' = -1$, et non $m = -m'$. L'inverse de l'opposé de $\frac{2}{3}$ est $-\frac{3}{2}$.
- Une droite verticale n'a **pas** d'équation $y = mx + p$: elle s'écrit $x = k$.

LE SAVAIS-TU?

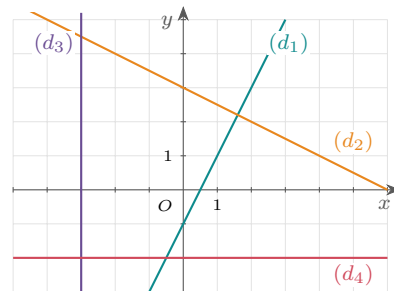
Sur la route du **Tizi n'Tichka**, un panneau « descente 10% » signifie que la route baisse de 10 m quand on avance de 100 m à l'horizontale : son coefficient directeur vaut $-\frac{10}{100} = -0,1$! C'est René **Descartes** (1637) qui eut l'idée de traduire les figures en équations : la *géométrie analytique*, qui permet de résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

3 Exercices

EXERCICE 15.1 ★☆☆

Lire graphiquement l'équation de chacune des droites (d_1) , (d_2) , (d_3) et (d_4) tracées dans le repère orthonormé ci-contre.

Aide : repérer l'ordonnée à l'origine, puis la pente avec des nœuds du quadrillage.



EXERCICE 15.2 ★☆☆

Vrai ou faux ? On considère la droite $(d) : y = -3x + 2$. Justifier chaque réponse.

- | | |
|---|--|
| a) Le coefficient directeur de (d) est 2. | d) (d) est parallèle à la droite $y = 2 - 3x$. |
| b) Le point $A(1; -1)$ appartient à (d) . | e) (d) est perpendiculaire à $y = \frac{1}{3}x + 5$. |
| c) (d) coupe l'axe des ordonnées en $(0; -3)$. | f) (d) coupe l'axe des abscisses en $(\frac{2}{3}; 0)$. |

EXERCICE 15.3 ★☆☆

Dans un repère orthonormé, tracer les droites $(d_1) : y = 2x - 3$, $(d_2) : y = -\frac{1}{2}x + 2$, $(d_3) : x = -1$ et $(d_4) : y = -2$. Lire les coordonnées du point d'intersection de (d_1) et (d_2) , puis les retrouver par le calcul. Que remarque-t-on pour (d_1) et (d_2) ?

EXERCICE 15.4 ★☆☆

Déterminer une équation de la droite (AB) dans chacun des cas suivants.

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| a) $A(1; 3)$ et $B(4; 9)$ | c) $A(3; -1)$ et $B(3; 4)$ |
| b) $A(-2; 5)$ et $B(2; -1)$ | d) $A(-1; 4)$ et $B(5; 4)$ |

EXERCICE 15.5 ★☆☆

On donne les droites $(d) : y = 3x + 5$ et $(\delta) : y = \frac{3}{2}x - 1$, et les points $A(2; -1)$, $B(-3; 2)$.

- Déterminer l'équation de la droite (d_1) passant par A et parallèle à (d) .
- Déterminer l'équation de la droite (d_2) passant par B et perpendiculaire à (δ) . Que remarque-t-on ?
- Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles perpendiculaires ? Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

EXERCICE 15.6 ★☆☆

- Les points $A(-1; -4)$, $B(2; 2)$ et $C(5; 8)$ sont-ils alignés ? Et A , B et $E(4; 7)$?
- Déterminer le nombre k pour que le point $F(k; -10)$ soit sur la droite (AB) .
- On considère $(d_1) : y = 2x - 1$, $(d_2) : y = -x + 5$ et $(d_3) : y = mx + 4$. Déterminer m pour que les trois droites soient **concourantes** (passent par un même point).

EXERCICE 15.7 ★★☆☆

À **Essaouira**, un loueur de vélos propose deux formules. Formule A : 40 DH de frais fixes puis 6 DH par heure. Formule B : 14 DH par heure, sans frais fixes. On note x la durée de location (en heures).

1. Exprimer les prix y_A et y_B en fonction de x . Représenter les droites $(\mathcal{D}_A)$ et $(\mathcal{D}_B)$ dans un repère (en abscisse 1 cm pour 1 h, en ordonnée 1 cm pour 10 DH).
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection des deux droites. Interpréter.
3. Quelle formule choisir pour 3 h ? pour une journée de 8 h ? Quelle économie réalise-t-on ?

EXERCICE 15.8 ★★☆☆

(Type examen régional) Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1; 2)$, $B(3; 4)$ et $C(3; -1)$.

1. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) .
2. Déterminer l'équation de la droite (Δ) passant par C et perpendiculaire à (AB) .
3. Calculer les coordonnées du point H , intersection de (AB) et (Δ) . Que représente H pour le segment $[AB]$?
4. En déduire la nature du triangle ABC , puis calculer son aire.

4 Défis olympiades**○ DÉFI OLYMPIADE 15.1 — La médiatrice sans compas**

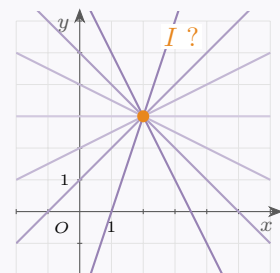
On donne $A(-1; 1)$, $B(3; 5)$ et $C(5; 1)$ dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'équation de la médiatrice (m_1) de $[AB]$ (milieu + perpendiculaire).
2. Retrouver ce résultat autrement : écrire que $M(x; y)$ vérifie $MA^2 = MB^2$ et développer. Que deviennent les termes x^2 et y^2 ?
3. Déterminer de même la médiatrice (m_2) de $[BC]$, puis le centre Ω et le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .

○ DÉFI OLYMPIADE 15.2 — Les droites tournantes

Pour tout nombre réel k , on note (d_k) la droite d'équation $y = kx + 3 - 2k$. La figure en montre quelques-unes.

1. Montrer que toutes les droites (d_k) passent par un même point fixe I , dont on donnera les coordonnées.
2. Pour quelle valeur de k la droite (d_k) passe-t-elle par $A(5; -3)$? Existe-t-il une droite (d_k) parallèle à l'axe des ordonnées ?
3. On suppose $k < 0$. (d_k) coupe l'axe des abscisses en P et l'axe des ordonnées en Q . Trouver k pour que I soit le milieu de $[PQ]$, et calculer alors l'aire du triangle OPQ .



Géométrie dans l'espace : pyramide, cône, agrandissement et réduction

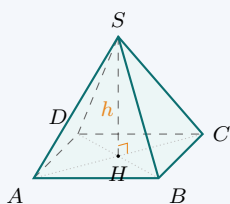
OBJECTIFS DU CHAPITRE

- ✓ Reconnaître et représenter une pyramide et un cône de révolution ; en construire un patron.
- ✓ Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône.
- ✓ Utiliser l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires et les volumes.

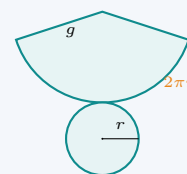
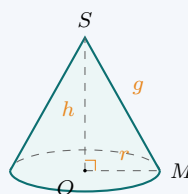
1 L'essentiel du cours

DÉFINITION — Pyramide et cône de révolution

Pyramide $SABCD$: un **sommet** S , une **base** polygonale $ABCD$, des **faces latérales** triangulaires ; **hauteur** SH , perpendiculaire à la base. Elle est **régulière** si la base est un polygone régulier de centre H (faces latérales isocèles superposables).



Cône de révolution : engendré par un triangle SOM rectangle en O tournant autour de (SO) . Base : disque de **rayon** $r = OM$; **hauteur** $h = SO$; **génératrice** $g = SM$, avec $g^2 = r^2 + h^2$. Patron : un disque et un secteur de rayon g dont l'arc mesure $2\pi r$.



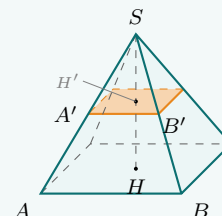
PROPRIÉTÉ — Volumes et aire latérale

Base d'aire $\mathcal{B}$, hauteur h : $V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h$ (le tiers du prisme ou du cylindre associé). Cône : $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ et aire latérale $\mathcal{A}_\ell = \pi r g$.

THÉORÈME — Agrandissement, réduction et sections

Dans un agrandissement ($k > 1$) ou une réduction ($0 < k < 1$) de rapport k : les longueurs sont multipliées par k , les aires par k^2 , les volumes par k^3 . Angles, parallélisme et perpendicularité sont conservés.

La **section** d'une pyramide (ou d'un cône) par un plan **parallèle à la base** est une réduction de la base, et la petite pyramide $SA'B'C'D'$ est une réduction de $SABCD$ de rapport $k = \frac{SH'}{SH} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB}$.



2 Méthodes & astuces

MÉTHODE — Calculer un volume

1. Repérer la base et la **hauteur** (au besoin par Pythagore : $h^2 = g^2 - r^2$). **2.** Calculer l'aire $\mathcal{B}$ de la base. **3.** Appliquer $V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$ avec des unités cohérentes ($1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$, $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$).

★ ASTUCE DU PROF — Section parallèle à la base : penser « réduction »

Calculer k (souvent $k = \frac{SH'}{SH}$), puis **sans rien recalculer** : aire de la section $= k^2 \mathcal{B}$, $V_{\text{petit}} = k^3 V$, $V_{\text{tronc}} = (1 - k^3)V$. À l'inverse, un volume divisé par $125 = 5^3$ correspond à des longueurs divisées par 5 (cubes utiles : 8, 27, 64, 125, 1 000).

✗ PIÈGE À ÉVITER

La hauteur n'est ni une arête latérale ni la génératrice (elle est plus courte). Ne pas oublier de diviser par 3 ! Doubler les longueurs multiplie le volume par $2^3 = 8$, pas par 2.

3 Exercices

EXERCICE 16.1 ★☆☆

Vrai ou faux ? Justifier.

- | | | |
|---|---|--|
| a) Cône $r = 3$, $h = 5$:
$V = 15\pi$. | c) Rapport 0,5 : aires
divisées par 4. | e) Section parallèle à la
base : même rayon. |
| b) Doubler les longueurs
double le volume. | d) Dans un cône, on a $g > h$. | f) Maquette au $\frac{1}{100}$: volume
divisé par 10^6 . |

EXERCICE 16.2 ★☆☆

Calculer le volume de chaque solide (valeur exacte, puis arrondi au dixième si besoin).

- Pyramide de hauteur 9 cm, de base un rectangle de 5 cm sur 4 cm.
- Cône de rayon 6 cm et de hauteur 8 cm (calculer aussi sa génératrice et son aire latérale).
- Pyramide $SABC$ de base ABC rectangle en A ($AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$), avec $[SA] \perp$ base et $SA = 6 \text{ cm}$.

EXERCICE 16.3 ★☆☆

Une tente de bivouac à **Merzouga** est une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée de côté 3 m et de hauteur $SH = 2 \text{ m}$, sans plancher. **1.** Calculer le volume d'air de la tente. **2.** I est le milieu de $[BC]$: calculer HI , puis SI . **3.** Calculer l'aire de toile nécessaire, puis son prix à 45 DH le m^2 .

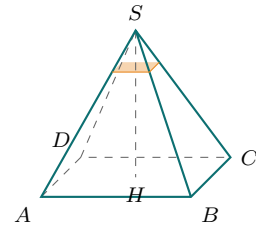
EXERCICE 16.4 ★☆☆

Un cornet de glace est un cône de révolution de rayon 2,5 cm et de génératrice 6,5 cm. **1.** Calculer sa hauteur, puis son volume arrondi au cm^3 . **2.** Combien de cornets peut-on remplir à ras bord avec un bac de 2 L de glace ? **3.** Calculer l'aire du papier qui l'entoure (aire latérale), au cm^2 près.

EXERCICE 16.5 ★★☆☆

$SABCD$ est une pyramide de hauteur $SH = 12$ cm dont la base est un rectangle $ABCD$ avec $AB = 8$ cm et $BC = 6$ cm. On la coupe par un plan parallèle à la base passant par le point H' de $[SH]$ tel que $SH' = 3$ cm.

1. Quelle est la nature de la section $A'B'C'D'$? Donner le rapport de réduction k .
2. Calculer les dimensions et l'aire de $A'B'C'D'$.
3. Calculer le volume de $SABCD$, celui de la petite pyramide, puis celui du tronc.


EXERCICE 16.6 ★★☆☆

(Type examen régional) La pyramide de **Khéops** est une pyramide régulière à base carrée de côté 230 m et de hauteur 146 m.

1. Calculer son volume, arrondi au m^3 .
2. Un collège de Marrakech en réalise une maquette à l'échelle $\frac{1}{500}$. Calculer le côté de la base et la hauteur de la maquette (en cm).
3. Calculer le volume de la maquette de deux façons différentes ; l'exprimer en litres (au dixième).

EXERCICE 16.7 ★★★

Un cône de révolution de sommet S a pour hauteur $SO = 12$ cm et pour rayon $OA = 5$ cm.

1. Calculer la génératrice SA et le volume V du cône (valeur exacte).
2. On coupe le cône par un plan parallèle à la base, à 4,8 cm du sommet. Calculer le rayon de la section et le volume du petit cône.
3. À quelle distance du sommet faut-il couper pour que le petit cône ait pour volume $\frac{V}{27}$? pour que le tronc de cône ait pour volume $\frac{7}{8}V$?

4 Défis olympiades

○ DÉFI OLYMPIADE 16.1 — Le seau de Hamid

Un seau a la forme d'un tronc de cône : fond de diamètre 20 cm, ouverture de diamètre 30 cm, profondeur 24 cm. Hamid affirme : « Mon seau contient au moins 12 litres. » A-t-il raison ?

Indication : prolonger le seau en un cône de sommet S ; le fond est une réduction de l'ouverture.



○ DÉFI OLYMPIADE 16.2 — Le verre « à moitié plein »

Un verre conique (pointe en bas) a une hauteur de 10 cm. **1.** Yasmine le remplit jusqu'à mi-hauteur : « il est à moitié plein ». Quelle fraction du volume contient-il réellement ? Combien de tels verres faut-il pour en remplir un ? **2.** On ferme ce verre par un couvercle et on le retourne, pointe en haut. Montrer que la hauteur d'eau est alors inférieure à 5 mm. (Calculer $0,95^3$.)

Formulaire : l'essentiel à retenir

CALCUL LITTÉRAL

$$k(a+b) = ka + kb \quad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

RACINES CARRÉES ($a \geq 0$ et $b > 0$)

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \sqrt{a^2} = a \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

Si $a > 0$: $x^2 = a \iff x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.

Attention : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$!

PUISSANCES ($a \neq 0, b \neq 0$; m, n entiers relatifs)

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad a^m / a^n = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (a/b)^n = a^n / b^n \quad a^0 = 1 \quad a^{-n} = 1/a^n$$

Écriture scientifique : $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$.

ORDRE

$$a \leq b \iff a - b \leq 0$$

Si $c > 0$: $a \leq b \iff ac \leq bc$.

Si $c < 0$: $a \leq b \iff ac \geq bc$ (le sens change).

Pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$a \leq b \iff a^2 \leq b^2 \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

Si $a > 1$: $a < a^2$; si $0 < a < 1$: $a^2 < a$.

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS, SYSTÈMES

$$ax + b = 0 \text{ avec } a \neq 0 \iff x = -\frac{b}{a}$$

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Multiplier ou diviser une inéquation par un **négatif change son sens**.

Système : substitution ou combinaison linéaire, puis **vérifier** le couple trouvé.

FONCTIONS LINÉAIRES ET AFFINES

Linéaire : $f(x) = ax$, $a = \frac{f(x)}{x}$ ($x \neq 0$).

Affine : $f(x) = ax + b$, $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, $b = f(0)$.

Hausse de $t\%$: $\times (1 + \frac{t}{100})$; baisse de $t\%$: $\times (1 - \frac{t}{100})$.

STATISTIQUES

Fréquence = effectif $\div$ N ; étendue = max - min.

Moyenne : $\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{N}$

Médiane : partage la série **rangée** en deux groupes de même effectif.

Diagramme circulaire : angle = fréquence $\times 360^\circ$.

THÉORÈME DE THALÈS ET RÉCIPROQUE

Si $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et $(MN) \parallel (BC)$, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Réciproque : si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si A, M, B et A, N, C sont dans le même ordre, alors $(MN) \parallel (BC)$.

TRIGONOMÉTRIE (triangle rectangle, angle aigu x)

$\cos x = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$	x	30°	45°	60°
$\sin x = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$	$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan x = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$	$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$		$\sin(90^\circ - x) = \cos x$		$\cos(90^\circ - x) = \sin x$

ANGLES INSCRITS ET ANGLES AU CENTRE

Un angle inscrit mesure la **moitié** de l'angle au centre qui intercepte le même arc. Deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont **égaux**. Polygone régulier à n côtés : angle au centre = $360^\circ \div n$.

TRIANGLES ISOMÉTRIQUES ET SEMBLABLES

Isométriques : (côté, angle, côté), (angle, côté, angle) ou (3 côtés) respectivement égaux.

Semblables : 2 angles égaux, ou côtés proportionnels.

Rapport k : longueurs $\times k$, aires $\times k^2$.

VECTEURS ET REPÈRE

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$

Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Milieu de $[AB]$: $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

ÉQUATION D'UNE DROITE

$y = mx + p$ (m : coefficient directeur, p : ordonnée à l'origine) ; $x = k$: droite parallèle à l'axe des ordonnées.

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ Parallèles : $m = m'$

Perpendiculaires : $m \times m' = -1$

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Pyramide : $V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$ ($\mathcal{B}$: aire de la base)

Cône : $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ et $g^2 = r^2 + h^2$ (g : génératrice)

Réduction de rapport k : aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$.

Calculatrice non programmable autorisée. La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entrent dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (3 points)

- Simplifier $A = 2\sqrt{50} - 3\sqrt{18} + \sqrt{8}$. (0,5 pt)
- Rendre rationnel le dénominateur de :

$$B = \frac{4}{\sqrt{5} - 1}.$$
 (0,5 pt)
- Comparer $3\sqrt{5}$ et $2\sqrt{11}$. (0,5 pt)
- Donner l'écriture scientifique de :

$$C = \frac{21 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^5}{14 \times 10^{-2}}.$$
 (0,5 pt)
- On considère l'expression $E = (2x - 3)^2 - (x + 1)(2x - 3)$.
 - Développer et réduire E . (0,5 pt)
 - Factoriser E . (0,5 pt)

EXERCICE 2 (4 points)

- Résoudre les équations : a) $\frac{x+3}{2} - \frac{2x-1}{3} = 1$ (0,75 pt) b) $(2x-3)(x-4) = 0$. (0,5 pt)
- Résoudre l'inéquation $3(x-2) - 5x \leq 4$ et représenter ses solutions sur une droite graduée. (0,75 pt)
- Au souk d'Ifrane, Amine achète 1 kg de miel de thym et 12 boîtes de thé vert : il paie 300 DH. Fatima achète 2 kg du même miel et 6 boîtes du même thé : elle paie 330 DH. On note x le prix (en DH) d'un kilogramme de miel et y le prix (en DH) d'une boîte de thé.
 - Montrer que le problème se traduit par le système
$$\begin{cases} x + 12y = 300 \\ 2x + 6y = 330 \end{cases}$$
 (0,5 pt)
 - Résoudre ce système, puis donner le prix d'un kilogramme de miel et celui d'une boîte de thé. (1,5 pt)

EXERCICE 3 (2 points)

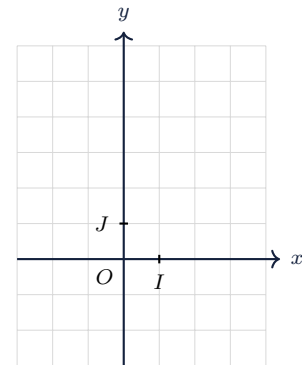
Nombre de frères et sœurs des 20 élèves d'une classe de 3APIC à Fès :

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5
Effectif	2	4	6	4	3	1
Effectif cumulé croissant						

- Compléter la ligne des effectifs cumulés. (0,5 pt)
- Calculer la moyenne de cette série. (0,5 pt)
- Déterminer la médiane de cette série. (0,5 pt)
- Pourcentage des élèves ayant au moins 3 frères et sœurs ? (0,5 pt)

EXERCICE 4 (3 points)

- Soit f la fonction linéaire telle que $f(3) = 6$.
 - Déterminer $f(x)$. (0,5 pt)
 - Calculer $f(-1,5)$; déterminer l'antécédent de 5 par f . (0,5 pt)
- Soit g la fonction affine telle que $g(1) = 2$ et $g(3) = -2$.
 - Montrer que $g(x) = -2x + 4$. (0,5 pt)
 - Déterminer l'antécédent de 0 par g . (0,25 pt)
- Tracer les droites (D_f) et (D_g) , représentations graphiques de f et de g , dans le repère orthonormé ci-contre. (0,75 pt)
- Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Interpréter graphiquement. (0,5 pt)

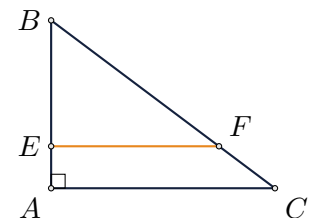
**EXERCICE 5 (3 points)**

- Dans un repère orthonormé (O, I, J) , placer les points $A(-2; 1)$, $B(2; 3)$ et $C(4; -1)$. (0,25 pt)
- Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du point K , milieu de $[AC]$. (0,5 pt)
- Calculer AB , BC et AC , puis montrer que ABC est rectangle et isocèle en B . (0,75 pt)
- Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) . (0,5 pt)
- Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) passant par C et perpendiculaire à (AB) . Vérifier que $B \in (\Delta)$. (0,5 pt)
- Soit D le symétrique de B par rapport à K . Calculer les coordonnées de D , puis donner la nature de $ABCD$. (0,5 pt)

EXERCICE 6 (3,5 points)

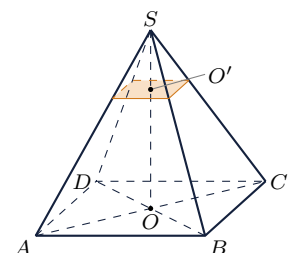
ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm. E est le point de $[BA]$ tel que $BE = 4,5$ cm et F le point de $[BC]$ tel que $BF = 7,5$ cm.

- Calculer la longueur BC . (0,5 pt)
- Calculer $\cos \widehat{ABC}$, $\sin \widehat{ABC}$ et $\tan \widehat{ABC}$, puis une mesure de $\widehat{ABC}$ arrondie au degré. (0,75 pt)
- Montrer que les droites (EF) et (AC) sont parallèles. (0,75 pt)
- Calculer la longueur EF . (0,5 pt)
- Soit O le centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABC .
 - Préciser la position de O et le rayon de (C) . (0,25 pt)
 - Comparer les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{ABC}$; en déduire une valeur approchée de $\widehat{AOC}$. (0,25 pt)
- Montrer que pour tout angle aigu de mesure x : $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$. (0,5 pt)

**EXERCICE 7 (1,5 point)**

$SABCD$ est une pyramide régulière de sommet S , de base le carré $ABCD$ de centre O et de côté 6 cm, et de hauteur $SO = 9$ cm.

- Calculer le volume V de la pyramide $SABCD$. (0,5 pt)
- On coupe la pyramide par un plan parallèle à sa base passant par le point O' de $[SO]$ tel que $SO' = 3$ cm : on obtient la pyramide réduite $SA'B'C'D'$.
 - Calculer le coefficient de réduction k . (0,5 pt)
 - En déduire le volume V' de la pyramide $SA'B'C'D'$. (0,5 pt)



Calculatrice non programmable autorisée. La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements entrent dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (3,5 points)

- Simplifier $A = \sqrt{75} - 2\sqrt{27} + 4\sqrt{3}$. (0,5 pt)
- Développer et réduire le nombre :
 $B = (\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2) + (1 - \sqrt{3})^2$. (0,5 pt)
- Montrer que $F = \frac{3^5 \times 2^{-3} \times 6^2}{9^3 \times 2^{-4}} = 24$. (0,5 pt)
- Écrire sans radical au dénominateur :
 $D = \frac{2}{3 + \sqrt{7}}$. (0,5 pt)
- Donner l'écriture scientifique de :
 $H = \frac{0,00042 \times 5 \times 10^6}{3 \times 10^{-2}}$. (0,5 pt)
- Soit $G = 9x^2 - 25 - (3x + 5)(x - 2)$. a) Factoriser $9x^2 - 25$. (0,25 pt)
 b) En déduire que $G = (3x + 5)(2x - 3)$. (0,5 pt) c) Résoudre l'équation $G = 0$. (0,25 pt)

EXERCICE 2 (3,5 points)

- Résoudre l'équation : $(x - 1)^2 = 16$. (0,5 pt)
- Résoudre l'inéquation $\frac{2x - 1}{3} - \frac{x}{2} > \frac{1}{6}$ et représenter ses solutions sur une droite graduée. (0,75 pt)
- Dans un cinéma de Casablanca, le billet coûte 40 DH pour un adulte et 25 DH pour un enfant. Pour une séance, 150 billets ont été vendus pour une recette de 4 950 DH. On note x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.
 - Traduire l'énoncé par un système de deux équations. (0,75 pt)
 - Résoudre ce système, puis donner le nombre d'adultes et le nombre d'enfants. (1 pt)
 - Le soir, les 150 places sont aussi vendues. Combien faut-il d'adultes, au minimum, pour que la recette atteigne au moins 5 400 DH ? (0,5 pt)

EXERCICE 3 (2 points)

Nombre d'heures passées devant les écrans pendant un week-end par 20 élèves d'un collège de Marrakech :

5 7 2 4 5 9 7 5 4 2 5 7 4 5 9 7 2 5 4 7

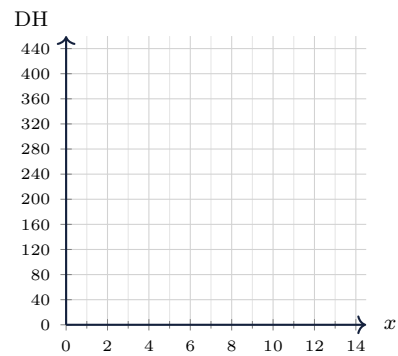
- Compléter le tableau des effectifs ci-contre. (0,5 pt)
- Calculer la moyenne de cette série. (0,5 pt)
- Déterminer la médiane de cette série. (0,5 pt)
- Pourcentage des élèves qui passent au moins 7 h devant les écrans ? (0,5 pt)

Heures	2	4	5	7	9
Effectif					

EXERCICE 4 (3 points)

Un club de natation d'Agadir propose deux formules : **A** : 30 DH par séance ; **B** : abonnement de 120 DH, plus 15 DH par séance. On note x le nombre de séances, $f(x)$ et $g(x)$ les prix (en DH) payés avec les formules A et B.

1. Calculer le prix de 10 séances avec chaque formule. (0,5 pt)
2. Exprimer $f(x)$ et $g(x)$; préciser la nature de f et g . (0,5 pt)
3. Représenter f et g dans le repère ci-contre. (0,75 pt)
4. Déterminer l'antécédent de 300 par g ; interpréter. (0,5 pt)
5. Pour combien de séances les deux formules coûtent-elles le même prix ? (graphiquement, puis par le calcul) (0,5 pt)
6. Quelle formule est la plus avantageuse au-delà de 8 séances ? (0,25 pt)

**EXERCICE 5 (3 points)**

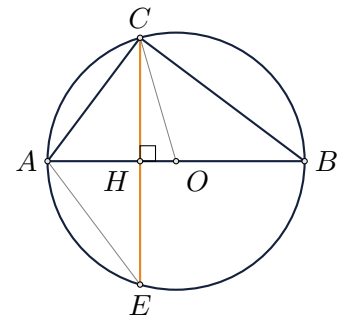
Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on considère les points $A(0; -2)$, $B(2; 2)$ et $C(8; -1)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, puis calculer AB et BC . (1 pt)
2. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) . (0,5 pt)
3. a) Vérifier que $y = -\frac{1}{2}x + 3$ est l'équation réduite de la droite (BC) . (0,25 pt)
b) Montrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires. (0,5 pt)
4. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un rectangle. (0,5 pt)
5. Calculer l'aire du triangle ABC (l'unité d'aire est celle du repère). (0,25 pt)

EXERCICE 6 (4 points)

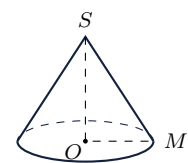
$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$ tel que $AB = 10$ cm ; C est un point de $(\mathcal{C})$ tel que $AC = 6$ cm. H est le projeté orthogonal de C sur (AB) ; la droite (CH) recoupe $(\mathcal{C})$ en E .

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C . (0,5 pt)
2. Calculer la longueur BC . (0,5 pt)
3. Calculer $\sin \widehat{ABC}$ et $\cos \widehat{ABC}$; donner $\widehat{ABC}$ au degré près. (0,75 pt)
4. a) Montrer que les triangles ACH et ABC sont semblables. (0,5 pt)
b) En déduire que $AH = 3,6$ cm, puis calculer CH . (0,75 pt)
5. a) Montrer que $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$. (0,25 pt) b) Comparer $\widehat{AOC}$ et $\widehat{ABC}$, puis donner une valeur approchée de $\widehat{AOC}$. (0,25 pt)
6. Montrer que pour tout angle aigu de mesure x : $(1 + \tan^2 x) \cos^2 x = 1$. (0,5 pt)

**EXERCICE 7 (1 point)**

Un cône de révolution de sommet S a pour hauteur $SO = 8$ cm et pour base un disque de rayon $OM = 6$ cm.

1. Calculer le volume V de ce cône (valeur exacte). (0,5 pt)
2. On réduit ce cône avec le coefficient $k = \frac{3}{4}$. Calculer le volume V' du cône réduit (valeur exacte, puis valeur approchée à $0,1 \text{ cm}^3$ près). (0,5 pt)



Corrigés détaillés

Les solutions sont rédigées de façon concise : les étapes essentielles y figurent, à toi de compléter les détails de calcul sur ta copie.

1 Identités remarquables

Exercice 1.1

- a) $x^2 + 8x + 16$ b) $9x^2 - 12x + 4$ c) $4x^2 - 25$
d) $2x^2 + 5x - 3 - 2x^2 = 5x - 3$.

Exercice 1.2

- a) **Faux** : $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ($x = 1 : 16 \neq 10$).
b) **Vrai** : $x^2 - 2x + 1 - (x^2 - 4) = 5 - 2x$. c) **Vrai** : $(7x)^2 - 1^2$. d) **Vrai** : $(-A)^2 = A^2$ avec $A = a + b$.

Exercice 1.3

- a) $E = (x+1)(3x+1)$ b) $F = (3x-2)^2$
c) $G = (x+2-3)(x+2+3) = (x-1)(x+5)$
d) $H = (3x-2-x-4)(3x-2+x+4) = (2x-6)(4x+2) = 4(x-3)(2x+1)$.

Exercice 1.4

- a) 10 404 b) $(1000-2)^2 = 996\,004$ c) $50^2 - 1 = 2\,499$
d) $10^6 - 1 = 999\,999$ e) $3600 + 600 + 25 = 4\,225$
f) $2025 \times 2027 = (2026-1)(2026+1) = 2026^2 - 1$: résultat 1.

Exercice 1.5

1. b) 2. a) car $2 \times 4x \times 3 = 24x$ 3. c) $5 - 3 = 2$
4. b) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 49 - 20 = 29$.

Exercice 1.6

- a) $A = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3}$ b) $B = 20 - 9 = 11$
c) $C = (3 + 2\sqrt{2}) - (3 - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$ d) $D = 3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3$.

Exercice 1.7

1. $E = 4x^2 - 4x + 1 - (2x^2 + 5x - 3) = 2x^2 - 9x + 4$.
2. $E = (2x-1)[(2x-1) - (x+3)] = (2x-1)(x-4)$.
3. $E = 2 \times 2 - 9\sqrt{2} + 4 = 8 - 9\sqrt{2}$.
4. $(2x-1)(x-4) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ ou $x = 4$.

Exercice 1.8

1. Grand carré (côté $x+4$) moins patio : $\mathcal{A} = (x+4)^2 - x^2 = 4(2x+4) = 8x + 16$.
2. $\mathcal{A} = 8 \times 6 + 16 = 64 \text{ m}^2$, coût $64 \times 250 = 16\,000 \text{ DH}$.
3. $22\,000 \div 250 = 88 \text{ m}^2$, donc $8x + 16 = 88$ et $x = 9 \text{ m}$.

Exercice 1.9

1. On développe $(x-3)^2 + 1$. 2. $(x-3)^2 \geq 0$ donc l'expression est $\geq 1 > 0$; minimum 1 (pour $x = 3$).
3. $4x^2 + 4x + 3 = (2x+1)^2 + 2 \geq 2$ (égalité pour $x = -\frac{1}{2}$).
4. $a^2 - 2a + 1 + b^2 + 4b + 4 = (a-1)^2 + (b+2)^2 \geq 0$; égalité si et seulement si $a = 1$ et $b = -2$.

Défi olympiade 1.1

1. $(n+1)^2 - n^2 = (n+1) + n$, donc $S = (2025+2024) + \dots + (3+2) + 1 = 1 + 2 + \dots + 2025 = \frac{2025 \times 2026}{2} = 2\,051\,325$.
2. Un impair s'écrit $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$. Ainsi $2025 = 2 \times 1012 + 1 = 1013^2 - 1012^2$.

Défi olympiade 1.2

1. $(n^2 + 3n + 1)^2 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$;
 $n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ (avec $t = n^2 + 3n : n(n+3) = t, (n+1)(n+2) = t+2$, produit $= t^2 + 2t$).
2. $t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 = (n^2 + 3n + 1)^2$.
3. Avec $n = 2024 : n^2 + 3n + 1 = 4\,096\,576 + 6\,072 + 1 = 4\,102\,649$.

2 Les racines carrées

Exercice 2.1

- a) 9 b) 0,6 c) $\frac{3}{5}$ d) 11 e) 5 f) $\sqrt{25} = 5$ g) $\sqrt{16} = 4$
h) $4 \times 3 = 12$.

Exercice 2.2

- a) **Faux** : $4 + 3 \neq 5$. b) **Faux** : $\sqrt{16} = 4$. c) **Vrai** : $\sqrt{36} = 6$. d) **Faux** : aucune solution.

Exercice 2.3

1. $5\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$; $4\sqrt{5}$; $7\sqrt{2}$.
2. $A = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$; $B = 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$;
 $C = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \frac{6\sqrt{2}}{3} = 6\sqrt{2}$.

Exercice 2.4

- a) $\frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$ b) $\frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
d) $\frac{4(3+\sqrt{5})}{9-5} = 3 + \sqrt{5}$ e) $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2.5

- a) $x = 7$ ou $x = -7$ b) $x = \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{7}$ c) $x^2 = -4$: pas de solution d) $x^2 = 9$: $x = 3$ ou $x = -3$
 e) $x^2 = \frac{5}{4}$: $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ f) $x - 1 = 4$ ou $x - 1 = -4$: $x = 5$ ou $x = -3$.

Exercice 2.6

1. a) $12 > 11$ donc $2\sqrt{3} > \sqrt{11}$ b) $50 > 49$ donc $5\sqrt{2} > 7$ c) $45 > 44$ donc $3\sqrt{5} > 2\sqrt{11}$.
 2. $5 < \sqrt{30} < 6$; $14 < \sqrt{200} < 15$; $3\sqrt{7} = \sqrt{63}$ donc $7 < 3\sqrt{7} < 8$.

Exercice 2.7

1. $a + b = 4$; $ab = 4 - 3 = 1$.
 2. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 16 - 2 = 14$; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = 4$.
 3. $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab} = a^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$.

Exercice 2.8

1. $c = \sqrt{450} = \sqrt{225 \times 2} = 15\sqrt{2}$ m.
 2. $d = c\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$ m.
 3. Périmètre $60\sqrt{2}$ m ; prix $60\sqrt{2} \times 35 = 2100\sqrt{2} \approx 2970$ DH.

Exercice 2.9

1. $7 + 4\sqrt{3}$ et $7 - 4\sqrt{3}$.
 2. $2 + \sqrt{3} > 0$ donc $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$. Comme $\sqrt{3} < 2$, $2 - \sqrt{3} > 0$, donc $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.
 3. $A = 4$; $B = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$.

Défi olympiade 2.1

1. On multiplie par le conjugué : $\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.
 2. $S = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) = \sqrt{100} - 1 = 9$.

Défi olympiade 2.2

1. On compare les carrés (nombres positifs) : $12 + 2\sqrt{35} > 12 + 2\sqrt{27}$, donc $\sqrt{5} + \sqrt{7} > \sqrt{3} + \sqrt{9}$.
 2. Par le défi 1 : $\sqrt{2026} - \sqrt{2025} = \frac{1}{\sqrt{2026} + \sqrt{2025}} < \frac{1}{\sqrt{2025} + \sqrt{2024}} = \sqrt{2025} - \sqrt{2024}$.
 3. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$; or $2\sqrt{6} = \sqrt{24} < \sqrt{25} = 5$, donc $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 < 10$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$.

3 Les puissances**Exercice 3.1**

- a) 64 b) -32 c) -16 d) -1 e) $\frac{1}{9}$ f) $\frac{5}{2}$ g) 0,001 h) 1.

Exercice 3.2

- a) Faux : $2^{3+4} = 2^7$. b) Vrai : $3 \times 3^2 = 3^3$. c) Faux : $\frac{1}{25} > 0$. d) Vrai : $10^{-2 \times 3}$.

Exercice 3.3

1. a) 2. a) 3. b) car $\frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8}$ 4. b) $(2 \times 5)^{10}$.

Exercice 3.4

- a) 5^{-4} b) 7^{11} c) $2^{-12+15} = 2^3$ d) 6^5 e) $\frac{4^6}{4^2} = 4^4$ f) $\frac{2^7 \times 2^6}{2^6} = 2^7$.

Exercice 3.5

- a) $A = \frac{3^3 \times 5^3}{3^2 \times 5^4} = \frac{3}{5}$ b) $B = 2^3 \times 3^{-2} \times 2^2 \times 3^2 = 2^5 = 32$
 c) $C = \frac{5^6 \times 2^4}{2^4 \times 5^4} = 5^2 = 25$ d) $D = \frac{6^4 \times 5^3}{3^2 \times 5^2 \times 6^3} = \frac{6 \times 5}{9} = \frac{10}{3}$.

Exercice 3.6

1. $5,2 \times 10^7$; $3,8 \times 10^{-5}$; $2,45 \times 10^{-5}$; 6×10^3 .
 2. $F = \frac{1,2 \times 5}{4} \times 10^{-3+8-2} = 1,5 \times 10^3$; ordre de grandeur 10^3 .

Exercice 3.7

1. $A = 3^{6-4-5} = 3^{-3}$; $B = \frac{5^5}{5^{-3}} = 5^8$.
 2. $C = \frac{15 \times 4}{3} \times 10^{-3+5+2} = 20 \times 10^4 = 2 \times 10^5$.

Exercice 3.8

1. $t = \frac{1,5 \times 10^8}{3 \times 10^5} = 0,5 \times 10^3 = 500$ s = **8 min 20 s**.
 2. $3 \times 10^5 \times 365 \times 24 \times 3600 = 3 \times 10^5 \times 3,1536 \times 10^7 \approx 9,46 \times 10^{12}$ km.
 3. $\frac{2 \times 10^{12}}{25 \times 10^6} = 0,08 \times 10^6 = 80\,000$ images.

Exercice 3.9

1. $A = \frac{2^{11}}{2^9} = 4$; $B = \frac{3^{2024} \times 2}{3^{2023}} = 6$; $C = \frac{5^{11}(5+1)}{5^{11}(5-1)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.
 2. $N = 2^{20} \times 5^{18} = 2^2 \times (2 \times 5)^{18} = 4 \times 10^{18}$: un 4 suivi de 18 zéros, soit **19 chiffres**.

Défi olympiade 3.1

1. 7, 9, 3, 1, 7 : le chiffre des unités se répète tous les 4 exposants (on ne garde que le chiffre des unités à chaque multiplication par 7).
 2. $2026 = 4 \times 506 + 2$, donc 7^{2026} se termine comme 7^2 : par **9**.
 3. Unités de 2^n : 2,4,8,6 ; de 3^n : 3,9,7,1 (cycles de 4). Avec le reste 2 : $4 + 9 = 13$, chiffre des unités **3**.

Défi olympiade 3.2

- a) $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ et $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$, donc **$2^{300} < 3^{200}$** .
 b) $2^{700} = 128^{100}$ et $5^{300} = 125^{100}$, donc **$2^{700} > 5^{300}$** .
 c) $31^{11} < 32^{11} = 2^{55}$ et $17^{14} > 16^{14} = 2^{56}$, donc **$31^{11} < 17^{14}$** .
 d) Exposant commun 25 : $2^{100} = 16^{25}$, $5^{50} = 25^{25}$, $3^{75} = 27^{25}$, donc **$2^{100} < 5^{50} < 3^{75}$** .

4 Ordre et opérations

Exercice 4.1

- a) **Faux** : on multiplie par $-5 < 0$, donc $-5a > -5b$.
 b) **Faux** : $a = b = -10$ donne $ab = 100$. c) **Vrai** :
 $a^3 = a \times a^2$ et $0 < a^2 < 1$. d) **Faux** : $x = -3$, $y = 1$.

Exercice 4.2

- a) $A - B = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1 > 0$, donc $A > B$.
 b) $C - D = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$, donc $C < D$.
 c) $E - F = \frac{3-5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} > 0$ (car $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$), donc $E > F$.

Exercice 4.3

- a) $-1 \leq x + y \leq 4$ b) $1 \leq -y \leq 3$ donc $3 \leq x - y \leq 8$
 c) $2 \leq 3x - 4 \leq 11$
 d) $2 \leq x(-y) \leq 15$ donc $-15 \leq xy \leq -2$ e) $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 4.4

- $a = 0,64$: $a^2 = 0,4096$; $\sqrt{a} = 0,8$; $\frac{1}{a} = 1,5625$;
 $a^2 < a < \sqrt{a} < 1 < \frac{1}{a}$.
 $a = \frac{9}{4}$: $a^2 = \frac{81}{16}$; $\sqrt{a} = \frac{3}{2}$; $\frac{1}{a} = \frac{4}{9}$; $\frac{1}{a} < 1 < \sqrt{a} < a < a^2$.

Exercice 4.5

1. $3,14 \leq \sqrt{2} + \sqrt{3} \leq 3,16$; $-1,42 \leq -\sqrt{2} \leq -1,41$
 donc $0,31 \leq \sqrt{3} - \sqrt{2} \leq 0,33$;
 $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$: $2,4393 \leq \sqrt{6} \leq 2,4708$.
 2. Conjugué : $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$, donc $3,14 \leq \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \leq 3,16$.

Exercice 4.6

1. $41,4 \leq P \leq 42,2$ (m); $102,92 \leq \mathcal{A} \leq 107,1$ (m²).
 2. Au pire 42,2 m : **5 rouleaux**.

Exercice 4.7

1. $3,236 < 1 + \sqrt{5} < 3,237$ donc $1,618 < \varphi < 1,6185$:
 arrondi **1,618**.
 2. $\varphi^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \varphi + 1$; on divise par $\varphi \neq 0$:
 $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.
 3. $0,618 < \frac{1}{\varphi} < 0,6185$ et $2,618 < \varphi^2 < 2,6185$.

Défi olympiade 4.1

1. $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$; égalité si et seulement
 si $a = b$.
 2. On divise par $ab > 0$: $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$, soit $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
 3. Côtés x, y , $xy = 36$: $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy \geq 144$,
 donc $x + y \geq 12$, $P \geq 24$ m, avec égalité pour
 $x = y = 6$: le **carré de côté 6 m**.

Défi olympiade 4.2

1. $45^2 = 2025 < 2026 < 2116 = 46^2$.
 2. $(\sqrt{2026} - 45)(\sqrt{2026} + 45) = 2026 - 2025 = 1$.
 3. Par 1., $90 < \sqrt{2026} + 45 < 91$, d'où $\frac{1}{91} < \sqrt{2026} - 45 < \frac{1}{90}$. Or $\frac{1}{91} \approx 0,01099$ et $\frac{1}{90} \approx 0,01111$: $45,0109 < \sqrt{2026} < 45,0112$, arrondi **45,011**.

5 Équations et inéquations**Exercice 5.1**

- a) $x = 5$. b) $-5x = 15$, $x = -3$. c) $3x - 6 = 2x - 3$,
 $x = 3$. d) $0x = 0$: **tout réel** est solution. e)
 $3x + 1 = 3x + 4 \iff 0x = 3$: **aucune solution**.
 f) $\times 6 : 5x = 60$, $x = 12$.

Exercice 5.2

- a) **Vrai** : $4 - 6 + 2 = 0$. b) **Faux** : un carré est positif,
 aucune solution. c) **Faux** : on divise par $-2 < 0$, donc
 $x < -3$. d) **Faux** : -3 est solution de $x^2 = 9$ mais pas
 de $2x = 6$.

Exercice 5.3

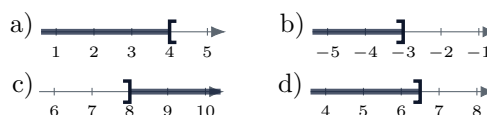
- a) $x = 2$ ou $x = -5$. b) $x(x - 7) = 0$: $x = 0$ ou
 $x = 7$.
 c) $(x+1-2x)(x+1+2x) = 0 \iff (1-x)(3x+1) = 0$:
 $x = 1$ ou $x = -\frac{1}{3}$.
 d) $(2x-1)(x+3-4x+2) = 0 \iff (2x-1)(5-3x) = 0$:
 $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{5}{3}$.

Exercice 5.4

- a) $x = 7$ ou $x = -7$. b) $x^2 = 5$: $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$.
 c) $x - 3 = 4$ ou $x - 3 = -4$: $x = 7$ ou $x = -1$.
 d) $\times 12 : 3(x+1) - 2(x-2) = 12 \iff x+7 = 12 \iff$
 $x = 5$.

Exercice 5.5

- a) $3x < 12$: $x < 4$ (4 exclu).
 b) $-5x \geq 15$: on divise par -5 , $x \leq -3$.
 c) $\times 6 : 3x - 6 > 2x + 2$, $x > 8$. d) $3x - 6 \leq x + 7$,
 $2x \leq 13$, $x \leq 6,5$.

**Exercice 5.6**

- Soit x le nombre d'années : $41 + x = 3(9 + x) \iff$
 $41 + x = 27 + 3x \iff 2x = 14 \iff x = 7$.
 Vérif. : $48 = 3 \times 16$. ✓ Dans **7 ans**.

Exercice 5.7

- 1) 10 séances : A = 400 DH, B = 430 DH. 12 séances :
 A = B = 480 DH.
 2) $25x + 180 < 40x \iff 180 < 15x \iff x > 12$: à
 partir de **13 séances**.

Exercice 5.8

- 1) $E = 9x^2 - 6x + 1 - (3x^2 + 11x - 4) = 6x^2 - 17x + 5$.
 2) $E = (3x-1)[(3x-1)-(x+4)] = (3x-1)(2x-5)$.
 3) $x = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{5}{2}$. 4) $6x^2 - 17x = 0 \iff$
 $x(6x - 17) = 0$: $x = 0$ ou $x = \frac{17}{6}$.

Exercice 5.9

Stock x kg. Après le matin : $\frac{2}{3}x$; l'après-midi il vend $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}x = \frac{1}{6}x$. Reste : $\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}x = \frac{1}{2}x = 90$, donc $x = 180$ kg ($180 - 60 - 30 = 90$ ✓).

Défi olympiade 5.1

On retranche 1 à chaque fraction (3 en tout) : $\frac{x-1}{2025} - 1 = \frac{x-2026}{2025}$, etc. L'équation devient $(x-2026)(\frac{1}{2025} + \frac{1}{2024} + \frac{1}{2023}) = 0$. La parenthèse est non nulle, donc $x = 2026$ (unique solution).

Défi olympiade 5.2

- 1) $N = 10a + b$: $10a + b = 4a + 4b \iff 6a = 3b \iff b = 2a$. Avec $b \leq 9$: $N \in \{12; 24; 36; 48\}$.
 2) $(10b + a) - (10a + b) = 9(b - a) = 27$, donc $b - a = 3$; avec $b = 2a$: $a = 3$, $b = 6$, $N = 36$ ($63 - 36 = 27$ ✓).

6 Systèmes de deux équations à deux inconnues**Exercice 6.1**

- 1) b) : en additionnant, $2x = 14$, $x = 7$, $y = 3$. 2) c) : $2 - 3 = -1$ et $4 + 1 = 5$ (a) : $2 - 1 \neq 3$; b) : $2 - 2 \neq 4$. 3) b) : on aurait $x + y = 3$ et $x + y = 5$.

Exercice 6.2

- a) $y = 2x - 6$; $x + 3(2x - 6) = 10$, $7x = 28$, $x = 4$, $y = 2$: (4; 2).
 b) $5x - 3(2x - 1) = 0 \iff -x + 3 = 0$, $x = 3$, $y = 5$: (3; 5).

Exercice 6.3

- a) On additionne : $8x = 16$, $x = 2$, puis $2y = 10$, $y = 5$: (2; 5).
 b) ($\times 5$) et ($\times 3$) : $20x + 15y = 25$, $9x - 15y = 33$; on additionne : $29x = 58$, $x = 2$, puis $3y = -3$, $y = -1$: (2; -1).

Exercice 6.4

$\times 10$ et $\times 6$: $5x + 2y = 13$ et $2x - 3y = -10$. ($\times 3$), ($\times 2$) puis addition : $19x = 19$, $x = 1$, puis $2y = 8$, $y = 4$: (1; 4).

Exercice 6.5

- 1) (D) passe par (0; -1) et (3; 2); (Δ) par (0; 5) et (3; -1). 2) $K(2; 1)$. 3) Les équations s'écrivent $y = x - 1$ et $y = -2x + 5$: solution (2; 1). Calcul : somme $3x = 6$, $x = 2$, $y = 1$ ✓.

Exercice 6.6

- 1) $2x + 3y = 190$ et $3x + 2y = 210$ (coefficients croisés). Somme : $5(x + y) = 400$, $x + y = 80$; différence : $x - y = 20$. Donc $x = 50$, $y = 30$: adulte 50 DH, enfant 30 DH. 2) $150 + 150 = 300$ DH.

Exercice 6.7

- 1) $y = 85 - 2x$; $x + 3(85 - 2x) = 105 \iff -5x = -150$, $x = 30$, $y = 25$: (30; 25).
 2) $x =$ prix des roses, $y =$ prix des tulipes : c'est le système du 1). Roses 30 DH, tulipes 25 DH.

Exercice 6.8

- 1) $x + y = 20$ et $120x + 80y = 95 \times 20 = 1900$. Donc $120x + 80(20 - x) = 1900 \iff 40x = 300$, $x = 7,5$, $y = 12,5$: 7,5 kg à 120 DH et 12,5 kg à 80 DH. 2) $\frac{600 + 1200}{20} = 90$ DH.

Exercice 6.9

- 1) $2(L + \ell) = 64$; $(L + 4)(\ell - 2) = L\ell \iff -2L + 4\ell - 8 = 0 \iff L = 2\ell - 4$. 2) $3\ell - 4 = 32$, $\ell = 12$, $L = 20$: 20 m sur 12 m. Vérif. : $24 \times 10 = 240 = 20 \times 12$ ✓.

Défi olympiade 6.1

- 1) $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$: $49 = 25 + 2xy$, $xy = 12$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{7}{12}$.
 2) $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 49 - 48 = 1$, donc $x - y = 1$ ou $x - y = -1$. Avec $x + y = 7$: (4; 3) ou (3; 4).
 3) $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$, donc $x^3 + y^3 = 343 - 3 \times 12 \times 7 = 91$ ($= 64 + 27$ ✓).

Défi olympiade 6.2

- a) Somme : $4051x + 4051y = 4051$, donc $x + y = 1$. Différence ($2^e - 1^e$) : $x - y = -3$. D'où $2x = -2$: $x = -1$, $y = 2$. Vérif. : $-2025 + 4052 = 2027$ ✓.
 b) Somme : $200(x + y) = 1000$, $x + y = 5$; différence : $2x - 2y = 2$, $x - y = 1$. Donc (3; 2).

7 Fonctions linéaires et fonctions affines**Exercice 7.1**

- 1) a). 2) b) : $m(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$ est affine; h n'est pas affine (un x^2 subsiste); une fonction linéaire est aussi affine ($b = 0$).

Exercice 7.2

- 1) $a = \frac{-15}{5} = -3$, $f(x) = -3x$. 2) $f(-2) = 6$. 3) $-3x = 21$, $x = -7$.

Exercice 7.3

- 1) $2400 \times 1,15 = 2760$ DH. 2) $p \times 0,75 = 1350$, $p = 1800$ DH. 3) $\times 1,1 \times 0,9 = \times 0,99$: baisse de 1 %.

Exercice 7.4

- 1) $p(x) = 1,2x$: fonction linéaire. 2) 2 880 DH TTC; $540 \div 1,2 = 450$ DH HT.
 3) $s(x) = 0,85 \times 1,2x = 1,02x$: le prix soldé reste supérieur de 2 % au prix HT.

Exercice 7.5

- 1) $a = \frac{-1-7}{3-(-1)} = -2$; $f(-1) = 2 + b = 7$, $b = 5$: $f(x) = -2x + 5$.
 2) $-2x + 5 = 0$, $x = \frac{5}{2}$. 3) $a = -2 < 0$: f est décroissante.

Exercice 7.6

- 1) $V(x) = -80x + 1\,200$: fonction **affine** (décroissante).
 2) $V(6) = 720$ L. 3) $-80x + 1\,200 = 0$: **15 jours**.

Exercice 7.7

- 1) (D_1) , car elle passe par l'origine. 2) $f(2) = 3$; $g(0) = 5$; l'antécédent de 5 par g est 0.
 3) $f(x) = 1,5x$; $g : b = 5$, $a = \frac{0-5}{5-0} = -1$, $g(x) = -x + 5$.
 4) $(2; 3) : 1,5x = -x + 5 \iff 2,5x = 5 \iff x = 2$, $y = 3 \checkmark$.

Exercice 7.8

- 1) $f(2) = 1$; $2x - 3 = 5$, $x = 4$. 2) g est linéaire de coefficient $-\frac{1}{2}$.
 3) (D_f) passe par $(0; -3)$ et $(2; 1)$; (D_g) par O et $(2; -1)$.
 4) $2x - 3 = -\frac{1}{2}x \iff \frac{5}{2}x = 3 \iff x = \frac{6}{5}$; $g(\frac{6}{5}) = -\frac{3}{5}$: point $(\frac{6}{5}; -\frac{3}{5})$.

Exercice 7.9

- 1) $A(n) = 50n$, $B(n) = 30n + 150$. 2) 6 séances : 300, 330, 500 : **A**. 10 séances : 500, 450, 500 : **B**.
 3) $30n + 150 < 50n \iff n > 7,5$: dès **8 séances**.
 $500 < 30n + 150 \iff n > 11,6 \dots$: dès **12 séances**.

Défi olympiade 7.1

- 1) $f(x) = ax + b$: $f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + (a + 1)b$. Il faut $a^2 = 4$ et $(a + 1)b = 3$.
 $a = 2 : b = 1$; $a = -2 : -b = 3$, $b = -3$. Deux solutions : $f(x) = 2x + 1$ et $f(x) = -2x - 3$.
 (Vérif. : $-2(-2x - 3) - 3 = 4x + 3 \checkmark$.) 2) Il faudrait $a^2 = -1$: impossible, un carré est positif. **Non**.

Défi olympiade 7.2

- 1) $(1 + \frac{t}{100})(1 - \frac{t}{100}) = 1 - \frac{t^2}{10\,000} = 0,96$, donc $t^2 = 400$ et $t = 20$.
 2) Il faut multiplier par $\frac{1}{1,25} = 0,8 = 1 - 0,2$: baisse de **20 %** (et non 25 %!).

8 Statistiques**Exercice 8.1**

- a) **Vrai** : $\frac{40}{5} = 8$; 7 apparaît deux fois. b) **Faux** : rangée, 1; 3; 4; 7; 9; 12 : $M = \frac{4+7}{2} = 5,5$. c) **Vrai** : le numérateur est multiplié par 2.

Exercice 8.2

- 1) $\bar{x} = \frac{-16}{8} = -2$ °C. Rangée : -6; -5; -4; -3; -2; 0; 1; 3 : $M = \frac{-3-2}{2} = -2,5$ °C. Étendue : $3 - (-6) = 9$ °C. 2) **3 jours** (0; 1; 3).

Exercice 8.3

- 1) 10; 17,5; 30; 22,5; 15; 5 (%). ECC : 4; 11; 23; 32; 38; 40.
 2) $\bar{x} = \frac{1612}{40} = 40,3$; mode **40**; 20^e et 21^e valeurs = 40 : $M = 40$. 3) $\frac{17}{40} = 42,5$ %.

Exercice 8.4

$$\frac{24+10x+72+60}{13+x} = 11 \iff 156 + 10x = 143 + 11x \iff x = 13; N = 26.$$

Exercice 8.5

- 1) $\frac{18}{72} = 0,25 = 25$ %. 2) $\frac{360}{72} = 5^\circ$ par élève : **150°**; **90°**; **60°**; **40°**; **20°** (total 360° ✓).

Exercice 8.6

- 1) Effectifs : 12; 18; 11; 6; 3 (total 50). 2) $10 \leq t < 20$.
 3) Centres 5; 15; 25; 35; 45 : $\bar{x} = \frac{950}{50} = 19$ min. 4) $\frac{30}{50} = 60$ %.

Exercice 8.7

- 1) $\bar{x} = \frac{345}{30} = 11,5$. 2) ECC : 3; 7; 17; 26; 30. Les 15^e et 16^e notes valent 11 : $M = 11$; la moitié des élèves a au moins 11. 3) $\frac{23}{30} \approx 76,7$ %. 4) Moyenne 12,5; médiane 12; étendue inchangée : 10.

Défi olympiade 8.1

- 1) Total : $30 \times 12 = 360$; filles : $18 \times 13 = 234$; garçons : $\frac{360-234}{12} = 10,5$.
 2) Il faut un total $\geq 6 \times 13 = 78$, soit $\geq 78 - 44 = 34$ points sur les deux derniers (≤ 40) : **possible**. Avec 20 au dernier : au moins **14** au 5^e.

Défi olympiade 8.2

- 1) $\bar{x} = \frac{117}{9} = 13$; $M = 13$ (5^e note). 2) $\frac{117+x}{10}$, au plus 13,7 : il faudrait $117 + x = 140$, $x = 23 > 20$, **impossible**.
 3) $M =$ moyenne des 5^e et 6^e notes : si $x \leq 12$, ce sont 12 et 13 ($M = 12,5$); si $x \geq 14$, 13 et 14 ($M = 13,5$); sinon 13 et x , donc $12,5 \leq M \leq 13,5$.

9 Le théorème de Thalès**Exercice 9.1**

Thalès $((EF) \parallel (BC)) : \frac{3}{5} = \frac{4,2}{AC} = \frac{EF}{6}$. 1. $AC = \frac{4,2 \times 5}{3} = 7$ cm. 2. $EF = \frac{3 \times 6}{5} = 3,6$ cm. 3. $FC = 2,8$ cm.

Exercice 9.2

Thalès (papillon) : $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE}$, soit $\frac{4}{6} = \frac{5}{AD} = \frac{4,8}{DE}$: $AD = 7,5$ cm, $DE = 7,2$ cm.

Exercice 9.3

a) **Vrai** (Thalès). b) **Faux** : si M est le milieu de $[AB]$, $\frac{AM}{MB} = 1$, $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$. c) **Vrai** : $\frac{MB}{AM} = \frac{AB}{AM} - 1 = \frac{AC}{AN} - 1 = \frac{NC}{AN}$. d) **Faux** : aire $\times k^2 = \frac{1}{9}$ (9 fois plus petite).

Exercice 9.4

1. $\frac{2,8}{4} = \frac{4,2}{6} = 0,7$ et même ordre : réciproque, $(MN) \parallel (BC)$. 2. $3 \times 6,5 = 19,5 \neq 5 \times 4 = 20$: **non parallèles**.

Exercice 9.5

1. Toutes deux sont perpendiculaires au sol (SP) . 2. Thalès : $\frac{SB}{SP} = \frac{BT}{PH}$, d'où $PH = \frac{1,4 \times 99}{1,8} = 77$ m.

Exercice 9.6

1. $BC = \sqrt{36 + 64} = 10$ cm ; $k = \frac{4,5}{6} = 0,75$. 2. $AN = 6$ cm, $MN = 7,5$ cm, périmètre **18 cm**. 3. $\mathcal{A}_{ABC} = 24$ cm² ; $\mathcal{A}_{AMN} = 0,75^2 \times 24 = 13,5$ cm².

Exercice 9.7

1. Thalès : $\frac{AF}{9} = \frac{EF}{7,5} = \frac{2}{6}$: $AF = 3$ cm, $EF = 2,5$ cm. 2. Thalès en B : $\frac{BG}{7,5} = \frac{EG}{9} = \frac{4}{6}$: $BG = 5$ cm, $EG = 6$ cm. 3. Côtés opposés parallèles : parallélogramme ; $GC = 7,5 - 5 = 2,5 = EF$. 4. $\frac{CL}{CA} = \frac{3}{9} = \frac{CG}{CB} = \frac{2,5}{7,5}$, même ordre : réciproque, $(GL) \parallel (AB)$.

Exercice 9.8

Reporter 5 longueurs égales sur $[Ax]$: $A_1, \dots, A_5$. La parallèle à (A_5B) passant par A_3 coupe $[AB]$ en M . Thalès : $\frac{AM}{AB} = \frac{AA_3}{AA_5} = \frac{3}{5}$.

Défi olympiade 9.1

La parallèle à (AB) passant par C coupe (DF) en G . Thalès « papillon » en E : $\frac{CG}{AD} = \frac{EC}{EA} = 1$, donc $CG = AD = \frac{1}{3}AB$ et $BD = \frac{2}{3}AB = 2CG$. Thalès en F ($(CG) \parallel (BD)$) : $\frac{FC}{FB} = \frac{CG}{BD} = \frac{1}{2}$, donc C est le milieu de $[BF]$.

Défi olympiade 9.2

1. Thalès dans DAB : $\frac{OM}{a} = \frac{DM}{DA}$; dans ADC : $\frac{OM}{b} = \frac{AM}{AD}$. Somme : $\frac{DM+AM}{AD} = 1$. 2. De même $\frac{ON}{a} + \frac{ON}{b} = 1$, donc $OM = ON = \frac{ab}{a+b}$ et $MN = \frac{2ab}{a+b} = 4$ cm.

10 Trigonométrie dans le triangle rectangle

Exercice 10.1

1. Hypoténuse $[RT]$, adjacent $[RS]$, opposé $[ST]$. 2. $\cos = \frac{4}{5}$, $\sin = \frac{3}{5}$, $\tan = \frac{3}{4}$. 3. $\cos \widehat{STR} = \frac{3}{5}$, $\sin \widehat{STR} = \frac{4}{5}$, $\tan \widehat{STR} = \frac{4}{3}$: angles complémentaires, cos et sin s'échangent, tangentes inverses.

Exercice 10.2

1. $AB = 8 \cos 35^\circ \approx 6,6$ cm ; $AC = 8 \sin 35^\circ \approx 4,6$ cm. 2. $EG = 5 \tan 50^\circ \approx 6,0$ cm ; $FG = \frac{5}{\cos 50^\circ} \approx 7,8$ cm.

Exercice 10.3

a) **F** ($\cos x < 1$). b) **V** (tous deux $\frac{1}{2}$). c) **F** : $\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1$. d) **V** : opposé = adjacent, triangle isocèle rectangle. e) **V** : $\cos 65^\circ = \sin 25^\circ$.

Exercice 10.4

1. $\tan \widehat{BAC} = \frac{4}{7}$: $\widehat{BAC} \approx 29,7^\circ$. 2. $\cos \widehat{BAC} = \frac{5}{13}$: $\widehat{BAC} \approx 67,4^\circ$; $BC = \sqrt{169 - 25} = 12$ cm, $\sin \widehat{BAC} = \frac{12}{13}$.

Exercice 10.5

1. $\sin^2 x = 1 - 0,36 = 0,64$ et $\sin x > 0$, donc $\sin x = 0,8$; $\tan x = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}$. 2. $\sin(90^\circ - x) = \cos x = 0,6$; $\tan(90^\circ - x) = \frac{1}{\tan x} = \frac{3}{4}$. 3. $A = 2(\cos^2 a + \sin^2 a) = 2$ (les doubles produits s'annulent) ; $B = \frac{\sin a}{\sin a} + 1 = 2$.

Exercice 10.6

1. $\sin \alpha = \frac{0,45}{5} = 0,09$: $\alpha \approx 5,2^\circ > 5^\circ$, **non**. 2. $L = \frac{0,45}{\sin 5^\circ} \approx 5,17$ m (arrondi par excès).

Exercice 10.7

1. Hauteur $6 \sin 75^\circ \approx 5,80$ m ; distance $6 \cos 75^\circ \approx 1,55$ m. 2. $\cos \alpha = \frac{2}{6}$, $\alpha \approx 70,5^\circ$: **stable**.

Exercice 10.8

1. $BC = \frac{6}{\cos 60^\circ} = 12$ cm ; $AC = 12 \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$ cm. 2. $AH = 6 \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$ cm, $BH = 6 \cos 60^\circ = 3$ cm, $HC = 9$ cm. 3. $6 \times 6\sqrt{3} = 12 \times 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$: deux calculs du double de l'aire. 4. $\widehat{HAC} = 90^\circ - \widehat{ACB} = 60^\circ$; $\tan 60^\circ = \frac{HC}{AH} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Exercice 10.9

1. $\tan 45^\circ = \frac{h}{d} = 1$: $d = h$. $\tan 30^\circ = \frac{h}{h+32} = \frac{1}{\sqrt{3}}$: $h\sqrt{3} = h + 32$. 2. $h = \frac{32}{\sqrt{3}-1} = \frac{32(\sqrt{3}+1)}{2} = 16(\sqrt{3}+1) \approx 44$ m. 3. $PH = h\sqrt{3} = 16(3+\sqrt{3})$ m ($\approx 75,7$ m).

Défi olympiade 10.1

1. On divise haut et bas par $\cos x$: $E = \frac{3 \tan x - 1}{\tan x + 2} = \frac{5}{4}$. 2. Côtés de l'angle droit 1 et 2, hypoténuse $\sqrt{5}$: $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 3. $\tan(90^\circ - x) = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{2} = \tan y$; deux angles aigus de même tangente sont égaux : $y = 90^\circ - x$.

Défi olympiade 10.2

1. $AB = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2$, $BC = \sqrt{3}$. ABD isocèle en B avec $\widehat{ABD} = 150^\circ$: $\widehat{ADB} = 15^\circ$. 2. $CD = 2 + \sqrt{3}$, $AD^2 = 1 + (2 + \sqrt{3})^2 = 8 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$. 3. $\tan 15^\circ = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$; $\cos 15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4}$ car $4(2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$.

11 Angles inscrits et angles au centre

Exercice 11.1

1. $\widehat{AOB}$: au centre (arc $\widehat{AB}$); $\widehat{ACB}$, $\widehat{ADB}$: inscrits (même arc); $\widehat{AIB}$: ni l'un ni l'autre; $\widehat{CAD}$: inscrit (arc $\widehat{CD}$). 2. $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

Exercice 11.2

a) $x = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$ (même arc). b) $x = 38^\circ$ (angles inscrits interceptant le même arc). c) $[AB]$ est un diamètre, donc l'angle en M est droit et $x = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$.

Exercice 11.3

a) **F** (voir le piège). b) **V** : côté = rayon. c) **F** : $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. d) **V** : $\widehat{AOB} = 180^\circ$, A, O, B alignés.

Exercice 11.4

1. $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = 40^\circ$ (même arc $\widehat{AD}$); $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 25^\circ$ (même arc $\widehat{BC}$). 2. Dans IAB : $\widehat{AIB} = 180^\circ - 25^\circ - 40^\circ = 115^\circ$. 3. $\widehat{IAB} = \widehat{IDC} = 25^\circ$, $\widehat{IBA} = \widehat{ICD} = 40^\circ$ et $\widehat{AIB} = \widehat{DIC} = 115^\circ$ (opposés par le sommet).

Exercice 11.5

1. $OA = OB$ et $\widehat{AOB} = 60^\circ$: OAB est **équilatéral**; $AB = 4$ cm, périmètre **24** cm. 2. $\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 30^\circ$. 3. $\widehat{AOD} = 180^\circ$: $[AD]$ est un diamètre, donc $\widehat{ACD} = 90^\circ$. $AC = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm. 4. Hauteur de OAB : $2\sqrt{3}$; aire = $6 \times \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \approx 41,6$ cm².

Exercice 11.6

1. **45°**; **30°**. 2. $\frac{360}{24} = 15$ côtés. 3. **Non** : $\frac{360}{25} = 14,4$. 4. OAB isocèle : $\widehat{OBA} = \frac{1}{2}(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}) = \widehat{OBC}$, et l'angle en B est leur somme. Octogone : **135°**.

Exercice 11.7

1. $\widehat{ACB}$ intercepte un demi-cercle : $\widehat{ACB} = 90^\circ$. 2. $BC = 8 \sin 30^\circ = 4$ cm; $AC = 8 \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$ cm. 3. $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 60^\circ$ et $OB = OC$: OBC est **équilatéral**. 4. $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (arc $\widehat{AC}$); $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 30^\circ$ (arc $\widehat{BC}$).

Exercice 11.8

1. $\widehat{AIB} = 180^\circ - \widehat{BIC} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB}$ (triangle BIC). 2. $\widehat{IBC} = \widehat{DBC} = \frac{1}{2}\widehat{COD}$ et $\widehat{ICB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$, d'où le résultat. 3. $\widehat{AOD} = 2\widehat{ABD} = 80^\circ$, $\widehat{BOC} = 2\widehat{BDC} = 50^\circ$, donc $\widehat{AID} = \frac{80^\circ + 50^\circ}{2} = 65^\circ$ et $\widehat{AIB} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

Défi olympiade 11.1

1. $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$: E et F sont sur le cercle de diamètre $[BC]$, de **centre I milieu de $[BC]$** . 2. Sur ce cercle, $\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (même arc $\widehat{FB}$). Or dans FBC rectangle en F : $\widehat{FCB} = 90^\circ - \widehat{ABC}$. Comme $\widehat{AEB} = 90^\circ$: $\widehat{AEF} = 90^\circ - \widehat{FEB} = 90^\circ - (90^\circ - \widehat{ABC}) = \widehat{ABC}$.

Défi olympiade 11.2

1. La pointe en A_1 est l'angle inscrit $\widehat{A_3A_1A_4}$, qui intercepte l'arc $\widehat{A_3A_4}$. De même, les pointes en A_2, A_3, A_4, A_5 interceptent $\widehat{A_4A_5}$, $\widehat{A_5A_1}$, $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$. Ces 5 arcs forment le cercle entier : la somme vaut $\frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$. 2. La pointe en A_1 est $\widehat{A_4A_1A_6}$; elle intercepte l'arc $\widehat{A_4A_6}$ formé de 2 « huitièmes » de cercle, d'angle au centre 90° . Pointe : **45°**.

12 Triangles isométriques et triangles semblables

Exercice 12.1

a) **Oui**, C-A-C. b) **Oui**, A-C-A. c) **Pas forcément** : semblables seulement. d) **On ne peut pas conclure** : l'angle en B n'est pas compris entre $[AB]$ et $[AC]$.

Exercice 12.2

a) **V** : tous leurs angles valent 60° . b) **F** : angles au sommet 20° et 100° par exemple. c) **V** : angles 90° , 45° , 45° . d) **F** : l'aire est multipliée par $3^2 = 9$.

Exercice 12.3

1. $AB = AC$, $BM = CM$, AM commun : C-C-C. 2. Homologues : $\widehat{BAM} = \widehat{CAM}$ et $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$, de somme 180° , donc droits. 3. Médiane, hauteur, bissectrice et médiatrice.

Exercice 12.4

1. Deux angles respectivement égaux : semblables. Homologues : $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$. 2. $k = \frac{DE}{AB} = \frac{9}{6} = 1,5$; $EF = 1,5 \times 4 = 6$ cm; $DF = 1,5 \times 5 = 7,5$ cm. 3. Par $k^2 = 2,25$.

Exercice 12.5

1. $\frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6} = 2$: semblables, **k = 2**. 2. $[AB] \leftrightarrow [EF]$, $[BC] \leftrightarrow [FD]$, $[CA] \leftrightarrow [DE]$; B (commun à $[AB]$, $[BC]$) $\leftrightarrow F$ (commun à $[EF]$, $[FD]$) : $\widehat{B} = \widehat{F}$, $\widehat{A} = \widehat{E}$, $\widehat{C} = \widehat{D}$.

Exercice 12.6

1. $k = 1200$: **36** m et **48** m; hypoténuse 5 cm sur le plan, soit **60** m; périmètre **144** m. 2. Plan : 6 cm²; réel : $6 \times 1200^2 = 8\,640\,000$ cm² = **864** m². 3. $864 \times 25 = 21\,600$ DH.

Exercice 12.7

1. $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$ et $\widehat{A}$ commun compris entre ces côtés : **semblables**, $k = \frac{1}{2}$ ($D \leftrightarrow C$, $E \leftrightarrow B$). 2. $DE = \frac{1}{2}CB = 3,5$ cm ; $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$. 3. $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{8} \neq \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$: **non parallèles**. 4. $k^2 = \frac{1}{4}$.

Exercice 12.8

1. $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ (angles inscrits interceptant l'arc $\widehat{AD}$), soit $\widehat{MCA} = \widehat{MBD}$; et $\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$ (opposés par le sommet). Deux angles égaux : **semblables**, avec $A \leftrightarrow D$, $C \leftrightarrow B$. 2. $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$, d'où $MA \times MB = MC \times MD$. 3. $MD = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ cm.

Défi olympiade 12.1

1. Dans HBA : $\widehat{HBA} = 90^\circ - \widehat{HAB} = \widehat{HAC}$; avec l'angle droit en H , deux angles égaux : **semblables** ($H \leftrightarrow H$, $B \leftrightarrow A$, $A \leftrightarrow C$). Donc $\frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC}$, soit $AH^2 = BH \times CH$. 2. HBA et ABC ont l'angle $\widehat{B}$ commun et un angle droit : $\frac{BH}{BA} = \frac{BA}{BC}$. De même pour C . 3. $AH = \sqrt{36} = 6$, $AB = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}$, $AC = \sqrt{9 \times 13} = 3\sqrt{13}$; $52 + 117 = 169 = 13^2$ ✓.

Défi olympiade 12.2

1. $(PQ) \parallel (BC)$: APQ et ABC ont les mêmes angles (correspondants), donc **semblables**. Le rapport des bases $\frac{PQ}{BC} = \frac{x}{a}$ est égal au rapport des hauteurs issues de A : $\frac{h-x}{h}$. 2. $\frac{x}{a} = 1 - \frac{x}{h}$, donc $x(\frac{1}{a} + \frac{1}{h}) = 1$, soit $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{h}$. Avec $a = 12$, $h = 6$: $\frac{1}{x} = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{4}$, $x = 4$ cm.

13 Vecteurs et translation**Exercice 13.1**

1. $\vec{c}$ et $\vec{f}$. 2. $\vec{b}$. 3. $\vec{d}$ (longueur $\sqrt{10}$). 4. $\vec{e} = -2\vec{a}$.

Exercice 13.2

a) V. b) F : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. c) V. d) F (opposés). e) V (parallélogramme). f) F : c'est $\vec{0}$. g) V : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

Exercice 13.3

a) $\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN}$ c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
d) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ e) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$ f) $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$.

Exercice 13.4

1. $\vec{u}$: « 5 à droite, 2 vers le bas », appliqué à A , B , C . 2. Centre O' (même trajet), **même rayon** 1 carreau. 3. $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$: **parallélogramme**. 4. Angles conservés : $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.

Exercice 13.5

1. $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$ donc $ABEC$ est un parallélogramme.
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$ (règle du parallélogramme), donc $F = E$. 3. Les diagonales $[AE]$ et $[BC]$ de $ABEC$ ont le

même milieu I . 4. $A \mapsto B$, $C \mapsto E$: l'image est (BE) , parallèle à (AC) .

Exercice 13.6

1. $\vec{u} + \vec{v}$: « 8 vers l'est, 6 vers le nord ». 2. $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ carreaux : **100 m** ; parcouru : $\sqrt{26} + \sqrt{34} \approx 10,93$ carreaux $\approx$ **109 m**. 3. Oui : $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$.

Exercice 13.7

1. $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{NM}$: $NMB'B$ est un parallélogramme, donc $MB' = NB$; comme $MN = 40$, $AM + MN + NB = AM + MB' + 40$. 2. B' est fixe et $AM + MB' \geq AB'$, avec égalité si $M \in [AB']$: on place M à l'intersection de $[AB']$ et (d_1) . Trajet minimal : $AB' + 40$.

Défi olympiade 13.1

1. Différence des deux membres : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (« tour complet »). 2. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$: M est l'unique point tel que $MACB$ soit un parallélogramme (image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$).

Défi olympiade 13.2

1. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ}$; en additionnant, $2\overrightarrow{IJ} = \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AC} + \underbrace{\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CJ}}_{\vec{0}} = \overrightarrow{AC}$. 2. De même $\underbrace{(\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK})}_{\vec{0}}$, $2\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$: parallélogramme (théorème de Varignon). 3. $IJ = \frac{AC}{2}$, $IL = \frac{BD}{2}$: losange $\iff AC = BD$.

14 Repère dans le plan**Exercice 14.1**

1. $A(-3; -1)$, $B(2; -2)$, $C(4; 2)$, $D(-1; 3)$. 2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (5; -1) : **parallélogramme**. 3. Les deux milieux valent (0,5; 0,5) : prévisible (diagonales d'un parallélogramme).

Exercice 14.2

1. a. 2. b. 3. b : $AB^2 = 16 + 36 = 52$. 4. a : $C(-3 - 4; 2 + 6)$.

Exercice 14.3

a) $AB^2 = 36$, $AC^2 = BC^2 = 25$: **isocèle en C** ($25 + 25 \neq 36$). b) $PQ^2 = 45$, $PR^2 = 5$, $QR^2 = 50 = 45 + 5$: **rectangle en P**. c) 26, 20, 18 : **quelconque**.

Exercice 14.4

1. $\overrightarrow{AB}(3; 2) = \overrightarrow{DC}(3 - x; 4 - y)$: **D(0; 2)**. 2. $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$: **E(6; 6)**. 3. Milieu de $[DE]$: (3; 4) = C .

Exercice 14.5

1. $\Omega A = \sqrt{9 + 16} = 5$. 2. $\Omega B^2 = \Omega C^2 = 25$: oui ; $\Omega E^2 = 20$: non. 3. Milieu de $[AB]$: (2; 1) = Ω . 4. $(x - 2)^2 = 25$: (7; 1) et (-3; 1).

Exercice 14.6

1. $LE = LM = \sqrt{25} = 5$, $EM = 8$: **500 m, 500 m, 800 m**; **isocèle en L**. 2. $H(1; -1)$, $LH = 3$: **300 m** ($(LH) \perp (EM)$). 3. $\frac{800 \times 300}{2} = 120\,000 \text{ m}^2 = 12 \text{ ha}$.

Exercice 14.7

1. $\overrightarrow{AB}(4; 2)$, $\overrightarrow{BC}(2; -4)$. 2. $AB = BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $AC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$; $20 + 20 = 40$: **isocèle rectangle en B**. 3. $I(1; 0)$, $D(2x_I - x_B; 2y_I - y_B) = D(0; -3)$. 4. Parallélogramme (même milieu) avec angle droit et $AB = BC$: **carré**. 5. Centre I : $r = \frac{AC}{2} = \sqrt{10}$.

Exercice 14.8

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}(3; 1)$: parallélogramme; $AB^2 = 9 + 1 = 10$ et $AD^2 = 1 + 9 = 10$: **losange**. 2. $AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $BD = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$: $AC \neq BD$, **pas un carré**. Aire = $\frac{AC \times BD}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} = 8 \text{ u.a.}$

Défi olympiade 14.1

1. $\Omega A = \Omega B$: Ω est sur la médiatrice de $[AB]$, verticale ($y_A = y_B$) passant par le milieu $(2; 4)$. 2. $\Omega(2; y)$: $16 + (y - 4)^2 = 4 + (y + 2)^2 \iff 32 - 8y = 8 + 4y \iff y = 2$; **(2; 2)**, distance $2\sqrt{5}$. 3. $\Omega D^2 = 4 + 16 = 20$: **oui** (points cocycliques).

Défi olympiade 14.2

1. D est opposé à B , A ou C (raccourci) : $D_1(x_A + x_C - x_B; \dots) = (-3; 2)$, $D_2 = (5; 4)$, $D_3 = (3; -2)$. 2. Milieux : $[D_1 D_3] \rightarrow (0; 0) = A$, $[D_2 D_3] \rightarrow (4; 1) = B$, $[D_1 D_2] \rightarrow (1; 3) = C$. Droite des milieux : chaque côté de $D_1 D_2 D_3$ est double d'un côté de ABC : périmètre double.

15 Équation d'une droite**Exercice 15.1**

(d_1) : $p = -1$, pente $\frac{+2}{+1}$: $y = 2x - 1$. (d_2) : $p = 3$, pente $\frac{-1}{+2}$: $y = -\frac{1}{2}x + 3$. (d_3) : $x = -3$. (d_4) : $y = -2$.

Exercice 15.2

a) F : $m = -3$. b) V : $-3 + 2 = -1$. c) F : en $(0; 2)$. d) V : même $m = -3$ (et p égaux : elles sont même confondues!). e) V : $-3 \times \frac{1}{3} = -1$. f) V : $-3x + 2 = 0 \iff x = \frac{2}{3}$.

Exercice 15.3

(d_1) : par $(0; -3)$ et $(2; 1)$; (d_2) : par $(0; 2)$ et $(2; 1)$. Calcul : $2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 2 \iff \frac{5}{2}x = 5 \iff x = 2$; point **(2; 1)**. $2 \times (-\frac{1}{2}) = -1$: $(d_1) \perp (d_2)$.

Exercice 15.4

a) $m = \frac{6}{3} = 2$, $p = 3 - 2 = 1$: $y = 2x + 1$. b) $m = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$, $p = 5 - 3 = 2$: $y = -\frac{3}{2}x + 2$. c) $x_A = x_B$: $x = 3$. d) $m = 0$: $y = 4$.

Exercice 15.5

1. $m = 3$, $p = -1 - 6 = -7$: $y = 3x - 7$. 2. $m = -\frac{2}{3}$, $p = 2 + \frac{2}{3} \times (-3) = 0$: $y = -\frac{2}{3}x$; elle passe par l'origine O . 3. $3 \times (-\frac{2}{3}) = -2 \neq -1$: non. $3x - 7 = -\frac{2}{3}x \iff \frac{11}{3}x = 7 \iff x = \frac{21}{11}$, $y = -\frac{14}{11}$: $(\frac{21}{11}; -\frac{14}{11})$.

Exercice 15.6

1. $m_{AB} = \frac{6}{3} = 2$, $m_{AC} = \frac{12}{6} = 2$: **alignés**. $m_{AE} = \frac{11}{5} \neq 2$: non. 2. (AB) : $y = 2x - 2$; $2k - 2 = -10 \iff k = -4$. 3. $(d_1) \cap (d_2)$: $2x - 1 = -x + 5$, $x = 2$, $y = 3$; (d_3) passe par $(2; 3)$: $2m + 4 = 3$, $m = -\frac{1}{2}$.

Exercice 15.7

1. $y_A = 6x + 40$, $y_B = 14x$. 2. $14x = 6x + 40 \iff x = 5$; point $(5; 70)$: pour 5 h, les deux formules coûtent 70 DH. 3. 3 h : $A = 58$, $B = 42$: **B** (16 DH d'économie). 8 h : $A = 88$, $B = 112$: **A** (24 DH d'économie).

Exercice 15.8

1. $m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $p = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. 2. $m' = -2$, $p' = -1 + 6 = 5$: $y = -2x + 5$. 3. $-2x + 5 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \iff x = 1$, $y = 3$: **H(1; 3)**, c'est le **milieu** de $[AB]$. 4. (CH) est la médiatrice de $[AB]$: $CA = CB$ (**isocèle en C**; $CA = CB = 5$). $AB = \sqrt{20}$, $CH = \sqrt{20}$: aire = $\frac{\sqrt{20} \times \sqrt{20}}{2} = 10 \text{ u.a.}$

Défi olympiade 15.1

1. Milieu $(1; 3)$, $m_{AB} = 1$, donc pente -1 : $y = -x + 4$. 2. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2$: les x^2 et y^2 s'éliminent; $2x - 2y + 2 = -6x - 10y + 34 \iff 8x + 8y = 32 \iff y = -x + 4$. 3. Milieu $(4; 3)$, $m_{BC} = -2$, pente $\frac{1}{2}$: $y = \frac{1}{2}x + 1$. $-x + 4 = \frac{1}{2}x + 1 \iff x = 2$: **(2; 2)**, $r = \Omega A = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$.

Défi olympiade 15.2

1. $y = k(x - 2) + 3$: pour $x = 2$, $y = 3$ quel que soit k . **I(2; 3)**. 2. $-3 = 5k + 3 - 2k \iff k = -2$. Non : la droite verticale $x = 2$ passe par I mais ne s'écrit pas $y = kx + \dots$. 3. $Q(0; 3 - 2k)$; I milieu : $\frac{3 - 2k}{2} = 3 \iff k = -\frac{3}{2}$. Alors $Q(0; 6)$ et $P(4; 0)$ (bien $\frac{0 + 4}{2} = 2$ ✓). Aire = $\frac{4 \times 6}{2} = 12 \text{ u.a.}$

Géométrie dans l'espace : pyramide, cône, agrandissement et réduction

Exercice 16.1

a) V : $\frac{\pi \times 9 \times 5}{3} = 15\pi$. b) F : il est multiplié par 8. c) V : $0,5^2 = \frac{1}{4}$. d) V : $g^2 = r^2 + h^2 > h^2$. e) F : c'est une réduction de la base. f) V : $100^3 = 10^6$.

Exercice 16.2

a) $\frac{20 \times 9}{3} = 60 \text{ cm}^3$. b) $V = \frac{\pi \times 36 \times 8}{3} = 96\pi \approx 301,6 \text{ cm}^3$; $g = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ cm}$; $\mathcal{A}_\ell = \pi \times 6 \times 10 = 60\pi \approx 188,5 \text{ cm}^2$. c) $\mathcal{B} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$, $V = \frac{6 \times 6}{3} = 12 \text{ cm}^3$.

Exercice 16.3

1. $V = \frac{9 \times 2}{3} = 6 \text{ m}^3$. 2. $HI = 1,5 \text{ m}$; SHI rectangle en H : $SI = \sqrt{4 + 2,25} = \sqrt{6,25} = 2,5 \text{ m}$. 3. $4 \times \frac{3 \times 2,5}{2} = 15 \text{ m}^2$; $15 \times 45 = 675 \text{ DH}$.

Exercice 16.4

1. $h = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$; $V = \frac{\pi \times 6,25 \times 6}{3} = 12,5\pi \approx 39 \text{ cm}^3$. 2. $\frac{2000}{12,5\pi} \approx 50,9$: **50** cornets. 3. $\pi \times 2,5 \times 6,5 \approx 51 \text{ cm}^2$.

Exercice 16.5

1. Un rectangle (réduction de $ABCD$), $k = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. 2. $2 \text{ cm} \times 1,5 \text{ cm}$, aire 3 cm^2 ($= \frac{48}{16}$). 3. $V = \frac{48 \times 12}{3} = 192 \text{ cm}^3$; $v = 192 \times (\frac{1}{4})^3 = 3 \text{ cm}^3$; tronc : **189 cm³**.

Exercice 16.6

1. $V = \frac{230^2 \times 146}{3} \approx 2\,574\,467 \text{ m}^3$. 2. $\frac{23\,000}{500} = 46 \text{ cm}$ et $\frac{14\,600}{500} = 29,2 \text{ cm}$. 3. $\frac{46^2 \times 29,2}{3} \approx 20\,595,7 \text{ cm}^3$, ou $V \times (\frac{1}{500})^3 \approx 0,0206 \text{ m}^3$: environ **20,6 L**.

Exercice 16.7

1. $SA = \sqrt{144 + 25} = 13 \text{ cm}$; $V = \frac{\pi \times 25 \times 12}{3} = 100\pi \text{ cm}^3$. 2. $k = \frac{4,8}{12} = 0,4$: rayon **2 cm** ; $v = 0,4^3 \times 100\pi = 6,4\pi \approx 20,1 \text{ cm}^3$. 3. $k^3 = \frac{1}{27}$: $k = \frac{1}{3}$, à **4 cm**. Tronc $= \frac{7}{8}V \iff$ petit cône $= \frac{1}{8}V \iff k = \frac{1}{2}$: à **6 cm**.

Défi olympiade 16.1

Le fond est une réduction de l'ouverture de rapport $k = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. Si H est la hauteur du grand cône, celle du petit est $\frac{2}{3}H$, et $H - \frac{2}{3}H = 24$ donne $H = 72 \text{ cm}$. $V_{\text{grand}} = \frac{\pi \times 15^2 \times 72}{3} = 5\,400\pi$, donc $V_{\text{seau}} = (1 - \frac{8}{27}) \times 5\,400\pi = 3\,800\pi \approx 11\,938 \text{ cm}^3$. Environ **11,94 L** : Hamid a **tort**, de très peu !

Défi olympiade 16.2

1. Le liquide forme une réduction du verre de rapport $\frac{1}{2}$: son volume est $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ du verre. Il faut **8 verres** !
2. Retourné, l'air occupe un cône (pointe en haut) de volume $\frac{7}{8}V$, réduction du verre de rapport k avec $k^3 = \frac{7}{8} = 0,875$. Or $0,95^3 = 0,857\,375 < 0,875$, donc $k > 0,95$: l'air a une hauteur supérieure à **9,5 cm**, et l'eau une hauteur inférieure à **0,5 cm**.

S1 Sujet type examen régional n° 1**Sujet 1 — Exercice 1**

1) $A = 10\sqrt{2} - 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. 2) $B = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \sqrt{5} + 1$. 3) $(3\sqrt{5})^2 = 45 > 44 = (2\sqrt{11})^2$ (nombres positifs) donc $3\sqrt{5} > 2\sqrt{11}$. 4) $C = \frac{21 \times 4}{14} \times 10^{-3+5+2} =$

6×10^4 . 5) a) $E = 4x^2 - 12x + 9 - (2x^2 - x - 3) = 2x^2 - 11x + 12$. b) $E = (2x - 3)[(2x - 3) - (x + 1)] = (2x - 3)(x - 4)$.

Sujet 1 — Exercice 2

1) a) $\times 6 : 3(x+3) - 2(2x-1) = 6, -x+11 = 6 : x = 5$. b) $2x - 3 = 0$ ou $x - 4 = 0 : x = \frac{3}{2}$ ou $x = 4$. 2) $-2x - 6 \leq 4 \iff -2x \leq 10 \iff x \geq -5$ (sens changé car $-2 < 0$; -5 inclus). 3) a) Amine : $x + 12y = 300$; Fatima : $2x + 6y = 330$. b) $2 \times (2^e) - (1^e) : 3x = 360, x = 120 ; 12y = 180, y = 15$. Miel : **120 DH/kg** ; thé : **15 DH/boîte**.

Sujet 1 — Exercice 3

1) 2 ; 6 ; 12 ; 16 ; 19 ; 20. 2) $\bar{x} = \frac{0+4+12+12+12+5}{20} = \frac{45}{20} = 2,25$. 3) 10^e et 11^e valeurs : 2 ; médiane = 2. 4) $\frac{4+3+1}{20} = \frac{8}{20} = 40\%$.

Sujet 1 — Exercice 4

1) a) $f(x) = ax$ et $3a = 6 : f(x) = 2x$. b) $f(-1,5) = -3$; $2x = 5 \iff x = 2,5$. 2) a) $a = \frac{g(3)-g(1)}{3-1} = \frac{-2}{2} = -2$; $g(1) = -2 + b = 2$ d'où $b = 4$. b) $-2x + 4 = 0 \iff x = 2$. 3) $(D_f) : O$ et $(1 ; 2)$; $(D_g) : (0 ; 4)$ et $(2 ; 0)$. 4) $2x = -2x + 4 \iff x = 1$: les droites se coupent en $(1 ; 2)$.

Sujet 1 — Exercice 5

1) Placement direct. 2) $\overrightarrow{AB}(4 ; 2)$; $K(1 ; 0)$. 3) $AB = BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $AC = \sqrt{40}$; $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (réciproque de Pythagore). 4) $m = \frac{3-1}{2+2} = \frac{1}{2}$; $1 = \frac{1}{2} \times (-2) + p, p = 2 : y = \frac{1}{2}x + 2$. 5) $m' \times \frac{1}{2} = -1$, $m' = -2$; $-1 = -8 + p', p' = 7 : y = -2x + 7$; $-2 \times 2 + 7 = 3$ donc $B \in (\Delta)$. 6) $D(0 ; -3)$; diagonales de même milieu, angle droit, $AB = BC$: **carré**.

Sujet 1 — Exercice 6

1) $BC^2 = 36 + 64 = 100$, $BC = 10 \text{ cm}$. 2) $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$, $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$, $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$; $\widehat{ABC} \approx 53^\circ$. 3) $\frac{BE}{BA} = \frac{4,5}{6} = 0,75 = \frac{7,5}{10} = \frac{BF}{BC}$, même ordre : $(EF) \parallel (AC)$ (réciproque de Thalès). 4) $EF = 0,75 \times AC = 6 \text{ cm}$. 5) a) O milieu de $[BC]$, rayon 5 cm . b) Même arc $\widehat{AC} : \widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} \approx 106^\circ$. 6) Les doubles produits s'annulent : $2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2$.

Sujet 1 — Exercice 7

1) $V = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 9 = 108 \text{ cm}^3$. 2) a) $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. b) $V' = k^3 V = \frac{108}{27} = 4 \text{ cm}^3$.

S2 Sujet type examen régional n° 2**Sujet 2 — Exercice 1**

1) $A = 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. 2) $B = (3 - 4) + (1 - 2\sqrt{3} + 3) = 3 - 2\sqrt{3}$. 3) $6^2 = 2^2 \times 3^2, 9^3 = 3^6 : F = \frac{3^7 \times 2^{-1}}{3^6 \times 2^{-4}} = 3 \times 2^3 = 24$. 4) $D = \frac{2(3-\sqrt{7})}{9-7} = 3 - \sqrt{7}$. 5)

$$H = \frac{4,2 \times 5}{3} \times 10^{-4+6+2} = 7 \times 10^4. \text{ 6) a) } (3x-5)(3x+5). \\ \text{b) } G = (3x+5)[(3x-5) - (x-2)] = (3x+5)(2x-3). \\ \text{c) } x = -\frac{5}{3} \text{ ou } x = \frac{3}{2}.$$

Sujet 2 – Exercice 2

$$1) x-1=4 \text{ ou } x-1=-4 : x=5 \text{ ou } x=-3. \text{ 2) } \times 6 : \\ 2(2x-1)-3x > 1 \iff x-2 > 1 \iff x > 3 \text{ (3 exclu).} \\ \text{3) a) } x+y=150 \text{ et } 40x+25y=4950. \text{ b) } y=150-x : \\ 15x+3750=4950, x=80, y=70 : \textbf{80 adultes, 70} \\ \textbf{enfants. c) } 40x+25(150-x) \geq 5400 \iff 15x \geq \\ 1650 \iff x \geq 110 : \textbf{110 adultes au minimum.}$$

Sujet 2 – Exercice 3

$$1) \text{ Effectifs : } 3; 4; 6; 5; 2. \text{ 2) } \bar{x} = \frac{6+16+30+35+18}{20} = \\ \frac{105}{20} = 5,25 \text{ h. 3) Cumulés : } 3; 7; 13; 18; 20 : \textbf{médiane} \\ = 5 \text{ h. 4) } \frac{5+2}{20} = 35\%.$$

Sujet 2 – Exercice 4

$$1) \text{ A : } 300 \text{ DH; B : } 120+150 = 270 \text{ DH. 2) } f(x) = 30x \\ \text{(linéaire); } g(x) = 15x + 120 \text{ (affine). 3) } (D_f) : O, \\ (10; 300); (D_g) : (0; 120), (8; 240). \text{ 4) } 15x + 120 = \\ 300 \iff x = 12 : \textbf{12 séances pour 300 DH avec B.} \\ \text{5) } 30x = 15x + 120 \iff x = 8 : \textbf{8 séances (point}$$

$$(8; 240)). \text{ 6) Pour } x > 8, (D_g) \text{ est sous } (D_f) : \textbf{formule}$$

B.**Sujet 2 – Exercice 5**

$$1) \overrightarrow{AB}(2; 4), \overrightarrow{BC}(6; -3); AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, BC = \\ \sqrt{45} = 3\sqrt{5}. \text{ 2) } m = \frac{2+2}{2-0} = 2, p = -2 : y = 2x - 2. \\ \text{3) a) } -\frac{1}{2} \times 2 + 3 = 2 \text{ et } -\frac{1}{2} \times 8 + 3 = -1. \text{ b) } \\ 2 \times (-\frac{1}{2}) = -1 : (AB) \perp (BC). \text{ 4) } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} : \\ \text{D}(6; -5). \text{ 5) } \frac{AB \times BC}{2} = \frac{2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}}{2} = 15 \text{ u.a.}$$

Sujet 2 – Exercice 6

$$1) C \in (C) \text{ de diamètre } [AB]. \text{ 2) } BC^2 = 100 - 36 = 64, \\ BC = 8 \text{ cm. 3) } \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}, \cos \widehat{ABC} = \\ \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}; \widehat{ABC} \approx 37^\circ. \text{ 4) a) } \hat{A} \text{ commun et } \widehat{AHC} = \\ \widehat{ACB} = 90^\circ. \text{ b) } \frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB} : AH = \frac{36}{10} = 3,6; CH^2 = \\ 36 - 12,96 = 23,04, CH = 4,8 \text{ cm. 5) a) Inscrits, même} \\ \text{arc } \widehat{AC}. \text{ b) Angle au centre : } \widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} \approx 74^\circ. \text{ 6) } \\ \cos^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Sujet 2 – Exercice 7

$$1) V = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi \text{ cm}^3. \text{ 2) } V' = k^3 V = \\ \frac{27}{64} \times 96\pi = 40,5\pi \approx 127,2 \text{ cm}^3.$$

MATHÉMATIQUES 3APIC

Un livret complet pour **réussir les mathématiques de la 3e année du collège** et **préparer l'examen régional** sereinement. Chaque notion est expliquée simplement, illustrée par des figures soignées et travaillée à travers des exercices de difficulté croissante, dans des situations de la vie au Maroc. Les élèves les plus curieux y trouveront aussi des **défis de type olympiade** pour développer leur raisonnement.

PARTIE A — NOMBRES ET CALCUL

1. Identités remarquables
2. Racines carrées
3. Puissances
4. Ordre et opérations
5. Équations et inéquations
6. Systèmes d'équations
7. Fonctions linéaires et affines
8. Statistiques

PARTIE B — GÉOMÉTRIE

9. Théorème de Thalès
10. Trigonométrie
11. Angles inscrits et au centre
12. Triangles isométriques et semblables
13. Vecteurs et translation
14. Repère dans le plan
15. Équation d'une droite
16. Géométrie dans l'espace

PARTIE C — PRÉPARER L'EXAMEN

Formulaire de révision · 2 sujets type examen régional sur 20 points · Corrigés détaillés de tous les exercices

16

chapitres

131

exercices

32

défis

2

sujets types

Auteur



Maths Olympiad

Programme marocain
3e année du collège (3APIC)