

BASCOUCHE

DE

MATHÉMATIQUES

3ème

MANDIAYE20
Professeur de MSVT

772913251

PREMIÈRE PARTIE

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

IA: Saint-Louis IEE: Podor CEM: Ndiourba PROF: M. NDIAYE	Chapitre 1 : RACINE CARRÉE:	DATE : CLASSE : 3^e DURÉE : 12H EFFECTIF :
---	------------------------------------	---

Compétences : Intégrer les notions relatives à la racine carrée, aux équations et aux inéquations du premier degré à une inconnue dans la résolution de problèmes liés à la vie (modélisation, détermination d'une grandeur,...)

OBJECTIF GÉNÉRAL : Au terme de ce chapitre, l'élève **doit maîtriser** l'usage des propriétés de la **racine carrée** pour résoudre des problèmes.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES : Au terme de la leçon, l'élève devra être capable de :

- ✓ Restituer la définition, la notation de la racine carrée d'un nombre positif non nul ;
- ✓ Calculer la valeur exacte ou une valeur approchée d'une racine carrée ;
- ✓ Reconnaître la notation $\mathbb{R}$;
- ✓ Calculer la valeur numérique d'une expression littérales dans $\mathbb{R}$;
- ✓ Utiliser les propriétés de la racine carrée ; de la valeur absolue d'un réel ;
- ✓ Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient ;
- ✓ Comparer des réels écrits avec des radicaux ;
- ✓ Écrire sans radical la racine carrée du carré d'un nombre ;
- ✓ Déterminer : la valeur exacte d'une expression comportant un radical ; une valeur approchée d'une expression comportant un radical à partir d'un encadrement de ce radical ou avec la calculatrice.

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogique:

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3^{ème}; CIAM 3^{ème}
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3^{ème}, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3^{ème}
- ◆ SENEMATH 3^{ème}

Matériel et supports didactiques :

- Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis :

Produit AB nul ; Calcul de l'aire du carré ; Théorème de Pythagore : Opérations et propriétés dans $\mathbb{Q}$: commutativité de l'addition, puissance, calcul littéral (développement et factorisation)

Commentaires:

Le calcul algébrique ne fera pas l'objet d'un chapitre mais, on renforcera, à chaque fois que l'occasion se présentera, les acquis de la classe de 4^{ème} en les approfondissant (à l'occasion des chapitres sur les équations et inéquations et racine carrée)

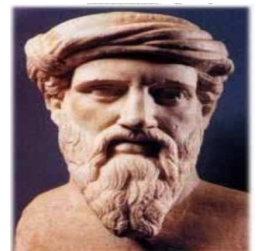
On pourra introduire la racine carrée à l'aide de la touche (racine carrée) de la calculatrice scientifique ou à partir des équations du type : $x^2 = a$.

L'introduction des radicaux permet d'avoir quelques exemples de nombres irrationnels. Les nombres irrationnels complètent les rationnels pour former $\mathbb{R}$. On pourra faire remarquer que π est aussi un nombre irrationnel. On rappellera : **IN c Z c ID c Q c IR**. On fera remarquer que dans les propriétés des racines carrées l'égalité fonctionne " dans les deux sens". La droite graduée sera reprise et la notion d'intervalle sera approfondie. On utilisera la calculatrice

Attention $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$ entre bien dans l'objectif écrire sans radical la racine carrée du carré d'un nombre réel.

Introduction:

Par la diagonale d'un carré de côté **1cm**, les pythagoriciens trouvent le nombre $\sqrt{2}$ en **430 av. J. C.** Ils le gardèrent longtemps secret. Dans un carré d'une telle simplicité niche un nombre indicible et jamais rencontré jusqu'alors. Se pose l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré de côté **1cm** « incommensurabilité de racine de 2 et du rapport de la circonférence du cercle à son diamètre (le nombre π) » Autrement dit, est-ce que toutes les grandeurs peuvent être mesurées avec tous les nombres décimaux ? Là, est venue l'idée d'inventer un autre ensemble plus grand que $\mathbb{Q}$: $\mathbb{R}$. Du point de vue intérêt, ce chapitre peut-être lié à, plusieurs thèmes tels que : Développement durable ; Energie ; ... et au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation) ; avec usage des calculatrices ; ...



PLAN DU COURS: (Voir cours)**Activité de vérification des prérequis : (Cahier d'exercice)****Exercice 1**

Développe :

$$(3x + 2)^2, (x - 3)^2, (x - 1)(x + 1), (2x - \frac{1}{2})^2$$

Exercice 2

Factorise :

$$x^2 - 4, 4x^2 - 9, x^2 + 2x + 1, 4x^2 - 4x + 1$$

Exercice 3

1) ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 3.

Calcule BC.

2) Construis un triangle ABC tel que : AB = 6, BC = 8 et AC = 10.

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Situation problème

Devenu plus grand, Birame ne peut plus se coucher correctement dans le sens des dimensions de son lit rectangulaire de longueur 150 cm et de largeur 100 cm. Se couchant suivant une des diagonales de ce lit, il se rend compte que sa taille correspond à 1 cm près à la longueur de celle-ci. Calcule la taille de Birame à 1 cm près.

Déroulement de la leçon:**1°) Définitions et notations, valeur exacte et valeur approchée :****Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître la définition et la notation de la racine carrée d'un nombre positif.

1) Activité :

On donne les mesures suivantes correspondantes à l'aire d'un carré : 16 m^2 ; 36 m^2 et 25 m^2

A l'aide de ta calculatrice trouve pour chaque cas le côté du carré.

2) Définitions et notations :

Soit **a** un nombre rationnel **positif** ou **nul**, on appelle racine de **a**, le nombre positif ou nul dont le carré est **a**.

On le note $\sqrt{a}$. Le symbole « $\sqrt{\quad}$ » est appelé **radical** et le réel **a** est le **radicande**.

$\sqrt{a}$ se lit « **racine carrée de a** ».

→ Conséquence immédiate de la définition :

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a \text{ et } \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ et } |-3| = 3 \text{ donc } \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

$$\sqrt{(3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3| \text{ d'où } \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{(3)^2}$$

On a : $5^2 = 25$ et $(-5)^2 = 25$, le nombre positif dont le carré est 25 est 5 donc $\sqrt{25} = 5$

$$\sqrt{0} = 0 ; \quad \sqrt{1} = 1$$

3) Valeur exacte et valeur approchée :

Soit la racine carrée de 7, elle se note $\sqrt{7}$. La valeur exacte de ce nombre est égale à $\sqrt{7}$.

$$\sqrt{7} = 2,64575131.....$$

2,645 est la valeur approchée à 0,001 (10^{-3}) près par défaut et 2,646 est la valeur approchée par excès.

4) Exercice d'application :

Soit $P = \sqrt{11}$

a) Calcule P^2 .

b) Donne la valeur exacte de P.

c) Détermine la valeur approchée de P à deux unités près par défaut.

d) Donne la valeur approchée de P à 0,01 près par excès.

e) Encadre P à 10^{-2} près.

II°) Nombres irrationnels : ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître un nombre irrationnel et je dois connaître la notation $\mathbb{R}$ de l'ensemble des nombres réels.

1) Activité :

- 1) A l'aide d'une calculatrice, détermine : $\sqrt{3}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{2}$; π ; $\sqrt{196}$
 2-a) Parmi ces nombres, quels sont ceux qui ne sont pas des nombres rationnels ?
 b) Ceux qui sont des nombres rationnels ?

2) Définitions et notations :

- ★ Un nombre irrationnel est un nombre qu'on ne peut pas écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ (où a et b sont des entiers relatifs et $b \neq 0$). Autrement dit c'est un nombre qui n'est pas rationnel.
- ★ Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
- ★ L'ensemble des nombres réels positifs est noté $\mathbb{R}_+$: intervalle $[0 ; +\infty[$
- ★ L'ensemble des nombres réels négatifs est noté $\mathbb{R}_-$: intervalle $]-\infty ; 0]$
- ★ L'ensemble des nombres réels non nuls est noté $\mathbb{R}^*$: intervalle $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
- ★ L'ensemble des nombres réels positifs non nuls est noté $\mathbb{R}_+^*$: intervalle $]0 ; +\infty[$
- ★ L'ensemble des nombres réels négatifs non nuls est noté $\mathbb{R}_-^*$: intervalle $]-\infty ; 0[$
- ★ On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

3) Exercice d'application :

- a) Quelles sont les nombres irrationnels parmi les nombres suivants :
 $\sqrt{16}$; $\sqrt{5}$; π ; $\sqrt{36}$; $\sqrt{\pi}$
 b) Recopie et complète les pointillés par $\in$ ou $\notin$
 $\sqrt{8} \dots \mathbb{R}$; $\pi \dots \mathbb{Q}$; $\sqrt{1} \dots \mathbb{R}_-$; $-\sqrt{12} \dots \mathbb{Q}$; $-\sqrt{0,09} \dots \mathbb{R}_+^*$; $2\pi \dots \mathbb{R}$; $0,03 \dots \mathbb{R}^*$. III)

III) Propriétés de la racine carrée :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser les propriétés de la racine carrée.

1) Activité :

Soient les nombres $A = \sqrt{4} \times \sqrt{25}$; $B = \sqrt{4 \times 25}$; $C = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{49}}$; $D = \sqrt{\frac{4}{49}}$

- a) Calcule A et B à l'aide de la calculatrice, puis compare les résultats obtenus.
 b) Fais de même pour C et D .

2) Propriétés :

- Quel que soit ($\forall$) $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$, alors $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Exemple :

$$\begin{aligned} \sqrt{4 \times 9} &= \sqrt{4} \times \sqrt{9} \\ \sqrt{36} &= 2 \times 3 \\ 6 &= 6 \quad \text{vrai} \end{aligned}$$

- Quel que soit ($\forall$) $a \in \mathbb{R}_+$; et $b \in \mathbb{R}^*_{+}$, alors $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$. En particulier $\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$

Exemple :

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

Remarque :

a et b étant deux nombres réels positifs ou nuls, si $\sqrt{a} = b$, alors $a = b^2$

Attention :

Si $a \leq 0$ et $b \leq 0$ on a : $ab \geq 0$ donc $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ n'existent pas dans $\mathbb{R}$, mais $\sqrt{ab}$ existe.

Exemple :

$\sqrt{-3}$ et $\sqrt{-5}$ n'existent pas dans $\mathbb{R}$, mais $\sqrt{(-2) \times (-8)} = \sqrt{16}$ car $(-2) \times (-8) = 16$

Remarque : $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

Contre-exemples :

$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ et $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$, on voit bien que $7 \neq 5$ donc $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$

$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$ et $\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$ $2 \neq 4$, donc $\sqrt{25} - \sqrt{9} \neq \sqrt{25-9}$

Donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

3) Exercice d'application :

Calcul de deux manières différentes :

$$A = \sqrt{6} \times \sqrt{24} ; \quad B = \sqrt{2} \times \sqrt{8} ; \quad C = \sqrt{4 \times 9}$$

$$D = \sqrt{\frac{4}{9}} ; \quad E = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}}$$

IV°) Calculs sur les radicaux :**1) Sommes algébriques :****a) Activité :**

a) Ecris les radicaux suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$:

$\sqrt{18}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{48}$

b) Déduis-en une écriture simplifiée des sommes algébriques suivantes :

$$C = \sqrt{18} + 2\sqrt{50} + 3\sqrt{32}$$

$$D = \sqrt{50} - \sqrt{32} + \sqrt{48}$$

b) Propriétés :

➤ Quels que soient les réels b et c et le réel $a \geq 0$, on a : $b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = (b+c)\sqrt{a}$ et $b\sqrt{a} - c\sqrt{a} = (b-c)\sqrt{a}$

➤ Si $p \in \mathbb{N}$ et $a \geq 0$, alors $\sqrt{a^{2p}} = \sqrt{(a^p)^2} = a^p$

Exemple :

$$E = \sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{80}$$

$$E = (1 + 2 - 4)\sqrt{5}$$

$$E = -\sqrt{5}$$

2) Expressions conjuguées : rendre rationnel le dénominateur d'un quotient :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de rendre rationnel le dénominateur d'un quotient comportant un ou plusieurs radicaux.

a) Vocabulaire :

Soient a et b deux réels ($b \geq 0$)

- ♦ L'expression conjuguée de $(a+\sqrt{b})$ est $(a-\sqrt{b})$
- ♦ L'expression conjuguée de $(a-\sqrt{b})$ est $(a+\sqrt{b})$

Exemple :

L'expression conjuguée de $(7+\sqrt{3})$ est $(7-\sqrt{3})$

L'expression conjuguée de $(-10-\sqrt{5})$ est $(-10+\sqrt{5})$

L'expression conjuguée de $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ est $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

b) Méthode :

Pour rendre rationnel le dénominateur d'un quotient comportant un ou plusieurs radicaux, on multiplie le numérateur et le dénominateur de ce quotient par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemple : Soit à rendre rationnel les dénominateurs des rationnels suivants :

$$I = \frac{2-\sqrt{3}}{4+\sqrt{7}} ;$$

$$J = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-6} ;$$

$$K = \frac{7}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}.$$

Remarque : $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ (On a multiplié le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a}$)

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1 \times \sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a})$$

3) Comparaison de réels comportant des radicaux :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de comparer des nombres réels comportant des radicaux.

a) Activité :

On donne $x = \sqrt{11}$ et $y = \sqrt{13}$

- Calcule x^2 et y^2 .
- En utilisant une calculatrice, donne une valeur approchée à $\frac{1}{100}$ près par défaut de x et y.
- Recopie et complète par le symbole < ou > qui convient : $x^2 \dots y^2$; $x \dots y$

b) Propriétés

- Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

Autrement dit, si $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$ et $x^2 > y^2$, alors $x > y$.

si $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$ et $x^2 < y^2$, alors $x < y$.

Exemple : Soit à comparer $2\sqrt{3}$ et $\sqrt{10}$

- Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de celui de leurs carrés.

Autrement dit, si $x \in \mathbb{R}_-$; $y \in \mathbb{R}_-$ et $x^2 < y^2$, alors $x > y$.

si $x \in \mathbb{R}_-$; $y \in \mathbb{R}_-$ et $x^2 > y^2$, alors $x < y$.

Exemple :

Soit à comparer $-3\sqrt{5}$ et $-4\sqrt{2}$

Remarque:

Pour comparer des nombres réels comportant des radicaux, on peut utiliser un encadrement de ces nombres ou une calculatrice pour obtenir leurs valeurs approchées.

Exemple : Soit à comparer les nombres suivants : $17-3\sqrt{2}$ et $7+\sqrt{5}$
(On utilise une calculatrice, puis on encadre)

4) Intervalles dans IR:

Soient a et b des réels. Le tableau suivant résume la liste des intervalles dans IR :

Intervalles dans IR		
Ecriture	Intervalle	Ensemble des réels x tels que
$[a ; b]$	fermé en a et en b	$a \leq x \leq b$
$[a ; b[$	fermé en a et ouvert en b	$a \leq x < b$
$]a ; b]$	ouvert en a et fermé en b	$a < x \leq b$
$]a ; b[$	ouvert en a et b	$a < x < b$
$[b ; +\infty[$	des nombres supérieurs ou égaux à b	$x \geq b$
$]b ; +\infty[$	des nombres strictement supérieurs à b	$x > b$
$] -\infty ; a]$	des nombres inférieurs ou égaux à a	$x \leq a$
$] -\infty ; a[$	des nombres strictement inférieurs à a	$x < a$
$] -\infty ; +\infty[$	de tous les réels	$x \in \mathbb{R}$

5) Exercice d'application :

Soient : $a = 7 + 2\sqrt{2}$ $b = 7 - 2\sqrt{2}$

- 1) Calcule $\frac{a}{b}$
- 2) Sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, encadre $\frac{a}{b}$.
- 3) Montre que $a + b$ et $a^2 + b^2$ sont des entiers.

V°) Valeur absolue d'un réel:**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître les propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel et être capable de les utiliser.

1) Propriétés:

→ La valeur absolue du produit de deux nombres réels est égale au produit des valeurs absolues de ces deux réels.

Autrement dit, si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors $|a \times b| = |a| \times |b|$.

Exemple :

$$|-2 \times (-3)| = |-2| \times |-3|$$

$$|6| = 2 \times 3 \text{ vrai}$$

→ La valeur absolue du quotient de deux nombres réels est égale au quotient des valeurs de ces réels.

Autrement dit, si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Exemple :

$$\left| \frac{-\sqrt{8}}{7} \right| = \frac{|-\sqrt{8}|}{|7|} = \frac{\sqrt{8}}{7}$$

2) Exercice d'application:

Calcule les expressions suivantes sans la valeur absolue :

$$|-5 \times (-7)| ; \left| \frac{13}{-13} \right| ; |x \times y| \quad (x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}_-); \left| \frac{x}{y} \right| \quad (x \in \mathbb{R}_- ; y \in \mathbb{R}_+)$$

VI°) Racine carrée du carré d'un réel :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable d'écrire la racine carrée du carré d'un nombre réel sans radical.

1) Activité:

a) Recopie et complète le tableau suivant :

x	x^2	$\sqrt{x^2}$	x
3			
-3			
$\sqrt{5}$			

b) Pour chaque cas, compare $\sqrt{x^2}$ et |x|

2) Propriétés:

Pour tout nombre réel, la racine carrée de son carré est égale à la valeur absolue de ce nombre.
Autrement dit, si $a \in \mathbb{R}$, alors $\sqrt{a^2} = |a|$

Remarques:

✧ $\sqrt{(a)^2}$ n'est pas toujours égale à $(\sqrt{a})^2$.

Exemple :

$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$; mais $(\sqrt{-3})^2$ n'existe pas.

✧ Si $x \in \mathbb{R}$, alors $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exemple :

$\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = \begin{cases} x-3; & \text{si } x > 3 \\ 0; & \text{si } x = 3 \\ -x+3; & \text{si } x < 3 \end{cases}$

3) Exercice d'application:

Écris sans radical les nombres réels suivants :

$\sqrt{(-30)^2}$; $\sqrt{(5-\sqrt{6})^2}$; $\sqrt{(2x-2)^2}$; $\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}$; $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}$

FIN !!!!

IA: Saint-Louis IEF: Podor CEM: Ndiourba PROF: M. NDIAYE	Chapitre 2 : APPLICATIONS AFFINES ET APPLICATIONS AFFINE PAR INTERVALLES :	DATE : CLASSE : 3^e DURÉE : 10H EFFECTIF :
---	---	---

Compétences : Intégrer les notions relatives aux applications affines, aux équations, aux systèmes d'équations, aux inéquations et aux systèmes d'inéquations, du premier degré à deux inconnues dans la résolution de problèmes liés à la vie (modélisation, détermination de grandeurs, optimisation, prévision de l'évolution de phénomènes,...)

OBJECTIF GÉNÉRAL : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable d'utiliser les applications affines pour résoudre des problèmes de la vie courante.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- ✓ Déterminer l'expression littérale d'une application affine connaissant : les images de deux réels ; le coefficient de l'application affine et l'image d'un réel par cette application.
- ✓ Utiliser l'expression littérale d'une application affine pour : calculer des images ; calculer des antécédents ; établir des tableaux de valeurs.
- ✓ Représenter graphiquement une application affine dans un repère orthonormal.
- ✓ Utiliser la représentation graphique d'une application affine pour déterminer une image ou un antécédent.
- ✓ Tracer la représentation graphique d'une application affine par intervalles du type : $x \mapsto |ax + b|$

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogique:

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3^{eme}; CIAM 3^{eme}
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3^{eme}, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3^{eme}
- ◆ SENEMATH 3^{eme}

Matériel et supports didactiques :

- Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis :

Applications linéaires ; calcul de valeur numérique d'une expression littérale ; équation du type $ax + b$; valeur absolue.....

Commentaires:

On s'assurera d'abord que les élèves connaissent la définition et les propriétés d'une application linéaire et peuvent la restituer à partir d'une situation de proportionnalité ou à partir d'une représentation graphique. On n'oubliera pas que la finalité des applications affines est de résoudre des problèmes de la vie courante.

On introduira l'application affine à partir de problèmes concrets.

On pourra faire remarquer que toute application affine admet une application linéaire associée et que leurs représentations graphiques sont parallèles.

On insistera sur l'utilisation du coefficient directeur.

On se limitera à des exemples simples dans le cas d'applications constantes par intervalles

On se limitera à ce type d'applications affines par intervalles $x \mapsto |ax + b|$.

Introduction:

En géométrie, une application affine est une application entre deux espaces affines qui est compatible avec leur structure. Cette notion généralise celle de fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($x \mapsto ax + b$).

Dans son « *Introductio in analysin infinitorum* » de 1748, Leonhard Euler introduit le mot « affinité » dans une mathématique, avec une acception différente, lorsqu'il discute les courbes dont les abscisses et les ordonnées respectives sont dans des rapports déterminés, mais pas nécessairement égaux : « à cause de l'espèce d'analogie qu'on remarque dans les courbes qu'on obtient de cette manière, on dira qu'elles ont entre elles de l'affinité ».

Du **point de vue programme**, la notion d'application affine n'est pas tout à fait nouvelle au programme car vous aviez étudié un de ses cas particulier en classe de quatrième, **l'application linéaire**.

Du **point de vue intérêt**, les applications affines revêtent d'une grande importance en démographie pour le calcul du taux de natalité, en économie pour le calcul du taux de production et en physique pour le calcul de la distance. A cet effet, ce chapitre peut-être lié à, plusieurs thèmes de convergence tels que : Météorologie et Climatologie ; Santé ; Sécurité ;... et au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation)

PLAN DU COURS: (Voir cours)**Activité de vérification des prérequis : (Cahier d'exercice)**

On donne le tableau suivant :

1	2	3	4
2	4	6	8

- 1) Est-ce un tableau de proportionnalité ? Si oui donne le coefficient de proportionnalité
- 2) Trouve l'application linéaire associée à cette situation de proportionnalité.
- 3) Représente graphiquement cette application linéaire.

Situation problème

Quel est le prix marqué par un taximètre après 7 km de course si la prise en charge est de 100 F au départ et si 1 km correspond à 250 F ?

Déroulement de la leçon:**I°) Rappels sur les applications linéaires :****1) Définition et notation :**

- **a** étant un nombre rationnel, le procédé qui fait correspondre à tout nombre rationnel **x** le nombre rationnel **ax** est appelé application linéaire de coefficient **a**.
- Si **f** désigne cette application, on note **$f : x \mapsto f(x) = ax$**
- **f(x)** où **ax** est l'image de **x** par l'application **f**.

Exemples :

- ◆ $f(x) = 5x$. L'image de x par f est $5x$. (5 est le coefficient de l'application linéaire f).
- ◆ $h(x) = (-2,3)x$. (h est application linéaire de coefficient $-2,3$).

2) Proportionnalité et application linéaire :

- A toute situation de proportionnalité, on peut associer une application linéaire dont le coefficient de proportionnalité est le coefficient de l'application correspondante.
- Toute application linéaire traduit une situation de proportionnalité.

Exemple :

On donne les tableaux suivants :

2	3	5
10	15	-25

-6	7	11
-3	3, 5	5,5

- a) Sont-ils des tableaux de proportionnalité ?
b) Si oui, détermine dans chaque cas l'application linéaire correspondante.

Solution : $-3 \div (-6) = 0,5$; $3,5 \div 7 = 0,5$; $5,5 \div 11 = 0,5$; donc $f(x) = (0,5)x$ pour le deuxième tableau.

3) Propriétés des applications linéaires :

Soit f une application linéaire et a , b , et k , trois rationnels donnés.

- ✓ $f(a+b) = f(a) + f(b)$.
- ✓ $f(ka) = k f(a)$.

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{2}{3}x$

- a) Calcule $f(3)$ et $f(4)$
b) Calcule de deux façons différentes $f(7)$ et $f(20)$

Solution : $f(3) = 2$; $f(4) = \frac{8}{3}$; $f(7) = \frac{14}{3}$ et $f(20) = \frac{40}{3}$; $f(7) = f(3+4) = f(3) + f(4)$ et $f(20) = f(5 \times 4) = 5f(4)$

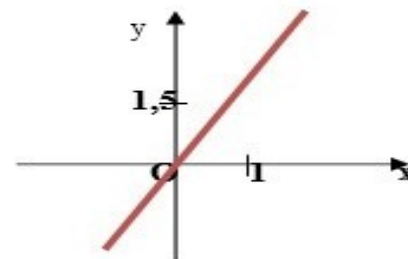
4) Représentation graphique d'une application linéaire :

Dans un repère d'axes perpendiculaires, la représentation graphique d'une application linéaire est une droite qui passe par l'origine.

Exemple :

Soit à représenter l'application linéaire suivante : $f(x) = (1,5)x$.

Dans ce cas on cherche un point : $A(1; 1,5)$



II°) Applications affines :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître l'expression littérale d'une application affine et être capable de reconnaître une application affine et de déterminer l'application linéaire associée.

1) Activité :

Pour être bénéficiaire d'un repas par jour, un élève doit verser 500 F de droit d'adhésion et payer 100 F par repas.

- a) Recopie et complète le tableau suivant :

Nombre de repas dans l'année	2	5	15	30	70	90
Dépense						

- b) Si x est le nombre de repas pris dans l'année et y , la dépense correspondante, alors recopie et complète : $y = \dots x + \dots$

2) Définition :

Une application f définie sur $\mathbb{R}$ est dite affine si à tout nombre réel x elle fait correspondre le nombre réel $ax + b$, où a et b sont deux nombres réels donnés (a = coefficient directeur et b = terme constant)

On note $f : x \mapsto f(x) = ax + b$

$f(x)$ ou y est appelé l'image de x par l'application f et x est l'antécédent de y .

Exemples :

$f(x) = 2x + 3$ est une application affine de coefficient directeur 2

$g(x) = -x + 3$ est une application affine de coefficient directeur -1

$h(x) = -2x$ est une application affine de coefficient directeur -2

$k(x) = 5$ est une application affine de coefficient directeur 0

3) Méthode :

Pour reconnaître une application affine f , on doit pouvoir identifier a et b dans l'expression $f(x)$ écrite sous la forme $ax + b$.

Remarques : Soit $f(x) = ax + b$

✓ Si $b = 0$, alors $f(x) = ax$; f est une application linéaire. Exemple : $f(x) = 3x$

✓ Si $a = 0$, alors $f(x) = b$; f est application constante. Exemple : $f(x) = -3$

✓ $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Donc **coefficient** = $\frac{\text{différence des images}}{\text{différence des antécédents}}$

4) Exercice d'application :

Les applications suivantes sont-elles affines ? Si oui donne pour chacune son coefficient directeur.

$$f(x) = 3x - 1 ;$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x ;$$

$$t(x) = 2x^2 + 1 ;$$

$$i(x) = -x - 4 ;$$

$$u(x) = \frac{x+2}{x} ;$$

$$w(x) = 2x + 3 - \sqrt{5}x ;$$

$$m(x) = \frac{2x-1}{4}.$$

III°) Représentation graphique d'une application affine :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de représenter graphiquement une application affine dans un repère orthonormal.

1) Activité :

On donne l'application affine f définie par $f(x) = 2x + 1$

a) Recopie et complète le tableau suivant :

x	0	1	2	1,5	-1	-2	-0,5
$f(x)$							

b) Place les points de coordonnées $(x ; f(x))$ dans un repère orthonormal.

c) Que constates-tu ?

2) Définitions :

✓ La représentation graphique d'une application affine définie par $f(x) = ax + b$ est la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$.

✓ a est appelé **coefficient directeur** (ou **pente**) de la droite.

✓ b est appelé **l'ordonnée à l'origine**.

Remarque : L'intersection de la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ avec l'axe des ordonnées est un point dont l'ordonnée est b .

3) Méthode :

Pour représenter une application affine f définie $f(x) = ax + b$ dans un repère orthonormal, on utilise l'une des méthodes suivantes :

1^{er} méthode :

On détermine les coordonnées de deux points A et B de (Δ) et on trace la droite (AB) qui correspond à la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$.

2^{ème} méthode :

On détermine les coordonnées du vecteur directeur $\vec{u}(1; a)$ et les coordonnées d'un point C de la droite (Δ) équation $y = ax + b$. Ensuite, on trace la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Remarques :

- ✓ Une application linéaire est une application affine définie par $f(x) = ax$. Sa représentation graphique est la droite d'équation $y = ax$ qui passe par l'origine du repère.
- ✓ Une application constante est une application affine définie par $f(x) = b$. Sa représentation graphique est la droite d'équation $y = b$ qui est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point de coordonnées $(0; b)$.

Exemple :

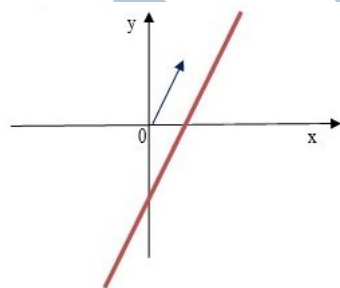
Soit à représenter graphiquement l'application affine f définie par $f(x) = 2x - 3$.

1^{ère} méthode :

$$f(x) = 2x - 3;$$

Si $x = 0$; $y = -3$; donc A(0 ; -3)

Si $x = 1$; $y = -1$; donc B(1 ; -1)

**2^{ème} méthode :**

$$f(x) = 2x - 3 \text{ équivaut } y = 2x - 3.$$

Soit $\vec{u}$ le vecteur directeur, donc $\vec{u} \rightarrow (1; 2)$

**Attention :**

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'est pas la représentation graphique d'une application affine.

4) Exercice d'application :

Représente dans un même repère orthonormal les applications affines définies par :

$$f(x) = 3x - 2; g(x) = 2; h(x) = -4x.$$

IV°) Variations d'une application affine :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de déterminer les variations d'une application affine.

1) Activité :

Soient f et g deux applications tels que : $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = -3x + 1$.

1) Quel est le signe du coefficient de f et de g ?

2) Calcule les images de -2 ; -1 ; 0 ; 1 et 2 par f et g en remplissant les tableaux suivants.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

Tableau 1 :

x	-2	-1	0	1	2
g(x)					

Tableau 2 :

3-a) Comment sont rangés les valeurs de x et f (x) ?

b) Comment sont rangés les valeurs de x et g (x) ?

Correction :

1) Le coef de f est positif et le coef de g est négatif.

2) Les images

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-1	1	3	5	7

Tableau 1 :

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	7	4	1	-2	-4

Tableau 2 :

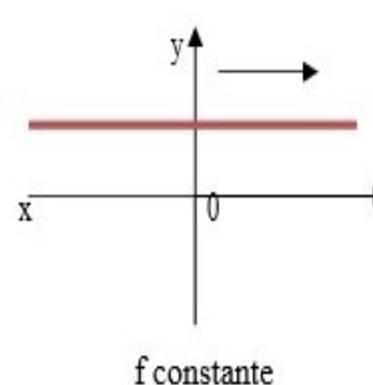
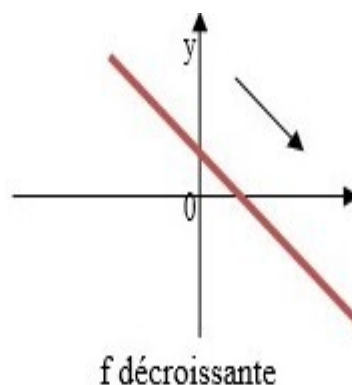
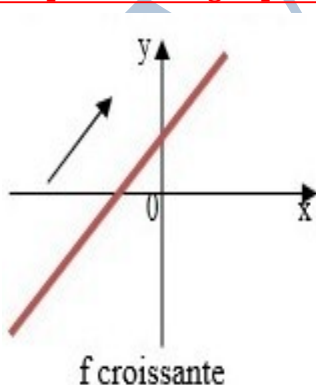
3-a) Les valeurs de x et f(x) sont rangés dans le même ordre.

b) Les valeurs de x et g(x) sont rangés dans l'ordre contraire.

2) Propriétés :Soit f une application affine définie par $f(x) = ax + b$ ● Si a est strictement positif ($a > 0$), alors f est **croissante**.**Exemple :** $f(x) = 2x - 5$, f est croissante car $a=2 > 0$ ● Si a est strictement négatif ($a < 0$), alors f est **décroissante**.**Exemple :** $f(x) = -5x + 4$, f est décroissante car $a = -5 < 0$ ● Si a est nul ($a = 0$), alors f est **constante**.**Exemple :** $f(x) = 7$, f est constante car $a = 0$ **Remarque :**

Dans un tableau de valeurs obtenu à partir d'une application affine f(x) :

- ✓ Si les valeurs de x et f(x) sont rangées dans le même ordre, alors l'application f est dite croissante.
- ✓ Si les valeurs de x et celles de f(x) sont rangées dans des ordres contraires, alors l'application f est dite décroissante.
- ✓ Si les valeurs de x sont rangées dans un certain ordre et que celles de f(x) restent constantes, alors l'application f est dite constante.

Interprétation graphique :

Remarque :

- Déterminer le sens de variation d'une application affine, c'est déterminer si elle est **croissante**, ou **décroissante** ou **constante**.
- Dans un tableau de valeurs, il faut prendre soin de ranger les valeurs de x , soit dans un ordre croissant, soit dans un ordre décroissant.

Exemple : Soit à ranger le tableau suivant dans un ordre.

x	4	5	1	3
f(x)	6	7	2	4

Solution :

x	1	3	4	5
f(x)	2	4	6	7

3) Exercice d'application :

Détermine les sens de variations des applications affines suivantes :

$$f(x) = 2x - \frac{3}{5} ; \quad g(x) = -\sqrt{3}x + 5 ; \quad h(x) = 5 ; \quad i(x) = \frac{x-7}{7} ; \quad K(x) = 6 - x ; \quad m(x) = -8$$

Solution :

f est croissante car $a = 2$; g est décroissante car $a = -\sqrt{3}$; h est constante car $a = 0$; i est croissante car $a = \frac{1}{7}$; k est décroissante car $a = -1$; m est constante car $a = 0$.

V°) Détermination de l'expression littérale d'une application affine :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe je dois être capable de déterminer l'expression littérale d'une application affine.

1) Activité :

Soit f l'application affine définie par $f(1) = -1$ et $f(2) = 1$. Étant donné que $f(x) = ax + b$:

- Recopie et complète $f(1) = \dots + b$ ou $-1 = a + \dots$ (1) ; $f(2) = 2a + \dots$; ou $1 = \dots + b$ (2)
- De l'égalité (1), donne a en fonction de b .
- Dans l'égalité (2), remplace a par sa valeur trouvée dans l'égalité (1) et déduis de l'égalité obtenue la valeur de b .
- Calcule alors la valeur de a et déduis $f(x)$.

2) Méthode :

Déterminer l'expression $f(x) = ax + b$ de l'application affine f , revient à trouver les valeurs de a et b . Pour cela, on procède comme suit :

- Si on connaît l'image d'un réel donné et le coefficient directeur de l'application f , alors on détermine b puis on en déduit $f(x)$.

Exemple :

Soit à déterminer l'application affine f définie par : $f(2) = -3$ et de coefficient directeur est -2 .

$$f(x) = ax + b ; f(x) = -2x + b \text{ et } f(2) = -4 + b = -3, \text{ donc } b = 1 \text{ et } f(x) = -2x + 1.$$

→ Si on connaît les images de deux réels donnés, alors on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

Exemple 1 : 1^{re} méthode : Par Systèmes d'équations

Soit $f(x) = ax + b$; $f(3) = -5$ et $f(-2) = 5$

$f(3) = -5$ signifie $3a + b = -5$ et $f(-2) = 5$ signifie $-2a + b = 5$ ⇒ le système suivant
$$\begin{cases} 3a + b = -5 \\ -2a + b = 5 \end{cases}$$
 équivaut à $a = -2$ et $b = 1$ Donc $f(x) = -2x + 1$

Exemple 2 : 2^{ème} méthode : Par le coefficient directeur

Soit $f(x) = ax + b$; $f(3) = -5$ et $f(-2) = 5$

On calcule le coefficient : $a = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{-5 - 5}{3 + 2} = \frac{-10}{5} = -2$

$a = -2$ d'où $f(x) = -2x + b$

On calcule ensuite b , en utilisant une des données. Par exemple $f(-2) = -2(-2) + b = 5$ d'où $b = 1$

Donc $f(x) = -2x + 1$

3) Exercice d'application :

Détermine les expressions littérales des applications affines f et g dont les droites (représentations graphiques) respectives : (Δ) et (Δ') sont telles que :

a) (Δ) a pour vecteur directeur $\vec{u}(1;3)$ et passe par le point $A(5;6)$.

b) (Δ') passe par les points $B(6;2)$ et $C(-3;1)$.

VI° Application affines par intervalles du type : $f(x) = |ax + b|$:

Compétences exigibles
À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de représenter une application affine par intervalle du type $f(x) = |ax + b|$.

1) Activité :

Soit f l'application affine définie par $f(x) = |2x - 4|$

a) Écris $f(x)$ sans la valeur absolue dans l'intervalle $]-\infty; 2]$.

b) Dans un repère orthonormal $(O; I; J)$, représente $f(x)$ en te limitant à l'intervalle $]-\infty; 2]$.

c) Écris $f(x)$ sans la valeur absolue dans l'intervalle $[2; +\infty[$.

d) Représente $f(x)$ dans le repère en te limitant à l'intervalle $[2; +\infty[$.

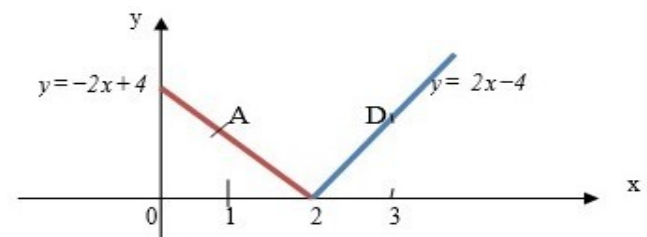
Solution :

Sur $]-\infty; 2]$; $f(x) = -2x + 4$; si $x \leq 2$; c'est-à-dire $x \in]-\infty; 2]$

On cherche deux points $A(1; 2)$; $B(2; 0)$

Sur $[2; +\infty[$; $f(x) = 2x - 4$; si $x \geq 2$; c'est-à-dire $x \in [2; +\infty[$

On cherche deux points $C(2; 0)$; $D(3; 2)$



2) Définition :

La représentation graphique d'une application affine par intervalles de type $f(x) = |ax + b|$ est de demi-droites.

3) Méthode :

Pour représenter graphiquement une application affine f du type $f(x) = |ax + b|$, on procède comme suit :

- Exprimer $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue sur l'intervalle $]-\infty; -\frac{b}{a}]$, puis représenter f dans un repère orthonormal (O, I, J) en te limitant à cet intervalle.
- Exprime $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue sur l'intervalle $[-\frac{b}{a}; +\infty[$ puis représenter f dans le même repère en te limitant à cet intervalle.

Exemple :

Soit à représenter dans un repère orthonormal l'application affine définie par : $f(x) = |2x - 1|$

Indication : utiliser un tableau pour écrire sans valeur absolue

4) Exemple d'applications constantes par intervalles :

Soit f l'application constante par intervalles définie par :

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in [-2; 0[\quad ; \quad f(x) = 2 \text{ si } x \in [0; 3[\quad ; \quad f(x) = 5 \text{ si } x \in [3; 5[$$

L'application f est définie sur trois intervalles. On dit de ce fait que f est une application constante par intervalles.

Pour calculer l'image d'un réel par f , il faut au préalable le situer dans son intervalle.

1. Calcule les images des réels $0 ; 4 ; -1$.
2. Représente f .

Correction :

1. Calcul des images.

Image de 0 : $0 \in [0; 3[$

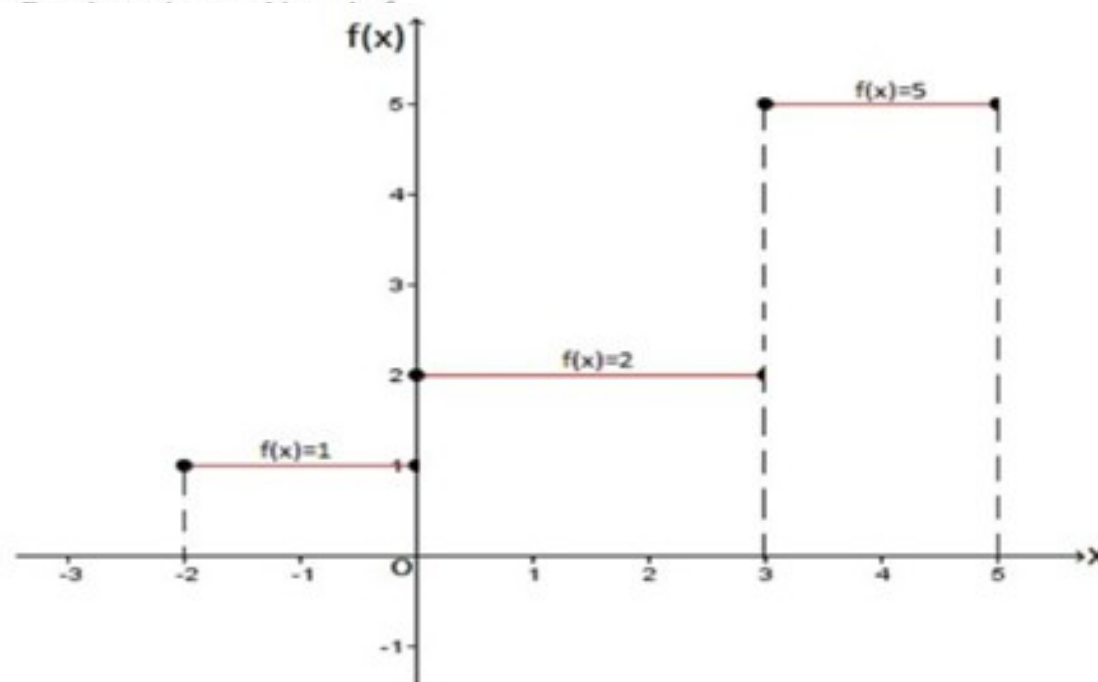
$$f(0) = 2$$

image de 4 : $4 \in [3; 5[$

$$f(4) = 5$$

image de -1 : $-1 \in [-2; 0[$

$$f(-1) = 1$$



La représentation graphique d'une application constante par intervalles est des segments de droites.

5) Exercice d'application :

On donne les applications affines définies par :

$$f(x) = |x - 1| + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = |-2x - 4|$$

- 1) Montre que f et g sont des applications affines par intervalles.
- 2) Représente f et g sur un repère orthonormal

FIN !!!

IA: Saint-Louis IEF: Podor CEM: Ndiourba PROF: M. NDIAYE	Chapitre 3 : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS À UNE INCONNUE :	DATE : CLASSE : 3^e DURÉE : 10H EFFECTIF :
---	---	---

Compétences : Intégrer les notions relatives aux applications affines, aux équations, aux systèmes d'équations, aux inéquations et aux systèmes d'inéquations, du premier degré à deux inconnues dans la résolution de problèmes liés à la vie (modélisation, détermination de grandeurs, optimisation, prévision de l'évolution de phénomènes,...)

OBJECTIF GÉNÉRAL : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de maîtriser la résolution de situations problèmes faisant intervenir les équations ou les inéquations à une inconnue.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- ✚ Résoudre des équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$, des équations faisant intervenir des quotients ainsi que les autres types déjà étudiés dans les classes précédentes.
- ✚ Résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations des types : $|ax + b| = c$ et $|ax + b| = |cx + d|$.
- ✚ Résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations se ramenant au type : $ax^2 + b = 0$.
- ✚ Résoudre dans $\mathbb{R}$ des inéquations du type : $(ax + b)(cx + d) \leq 0$.
- ✚ Résoudre dans $\mathbb{R}$ des inéquations se ramenant au type : $ax^2 + b \leq 0$.
- ✚ Vérifier qu'un nombre est solution ou non d'une équation, d'une inéquation.
- ✚ Résoudre des problèmes en utilisant les équations et inéquations ci-dessus.

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogique:

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3^{ème}; CIAM 3^{ème}
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3^{ème}, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3^{ème}
- ◆ SENEMATH 3^{ème}

Matériel et supports didactiques :

- Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis : Identités remarquables, égalité de deux quotients, Équations du type : $ax + b = 0$ dans $\mathbb{Q}$, Inéquations du type : $ax + b \leq 0$ dans $\mathbb{Q}$, Intervalles dans $\mathbb{Q}$: intersection et réunion, Représentation graphique sur une droite de l'ensemble des solutions d'une inéquation, Conditions pour qu'un produit soit nul., Factorisation et Développement, Valeur absolue, Distance.

Commentaires:

Le calcul algébrique ne fera pas l'objet d'un chapitre mais, on renforcera, à chaque fois que l'occasion se présentera, les acquis de la classe de 4^{ème} en les approfondissant (à l'occasion des chapitres sur les équations et inéquations et racine carrée)

Les acquis de la quatrième seront réactualisés. Aucune théorie générale sur les équations et inéquations n'est au programme. On étudiera des problèmes de la vie courante dont la résolution fait apparaître ces types d'équations ou d'inéquations. La résolution de ces équations se fera en utilisant les propriétés de la valeur absolue.

On étudiera aussi les autres types d'inéquations utilisant les symboles $, < , > ,$

On utilisera les systèmes ou les tableaux de signes pour la résolution des inéquations à une inconnue

Introduction:

Du point de vue historique, les premières traces tangibles de résolution d'équations remontent à l'apparition de l'écriture et donc à la Mésopotamie. Ainsi, des Babyloniens aux Grecques en passant par les Arabes, la résolution de problème s'est toujours faite sous forme d'équations simples même si la notation mathématique, et ce à partir de l'écriture, a toujours changé à travers notre histoire.

En Europe, le développement systématique des méthodes de résolution des équations se fait au XV et XVI^e Siècle. En effet, une équation n'est rien d'autre qu'une égalité entre deux membres. Souvent, il s'agit de déterminer une certaine quantité, connaissant simplement une égalité qui fait intervenir cette quantité inconnue. Comme le fait de nommer les choses permet souvent de mieux les étudier, l'on donne alors un certain nom à notre inconnue (le plus souvent on l'appelle x). On obtient

ainsi une égalité que doit vérifier x , c'est ce qu'on appelle une équation. Bien sûr, il y a des équations de toutes sortes.

Du point de vue programme, en 5ème, vous aviez étudié les équations numériques de la forme $a + x = b$ où a et b sont des nombres décimaux relatifs. En 4ème, vous aviez abordé les affines, c'est - à - dire celles de la forme $a x + b = 0$ ou se ramenant à cette forme ; les équations de la forme $(a x + b) (c x + d) = 0$ et se ramenant à cette forme, des équations de la

forme : $\frac{a}{x} = b$; $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ ($x \neq 0$; $c \neq 0$).

Cette année (en 3ème), nous allons aborder d'autres formes d'équations. Il est donc important de bien suivre. Toutefois, résoudre une équation, c'est trouver tous les nombres x qui vérifient l'équation de départ. Aussi, faut-il souligner que les équations trouvent leurs applications en Sciences physique, en statistique...

Du point de vue intérêt, ce chapitre peut-être lié à, plusieurs thèmes de convergence tels que : le Développement durable ; Météorologie et Climatologie ; Santé ; Sécurité ; la Physique... et au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation) ; avec usage des calculatrices ; ...

PLAN DU COURS: (Voir cours)

Exercices de vérification des prérequis : (Dans les cahiers d'exercices)

Exercice 1

Résous dans IR les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1^\circ 3x + 12 = 0; & \frac{2}{3}t + 3 = t; & \frac{1}{3}(2x - 4) = 6x \\ 2^\circ 7(x + 4) = 0; & 3(u - 1) = 5(u - 1); & \\ 3^\circ \frac{x}{3} = 0; & \frac{2x - 1}{14} = 0 & \end{array}$$

Exercice 2

1) Résous les inéquations suivantes.

$$1 - 2x \geq 3 - 4x$$

$$\frac{4}{3}x + 4 \leq 0$$

2) Représente les solutions de chacune d'elles sur une droite graduée puis sous forme d'intervalles.

3) Pour chacune d'elles trouve trois nombres qui sont solutions et deux qui n'en sont pas.

Exercice 3 :

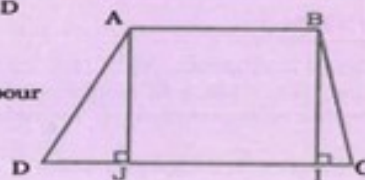
Exprime la valeur absolue de chacun des nombres suivants sans le symbole de valeur absolue :

$$|+6| ; |-6| ; |1 - \sqrt{2}| ; |a| \text{ pour } a \in]-5; -1] \text{ puis pour } a \in [0; +\infty[.$$

Situation problème



La figure ci-contre est un trapèze ABCD dont la petite base [AB] a la même longueur que la hauteur. CI = 1 cm et DJ = 3 cm. Calcule les dimensions de ce trapèze pour que son aire mesure 35 cm².



Déroulement de la leçon:

I°) Équation à une inconnue :

A°) Équations des types : $|ax + b| = c$ et $|ax + b| = |cx + d|$

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre dans R des équations du type :

$$|ax + b| = c \text{ et } |ax + b| = |cx + d|$$

1) Activité :

a) Utilise la propriété $|A| = |B|$ équivaut à $A = B$ ou $A = -B$ pour exprimer $|3x - 4| = |x + 2|$ sans le symbole de la valeur absolue.

b) Dédus-en les solutions de l'équation $|3x - 4| = |x + 2|$.

2) Méthode :

Pour résoudre une équation du type $|ax+b| = |cx+d|$ ou $|ax+b| = c$, on utilise la propriété $|A| = |B|$ équivaut à $A = B$ ou $A = -B$ et on résout les équations ainsi obtenues.

Exemple :

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } |3x - 2| &= |2x + 5| \\ |3x - 2| &= |2x + 5| \text{ équivaut à :} \\ 3x - 2 &= 2x + 5 \text{ ou } 3x - 2 = -(2x + 5) \\ x &= 7 \text{ ou } x = \frac{-3}{5} \end{aligned}$$

$$\text{On écrit } S = \left\{ \frac{-3}{5}; 7 \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } |2x + 5| &= 3 \\ |2x + 5| &= 3 \text{ équivaut à} \\ 2x + 5 &= 3 \text{ ou } 2x + 5 = -3 \\ x &= -1 \text{ ou } x = -4 \end{aligned}$$

$$\text{On écrit } S = \{-4; -1\}$$

Remarque :

La valeur absolue n'est jamais négative.

Par exemple : $|x + 7| = -8$ impossible (n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car $-8 < 0$)

On écrit $S = \emptyset$

3) Exercice d'application :

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } |x + 2| &= |x - 5| \\ \text{c) } |2x - 14| &= |5 - 3x| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } |5x - 1| &= -11 \\ \text{d) } |x - \sqrt{3}| &= 2 \end{aligned}$$

B°) Équation du type : $ax^2 + b = 0$:**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations se ramenant au type $ax^2 + b = 0$, a et b étant des réels donnés.

1) Activité :

On donne $A = 4x^2 - 9$.

- Calcule la valeur numérique de A pour $x = 0$; $x = \frac{-3}{2}$; $x = \sqrt{3}$; $x = \frac{3}{2}$
- Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $A=0$?
- Factorise A, puis résous l'équation $A=0$.

2) Méthode :

Pour résoudre une équation se ramenant à la forme $ax^2 + b = 0$, où a et b étant des réels donnés :

- ✓ On factorise si possible le 1^{er} membre c'est-à-dire l'écrire sous la forme $(ax+b)(cx+d)$.
- ✓ On utilise la propriété suivante : « un produit de facteurs est nul si l'un au moins de ses facteurs est nul », c'est-à-dire $AB=0$ équivaut à $A=0$ ou $B=0$
- ✓ On résout les équations obtenues.

Exemple :

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $9x^2 - 2 = 0$

$$\begin{aligned} \text{On a : } 9x^2 - 2 &= 0 \Leftrightarrow (3x)^2 - (\sqrt{2})^2 = 0 \\ (3x - \sqrt{2})(3x + \sqrt{2}) &= 0 \\ 3x - \sqrt{2} &= 0 \text{ ou } 3x + \sqrt{2} = 0 \\ x &= \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ ou } x = \frac{-\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{on écrit : } S = \left\{ \frac{-\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3} \right\}$$

Remarque :**Un carré n'est jamais négatif.**Par exemple $x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$ impossible (n'admet pas de solution car $-2 < 0$)Donc $S = \emptyset$ **3) Exercice d'application :**

Résous dans IR les équations suivantes, puis vérifie pour chacune d'elles que les réels obtenus sont bien des solutions de l'équation initiale :

$$4x^2 - 1 = 0 \quad ; \quad 2x^2 + 5x = 0 \quad ; \quad x^2 + 7 = 0 \quad ; \quad x^2 + 1 = x^2 + 4 \quad ; \quad x^2 - 5 = 0.$$

Correction :

$$\begin{aligned}
 (2x)^2 - 1^2 = 0 & \quad ; \quad x(2x+5) = 0 & \quad ; \quad x^2 = -7 & \quad ; \quad x^2 - x^2 = 4 - 1 & \quad ; \quad x^2 - 5 = 0 \\
 (2x-1)(2x+1) = 0 & \quad ; \quad x=0 \text{ ou } 2x+5=0 & \quad ; \quad \text{impossible} & \quad ; \quad 0=3 \text{ faux} & \quad ; \quad (x-V5)(x+V5)=0 \\
 S=\{-1/2 ; 1/2\} & \quad ; \quad S=\{-5/2 ; 0\} & \quad ; \quad S=\emptyset & \quad ; \quad S=\emptyset & \quad ; \quad S=\{-V5 ; V5\}
 \end{aligned}$$

II°) Inéquations à une inconnue :**A°) Inéquation produit du type : $(ax + b)(cx + d) \leq 0$**

Compétences exigibles
 A la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre dans R les inéquations du type $(ax + b)(cx + d) \leq 0$.
 NB : $\leq$ peut être remplacé par $<$, $>$ ou $\geq$ et a, b, c et d sont des réels donnés.

1) Activité :

a) Résous dans IR : $2 - x = 0$; $2 - x < 0$; $2 - x > 0$.

b) Résous dans IR : $2 + x = 0$; $2 + x < 0$; $2 + x > 0$.

c) Utilise les résultats obtenus en a) et b) pour compléter le tableau ci-dessous en remplaçant chaque point d'interrogation par la valeur ou le signe (+) ou (-) qui convient.

Valeur de x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
Signe de $2 - x$	?	?	?	?
Signe de $2 + x$	?	?	?	?
Signe de $(2 - x)(2 + x)$	?	?	?	?

2) Méthode :Pour résoudre une inéquation du type $(ax+b)(cx+d) \leq 0$ (< 0 ou ≥ 0 ou > 0), on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :**1° méthode :**

Remplir le tableau de signe correspondant pour déterminer l'ensemble des solutions.

$$(ax+b)(cx+d) \leq 0$$

$$(ax+b)(cx+d) = 0$$

$$ax+b=0 \quad \text{ou} \quad cx+d=0$$

$$ax = -b \quad \quad \quad cx = -d$$

$$x = -b/a \quad \quad \quad x = -d/c$$

Tableau de signe : (si $-b/a < -d/c$)

X	$-\infty$	$-b/a$	$-d/c$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de -a	Signe de a	Signe de a	
$cx + d$	Signe de -c	Signe de -c	Signe de c	
P	produit des signes	produit des signes	produit des signes	

Exemple :

Soit à résoudre dans IR l'inéquation suivantes en utilisant le tableau de signe : $(x-2)(x+3) > 0$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x-2$		-	+	
$x+3$		-	+	
$(x-2)(x+3)$	+	-	+	

$$S =]-\infty; -3] \cup]2; +\infty[$$

**2^e méthode :**

☞ Résoudre les systèmes d'inéquations équivalents puis donner l'ensemble des solutions

Remarque :

$\leq$ peut être remplacée par $<$; $>$ ou $\geq$

Exemple :

Soit à résoudre dans IR l'inéquation suivante en utilisant les systèmes correspondants : $(x-2)(x+3) \leq 0$

$$(x-2)(x+3) \leq 0 \text{ équivaut à } (I) \begin{cases} x-2 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \text{ ou } (II) \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+3 \leq 0 \end{cases}$$

$$(I) \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -3 \end{cases} \text{ ou } (II) \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -3 \end{cases}$$



$$S(I) = [-3; 2]; S(II) = \emptyset \text{ et } S = S(I) \cup S(II) \text{ d'où } S = [-3; 2]$$

B°) Inéquation du type : $ax^2 + b \leq 0$ **Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre dans R les inéquations se ramenant au type : $ax^2 + b \leq 0$.

NB : $\leq$ peut être remplacée par $<$, $>$ ou $\geq$ et a, b, c et d sont des réels donnés.

1) Activité :

- Calcule $B = 9x^2 - 25$ pour chacune des valeurs suivantes de x : $x = 0$; $x = -1$; $x = \sqrt{2}$; $x = 1,2$.
- Donne toutes les valeurs de x pour lesquelles $9x^2 - 25 < 0$
- Factorise $B = 9x^2 - 25$ et résous dans IR l'inéquation $B < 0$.

2) Méthode :

Pour résoudre une inéquation se ramenant à la forme $ax^2 + b \leq 0$ (< 0 ou ≥ 0 ou > 0) où a et b étant des réels donnés, on procède comme suit :

- ✓ On factorise si possible le premier membre sous la forme $(ax+b)(cx+d)$.
- ✓ On résous l'inéquation produit obtenue.

Exemple : Soit à résoudre dans IR l'inéquation suivante : $x^2 - 3 \geq 0$. Pour cela, on factorise :

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \geq 0 \text{ et on utilise un tableau de signe donc } S =]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty[.$$

Remarque : Un carré est toujours positif.

Exemple: $x^2 + 5 > 0 \Rightarrow x^2 > -5$ toujours vrai donc $S = \mathbb{R}$

$x^2 + 5 < 0 \Rightarrow x^2 < -5$ impossible donc $S = \emptyset$

3) Exercice d'application :

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(7x - 14)(-2x + 3) > 0$, $x^2 - 3 \geq 0$; $x^2 - 2x \leq 0$; $x^2 + 4 < 0$; $x^2 + 4 > 0$

III°) Résolution de problème:

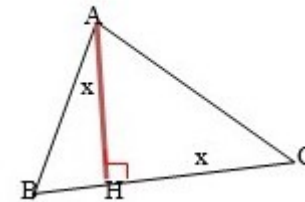
► Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre des problèmes en utilisant les équations, inéquations et systèmes d'inéquations du premier degré à une inconnue.

1) Activité :

Sur la figure ci-dessous : $BH = 6$ cm et $AH = HC = x$

- Précise le signe du nombre x .
- Exprime l'aire du triangle ABC à l'aide de x .
- Calcule x lorsque l'aire du triangle ABC est 20 cm^2 .



Solution :

a) x est positif.

$$\text{b) Aire}(ABC) = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{(BH + HC)AH}{2} = \frac{(6+x)x}{2}$$

$$\text{c) } \frac{x^2 + 6x}{2} = 20 \Rightarrow x^2 + 6x - 40 = 0 ; \text{ donc } x^2 + 6x + 9 - 49 = 0$$

$$(x+3-7)(x+3+7) = 0 ; x = 4 \text{ ou } x = -10, \text{ or } x \text{ positif, donc } x = 4.$$

2) Méthode :

Pour résoudre un problème, on procède comme suit :

- ✓ On fait une lecture sélective de l'énoncé.
- ✓ On choisit l'inconnue, guidé par ce qu'on te demande.
- ✓ On met en équation ou en inéquation sous les contraintes des données.
- ✓ On résout l'équation ou l'inéquation ainsi obtenue.
- ✓ On donne les solutions mathématiques.
- ✓ On vérifie les solutions trouvées.
- ✓ On donne les solutions du problème en interprétant les solutions mathématiques.

Exemple :

Trouver trois entiers consécutifs dont leur somme est 162

Soit x = le premier nombre

donc $x + 1$ est le 2^e nombre et $x + 2$ est le 3^e nombre

la somme est de 162 donc $x + (x + 1) + (x + 2) = 162 \Rightarrow 3x = 159$ d'où $x = 53$

Donc les nombres sont : 53 , 54 et 55

Vérification : $53 + 54 + 55 = 162$

 Remarque : Condition d'existence :

Une condition d'existence est une condition qui fait que la fraction puisse exister. Pour qu'une fraction existe, il faut que son dénominateur soit différent de zéro (0).

Exemple:

Donne la condition d'existence des réels suivants :

$$A = \frac{-5x(x-3)}{(x-3)(2x-3)}; \quad B = \frac{2x-1}{x^2-1}; \quad C = \frac{3x+1}{x+4}; \quad D = \frac{3x-1}{x}$$

A existe si et seulement si $(x-3)(2x-3) \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 3$ et $x \neq \frac{3}{2}$.

B existe si et seulement si $x^2 - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$ et $x \neq -1$.

C existe si et seulement si $x+4 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -4$.

D existe si et seulement si $x \neq 0$.

3) Exercice d'application :

Si on augmente le côté d'un carré de 2cm, son aire devient égale à 9cm^2 . Calcule la longueur initiale du côté de ce carré.

Solution :

$$(c+2)(c+2) = 9 \Rightarrow (c+2)^2 = 9 \Rightarrow (c+2)^2 - 3^2 = 0 \Rightarrow (c+2-3)(c+2+3) = 0$$

$$c = 1 \text{ ou } c = -5$$

Donc la longueur initiale est de 1cm

FIN !!!

IA: Saint-Louis IEF: Podor CEM: Ndiourba PROF: M. NDIAYE	Chapitre 4 : ÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES :	DATE : CLASSE : 3^e DURÉE : 8H EFFECTIF :
---	--	--

Compétences : Intégrer les notions relatives aux applications affines, aux équations, aux systèmes d'équations, aux inéquations et aux systèmes d'inéquations, du premier degré à deux inconnues dans la résolution de problèmes liés à la vie (modélisation, détermination de grandeurs, optimisation, prévision de l'évolution de phénomènes,...)

OBJECTIF GÉNÉRAL : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être de maîtriser la résolution des équations, des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues dans des situations problèmes relatives à la vie.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- ✚ Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une équation du premier degré à deux inconnues.
- ✚ Vérifier qu'un couple de réels est solution ou non d'une équation à deux inconnues du type indiqué
- ✚ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations à deux inconnues du type indiqué par substitution, par addition, par comparaison.
- ✚ Reconnaître la position relative des droites dont les équations interviennent dans le système.
- ✚ Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations à deux inconnues du type indiqué.

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogique:

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3^{ème}; CIAM 3^{ème}
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3^{ème}, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3^{ème}
- ◆ SENEMATH 3^{ème}

Matériel et supports didactiques :

- Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis : Nullité d'un produit, identités remarquables, égalité de deux quotients, système d'équations, Représentation graphique d'une droite dans le plan ...

Commentaires:

Le professeur traitera des exemples de système d'équations à deux inconnues du type indiqué, comportant plus de deux équations de façon à mieux asseoir la notion de solution d'un système. On prendra soin dans le cours de distinguer les différentes méthodes. On assimilera la méthode d'addition à la méthode de combinaison.

Aucune théorie générale sur les systèmes n'est au programme.

On s'inspira du vécu quotidien de l'élève pour aborder ces types d'équations ou systèmes d'équations.

Le résultat d'une résolution pourra se présenter sous différentes formes (phrase, ensemble, intervalle, graphique).

Le professeur veillera à ce que les élèves sachent vérifier qu'un couple de réels est solution d'une équation ou d'un système d'équations à deux inconnues.

Par des exercices judicieusement choisis on s'assurera que les élèves sont capables de représenter graphiquement l'ensemble des solutions dans le plan.

Introduction: Dans l'Antiquité, vers -2000 ans avant JC, les Babyloniens savaient déjà résoudre des problèmes par équations et systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues.

L'étude des équations et des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues n'est que le prolongement logique de celle des équations à une inconnue. Ainsi, cette étude nous permet de résoudre des problèmes concrets auxquels nous sommes souvent confrontés en économie, en astronomie, en physique ...

De ce point de vue, ce chapitre peut-être lié à, plusieurs thèmes de convergence tels que : le Développement durable ; Météorologie et climatologie ; Santé ; Sécurité ;... et au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation), avec usage de la calculatrice ; ...

C'est dire qu'elle revêt une importance capitale qui mérite aussi l'attention de tout un chacun.

L'étude des équations et des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues nous permettra de résoudre des problèmes concrets auxquels nous sommes souvent confrontés en économie, en astronomie,...

PLAN DU COURS: (Voir cours)

Activité de vérification des prérequis : (Cahier d'exercice)

Résous dans $\mathbb{Q}$ les équations ci-dessous

$$3x - 2 = x + 5 ; 2x + 5 = 5x + 1$$

$$(x - 1)(x + 3) = 0 ; (2x - 1)(4x + 3) = 0$$

Situation problème

Aida dit à son fils Ibrahima : « Quels sont ces deux nombres réels qui ont pour somme 240 et pour différence de leurs carrés 10 800 ? »
Aide Ibrahima à les déterminer.

Déroulement de la leçon:

I°) Équation à deux inconnues du type : $ax + by + c = 0$

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une équation du premier degré à deux inconnues de la forme : $ax + by + c = 0$;
a, b et c étant des réels donnés.

1)Activité :

Dans la boutique de Tanor, le prix de trois crayons noirs dépasse de 25F celui d'un stylo.

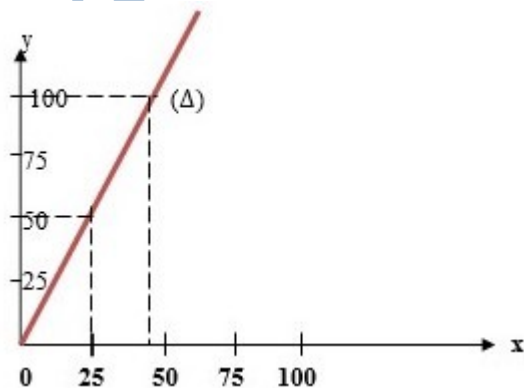
- En désignant par x le prix d'un crayon noir et par y celui d'un stylo, traduis la phrase précédente par une équation.
- Trace la droite (Δ) dont tu viens de trouver à la question a). (On prendra comme échelle : 1cm pour 25F).
- Détermine graphiquement :
 - Le prix d'un stylo, si un crayon noir coûtait 25F.
 - Le prix de crayon noir, si un stylo coûtait 100F

Solution :

$$3x - y = 25 ; A(25 ; 50) ; B(50 ; 125)$$

Si un crayon noir coûtait 25F, alors un stylo va coûter 50F

Si un stylo coûtait 100F, alors un crayon noir va coûter 41,6F



2) Solution d'une équation du premier degré à deux inconnues :

Une solution d'une équation du premier degré à deux inconnues de la forme $ax+by+c=0$ obtenue graphiquement est un couple de réels, coordonnées d'un point de la droite d'équation $ax+by+c=0$.

Une telle équation admet une infinité de couples de solutions.

Exemple :

$2x - y + 1 = 0$ est une équation du 1^{er} degré à deux inconnues;

Si l'on remplace x par 1 on obtient : $2 \times 1 - y + 1 = 0$, donc : $y = 3$;
si $x=0$, $y=1$

On dit que les couple (1 ; 3) et (0 ; 1) sont des solutions de l'équation : $2x - y + 1 = 0$.

3) Méthodes :

★ Pour trouver graphiquement une solution d'une équation du premier degré à deux inconnues de la forme $ax+by+c=0$, on procède de la manière suivante :

- ✓ Tracer d'abord dans un repère orthonormal la droite d'équation $ax+by+c=0$.
- ✓ Choisir ensuite un point sur cette droite.
- ✓ Projeter ce point orthogonalement sur les deux axes et on obtient un couple de coordonnées.
- ✓ Les solutions de l'équation $ax+by+c=0$, sont les couples $(x ; y)$ coordonnées des points de la droite d'équation $ax+by+c=0$

★ Pour vérifier qu'un couple de réels donnés est solution d'une équation du premier degré à deux inconnues de la forme $ax+by+c=0$, on procède de la manière suivante :

1^{er} méthode : Algébriquement :

On remplace x et y par les nombres composant le couple donné dans l'équation. Le couple est solution si et seulement si les deux égalités sont vérifiées.

Exemple : Soit à vérifier si les couples (1 ; 3) et (0 ; -2) sont solution de l'équation $2x - y + 1 = 0$

Pour le couple (1 ; 3) : $2x - y + 1 = 0$ et $x = 1$; $y = 3$

$$2 \times 1 - 3 + 1 = 0$$

$$3 - 3 = 0$$

$0 = 0$ **VRAI** donc le couple (1 ; 3) est solution de l'équation $2x - y + 1 = 0$

Pour le couple (0 ; -2) : $2x - y + 1 = 0$ et $x = 0$; $y = -2$

$$2 \times 0 - (-2) + 1 = 0$$

$$0 + 2 + 1 = 0$$

$3 = 0$ **FAUX** donc le couple (0 ; -2) n'est pas solution de l'équation $2x - y + 1 = 0$

2^e méthode : Graphiquement :

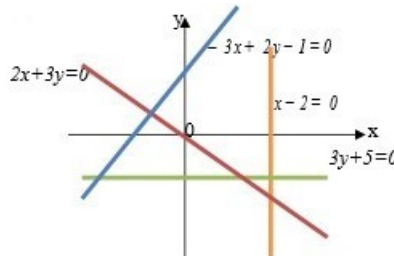
On trace d'abord dans un repère orthonormal la droite d'équation $ax+by+c=0$ et on place le point ayant pour coordonnées ce couple de réels donnés.

Si le point qu'on vient de placer se trouve sur la droite déjà tracée, alors ses coordonnées sont une solution de l'équation $ax+by+c=0$.

Cependant, si le point ne se trouve pas sur la droite tracée, alors ses coordonnées ne sont pas une solution de l'équation $ax+by+c=0$.

3) Exercice d'application :

- a) Résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes (dans un même repère orthonormal) :
 $-3x+2y-1=0$; $3y+5=0$; $x-2=0$; $2x+3y=0$
- b) Vérifie algébriquement puis graphiquement si les couples de réels suivants sont des solutions de chacune des équations précédentes : $(2;0)$; $(1;2)$; $(\frac{5}{2}; \frac{-5}{3})$; $(0; \frac{1}{2})$

Solution :**II°) Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues du type :**

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

A°) Résolution par substitution :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système d'équations du premier degré à deux inconnues en utilisant la méthode par substitution.

1) Activité :

Dans la boutique de Tanor, Mohamed achète 4 stylos et un crayon noir ; il paie 225F. Dans la même boutique, Cheikh achète un crayon noir et un stylo et paie 75 F.

- a) En désignant x le prix d'un stylo et y celui d'un crayon noir, traduis ces deux phrases précédentes par deux équations.
- b) Dans la première équation, exprime y en fonction x et remplace le résultat trouvé dans la deuxième équation.
- c) Déduis-en le prix d'un stylo et celui d'un crayon noir.

Solution : $4x+y=225$; $x+y=75$

$$x=50 \text{ et } y=25$$

Un stylo coûte 50F et un crayon noir coûte 25 F.

2) Méthode :

Pour résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant la méthode de substitution, il faut :

- ✓ Exprimer y en fonction de x dans l'une des équations.
- ✓ Substituer à y cette expression ainsi obtenue dans l'autre équation.
- ✓ Résoudre l'équation en x ainsi obtenue.
- ✓ Remplace x dans l'expression de y trouvée dans la première étape et x par sa valeur réelle si elle existe pour obtenir celle de y .
- ✓ Vérifier que le couple $(x; y)$ de réels obtenus (s'il existe) est à la fois solution des deux équations.
- ✓ Donner la solution mathématique du système.

Remarque :

On peut appliquer aussi la même démarche en exprimant à la première étape x en fonction de y .

Exemple :

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode de substitution :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 200 & (1) \\ x + y = 1600 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow y = 1600 - x ; (1) \Rightarrow 2x - 3(1600 - x) = 200 ; x = 1000 \text{ et } y = 600$$

Donc le couple de réels (1000 ; 600) est la solution du système.

On note $S = \{(1000 ; 600)\}$.

3) Exercice d'application :

Résous chacun des systèmes suivants dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode de substitution :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} ; \text{ b) } \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = -4 \end{cases} ; \text{ c) } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2y = -3 \\ -3x + y = -1 \end{cases} ; \text{ d) } \begin{cases} 3x + y = -3 \\ -y + x = -1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

B°) Résolution par comparaison :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant la méthode par comparaison.

1) Activité :

Soit le système :
$$\begin{cases} 4x + y = 225 \\ x + y = 75 \end{cases}$$

- Dans chacune de ces deux équations, exprime y en fonction de x .
- Compare ces deux expressions de y .
- Résous l'équation en x obtenue puis déduis-en y .
- Vérifie que le couple $(x ; y)$ obtenu est une solution du système.

2) Méthode :

Pour résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant la méthode par comparaison, il faut :

- ☞ Exprimer y en fonction de x dans chacune des équations.
- ☞ Compare les deux expressions de y en fonction de x .
- ☞ Résoudre l'équation en x obtenue.
- ☞ Calculer y en remplaçant x par sa valeur réelle dans l'une des expressions de y en fonction de x .
- ☞ Vérifier que le couple de réels $(x ; y)$ obtenu (s'il existe) est solution des deux équations du système.
- ☞ Donner la solution mathématique du système.

Remarque : On peut adopter la même démarche en exprimant x en fonction de y .

Exemple : Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode de comparaison :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 200 & (1) \\ x + y = 1600 & (2) \end{cases}$$

$$(1) : x = \frac{3y+200}{2} ; (2) \Rightarrow x = 1600 - y ; x = \frac{3y+200}{2} \Rightarrow \frac{3y+200}{2} = 1600 - y ; \text{ donc } y = 600 \text{ et } x = 1000$$

$$S = \{(1000 ; 600)\}.$$

3) Exercice d'application :

Résous dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants en utilisant la méthode par comparaison :

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ -x - y + 3 = 0 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 3 \\ -y + 4 = x - 2 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2y = -3 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$$

C°) Résolution par addition (ou par combinaison) :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant la méthode par addition (ou par combinaison).

1) Activité :

Soit le système :
$$\begin{cases} 4x + y = 225 & (1) \\ x + y = 75 & (2) \end{cases}$$

- Multiplie la deuxième équation par (-) et nomme l'équation obtenue (3).
- Additionne membre à membre les équations (1) et (3).
- Résous l'équation en x obtenue, puis déduis-en y.
- Vérifie que le couple (x ; y) obtenu est solution du système.

2) Méthode :

Pour résoudre dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant la méthode par addition (ou par combinaison), on procède comme suit :

- ❖ Pour éliminer les **x** :
 - ✓ On multiplie les membres de chaque équation par le nombre qui convient afin que les coefficients en **x** dans les deux équations soient opposés.
 - ✓ On additionne membre à membre les nouvelles équations obtenues.
 - ✓ On résous l'équation en **y** ainsi obtenue.
- ❖ Pour éliminer les **y**, on procède de la même manière :
 - ✓ On vérifie que le couple (**x ; y**) obtenu (s'il existe) est la solution du système proposé
 - ✓ On donne la solution mathématique du système.

Remarque : Après avoir utilisé la méthode par addition pour trouver une valeur, on peut utiliser la méthode par substitution pour trouver l'autre valeur.

Exemple :

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant en utilisant la méthode par addition :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 200 & (1) \\ x + y = 1600 & (2) \end{cases}$$

On multiplie chaque membre de (2) par 3. On obtient le système
$$\begin{cases} 2x - 3y = 200 \\ 3x + 3y = 4800 \end{cases}$$

On additionne membre à membre les deux équations et on obtient: $2x - 3y + 3x + 3y = 200 + 4800$
Donc $x = 1000$

On remplace x par cette valeur dans (2) et on obtient : $1000 + y = 1600$, donc $y = 600$

Le couple de réels (1000 ; 600) est la solution du système.

On note $S = \{(1000 ; 600)\}$.

3) Exercice d'application :

Résous dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes suivants en utilisant la méthode par addition.

a)
$$\begin{cases} 4x - y - 5 = 0 \\ y - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y - 7x + 1 = 0 \\ 2 - y + 7x = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - y - 8 = 0 \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x + 4 = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 3x + y - 9 = 0 \\ 5x - y - 7 = 0 \end{cases}$$

D°) Résolution graphique : Interprétation graphique :**Compétences exigibles**

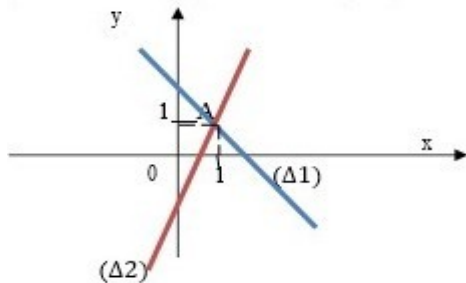
À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système d'équations du premier degré à deux inconnues.

1) Activité :

On considère le système suivant :
$$\begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \quad (1) \\ -2x + y + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

L'équation (1) est celle d'une droite (Δ_1) et l'équation (2) est celle d'une droite (Δ_2) .

- Trace dans un même repère orthogonal les droites (Δ_1) et (Δ_2) .
- Combien y a-t-il de points commun à (Δ_1) et (Δ_2) ?
- Combien y a-t-il de couples solutions du système ?
- Trouve le couple qui est solution du système.

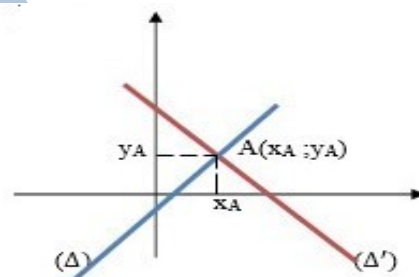
Solution :

Le couple de solution du système est A(1 ; 1).

2) Méthode graphique :

Pour trouver graphiquement les solutions d'un système de deux équations (ou plus) du premier degré à deux inconnues, il faut tracer les droites dans un même repère orthonormal.

- * Si les droites sont **sécantes**, alors il y a une seule solution (coordonnées du point d'intersection).

Exemple :

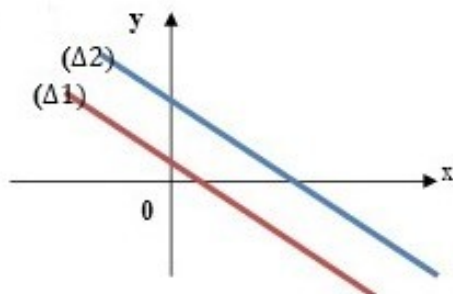
(Δ1) et (Δ2) sont sécantes en A

Donc le couple $A(x_A ; y_A)$ est la solution du système.

$$S = \{(x_A ; y_A)\}$$

✓ Si les droites sont strictement **parallèles**, alors le système n'admet pas de solution (pas de point d'intersection).

Exemple :

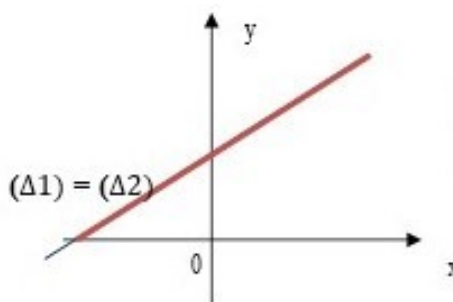


ntes (elles sont parallèles).

de solution.

* Si les droites sont **confondues**, alors le système admet une infinité de couples de réels solutions (l'ensemble des coordonnées des points de la droite.)

Exemple :



(Δ1) et (Δ2) sont confondues.

Donc le système admet une infinité de couples solutions.

3) Exercice d'application :

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ x + y = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 1 - y = 0 \\ y - 1 + 2x = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ y - 2x + 3 = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 6x + 3x - 12 = 0 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -\frac{3}{2}x - y + \frac{7}{2} = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$

FIN !!!

IA: Saint-Louis IEF: Podor CEM: Ndiourba PROF: M. NDIAYE	Chapitre 5 : INÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'INÉQUATIONS À DEUX INCONNUES :	DATE : CLASSE : 3^e DURÉE : 4H EFFECTIF :
---	--	--

Compétences : Intégrer les notions relatives aux applications affines, aux équations, aux systèmes d'équations, aux inéquations et aux systèmes d'inéquations, du premier degré à deux inconnues dans la résolution de problèmes liés à la vie (modélisation, détermination de grandeurs, optimisation, prévision de l'évolution de phénomènes,...)

OBJECTIF GÉNÉRAL : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de maîtriser l'utilisation des inéquations et des systèmes d'inéquations pour résoudre des problèmes afférents à des situations de leur vie quotidienne.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- ✓ Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une inéquation à deux inconnues du type indiqué.
- ✓ Vérifier qu'un couple de réels est solution ou non d'une inéquation à 2 inconnues.
- ✓ Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système de deux inéquations à deux inconnues.
- ✓ Vérifier qu'un couple de réels est solution ou non d'un système d'inéquations à 2 inconnues.

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogique:

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3^{ème}; CIAM 3^{ème}
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3^{ème}, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3^{ème}
- ◆ SENEMATH 3^{ème}

Matériel et supports didactiques :

- Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis :

Addition et inégalité ; multiplication et inégalité ; inverse d'un rationnel ; opposé d'un rationnel ; addition ; multiplication et propriétés (commutativité ; associativité ; élément neutre) ; régionnement du plan...

Commentaires:

Aucune théorie générale sur les inéquations et les systèmes d'inéquations n'est au programme. On étudiera des problèmes concrets dont la Résolution fait apparaître ces types d'inéquations ou système d'inéquations. Par des exercices judicieusement choisis on s'assurera que les élèves sont capables de représenter graphiquement l'ensemble des solutions dans le plan.

On utilisera le régionnement du plan pour résoudre les inéquations et systèmes d'inéquations.

On traitera les cas $, < , > .$

Introduction:

Le premier témoignage connu de résolution des problèmes par inéquations et systèmes inéquation se trouve sur une tablette babylonienne datant environ 2000 avant JC. La résolution d'inéquation de systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues apporte des solutions aux problèmes liés à des contraintes tels que les problèmes de dépenses au dessus d'un certain seuil, la maximisation d'un bénéfice...

Du point de vue historique, le premier témoignage connu de résolution de problèmes d'inéquations et de système d'inéquations se trouve sur une tablette babylonienne datant il y a environ 2000 ans avant J. C

Du point de vue programme, cette notion n'est pas tout à fait nouvelle, car nous avons amorcé depuis au moins la classe de 4e.

Du point de vue intérêt, s'inscrivant toujours dans la continuité, ce chapitre trouve son intérêt dans la résolution des problèmes liés à des dépenses et d'économie (maximisation des dépenses) de la vie courante. Il peut-être d'ailleurs lié à plusieurs thèmes de convergence tels que : Développement durable ; Energie ; Santé ; ... et au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation), avec usage des calculatrices ; ...

PLAN DU COURS: (Voir cours)

Activité de vérification des prérequis : (Cahier d'exercice)

1) Donne l'inverse de $\frac{2}{3}$ et l'opposé de -62) Recopie et complète : Si $x \leq 2$ alors $x - 7 \leq 2$
si $x > 3$ alors $x + y > 3$

Situation problème



Gorgui dispose de 3 000 F pour acheter des oranges et des mangues. Sachant que le kilogramme de mangues coûte 300 F et celui des oranges 150 F, quelle est la quantité de mangues et d'oranges que Gorgui peut acheter sans dépasser cette somme ?

Déroulement de la leçon :

1°) Inéquation à deux inconnues du type : $ax + by + c \leq 0$

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ une inéquation du premier degré à deux inconnues.

1) Activité :

Deux nombres x et y sont tels que le double du premier ajouté au second donne un nombre plus petit que 3.

- Traduis cette phrase par une inéquation :
- Trace dans un repère orthonormal la droite d'équation (D) : $2x + y = 3$
- Prouve que le point O(0 ; 0) vérifie l'inéquation : trouvée à la question a).
- Hachure le demi-plan de frontière (D) ne contenant pas le point O.

Solution :

- $2x + y < 3$
- Trace la droite (D) d'équation : $2x + y = 3$.
Le plan est alors partagé en demi-plans P_1 et P_2 de frontière (D)
- On remplace x et y par les coordonnées (0 ; 0) de l'origine O dans $2x + y$.

On obtiens : $2(0) + 0 = 0$

Or : $0 < 3$, donc le point O vérifie l'inéquation.

2) Méthode :

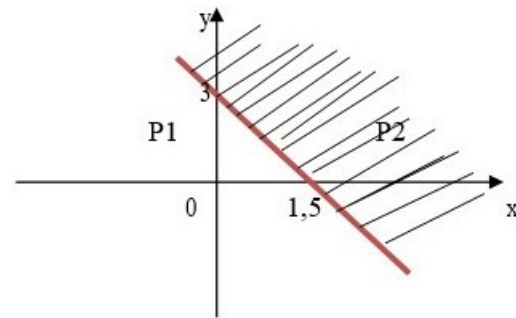
Pour résoudre graphiquement une inéquation du type $ax + by + c \leq 0$, on procède comme suit :

- ✓ Tracer dans un repère orthonormal la droite d'équation (D) : $ax + by + c = 0$.
- ✓ Considérer un point $M(x_M ; y_M)$ de l'un des demi-plans de frontière (D).
- ✓ Remplacer x_M et y_M dans l'inéquation donnée.

Si x_M et y_M vérifient l'inéquation, alors M appartient au demi-plan représentant l'ensemble des solutions de l'inéquation. Si non, l'autre demi-plan représente l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Remarque :

Généralement on choisit le point O de coordonnées (0 ; 0) si la droite ne passe pas par l'origine.



Exemple : Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation $2x - y < 2$

On trace la droite (D) d'équation (D) : $2x - y = 2$

Si $x = 0$; $y = -2$ donc A(0 ; -2)

Si $x = 1$; $y = 0$ donc B(1 ; 0)

	A	B
x	0	1
y	-2	0

Vérifions avec le point O (0 ; 0) :

$$2 \times 0 - 0 < 2$$

$$0 < 2 \quad \text{VRAI}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est le demi-plan de frontière (D) (exclue) contenant le point O (0 ; 0)



3) Exercice d'application :

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ les inéquations suivantes :

a) $x + y + 2 \leq 0$

b) $-x + y \geq 1$

c) $x + y > 0$

d) $2x - 3y + 4 < 0$

e) $6x > y - 3$

f) $y + 6 < 0$

II°) Résolution de système d'inéquations du premier degré à deux inconnues du type : $\begin{cases} ax + by + c \leq 0 \\ a'x + b'y + c' \leq 0 \end{cases}$

Compétences exigibles
À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues.

1) Activité :

Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), on donne les inéquations :

$$x + y - 3 < 0 \text{ et } x - 2y + 5 > 0.$$

a) Résous graphiquement l'inéquation $x + y - 3 < 0$ puis colorie en bleu le demi-plan correspondant à l'ensemble des solutions de cette inéquation.

b) Dans le même repère orthogonal, résous graphiquement l'inéquation $x - 2y + 5 > 0$ et colore en rouge le demi-plan correspondant à l'ensemble des solutions de l'inéquation.

La partie du plan colorée à la fois en rouge et en bleu (ici un secteur angulaire) représente l'ensemble des solutions du système d'inéquation : $\begin{cases} x + y - 3 < 0 \\ x - 2y + 5 > 0 \end{cases}$

2) Méthode :

Pour résoudre graphiquement un système d'inéquation du type : $\begin{cases} ax + by + c \leq 0 \\ a'x + b'y + c' \leq 0 \end{cases}$ on procède comme suit :

- ✓ Tracer dans un repère la droite (D): $ax+by+c=0$, puis hachure le demi-plan qui représente pas l'ensemble des solutions de l'inéquation $ax+by+c \leq 0$.
- ✓ Dans le même repère, trace la (D') : $a'x+b'y+c'=0$, puis hachure le demi-plan qui ne représente pas l'ensemble des solutions de l'inéquation $a'x+b'y+c' \leq 0$.

L'ensemble des solutions du système est la partie du plan **non hachurée**.

Exemple :

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations suivant :
$$\begin{cases} x + y - 3 \leq 0 \\ x - y + 3 > 0 \end{cases}$$

Traçons la droite (D) d'équation (D) : $x + y - 3 = 0$

Si $x = 0$; $y = 3$ donc A(0 ; 3)

Si $x = 3$; $y = 0$ donc B(3 ; 0)

Traçons la droite (D') d'équation (D) : $x - y + 3 = 0$

Si $x = 0$; $y = 3$ donc C(0 ; 3)

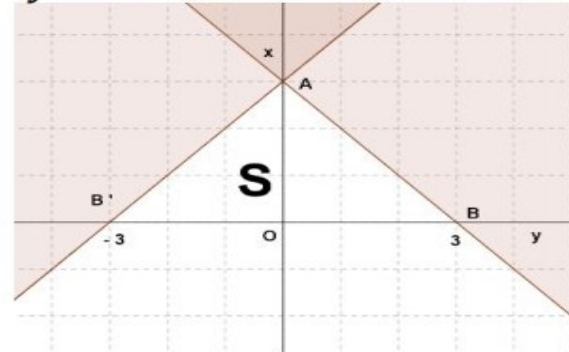
Si $x = -3$; $y = 0$ donc D(-3 ; 0)

Vérifions avec le point O (0 ; 0)

Pour (D) : $0 + 0 - 3 < 0$ **VRAI**

Pour (D') : $0 - 0 + 3 > 0$ **VRAI**

Donc l'ensemble des solutions **S** du système d'inéquations est la partie non hachurée contenant la demi-droite $[AB)$, (A exclu) et ne contenant pas la demi-droite $[AB')$ et contenant le point O (0 ; 0)

**3) Exercice d'application :**

1) Parmi les couples (2 ; 4) ; (-3 ; 2) et (-4 ; -1), quels sont ceux qui sont solutions du système :

$$\begin{cases} x + y - 2 > 0 \\ 2x - y \leq 1 \end{cases}$$

2) Résous graphiquement chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x - 5 + y > 0 \\ -3x - 3y - 7 \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y \leq 0 \\ 2x - 2 < y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - 2 > 0 \\ 2x - y - 1 \leq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x > 3 \\ y \leq -2 \end{cases}$

FIN !!!

IA: Saint-Louis IEF: Podor CEM: Ndiourba PROF: M. NDIAYE	Chapitre 6 : STATISTIQUE :	DATE : CLASSE : 3^e DURÉE : 8H EFFECTIF :
---	-----------------------------------	--

Compétences : Utiliser les notions relatives à la statistique (paramètre de position et représentations graphiques) dans la résolution de problèmes liés à la vie (prise de décision, communication, suivi d'une action...)

OBJECTIF GÉNÉRAL : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de maîtriser l'analyse d'un ensemble de données réelles pour établir des prévisions.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- ✗ Regrouper en classes une série brute.
- ✗ Déterminer les tableaux des effectifs et des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes.
- ✗ Construire un histogramme.
- ✗ Interpréter un graphique représentant une série statistique.
- ✗ Construire un diagramme cumulatif.
- ✗ Déterminer la moyenne, la classe modale.
- ✗ Déterminer, graphiquement et par le calcul, la médiane.

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogie:

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3^{ème}; CIAM 3^{ème}
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3^{ème}, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3^{ème}
- ◆ SENEMATH 3^{ème}

Matériel et supports didactiques :

- Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis : Vocabulaire vu en 4e ; Pourcentage ; Moyennes ; diagramme en barre, en bâton, circulaire, semi-circulaire.

Commentaires:

L'objectif est d'amener les élèves à interpréter les résultats obtenus. La finalité étant d'amener l'élève à avoir une attitude critique devant les informations statistiques reçues dans la vie courante. On introduira ces termes à partir d'exemples concrets.

Des activités d'enquête menées par les élèves seront exploitées pour les histogrammes et les diagrammes cumulatifs.

On utilisera les diagrammes des effectifs cumulés dans des activités pratiques.

Les diagrammes cumulatifs se feront aussi avec des exemples à caractère discret.

On recherchera les antécédents de $N/2$, $N/4$, $3N/2$ sur les représentations graphiques, N étant l'effectif total.

Pour respecter l'ordre Indiqué dans le programme, on pourra partir d'une série déjà présentée sous forme de classes, puis l'analyser et faire ressortir la notion de classe, d'amplitude de classe et de centre de classe. Même si des **Compétences** ne sont pas ciblées à ce niveau, il est pertinent d'entraîner les élèves au maniement de ces concepts (classe, amplitude, centre de la classe)

PRÉSENTATION DE LA SITUATION D'APPRENTISSAGE :

La statistique est une branche des mathématiques qui intervient dans de nombreux domaines de la vie courante. Son interdisciplinarité rend son étude indispensable dans cycle moyen. Ici son étude permet de familiariser les élèves au vocabulaire et de les initier à des enquêtes par des collectes de données, à leur organisation, à leur interprétation et leur représentation graphique.

Introduction:

On attribue à l'histoire des statistiques la date de commencement de 1749, bien que l'interprétation du terme « statistique » a changé au cours du temps plus anciens, cette science ne consistait qu'à la collection d'informations sur les états (recensement du bétail, des informations sur son cours et des contrats divers). Plus tard, cette définition est étendue à tout type d'information collectée et, encore plus tard, les sciences statistiques incluent l'analyse et l'interprétation de ces

données. En termes modernes, les statistiques incluent les ensembles de données, telles celles de la compatibilité nationale et les registres de températures, ainsi que le travail d'analyse, lequel requiert les méthodes de l'influence statistique.

Les statistiques peuvent être définies comme un ensemble de **techniques d'interprétation mathématique** appliquées à des phénomènes pour lesquels une étude exhaustive de tous les facteurs est impossible, à cause de leur grand nombre ou de leur complexité.

Du point de vue historique, il faut noter que c'est à partir du **19e Siècle** que les statistiques sont intégrées aux les mathématiciens. D'ailleurs, le mot « **médiane** » est introduit par **Antoine Augustin Cournot en 1843**. La notion de **quartile** apparaît **en 1879**.

Du point de vue programme, **en classe de 4e**, vous aviez acquis du vocabulaire en statistique, appris à organiser des données statistiques dans le cas de caractères discrets.

Pour la **classe de 3e**, vous poursuivrez cette étude à travers, l'organisation et la représentation de données statistiques dans le cadre de caractères continus ainsi que la détermination des paramètres de position doivent et permettre d'interpréter des résultats issues d'étude statistique. La méthode statistique a pour objet : l'étude rationnelle des données.

PLAN DU COURS: (Voir cours)

Activité de vérification des prérequis : (Cahier d'exercice)

Dans une entreprise de fabrication métallique, on a relevé les salaires mensuels (exprimés en milliers de francs) des ouvriers. Voici la liste obtenue:

102 106 100 107 102 100 100 100 093 106 091 100 105 107 096 106 106
100 102 106 100 102 105 102 106 105 100 106 107 107 102 096 094 107
100 093 091 100 096 100 100 100 102

- 1) Quelle est la population étudiée ?
- 2) Quel est le caractère étudié ?
- 3) Quel est le salaire le plus bas ?
- 4) Quel est le salaire le plus haut ?
- 5) Construis un tableau comprenant trois lignes. Dans la première, note les différentes valeurs du caractère; dans la seconde, l'effectif correspondant et dans la troisième la fréquence.
- 6) Construis à partir de ce tableau, le diagramme en bâton des effectifs et le diagramme circulaire à secteurs des fréquences.
- 7) Calcule le salaire moyen. Que représente la valeur obtenue ? Dans quelle unité est-elle exprimée ?
- 8) Quel est le salaire le plus fréquent ?

Activité préparatoire :

A partir des données dans l'exemple ci-dessus,

- 1) Combien d'ouvriers gagnent plus de 102000 F ?
- 2) Quel est le salaire qui sépare les ouvriers en deux groupes de même effectif (autant au dessus de ce salaire qu'en dessous de ce salaire).

Situation problème

Voici le prix du mètre carré pour chaque type de logement vendu par un promoteur immobilier :

- De 12 000 F à moins de 14 000 F pour les 97 logements de type T_1 ;
- De 14 000 F à moins de 16 000 F pour les 105 logements de type T_2 ;
- De 16 000 F à moins de 18 000 F pour les 71 logements de type T_3 ;
- De 18 000 F à moins de 20 000 F pour les 77 logements de type T_4 .

Organise ces données dans un tableau avec les classes, les effectifs, les effectifs cumulés croissants et les centres des classes.

Quel est le nombre total de logements vendus par ce promoteur immobilier ?

Si le mètre carré pour chaque type de logement était vendu au même prix, quel serait ce prix ?

Combien y a-t-il de logements vendus à moins de 16 000 F ? à au moins 16 000 F ?

Construis le polygone des effectifs cumulés croissants puis détermine graphiquement la médiane en utilisant le théorème de Thalès. Interprète le résultat.

Calcule le pourcentage de logements de chaque type vendus par rapport au nombre total de logements vendus.

Déroulement de la leçon:

I°) Rappels :

1) Définition :

a) Population :

Une étude statistique porte toujours sur un ensemble de personnes, d'animaux, de végétaux ou de choses. L'ensemble sur lequel on recueille les données statistiques est appelé population.

Exemple : L'ensemble des élèves de la classe de 3^{ème} du CEM de Ndiourba..

b) Individu :

Tout élément de la population est appelé individu.

Exemple : Chaque élève de la classe de 3^{ème} (Fatou Aidara par exemple)

c) Échantillon :

La partie de la population effectivement utilisée pour l'étude statistique est appelée échantillon.

Exemple : Un sous-ensemble de la classe de 3^{ème} (Les filles de la classe par exemple).

Remarque : Lorsque l'effectif de l'échantillon est **n**, on dit qu'on a un échantillon de taille **n**.

d) Caractères :

Un caractère est toute information qu'on peut étudier sur la population.

Exemple : Considérons l'ensemble des élèves du CEM de Ndieurba.

Sur cette population, on peut étudier :

- le caractère « âge »
- le caractère « taille »
- le caractère « nationalité »
- le caractère « ethnie »
- le caractère « situation matrimoniale »

Remarque :

★ Un caractère est **quantitatif** ou **qualitatif** :

- ✓ Un caractère est **quantitatif**, lorsqu'il est mesurable.

Exemple : Sur une population d'élèves, les caractères taille en centimètres et poids en kg sont quantitatifs.

- ✓ Un caractère est **qualitatif**, lorsqu'il n'est pas mesurable

Exemple : Sur une population d'élèves, les caractères « nationalité » et « situation matrimoniale » sont qualitatifs.

★ Un caractère quantitatif est **discret** ou **continu**.

- ✓ Un caractère est **discret** lorsqu'il prend des valeurs isolées
- ✓ Un caractère est **continu** lorsqu'il est susceptible de prendre toutes les valeurs d'un intervalle.

e) Modalité :

On appelle modalité toute valeur possible d'un caractère.

Exemple 1 : Sur une population d'étudiants, les modalités du caractère « mention obtenue au bac » sont : Passable, Assez Bien, Bien, Très Bien.

Exemple 2 : Considérons une population formée de quatre enfants d'une même famille, âgés respectivement de 12 ; 8 ; 3 et 1 ans. Chacune de ces valeurs est une modalité du caractère âge.

2) Classement des données statistiques :**a) Effectif :**

L'effectif d'une modalité représente le nombre de fois qu'on trouve cette modalité.

b) Fréquence :

La fréquence d'une modalité est le rapport de l'effectif de cette modalité par l'effectif total.

$$\text{Fréquence} = \frac{\text{Effectif partiel}}{\text{Effectif total}}$$

Remarque : Toute fréquence d'une modalité est un nombre compris entre 0 et 1 ($0 \leq f \leq 1$). La somme des fréquences d'une série est égale à 1.

c) Pourcentage :

Le pourcentage d'une modalité est la fréquence de cette modalité multipliée par 100.

$$\text{Pourcentage} = \text{Fréquence} \times 100 = \left(\frac{\text{Effectif partiel}}{\text{Effectif total}} \right) \times 100$$

Remarque :

La somme des pourcentages d'une série est égale à 100%.

d) Moyenne :

La moyenne d'une série statistique est égale à la somme des produits des modalités par les effectifs divisée par l'effectif total.

$$\text{Moyenne} = \frac{\text{somme des produits (modalités} \times \text{effectifs)}}{\text{Effectif total}}$$

e) Mode :

Le mode d'une série statistique est la modalité ayant le plus grand effectif.

Remarque :

Dans une série statistique, si on a un seul mode, alors la série est **unimodale** et si on a deux modes, alors elle est **bimodale**.

3) Exercice d'application :

Un professeur d'EPS note les performances de ses élèves dans une course de vitesse. Il note le temps mis (secondes) par chaque élève dans un carnet et obtient les résultats suivants : 9 ; 10 ; 12 ; 10 ; 14 ; 9 ; 14 ; 12 ; 15 ; 12 ; 12 ; 9

- Ordonne cette série statistique brute.
- Quel est l'effectif total de cette série ?
- Donne le mode de cette série.
- Recopie et remplit le tableau ci-dessous :

Modalités						Total
Effectifs						
Fréquences						
Pourcentages						

- Calcule le temps moyen mis par un élève.

Correction :

- 9 - 9 - 9 - 10 - 10 - 12 - 12 - 12 - 12 - 14 - 14 - 15
- L'effectif total est de 12
- Le mode est : la modalité 12
- Je remplit le tableau

Modalités	9	10	12	14	15	Total
Effectifs	3	2	4	2	1	12
Fréquences	0,25	0,17	0,33	0,17	0,08	1
Pourcentages	25%	17%	33%	17%	8%	100%

$$e) \bar{X} = \frac{3 \times 9 + 2 \times 10 + 4 \times 12 + 2 \times 14 + 1 \times 15}{12} = \frac{27 + 20 + 48 + 28 + 15}{12} = \frac{138}{12}$$

$$\text{Moyenne} = \bar{X} = 11,5$$

II°) Regrouper en classes une série brute : Exemples et Vocabulaire :**1) Activité :**

Après un test de niveaux, les notes de maths d'une classe de 3ème sont les suivantes : 2 ; 19 ; 6 ; 8 ; 12 ; 10 ; 8 ; 6 ; 10 ; 12 ; 3 ; 17 ; 10 ; 7 ; 8 ; 13 ; 9 ; 12 ; 2 ; 18 ; 1 ; 5 ; 6 ; 7 ; 0.

- Donne le nombre d'élèves ayant une note strictement inférieure à 5.
- Donne le nombre d'élèves dont la note est supérieure ou égale à 5, mais strictement inférieure à 10.
- Donne le nombre d'élèves dont la note est supérieure ou égale à 10, mais strictement inférieure à 15.
- Donne le nombre d'élèves dont la note est supérieure ou égale à 15, mais strictement inférieure à 20.
- Traduis ces résultats dans un tableau d'intervalles.

Solution :

Intervalles	[0; 5[	[5; 10[	[10; 15[	[15; 20[
Effectifs	5	10	7	3

2) Définition :

- ✓ Dans le cas d'un caractère continu, les modalités sont appelées des **classes**.
- ✓ Une classe est un intervalle de type $[a ; b[$, il est obtenu par regroupement des valeurs du caractère.

3) Centre de classe et amplitude :

On admet que le centre d'une classe $[a ; b[$ est $c = \frac{a+b}{2}$ et son amplitude est égale à $b - a$.

Remarque :

Le regroupement en classe a pour intérêt de réduire la taille de la série et de faciliter l'exploitation des données.

Exemple :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
Effectifs	5	10	7	3
Centre de classe	2,5	7,5	12,5	17,5
Amplitude	5	5	5	5

III°) Classement et représentation des données statistiques :

1) Distribution groupée en classes d'égale amplitude :

a) Effectifs cumulés croissants, fréquences cumulées croissantes :

Pour construire un tableau des effectifs cumulés croissants, on procède comme suit :

Classes	[a ; b[	[b ; c[	[c ; d[	total
Effectifs	x	y	z	x+y+z
ECC	x	x+y	x+y+z	

De la même manière, on procède pour construire le tableau des fréquences cumulées croissantes.

Exemple :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	total
Effectifs	5	10	7	3	25
ECC	5	15	22	25	
Fréquences	0,2	0,4	0,28	0,12	1
FCC	0,2	0,6	0,88	1	

b) Effectifs cumulés décroissants, fréquence cumulées décroissantes :

Pour construire un tableau des effectifs cumulés décroissants, on procède comme suit :

Classes	[a ; b[	[b ; c[	[c ; d[	total
Effectifs	x	y	z	x+y+z
ECD	x+y+z	y+z	z	

De la même manière, on procède pour construire le tableau des fréquences cumulées décroissantes.

Exemple :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	total
Effectifs	5	10	7	3	25
ECD	25	20	10	3	
Fréquences	0,2	0,4	0,28	0,12	1
FCD	1	0,8	0,4	0,12	

Remarque :

Les élèves d'une classe de troisième ont obtenu les notes suivantes lors d'un devoir de géographie :
12 - 15 - 12 - 12 - 16 - 8 - 18 - 12 - 12 - 15 - 16 - 15 - 12 - 12 - 8 - 12 - 15 - 12 - 16 - 12 - 15 - 15 - 16 - 16 - 18.

Notes	8	12	15	16	18	Total
Effectifs	2	10	6	5	2	25
ECC	2	12	18	23	25	
ECD	25	23	13	7	2	

❖ Comment répondre aux questions « au plus... » et « au moins... » ?

✓ La question « combien d'élèves ont au plus la note x », renvoie à l'**ECC** de la modalité (note) x.

Exemple : 18 élèves ont au plus 15/20 car 18 est l'ECC de la modalité 15.

✓ La question « combien d'élèves ont au moins la note x », renvoie à l'**ECD** de la modalité (note) x.

Exemple : 23 élèves ont au moins 12/20 car 23 est l'ECD de la modalité 12

❖ Comment répondre aux questions « plus de ... » et « moins de... » ?

✓ La question « combien d'élèves ont plus de x », renvoie à l'**ECD** de la modalité (note) qui suit x.

Exemple : 2 élèves ont plus de 16/20 car 2 est l'ECD de la modalité qui suit 16.

✓ La question « combien d'élèves ont moins de x », renvoie à l'**ECC** de la modalité (note) qui précède x.

Exemple : 12 élèves ont moins de 15/20 car 12 est l'ECC de la modalité précédant 15.

2) Histogramme :

Pour construire un histogramme des effectifs, on procède comme suit :

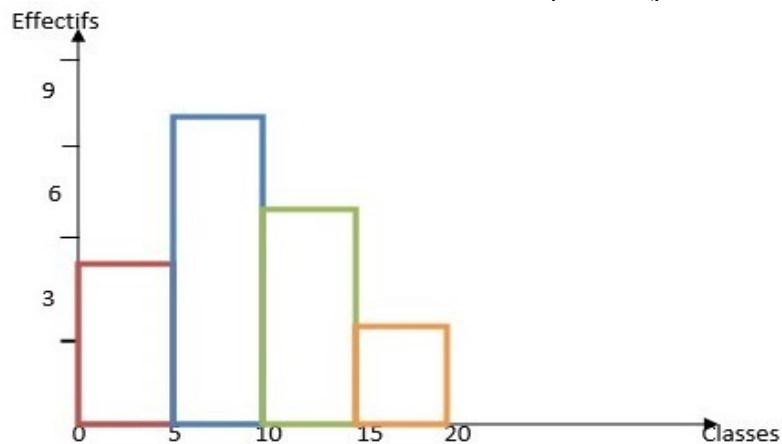
- ✓ On trace un repère orthonormal.
- ✓ On choisit une échelle convenable pour mettre sur l'axe des abscisses les bornes de classes et sur l'axe des ordonnées les effectifs.
- ✓ On construit des bandes dont les bases sont proportionnelles à l'amplitude des classes et la hauteur, proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante.

De la même façon, on procède pour construire l'histogramme des fréquences.

Exemple : Soit à construire l'histogramme des effectifs de la série suivante :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	total
Effectifs	5	10	7	3	25

Échelle : abscisses 1cm → une amplitude de 5
ordonnée : 1cm → un effectif de 3



Histogramme des effectifs

3) Diagramme des effectifs cumulés et des fréquences cumulées :

Pour construire le diagramme des effectifs, on construit le repère orthonormal en choisissant une échelle convenable pour indiquer en abscisses les bornes de classes et sur l'axe des ordonnées les effectifs cumulés croissants.

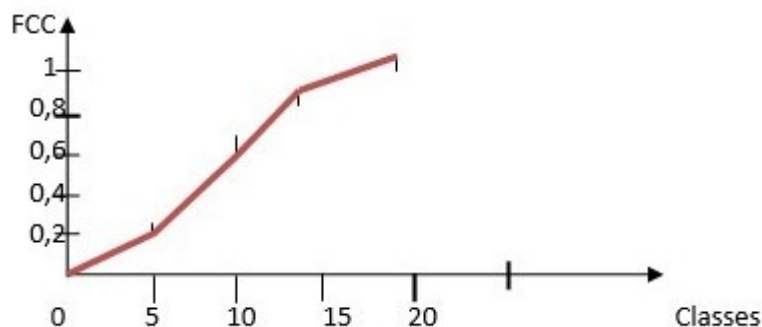
- Pour le **diagramme des effectifs cumulés croissants** : On place dans ce repère les points dont les abscisses sont les bornes supérieures des classes et les ordonnées les effectifs cumulés croissants, puis on les relie par des segments.
- S'il s'agit du **diagramme des effectifs cumulés décroissants**, on place les points dont les abscisses sont les bornes inférieures des classes et les ordonnées sont les effectifs cumulés décroissants, puis on les relie par des segments.

De la même façon, on procède pour construire le diagramme des fréquences cumulées croissantes ou le diagramme des fréquences cumulées décroissantes.

Exemple 1 : Soit à construire le diagramme des fréquences cumulées croissantes de la série suivante :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	Total
Fréquence	0,2	0,4	0,28	0,12	1
FCC	0,2	0,6	0,88	1	

On place les points (0 ; 0) ; (5 ; 0,2) ; (10 ; 0,6) ; (15 ; 0,88) ; (20 ; 1)



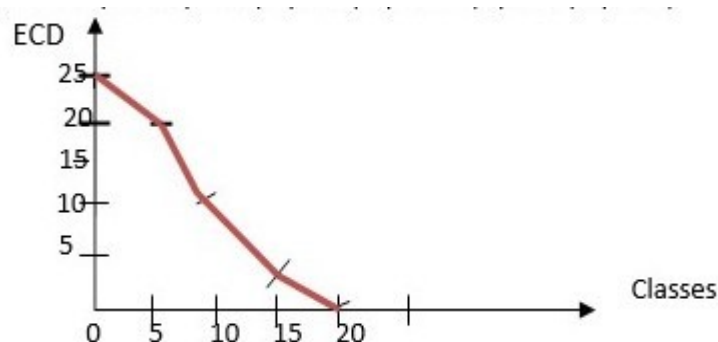
Échelle : abscisse : 1cm → une classe d'amplitude 5
ordonnée : 1cm → une FCC de 0,2

Diagramme ou polygone des FCC

Exemple 2 : Soit à construire le diagramme des effectifs cumulés décroissants de la série suivante :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	total
Effectif	5	10	7	3	25
ECD	25	20	10	3	

On place les points (0 ; 25) ; (5 ; 20) ; (10 ; 10) ; (15 ; 3) ; (20 ; 0)



Échelle : abscisses 1cm → une amplitude de 5
ordonnées 1cm → un ECD de 5

Diagramme ou polygone des ECD

Remarque :

Dans le cas d'une série discrète, le diagramme cumulé se présente sous forme de représentations en escaliers ou en bâtons. La variable passe d'une de ses valeurs à la suivante brutalement et non progressivement comme dans le cas d'une variable continue.

Exemple : Au CEM de Thiaroye, Madame la surveillante a noté le nombre de livre empruntés par les 50 élèves d'une classe de 3ème.

Nombre de livres empruntés	0	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	5	7	3	4	11	18	2	50
ECC	5	12	15	19	30	48	50	

On place les points (0 ; 5) ; (1 ; 12) ; (2 ; 15) ; (3 ; 19) ; (4 ; 30) ; (5 ; 48) ; (6 ; 50)

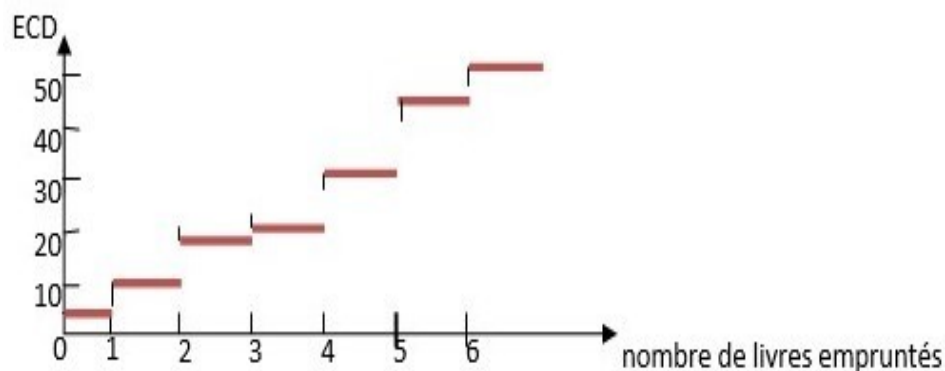


Diagramme cumulé croissant en escaliers d'une série discrète

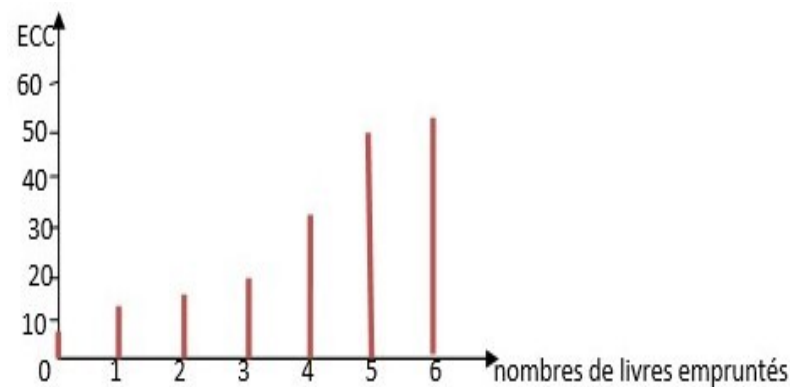


Diagramme cumulé croissant en bâtons d'une série discrète

4) Diagramme circulaire et semi-circulaire :

Pour construire le diagramme circulaire ou semi-circulaire, on utilise respectivement les formules suivantes pour déterminer chaque angle :

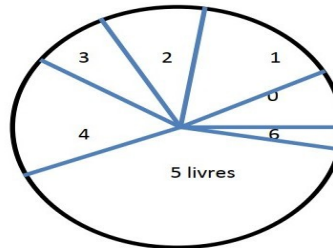
Circulaire : $\text{angle} = \frac{\text{Effectif partiel} \times 360}{\text{Effectif total}}$ et **Semi-circulaire :** $\text{angle} = \frac{\text{Effectif partiel} \times 180}{\text{Effectif total}}$

Exemple : Soit à construire le diagramme circulaire de la série :

Nombre de livres empruntés	0	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	5	7	3	4	11	18	2	50

$$0 \text{ livre : } \frac{5 \times 360}{50} = 36^\circ; 1 \text{ livre : } \frac{7 \times 360}{50} = 50^\circ; 2 \text{ livres : } \frac{3 \times 360}{50} = 22^\circ; 3 \text{ livres : } \frac{4 \times 360}{50} = 29^\circ;$$

$$4 \text{ livres : } \frac{11 \times 360}{50} = 79^\circ; 5 \text{ livres : } \frac{18 \times 360}{50} = 130^\circ; 6 \text{ livres : } \frac{2 \times 360}{50} = 14^\circ$$



5) Exercice d'application :

a) Complète chacun des tableaux suivants :

Classes	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 18[	[18 ; 21[	Total
Effectifs	2	7	1	9	13	6	38
ECC	2	9	10	19	32	38	
Fréquences	0,05	0,18	0,03	0,24	0,34	0,16	1
FCC	0,05	0,23	0,26	0,5	0,84	1	

Tableau 1 :

Classes	[0 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	Total
Effectifs	6	7	2	10	21	4	50
ECD	50	44	37	35	25	4	
Fréquences	0,12	0,14	0,04	0,2	0,42	0,08	1
FCD	1	0,88	0,74	0,7	0,5	0,08	

Tableau 2 :

b) Construis le diagramme des ECD pour le tableau 2

IV°) Paramètres de position :

1) Le mode :

Le mode d'un caractère est la modalité qui a l'effectif le plus élevé. C'est la valeur qui a la plus grande fréquence.

Dans le cas où les modalités sont des classes, on parle de classe modale et on prend comme mode le centre de cette classe modale.

Remarque :

Le mode est facile à déterminer et d'interprétation rapide, mais il n'est pas souvent unique et n'existe même pas parfois.

2) La médiane :

La médiane est la modalité qui partage la série statistique ordonnée (ordre croissant ou décroissant) en deux séries de même effectif.

a) Cas d'un caractère discret :**❖ Effectif total impair :**

Si l'effectif total (N) est **impair**, la médiane est la modalité de rang $\frac{N+1}{2}$

Exemple : Détermine la médiane de cette série ordonnée.

6 ; 7 ; 8 ; 8 ; 9 ; 10 ; 10 ; **11** ; 12 ; 12 ; 15 ; 16 ; 17 ; 19 ; 20

7 notes

Me

7 notes

N=15

donc

$$\text{rang Me} = \frac{15+1}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Donc la note 11 (8^e rang) sépare les autres notes en deux groupes de même effectif : c'est la **médiane**.

❖ Effectif total pair :

Si l'effectif total (N) est **pair**, la médiane est la demi-somme des modalités de rang respectifs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$

Exemple : Détermine la médiane de cette série ordonnée

1 ; 2 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; **6 ; 7** ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 10 ; 16

6 notes

Me

6 notes

$$N=14 \Rightarrow \frac{N}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ et } \frac{N}{2} + 1 = \frac{14}{2} + 1 = 7 + 1 = 8 \quad \text{donc rang Me} = 7 \text{ e et } 8 \text{ e note} \quad \text{d'où note médiane} = \frac{6+7}{2} = 6,5$$

Toute note comprise entre 6 et 7 est une note médiane ;]6 ; 7[est l'intervalle médian. On prend parfois le centre de l'intervalle médian $\frac{6+7}{2} = 6,5$ qui est la note médiane.

Remarque : Les modalités correspondant à $\frac{N}{4}$; $\frac{2N}{4} = \frac{N}{2}$ et $\frac{3N}{4}$ sont appelés les **quartiles**

$\frac{N}{4}$ est le **premier quartile**. Il sépare l'effectif total N en deux parties d'effectifs respectifs $\frac{1}{4}N$ et $\frac{3}{4}N$

$\frac{N}{2}$ est le **deuxième quartile ou médiane**.

$\frac{3N}{4}$ est le **troisième quartile**. Il sépare l'effectif total N en deux parties d'effectifs respectifs $\frac{3}{4}N$ et $\frac{1}{4}N$

Pour obtenir le premier quartile ou le troisième quartile, on utilise la même méthode que pour la médiane.

b) Cas d'un caractère continu :**● Méthode par interpolation affine :**

Pour trouver la médiane par interpolation affine, on trace l'histogramme des ECC puis on repère l'intervalle médian. L'intervalle médian est le premier intervalle dont l'effectif cumulé croissant est au moins égal à $\frac{N}{2}$, avec N étant l'effectif total.

Pour déterminer la médiane Me où : [am ; bm [est l'intervalle médian ; Nm-i l'effectif cumulé croissant de la classe [am-i ; bm-i [

Nm l'effectif cumulé croissant de la classe [am ; bm [

On applique la formule :

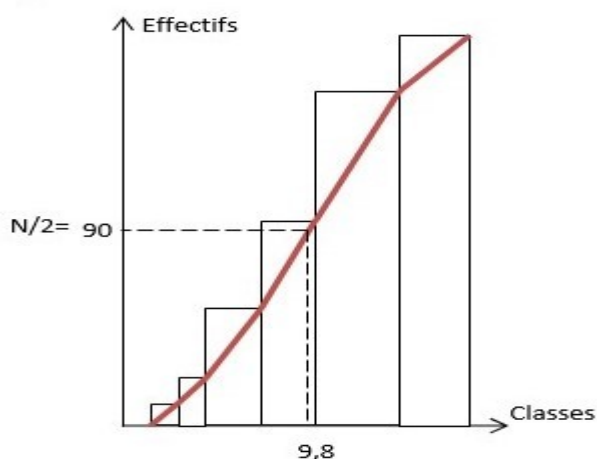
$$\frac{Me - a_m}{\frac{N}{2} - N_{m-1}} = \frac{b_m - a_m}{N_m - N_{m-1}}$$

Exemple : On donne le tableau suivant :

Classes	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 14[	Total
Effectifs	10	12	32	40	60	26	180
ECC	10	22	54	94	154	180	

Calcule la médiane par interpolation affine.

$$\frac{N}{2} = \frac{180}{2} = 90 \text{ Donc dans cet exemple, l'intervalle médian est } [8; 10[.$$



$$\frac{Me - 8}{90 - 54} = \frac{10 - 8}{94 - 54} \Rightarrow \frac{Me - 8}{36} = \frac{2}{40} \text{ d'où } Me = 9,8$$

● Méthodes graphiques :

Elles consistent à déterminer la médiane par simple lecture graphique :

Méthode 1 :

- ✓ On trace le polygone des ECC ou le polygone des ECD, puis la droite d'équation $y = \frac{N}{2}$.
- ✓ Ou bien on trace le polygone des FCC ou le polygone des FCD, puis la droite d'équation $y = 0,5$.
L'abscisse du point d'intersection de la courbe et de la droite correspond à la **médiane**.

Exemple : (Le prof fait le graphique avec le polygone des ECC ou le polygone des ECD)

Classes	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 14[	Total
Effectifs	10	12	32	40	60	26	180
ECC	10	22	54	94	154	180	
ECD	180	170	158	126	86	26	

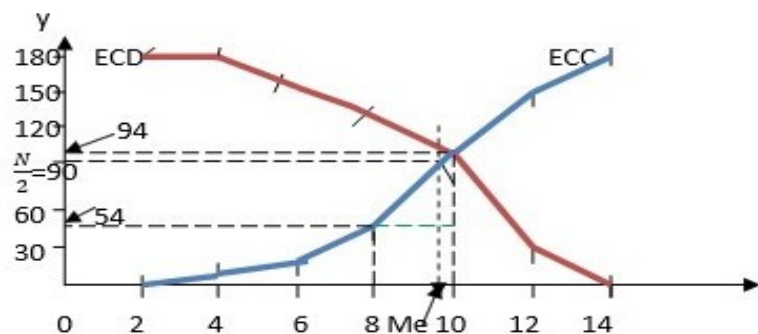
Méthode 2 :

- ✓ On trace le polygone des ECC et le polygone des ECD.
- ✓ Ou bien on trace le polygone des FCC et le polygone des FCD.
L'abscisse du point d'intersection des deux courbes correspond à la **médiane**.

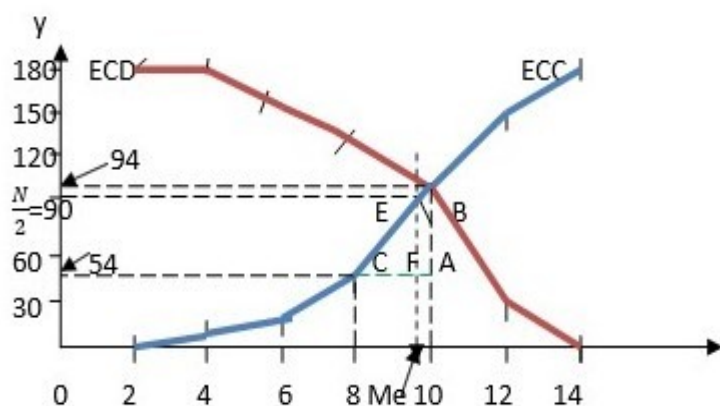
Exemple :

Classes	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 14[	Total
Effectifs	10	12	32	40	60	26	180
ECC	10	22	54	94	154	180	
ECD	180	170	158	126	86	26	

Déterminons graphiquement la médiane avec le polygone des ECC et le polygone des ECD.



● Méthode de Thalès :



Les triangles CBA et CEF sont en position de Thalès, donc :

$$\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CA} = \frac{EF}{BA} \Rightarrow \frac{CF}{CA} = \frac{EF}{BA} \Rightarrow CF = \frac{CA \times EF}{BA}$$

$$CF = \frac{(10-8)(90-54)}{(94-54)} = \frac{2 \times 36}{40} \Rightarrow CF = 1,8$$

$$Me = 8 + CF = 8 + 1,8 \text{ donc } Me = 9,8$$

3) La Moyenne :

Pour calculer une moyenne dans le cas d'une série groupée en classes, on utilise la formule suivante :

$$\text{Moyenne} = \bar{X} = \frac{\text{Somme des produits (centres de classes} \times \text{effectifs correspondants)}}{\text{Effectif total}}$$

Exemple :

Soit à calculer la moyenne de la série suivante :

Classes	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[	Total
Effectifs	5	10	2	12	29
Centre de classe	35	45	55	65	

$$\text{Moyenne} = \frac{5 \times 35 + 10 \times 45 + 2 \times 55 + 12 \times 65}{29} \Rightarrow \bar{X} = 52,24$$

4) Exercice d'application :

Le tableau suivant donne la répartition des notes des élèves de 3ème à un devoir de Mathématiques.

Classes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectifs	3	5	9	7	4

- Détermine la classe modale et le mode
- Détermine une approximation de la moyenne de la classe à ce devoir.
- Calcule la médiane de cette série par la méthode de Thalès.

FIN !!!



IA: Saint-Louis IEF: Podor CEM: Ndiourba PROF: M. NDIAYE	Chapitre 1 : THÉORÈME DE THALÈS :	DATE : CLASSE : 3^e DURÉE : 9H EFFECTIF :
---	--	--

Compétences : Mobiliser les notions relatives au théorème de Thalès, aux relations trigonométriques dans un triangle rectangle, aux angles inscrits et à la géométrie dans l'espace dans la résolution de problèmes de géométrie et de problèmes liés à la vie (détermination de grandeurs).

OBJECTIF GÉNÉRAL : Au terme de ce chapitre l'apprenant devra être capable de maîtriser l'usage du théorème de Thalès pour résoudre des problèmes de longueurs et de parallélisme de droites.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- ✓ Reconnaître une configuration de Thalès dans le cas du triangle ; du trapèze.
- ✓ Calculer des longueurs en utilisant le Théorème de Thalès ;
- ✓ Justifier que deux droites sont parallèles en utilisant la réciproque du théorème de Thalès.
- ✓ Partager un segment dans un rapport donné en utilisant le théorème de Thalès ;
- ✓ Placer un point d'abscisse connue sur une droite graduée en utilisant le Théorème de Thalès.

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogique:

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3^{ème}; CIAM 3^{ème}
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3^{ème}, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3^{ème}
- ◆ SENEMATH 3^{ème}

Matériel et supports didactiques :

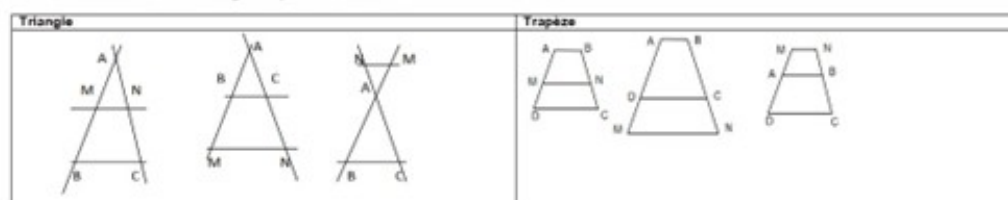
- Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis :

Distance, droites des milieux, droites parallèles (définition), aire du triangle, symétrie,...

Commentaires: On fera la démonstration de ce théorème.

On se limitera au cas de deux triangles en position de Thalès.



Introduction:

Les origines de la géométrie remontent aux babyloniens et aux égyptiens (2000 ans avant notre ère). Le théorème dit « de Pythagore » est connu dans des cas particuliers. Sur des tablettes babyloniennes, on a retrouvé des problèmes à caractère géométrique (calculs d'aires) dont la résolution passe par l'algèbre.

La géométrie naît des exigences de la vie pratique : architecture, fabrication et décoration d'objets,... Mais c'est aux crues répétées du Nil qu'on attribue les origines de la géométrie. Elles contraignent les arpenteurs égyptiens à retracer régulièrement les limites des propriétés agricoles afin de redistribuer les terrains de façon équitable.

Ces arpenteurs égyptiens déterminent des longueurs, des surfaces divisées en rectangles, carrés et autres triangles. Ils utilisent la corde à 13 nœuds pour marquer les angles droits et sont ainsi nommés les tendeurs de cordes.

Lors de son voyage en Égypte, **Thalès** qui vécut entre -627 et -547 pénétra dans le lac Mariotis et s'embarqua sur une felouque afin de remonter le Nil. Après quelques jours de voyage, il aperçut, dressé au milieu d'un large plateau, la pyramide de **Khéops**. **Thalès** regardant son ombre eut alors l'idée : « le rapport que j'entretiens avec mon ombre est le même que la pyramide entretient avec la sienne. » Il en déduisit ceci : « à l'instant où mon ombre sera égale à ma taille, l'ombre de la pyramide sera égale à sa hauteur » : Voici l'idée lumineuse de **Thalès**. Curieusement, le **Théorème** qui porte son nom n'a jamais été démontré, ni même découvert par **Thalès** (la démonstration sera faite trois siècles plus tard par **Euclide**). Ce sont en fait des français qui le baptisèrent ainsi à la fin du XIX^{ème} siècle.

Du **point de vue programme**, le **théorème de Thalès** apparaît comme une extension des **THÉORÈMES DE LA DROITE DES MILIEUX** et aboutira aux homothéties.

Situation problème

Monsieur Emmanuel, debout à côté du mât de l'école, se demande comment trouver la hauteur de ce mât. C'est à une heure où les rayons solaires sont obliques, ce qui lui permet de voir que l'ombre du mât et lui sont dans la position indiquée par le dessin ci-dessous.

Si la taille de Monsieur Emmanuel est 1,85 m, son ombre 3,7 m et que l'ombre du mât est 8 m, alors aide Emmanuel à trouver la hauteur de ce mât.

PLAN DU COURS: (Voir cours)**Activité de vérification des prérequis : (Cahier d'exercice)****Exercice 1**

- 1° Sur une demi-droite $[Ax)$, place un point B à 23 mm de A.
- 2° En utilisant le compas, place 5 points C, D, E, F et G sur $[Ax)$ tels que :
 $AB = BC = CD = DE = EF = FG$
- 3° Complète par les facteurs qui conviennent pour que les égalités soient vérifiées :

$AC = \dots AB$	$AC = \dots AD$	$AB = \dots AC$
$AD = \dots AC$	$AD = \dots AF$	$EG = \dots AG$
- 4° Quels sont les longueurs des segments $[AC]$, $[AD]$, $[AF]$, $[EG]$, $[AG]$?

- 5° Détermine les quotients $\frac{AB}{AC}$, $\frac{AC}{AD}$, $\frac{EG}{AG}$, $\frac{AD}{AF}$.

- 6° Place le point M milieu du segment $[DE]$ et détermine $\frac{AM}{AD}$ puis complète :
 $AM = \dots AD$

Exercice 2

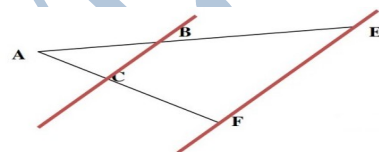
Démontre le théorème n° 4 du chapitre droite des milieux (Cf. le guide du professeur de 4°) "Si 3 droites parallèles découpent sur une sécante deux segments consécutifs de même longueur, alors elles découpent sur toute autre sécante deux segments consécutifs de même longueur"

Déroulement de la leçon:**1° Cas d'un triangle :****A° Théorème de Thalès et sa conséquence :****Compétences exigibles**

- À la fin de ce paragraphe, je dois être capable :
- de reconnaître une configuration de Thalès ;
 - de connaître le théorème de Thalès ;
 - d'utiliser le théorème de Thalès pour calculer des longueurs.

1) Activité :

- a) Construis trois points non alignés A, E et F tels que $AE=9\text{cm}$ et $AF=6\text{cm}$.
- b) Construis le point B tel que $AB=3\text{cm}$ et $B \in [AE]$. Trace la parallèle à (FE) passant par B. Elle coupe (AF) en C.
- c) Mesure le segment $[AC]$, puis calcule et compare les rapports $\frac{AB}{AE}$ et $\frac{AC}{AF}$

Solution :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

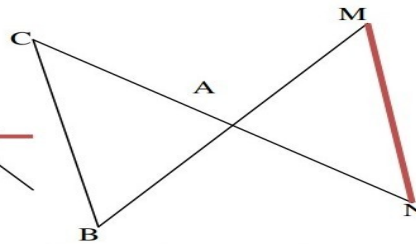
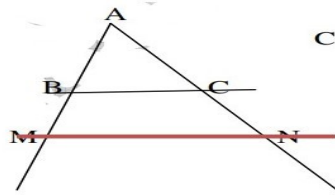
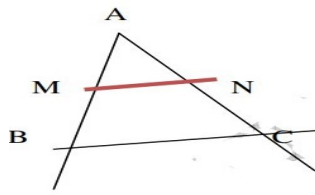
$$\frac{AC}{AF} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Par comparaison $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$

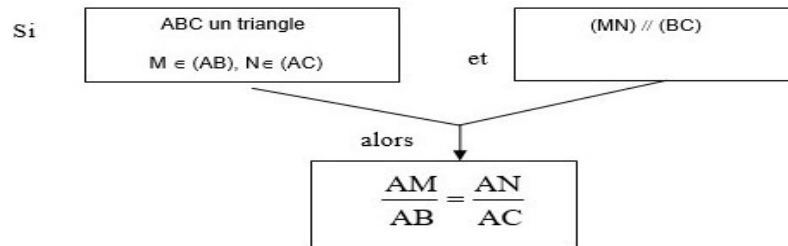
2) Énoncé du théorème direct de Thalès:

Soit ABC un triangle. $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$.

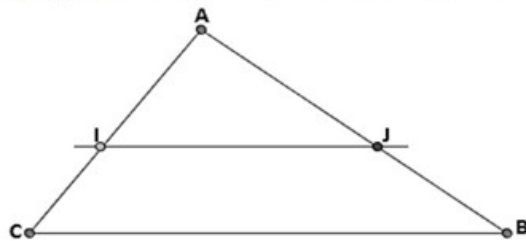
Si (MN) est parallèle à (BC) ($(MN) \parallel (BC)$), alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Configurations :

Les triangles ABC et ANM sont en configuration (position) de Thalès, donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Déductogramme :Exemple : Comment utiliser le théorème dans un exercice.

Dans la figure suivante $(IJ) \parallel (BC)$ et $AB = 4\text{cm}$; $AC = 3,2\text{cm}$; $AJ = 2,5\text{cm}$. Calcule AI

Règle des trois étoiles* :

*ABC et AIJ sont des triangles en position de Thalès (énoncer les triangles)

* $I \in (AC)$ et $J \in (AB)$

*Comme $(BC) \parallel (IJ)$, donc d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AJ}{AB} = \frac{AI}{AC} \quad \text{ce qui donne} \quad AI = \frac{AJ \times AC}{AB} = \frac{2,5 \times 3,2}{4} = 2 \quad ; \quad AI = 2\text{cm}$$

3) Conséquence du théorème de Thalès :

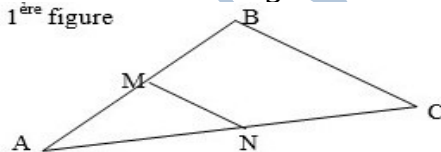
Si deux triangles sont en position de Thalès, alors les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles.

Autrement dit, si deux triangles ABC et AMN sont en configuration de Thalès tels que $M \in (AB), N \in (AC)$, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

4) Exercice d'application :

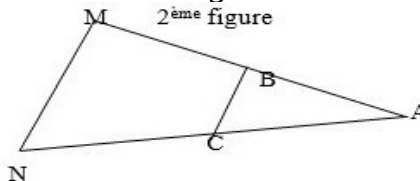
Dans chacune des figures suivantes, calcule la longueur inconnue AC :

1^{ère} figure

$(MN) \parallel (BC)$

$AM=3$; $AB=6$; $AN=4$

$AC = ?$

2^{ème} figure

$(MN) \parallel (BC)$

$AM=5$; $AB=1,5$; $AN=8$

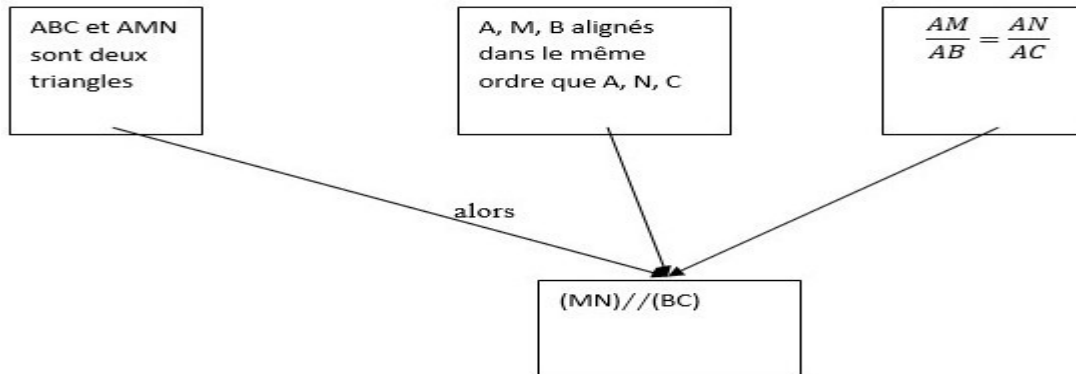
$AC = ?$

B°) Réciproque du Théorème de Thalès :

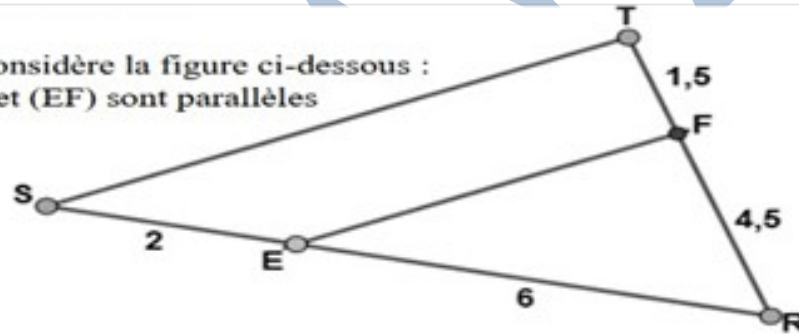
Compétences exigibles
 À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de justifier que deux droites sont parallèles.

1) Énoncé de la réciproque du théorème de Thalès :

Soient ABC et AMN deux triangles, Si les points A, M, B d'une part et les points A, N, C d'autre part, sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors $(MN) \parallel (BC)$.

Déductogramme :**Exemple :**

L'unité est le centimètre. On considère la figure ci-dessous :
 Montrons que les droites (ST) et (EF) sont parallèles

**Règle des quatre étoiles :**

*RST est un triangle

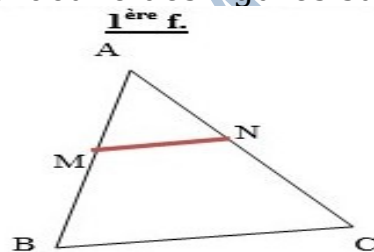
* $E \in [RS]$ et $F \in [RT]$

$$*\frac{RE}{RS} = \frac{6}{8} = 0,75 \quad ; \quad \frac{RF}{RT} = \frac{4,5}{6} = 0,75$$

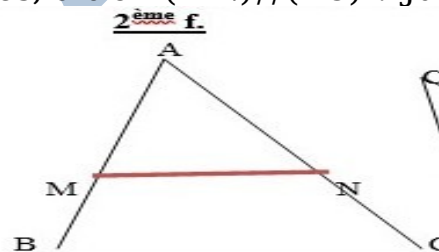
*Comme $\frac{RE}{RS} = \frac{RF}{RT}$ donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès $(ST) \parallel (EF)$

2) Exercice d'application :

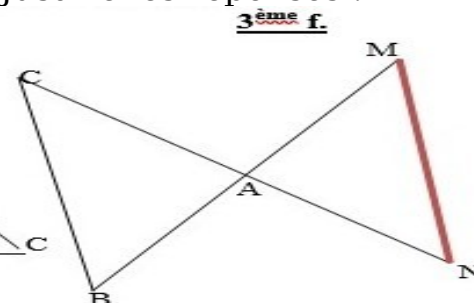
Sur chacune des figures suivantes, a-t-on $(MN) \parallel (BC)$? Justifie les réponses :



$$AM=2; AN=3 \\ AB=4; AC=6$$



$$AB=10,5; AC=14,5 \\ AM=4; AN=6,3$$



$$AN=4,5; AM=3 \\ AB=2; AC=3$$

II° Cas d'un trapèze :

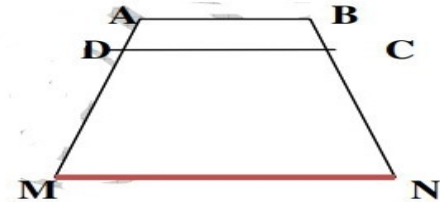
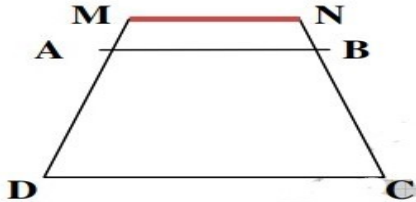
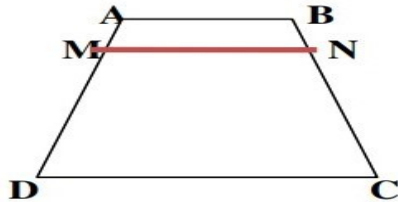
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable :

- de reconnaître une configuration de Thalès et de l'utiliser dans le cas du trapèze.

1) Activité :

- a) Construis un trapèze ABCD tel que $(AB) \parallel (DC)$; $AD=5\text{cm}$ et $BC=4\text{cm}$
 b) Place un point M sur [AD] tel que $AM=2,5\text{cm}$.
 c) Trace la parallèle à (AB) passant par M. Elle coupe (BC) en N. Puis mesure le segment [BN].
 d) Calcule et compare les rapports $\frac{AM}{AD}$ et $\frac{BN}{BC}$

2) Théorème :Soit ABCD un trapèze. $M \in (AD)$ et $N \in (BC)$.si $(AB) \parallel (MN) \parallel (DC)$, alors on a : $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$ ou $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ ou $\frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB}$ Configuration :3) Réciproque :

Soient ABCD et ABNM deux trapèze, si les points A, M, D sont alignés dans le même ordre que les points B, N, C

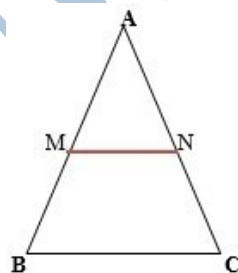
et $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$ ou $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ ou $\frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB}$ alors $(AB) \parallel (MN) \parallel (DC)$.4) Exercice d'application :Soit ABDC un trapèze tel que $(AB) \parallel (CD)$ et $AC=4,5\text{cm}$; $BD=3\text{cm}$.

- a) Sur [BD], place un point E tel que $DE=2,5\text{cm}$. La parallèle à (AB) passant par E coupe [AC] en F.
 b) Calcule AF et déduis-en CF.

III° Agrandissement et réduction :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable d'utiliser la propriété relative à l'aire dans le cas de deux triangles en configuration de Thalès.

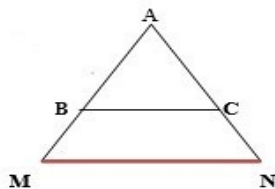
1) Définition :Si deux triangles ou deux trapèzes sont en configuration de Thalès, alors l'un est un **agrandissement** (ou une **réduction**) de l'autre.Exemple :

Les triangles AMN et ABC sont en Configuration de Thalès, donc AMN est une **réduction** de ABC.
 ABC est un **agrandissement** de AMN

2) Propriétés :

→ Si $\frac{AM}{AB} > 1$, alors AMN est un **agrandissement** de ABC.

Exemple:

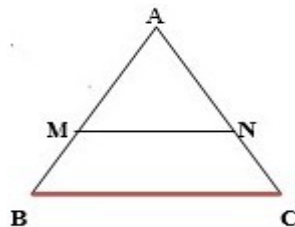


On donne :
 $AM = 9\text{cm}$
 $AB = 3\text{cm}$
 $AN = 6\text{cm}$
 $AC = 2\text{cm}$

On a : $\frac{AM}{AB} = \frac{9}{3} = 3 > 1$ donc AMN est un **agrandissement** de AB

→ Si $\frac{AM}{AB} < 1$, alors AMN est une **réduction** de ABC.

Exemple:



On donne :
 $AM = 3\text{cm}$
 $AB = 9\text{cm}$
 $AN = 2\text{cm}$
 $AC = 6\text{cm}$

On a : $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{6} = 0,33 < 1$ donc AMN est une **réduction** de ABC.

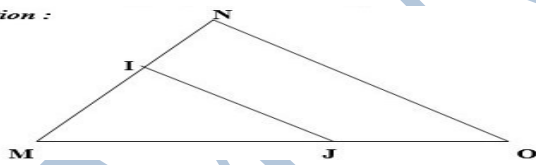
IV°) Partage d'un segment dans un rapport donné :**Compétences exigibles**

- À la fin de ce paragraphe, je dois être capable :
- de partager un segment dans un rapport donné ;
 - de placer un point d'abscisse donné sur une droite graduée.

1) Activité :

- Construis un triangle MON tel que $MO = 6\text{cm}$ et $MN = 4\text{cm}$. Place le point J sur [MO] tel que $MJ = 4\text{cm}$.
- Trace la parallèle à (ON) passant par J, elle coupe [MN] en I.
- Justifie que $\frac{MI}{MN} = \frac{2}{3}$ et que $MI = \frac{2}{3}MN$

Solution :



Justifions :

MON est un triangle, $I \in [MN]$, $J \in [MO]$ et $(IJ) \parallel (NO)$, donc $\frac{MI}{MN} = \frac{MJ}{MO} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\frac{MI}{MN} = \frac{2}{3}$ équivaut $MI = \frac{2}{3}MN$.

2) Méthode :

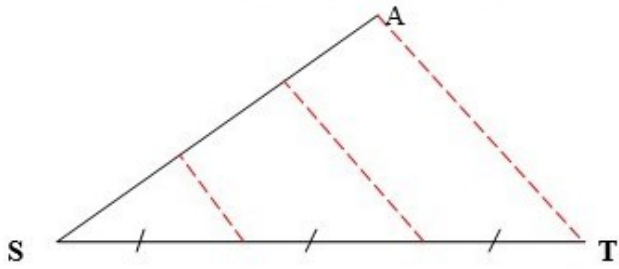
Pour partager un segment [MN] en **n** parties égales, on procède comme suit :

- ✓ On trace le segment [MN].
- ✓ On trace un segment [MA] tel que $A \notin (MN)$ et dont la mesure de sa longueur est un nombre multiple de n.
- ✓ On subdivise [MA] en n parties égales.
- ✓ On trace les parallèles à (NA) passant par les points de la subdivision ainsi obtenue.

Le théorème de Thalès nous permet de conclure que le segment [MN] est divisé en n parties égales.

Exemple :

Soit à partager un segment [ST] de longueur 7cm en 3 parties égales :

**3) Comment placer un point d'abscisse donné sur une droite graduée :**

Pour placer sur une droite graduée (D) un point M d'abscisse $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$), on procède comme suit :

➤ Si $\frac{a}{b} > 0$

- On trace une droite passant par le point d'abscisse +1 de (D) et le point d'abscisse +b de (D').
- On trace la parallèle à cette droite passant par le point de (D') d'abscisse +a.

Elle coupe (D) au point recherché d'abscisse $\frac{a}{b}$

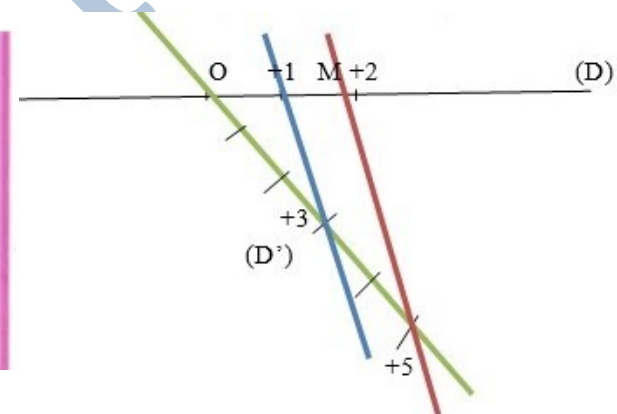
Exemple 1 :

Soit à placer sur (D) un point M d'abscisse $\frac{5}{3}$

Pour placer sur une droite graduée (D) le point M d'abscisse $\frac{5}{3}$, je procède comme suit :

- Je trace une droite graduée (D') sécante à (D) ayant même origine de graduation.
- Je trace une droite passant par le point d'abscisse +1 de (D) et le point d'abscisse +3 de (D').
- Je trace la parallèle à cette droite passant par le point de (D') d'abscisse +5.

Elle coupe (D) au point recherché M d'abscisse $\frac{5}{3}$.



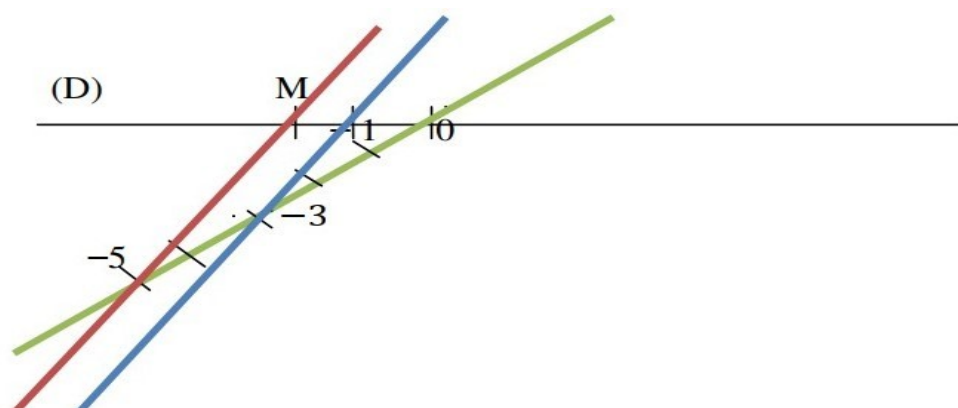
➤ Si $\frac{a}{b} < 0$

- On trace une droite graduée (D') sécante à (D) ayant même origine de graduation.
- On trace une droite passant par le point d'abscisse -1 de (D) et le point d'abscisse -b de (D').
- On trace la parallèle à cette droite passant par le point de (D') d'abscisse -a.

Elle coupe (D) au point recherché d'abscisse $\frac{a}{b}$

Exemple 2 :

Soit à placer sur (D) un point M d'abscisse $-\frac{5}{3}$

**4) Exercice d'application :**

- a) Construis un segment $[MF]$ de longueur 8 cm. Divise ce segment en 7 segments de même longueur.
- b) Sur une droite graduée (D), place les points I et S d'abscisses respectives : $-\frac{4}{3}$ et $\frac{7}{3}$

FIN !!!

IA: Saint-Louis IEF: Podor CEM: Ndiourba PROF: M. NDIAYE	Chapitre 2 : RELATIONS TRIGONOMETRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE :	DATE : CLASSE : 3^e DURÉE : 7H EFFECTIF :
---	---	--

Compétences : Mobiliser les notions relatives au théorème de Thalès, aux relations trigonométriques dans un triangle rectangle, aux angles inscrits et à la géométrie dans l'espace dans la résolution de problèmes de géométrie et de problèmes liés à la vie (détermination de grandeurs).

OBJECTIF GÉNÉRAL : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation de la trigonométrie pour calculer des longueurs et des mesures d'angles.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- ✎ Restituer : la définition et la notation du cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ; la définition et la notation du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ; la définition et la notation de la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle
- ✎ Calculer : le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ; le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ; la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
- ✎ Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle : connaissant un cosinus et une autre longueur ; connaissant un sinus et une autre longueur ; connaissant une tangente et une autre longueur.
- ✎ Restituer la relation entre le cosinus et le sinus d'angles complémentaires.
- ✎ Utiliser la relation entre le cosinus et le sinus d'angles complémentaires pour calculer le cosinus ou le sinus d'angle donné.
- ✎ Restituer les cosinus, sinus et tangente d'un angle de mesure 30° , 45° ou 60° .

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogique:

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3^{ème}; CIAM 3^{ème}
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3^{ème}, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3^{ème}
- ◆ SENEMATH 3^{ème}

Matériel et supports didactiques :

- Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis :

Complémentarité des angles aigus dans un triangle rectangle, Pythagore, racine carrée, Triangle rectangle- angles et vocabulaire ;

Commentaires:

Dans ce chapitre, on entraînera les élèves à utiliser la calculatrice.

On montrera que le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des nombres strictement compris entre 0 et 1.

On fera de nombreux exercices d'application et on proposera des procédés mnémotechniques aux élèves, leur permettant de retrouver les valeurs exactes des cosinus, sinus, tangentes des angles de 30° , 45° ou 60° .

Elles permettront de calculer les valeurs exactes de longueurs

Introduction:

Du point de vue historique, le mot « trigonométrie » vient du grec « trigonô » qui signifie triangle rectangle et « métron » qui signifie mesure. Hipparque de Nicée (- 190 ; - 120) est le Fondateur de la trigonométrie. Ainsi, la trigonométrie est « la partie des mathématiques, étudiant les rapports entre les distances et les angles dans le triangle. »

Pendant l'antiquité et le Moyen âge, les arpenteurs se servaient déjà des relations trigonométriques pour établir leurs calculs sur le terrain.

Du point de vue intérêt, de nos jours, ces relations sont encore utilisées en astronomie, en navigation aérienne et maritime, en cartographie, en architecture pour déterminer des angles ou des distances, en Physique,... . D'ailleurs, ce chapitre peut-être lié au TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Éducation) ; utilisation des touches de cos ; sin ; tan ; ...

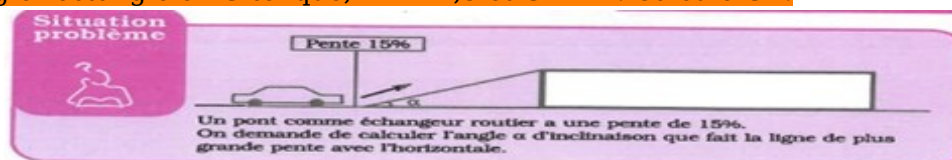
Du point de vue programme, la notion est tout à fait nouvelle. Elle est la partie des mathématiques étudiant les rapports entre les distances et les angles dans le triangle. Comme toute les autres chapitres ; celui-ci mériterait aussi à plus d'un titre votre attention.

PLAN DU COURS: (Voir cours)

Activité de vérification des prérequis : (Cahier d'exercice)

1. ABC est un triangle rectangle en A tel que, $AB = 4$ et $AC = 3$. Calcule BC.

2. EFG est un triangle rectangle en G tel que, $EF = 2,5$ et $GF = 2$. Calcule GE.



Dérroulement de la leçon:

I°) Cosinus et sinus d'un angle aigu :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

a) connaître la définition et la notation du cosinus, du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ;

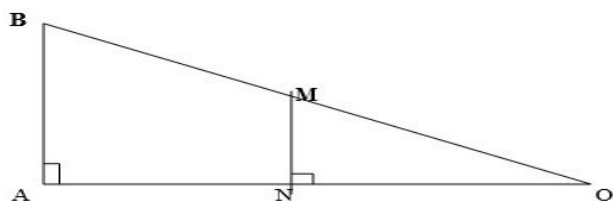
b) être capable de :

- calculer le cosinus, le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle,
- calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant le cosinus, le sinus d'un angle aigu et la longueur d'un côté de cet angle,
- déterminer une valeur approchée d'un angle aigu dans un triangle rectangle connaissant son cosinus, son sinus à l'aide d'une calculatrice ou d'une table trigonométrique.

1) Activité :

- a) Trace un triangle OAB rectangle en A tel que OA=8cm, AB=6.
- b) Calcule OB, puis le rapport $\frac{AB}{OB}$
- c) Place un point M sur la demi-droite [OB) puis construis le point N projeté orthogonal de M sur (OA).
- d) Calcule les rapports $\frac{ON}{OM}$ et $\frac{NM}{OM}$

Solution :



$(AB) \perp (OA)$
 $(MN) \perp (OA)$, donc $(AB) \parallel (MN)$.
 OAB triangle, $M \in (OB)$, $N \in (OA)$ et $(AB) \parallel (MN)$, donc $\frac{ON}{OA} = \frac{OM}{OB}$ équivaut
 $\frac{ON}{OM} = \frac{OA}{OB} = \frac{8}{10} = 0,8$
 OAB triangle rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore $BO = 10\text{cm}$.
 Donc $\frac{OA}{OB} = \frac{8}{10} = 0,8$
 $\frac{MN}{AB} = \frac{OM}{OB} = \frac{ON}{OA} \Rightarrow \frac{MN}{OM} = \frac{AB}{OB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

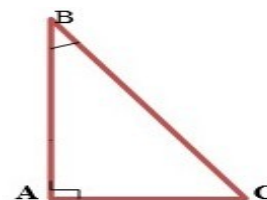
2) Définitions et Notations :

a) Cosinus d'un angle aigu :

Dans un triangle rectangle, le **cosinus** d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du **côté adjacent** à cet angle par la longueur de l'**hypoténuse**.

Autrement dit, si ABC est un triangle rectangle en A, alors :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$



Remarque :

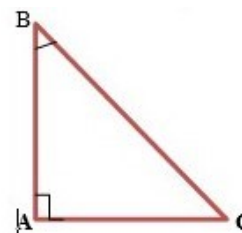
Si $\widehat{ABC}$ est un angle aigu, alors: $0 < \cos \widehat{ABC} < 1$.

b) Sinus d'un angle aigu :

Dans un triangle rectangle, le **sinus** d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du **côté opposé** à cet angle par la longueur de l'**hypoténuse**.

Autrement dit, si ABC est un triangle rectangle en A, alors :

$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$



Remarque :

Si $\widehat{ABC}$ est un angle aigu, alors: $0 < \sin \widehat{ABC} < 1$.

3) Exercice d'application :

- a. Construis un triangle LOB rectangle en L tel que OL=3cm et OB=5cm.
 b. Calcule LB, puis $\sin \widehat{OBL}$ et $\cos \widehat{OBL}$

II°) Tangente d'un angle aigu :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

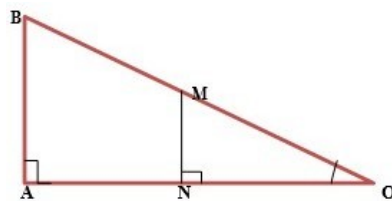
a) connaître la définition et la notation de la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle ;

b) être capable de :

- calculer la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle,
- calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la tangente d'un angle aigu et la longueur d'un côté de cet angle,
- déterminer une valeur approchée d'un angle aigu dans un triangle rectangle connaissant sa tangente à l'aide d'une calculatrice ou d'une table trigonométrique.

1) Activité :

- a) Trace un triangle OAB rectangle en A tels que OA=8cm, AB=6cm.
 b) Calcule le rapport $\frac{AB}{OA}$
 c) Divise le numérateur et le dénominateur de $\frac{AB}{OA}$ par OB et exprime le rapport obtenu à l'aide du sinus et du cosinus de $\widehat{BOA}$.
 d) Place un point M sur la demi-droite [OB) puis construis le point N projeté orthogonal de M sur (OA). Calcule le rapport $\frac{MN}{ON}$

Solution :

$$\frac{AB}{OA} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{AB}{OA} = \frac{\frac{AB}{OB}}{\frac{OA}{OB}} = \frac{\sin \widehat{BOA}}{\cos \widehat{BOA}} ;$$

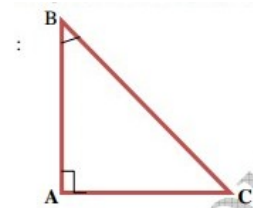
$$\frac{ON}{OA} = \frac{OM}{OB} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow \frac{MN}{ON} = \frac{AB}{OA} = \frac{3}{4}$$

2) Définition et Notation :

Dans un triangle rectangle, la **tangente** d'un angle aigu est égale au quotient de la longueur du **côté opposé** à cet angle par la longueur du **côté adjacent**.

Autrement dit, si ABC est un triangle rectangle en A, alors :

$$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{ABC}}{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB} \quad \text{ou} \quad \tan(\widehat{ABC}) = \frac{\sin(\widehat{ABC})}{\cos(\widehat{ABC})}$$

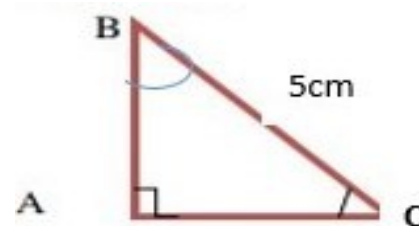
**Remarque :**

- Dans un triangle rectangle, si on connaît la longueur d'un côté, le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu, on peut calculer la longueur des deux autres côtés.

Exemple : Soit ABC un triangle rectangle en A tels que BC= 5cm et $\cos B = 0,8$. Calculer AB puis AC

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = \cos \hat{B} \times BC = 0,8 \times 5 \Rightarrow AB = 4 \text{ cm}$$

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow AC = 3 \text{ cm}$$



- Dans ce même triangle, si on connaît la mesure d'un angle donné, on peut utiliser une calculatrice ou une table trigonométrique pour déterminer le cosinus, le sinus ou la tangente de cet angle.

Exemple :

L'angle $\widehat{ABC}$ mesure 60°

$$\cos \widehat{ABC} = \cos(60^\circ) = 0,5 \quad , \sin \widehat{ABC} = \sin(60^\circ) = 0,8 \quad , \tan \widehat{ABC} = \tan(60^\circ) = 1,7$$

- On peut faire de même pour déterminer une valeur approchée de l'angle si on connaît son sinus, son cosinus ou sa tangente.

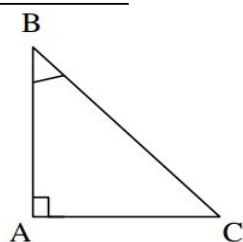
Exemple :

$$\begin{aligned} \cos \widehat{ABC} &= 0,5 \text{ donc } \widehat{ABC} = \cos^{-1}(0,5) = 60^\circ \quad , \\ \sin \widehat{ABC} &= 0,06 \text{ donc } \widehat{ABC} = \sin^{-1}(0,06) = 3,44^\circ \quad , \\ \tan \widehat{ABC} &= 2,9 \text{ donc } \widehat{ABC} = \tan^{-1}(2,9) = 70,97^\circ \end{aligned}$$

- Dans tous les cas, il faut regarder l'affiche de votre écran, si sa correspond à l'unité d'angle que vous voulez utiliser (DEG, RAD ou GRAD)

3) Exercice d'application :

- a) Soit ABC un triangle rectangle en A tels que $\tan \widehat{ABC} = 1,5$ et $AC = 3\text{cm}$.
b) Calcule AB puis déduis BC.

Solution :

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\tan \widehat{ABC}} = \frac{3}{1,5} = 2\text{ cm}$$

$$BC = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\text{ cm}$$

III°) Relation entre le cosinus et le sinus d'un même angle aigu :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître la relation entre le sinus et le cosinus d'un même angle aigu et être capable de l'utiliser pour résoudre des problèmes.

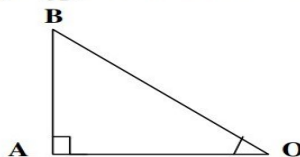
1) Activité :

Soit OAB un triangle rectangle en A.

- a) Écris l'égalité de Pythagore.
b) Déduis-en la valeur de $\left(\frac{OA}{OB}\right)^2 + \left(\frac{AB}{OB}\right)^2$ en divisant les deux membres par OB^2 .
c) Traduis l'égalité obtenue en utilisant le sinus et le cosinus de $\widehat{AOB}$

Solution :

$$OB^2 = AB^2 + OA^2 \quad \frac{OB^2}{OB^2} = \frac{AB^2}{OB^2} + \frac{OA^2}{OB^2} \Rightarrow 1 = \cos^2 \widehat{AOB} + \sin^2 \widehat{AOB}$$



2) Propriété :

Pour tout angle aigu β on a : $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$

En notant x la mesure de β on a : $\cos^2x + \sin^2x = 1$

Remarque :

$$(\cos \beta)^2 = \cos^2 \beta$$

et

$$(\sin \beta)^2 = \sin^2 \beta$$

3) Exercice d'application :

On donne $\cos \alpha = 0,6$.

a) Calcule $\sin \alpha$ et $\tan \alpha$

b) Déduis-en α à 10^{-1} près par défaut.

Correction :

$$\text{a) } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 0,36 = 0,64 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{0,64} \Rightarrow \sin \alpha = 0,8$$

$$\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = 0,8 / 0,6 \Rightarrow \tan \alpha = 1,333$$

$$\text{b) } \alpha = \sin^{-1}(0,8) = \cos^{-1}(0,6) = \tan^{-1}(1,3333) = 53,1^\circ$$

IV°) Relation entre le cosinus et le sinus de deux angles complémentaires :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître la relation qui lie le sinus et le cosinus de deux angles complémentaires et être capable de l'utiliser pour résoudre des problèmes.

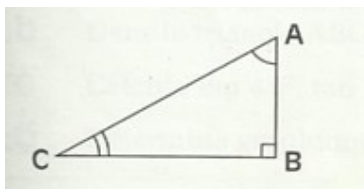
1) Activité :

a) Soit ABC, un triangle rectangle en B.

b) Compare $\cos \hat{A}$ et $\sin \hat{C}$.

c) Compare $\sin \hat{A}$ et $\cos \hat{C}$.

d) Donne la valeur de $\tan \hat{A} \times \tan \hat{C}$

Correction :

$$\text{b) } \cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}, \quad \sin \hat{C} = \frac{AB}{AC} \quad \text{donc} \quad \cos \hat{A} = \sin \hat{C}$$

$$\text{c) } \sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}, \quad \cos \hat{C} = \frac{BC}{AC} \quad \text{donc} \quad \sin \hat{A} = \cos \hat{C}$$

$$\text{d) } \tan \hat{A} \times \tan \hat{C} = \frac{BC}{AB} \times \frac{AB}{BC} = 1$$

2) Propriétés :

★ Lorsque deux angles sont complémentaires, alors le **sinus** de l'un est égal au **cosinus** de l'autre et réciproquement.

Autrement dit, si $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$, alors $\cos(\widehat{ABC}) = \sin \widehat{ACB}$ et $\sin(\widehat{ABC}) = \cos \widehat{ACB}$.

★ Dans un triangle rectangle, les **tangentes** des deux angles complémentaires sont inverses l'une de l'autre.

Autrement dit, si $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$, alors $\tan(\widehat{ABC}) \times \tan \widehat{ACB} = 1$.

3) Exercice d'application :

ABC est un triangle rectangle en A. On donne $\cos \widehat{ACB} = 0,34$.

a) Détermine $\sin \widehat{ABC}$.

b) Détermine une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ à 1 degré près par défaut.

V°) Angles remarquables :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle de 30°, 45° ou 60° et être capable de les utiliser pour résoudre des problèmes.

Les valeurs du cosinus, sinus et tangente des angles de mesure : 30°, 45° et 60° sont résumées dans le tableau suivant :

$\hat{\beta}$	30°	45°	60°
$\sin \hat{\beta}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \hat{\beta}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \hat{\beta}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Remarque :
Lors des calculs, on utilise les valeurs exactes sauf si une valeur approchée est demandée.

Méthode pour retenir le tableau

- ✓ Ecris dans l'ordre croissant 30° ; 45° ; 60°
- ✓ Ecris en dessous les valeurs $\sqrt{1}$; $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$
- ✓ Divise chaque terme obtenu précédemment par 2
- ✓ Tu obtiens ainsi la ligne des sinus
- ✓ Pour obtenir la ligne des cosinus, il suffit d'utiliser la propriété de la complémentarité des angles. Donc d'inverser l'ordre de la ligne des sinus.

Par Manitou «Par manitou, pour retenir ces formules, poussez ce cri indien !»

« SOH CAH TOA ! »

S = Sinus ; O = côté Opposé ; C = Cosinus ; A = côté Adjacent ; T = Tangente et H = Hypoténuse

« le Sinus est le rapport du côté Opposé sur l'Hypoténuse !
le Cosinus est le rapport du côté Adjacent sur l'Hypoténuse
la Tangente est le rapport du côté Opposé sur le côté Adjacent »



FIN !!!

IA: Saint-Louis IEF: Podor CEM: Ndiourba PROF: M. NDIAYE	Chapitre 3 : ANGLES INSCRITS :	DATE : CLASSE : 3^e DURÉE : 6H EFFECTIF :
---	---------------------------------------	--

Compétences : Mobiliser les notions relatives au théorème de Thalès, aux relations trigonométriques dans un triangle rectangle, aux angles inscrits et à la géométrie dans l'espace dans la résolution de problèmes de géométrie et de problèmes liés à la vie (détermination de grandeurs).

OBJECTIF GÉNÉRAL : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra maîtriser l'utilisation des théorèmes relatifs aux angles inscrits pour résoudre des problèmes.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'apprenant devra être capable de :

- ✓ Restituer le vocabulaire, angle inscrit, angle au centre.
- ✓ Reconnaître les configurations de l'angle au centre et de l'angle inscrit interceptant le même arc.
- ✓ Restituer la relation entre l'angle au centre et l'angle inscrit interceptant le même arc.
- ✓ Utiliser la relation entre l'angle au centre et l'angle inscrit interceptant le même arc.
- ✓ Restituer la propriété des angles inscrits interceptant le même arc.
- ✓ Utiliser la propriété des angles inscrits interceptant le même arc pour : justifier une égalité d'angles ; déterminer la mesure d'un angle.

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogique:

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3^{ème}; CIAM 3^{ème}
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3^{ème}, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3^{ème}
- ◆ SENEMATH 3^{ème}

Matériel et supports didactiques :

- Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis :

Vocabulaire relatif au cercle déjà vu en 6e, somme des angles dans un triangle 5e, triangle rectangle 4e, angle.

Commentaires:

Des exemples et des contre exemples sont nécessaires pour fixer les notions d'angles inscrits, d'angles au centre et d'arc intercepté. On étudiera d'abord le cas où l'un des côtés de l'angle inscrit est un diamètre.

En application, on étudiera le cas particulier où l'angle inscrit est droit.

Introduction:

Le mot angle dérive du latin *angulus*, mot qui signifie « le coin ».

Les notions d'angle au centre et d'angle inscrit sont très utilisées chez les sportifs en général et plus particulièrement chez les footballeurs. Ces derniers s'en servent pour déterminer l'angle de tir optimal par rapport au milieu du terrain où la ligne des touches.

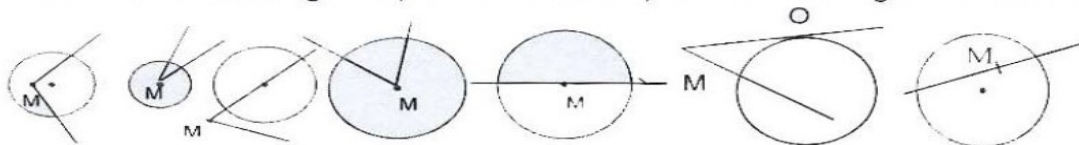
Du point de vue des programmes, ce chapitre consacré aux « angles inscrits » est un prolongement du chapitre intitulé « angle au centre » étudié en classe de 4e. Son étude sera poursuivie en classe de seconde.

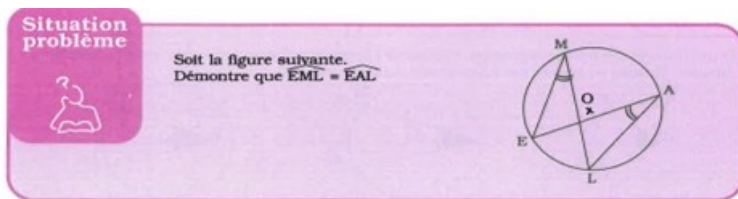
D'ailleurs, ce chapitre peut-être lié à, plusieurs thèmes de convergence tels que : le Développement durable ; Météorologie et climatologie ; Santé ; Sécurité ;... et au TICE (Technologie de l'information et de la communication pour l'Éducation) : construire avec Geogebra ; ...

PLAN DU COURS: (Voir cours)

Activité de vérification des prérequis : (Cahier d'exercice)

Les angles considérés dans les figures ci-dessous ont pour sommet un point appelé M. Parmi ces angles, quels sont ceux qui sont des angles au centre ?





Déroulement de la leçon:

I°) Présentation et définitions :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

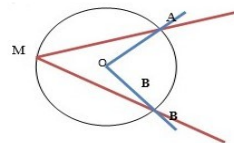
- connaître le vocabulaire : angle au centre, angle inscrit, arc intercepté ;
- être capable de reconnaître les configurations dans les différents cas de l'angle au centre avec l'angle inscrit et l'arc intercepté.

1) Activité :

Trace un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon $r=4\text{cm}$. Marque un point M sur le cercle $(\mathcal{C})$.

- Trace deux demi-droites d'origine M qui coupe le cercle en A et B .
- Trace deux demi-droites d'origine O passant respectivement par A et B .
- Colore en rouge l'arc $\widehat{AB}$.

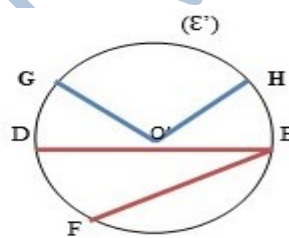
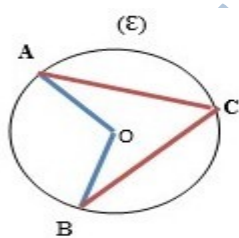
Solution :



2) Définitions :

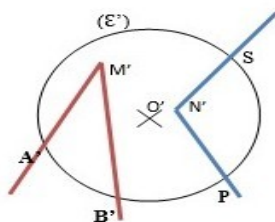
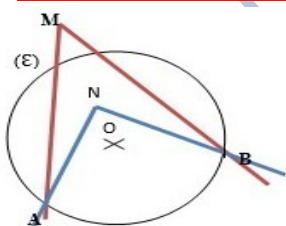
- ❖ On appelle **angle inscrit** dans un cercle, un angle qui a pour sommet un point du cercle et dont les côtés coupent ce cercle en deux points distincts.
- ❖ Un angle inscrit intercepte dans un cercle l'arc ne contenant pas son sommet.
- ❖ **L'angle au centre** est un angle dont le sommet est le centre du cercle.

Exemple :



- ✓ L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre interceptant l'arc $\widehat{AB}$.
- ✓ L'angle $\widehat{ACB}$ est un angle inscrit interceptant l'arc $\widehat{AB}$.
- ✓ L'angle $\widehat{DEF}$ est un angle inscrit interceptant l'arc $\widehat{DF}$.
- ✓ L'angle $\widehat{GO'H}$ est un angle au centre interceptant l'arc $\widehat{GH}$.

Contre-exemple :

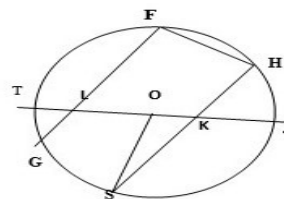


- ✓ Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{A'M'B'}$ ne sont des angles inscrits.
- ✓ Les angles $\widehat{AN'B}$ et $\widehat{PN'S}$ ne sont pas des angles au centre.

3) Exercice d'application :

Pour la figure suivante, donne :

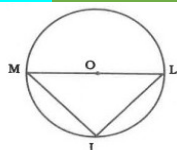
- Les angles inscrits et leurs arcs.
- Les angles au centre et leurs arcs.

**II°) Angle inscrit et angle au centre associé :****Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de comparer un angle inscrit et un angle au centre interceptant le même arc.

Le professeur explique en montrant un angle inscrit et un angle au centre qui interceptent le même arc (il peut utiliser les mesures en degré des angles pour montrer que la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit)

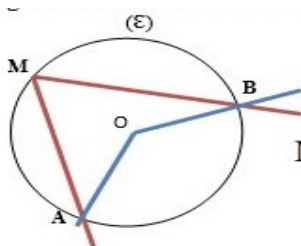
On étudiera d'abord le cas où l'un des côtés de l'angle inscrit est un diamètre Comme cette figure (en comparant les mesures des angles MIL et MOL).

**1) Théorème :**

Tout **angle inscrit** dans un cercle est la moitié de **l'angle au centre** interceptant le même arc. Autrement dit, un angle au centre est le double de tout angle inscrit interceptant le même arc.

NB : L'angle inscrit et l'angle au centre interceptant le même arc sont dits associés.

Exemple :



$$\text{Mes } \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{AOB} \text{ ou } \widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$$

2) Exercice d'application :

On considère dans un cercle, un angle inscrit et un angle au centre qui interceptent le même arc. Dans chaque cas, indique la réponse exacte.

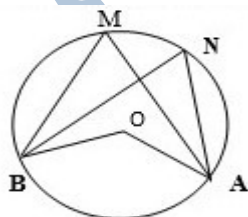
- Si l'angle au centre mesure 34° , alors angle inscrit mesure :
 - 34°
 - 17°
 - 68°
- Si l'angle inscrit mesure 76° , alors l'angle au centre mesure :
 - 76°
 - 38°
 - 152°

III°) Angles inscrits interceptant le même arc :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser les propriétés des angles inscrits interceptant le même arc pour justifier une égalité d'angles et déterminer la mesure d'un angle.

1) Activité :

On considère deux angles aigus $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ inscrits sur un même cercle.

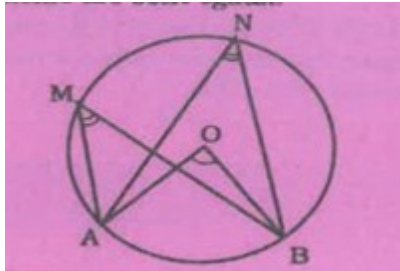


- a) Compare la mesure de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ à celle de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ puis celle de l'angle inscrit $\widehat{ANB}$ avec celle de l'angle au centre $\widehat{AOB}$.
- b) Quelle relation peux-tu alors écrire entre les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$

2) Théorème :

Deux angles inscrits d'un même cercle interceptant le même arc sont égaux.

Exemple :

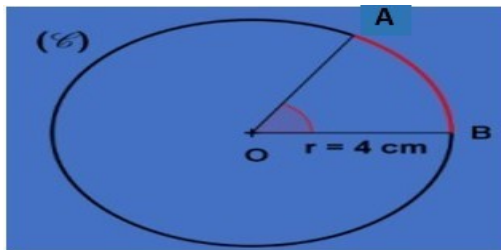


L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le petit arc $\widehat{AB}$

L'angle inscrit $\widehat{ANB}$ intercepte le même petit arc $\widehat{AB}$

Donc on a : $\text{mes } \widehat{AMB} = \text{mes } \widehat{ANB}$

3) Longueur d'un arc de cercle :



La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.

Autrement dit, si A et B sont deux points d'un cercle de centre O et

de rayon r, alors la longueur l de l'arc $\widehat{AB}$ est $l = \frac{\pi \alpha}{180^\circ} \times r$ avec $\alpha =$

$\text{mes } \widehat{AOB}$ en degrés ou bien $l = r \times \alpha$ avec $\alpha = \text{mes } \widehat{AOB}$ en

radians. $180^\circ = \pi$ radian

Exemple : Si $\alpha = 45^\circ$ et $r = 4$ cm

On sait que $180^\circ \rightarrow r \cdot \pi$

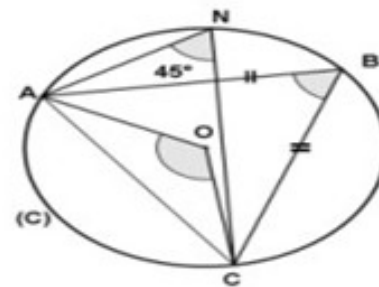
$45^\circ \rightarrow l$

D'où $l = 4 \frac{45^\circ \times \pi}{180^\circ} = 4 \frac{\pi}{4} = \pi \approx 3,14$

4) Exercice d'application :

Sur la figure ci-contre :

- $\widehat{ANC} = 45^\circ$
- Le triangle ABC est isocèle en B.



- a) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$
- b) Trouve les mesures des autres angles du triangle ABC

FIN !!!

IA: Saint-Louis IEF: Podor CEM: Ndiourba PROF: M. NDIAYE	 Chapitre 4 : VECTEURS:	DATE : CLASSE : 3^e DURÉE : 8H EFFECTIF :
---	---	--

Compétences : Utiliser les notions relatives aux vecteurs, aux transformations du plan et au repérage dans le plan pour résoudre des problèmes de géométrie et des problèmes liés à la vie (pavage, dynamique, démonstration,...)

OBJECTIF GÉNÉRAL: Au terme de ce chapitre, l'élève devra maîtriser l'utilisation du calcul vectoriel pour résoudre des problèmes.

Objectif spécifiques : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- ✓ Construire le vecteur somme de deux vecteurs donnés.
- ✓ Restituer la relation de Chasles. Utiliser la relation de Chasles.
- ✓ Construire le vecteur produit d'un vecteur par un réel donné.
- ✓ Restituer les propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel.
- ✓ Utiliser les propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel.
- ✓ Utiliser une égalité vectorielle pour démontrer : la colinéarité de vecteurs ; le parallélisme de droites ; l'alignement de points.

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogique:

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3^{ème}; CIAM 3^{ème}
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3^{ème}, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3^{ème}
- ◆ SENEMATH 3^{ème}

Matériel et supports didactiques :

- Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis : Notion de vecteur ; translation ; droites des milieux ; segment et milieu ; parallèle des milieux ; Axiome d'Euclide : par un point du plan, il passe une et seule droite parallèle à une droite donnée ; propriété de Thalès.

Commentaires: On fera remarquer que le vecteur $\vec{W} = \vec{AC}$ ne dépend pas du point A choisi.

On entraînera les élèves à construire des sommes de vecteurs à partir d'exercices variés.

On s'assurera d'abord que les compétences de quatrième concernant le chapitre «Transformations et vecteurs» sont acquises.

En troisième, on introduit les opérations (somme de deux vecteurs, multiplication par un réel) pour doter les élèves de l'outil vectoriel qui leur donnera d'autres méthodes de démonstration.

L'acquisition par l'élève des compétences exigibles en fin de collège sur ce chapitre est indispensable pour une bonne réussite dans les classes scientifiques de lycée, non seulement en mathématiques mais aussi en physique.

Introduction:

La notion de vecteur est le fruit d'une longue histoire, commencé voici plus de deux mille ans. Deux familles d'idées, d'abord distinctes, sont à l'origine de la formalisation. L'une d'elle est la géométrie, traitant de longueurs, d'angles et de mesures de surfaces et de volumes. L'autre correspond à l'algèbre, qui traite des nombres, de l'addition ou la multiplication et plus généralement d'ensembles munis d'opérations. Un vieux problème d'algèbre nous vient par exemple des Egyptiens et s'explique de la manière suivante : « On doit diviser 100 miches de pain entre 10 hommes comprenant un navigateur, un contremaître et un gardien, tous trois recevant double part. Que faut-il donner à chacun ? » Ces deux familles d'idées sont développées indépendamment, pour finir par converger vers la notion de vecteur.

Le mot « vecteur » vient du latin « vehere » (conduire, transporter). La notion de vecteur est le fruit d'une longue histoire, commencée voici plus de deux mille ans.

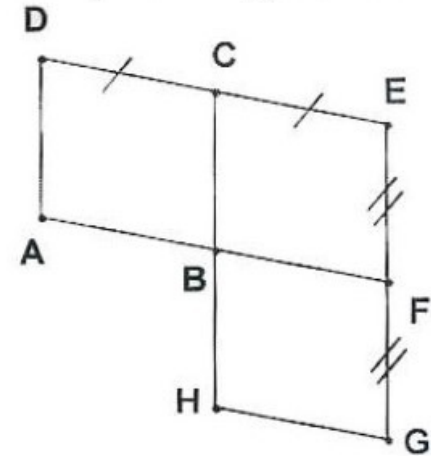
Du point de vue programme, l'étude des vecteurs n'est pas nouvelle, commencée en classe de 4^e, elle est poursuivie en 3^e, avec l'addition vectorielle et la multiplication d'un vecteur par un réel. Ainsi, la maîtrise de ces deux opérations est nécessaire pour la résolution de certains problèmes.

PLAN DU COURS: (Voir cours)**Activité de vérification des prérequis :** (Cahier d'exercice)**Activité 1** Objectif : faire le bilan des prérequis sur les vecteurs et les parallélogrammes.**Énoncé :** Sur la figure ci-contre, ABCD, BFEC et HGFB sont des parallélogrammes tels que C et F soient les milieux respectifs de [DE] et [EG].1. Justifie que : $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{CE} = \vec{BF} = \vec{HG}$. Déduis en la nature du quadrilatère BDCF.2. Justifie que : $\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{FE} = \vec{GF} = \vec{HB}$. Déduis en la nature du quadrilatère ACFH.

3. Parmi les vecteurs suivants :

 $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CE}, \vec{EF}, \vec{FB}, \vec{BH}, \vec{HF}, \vec{FG}, \vec{GB}, \vec{GD}, \vec{CF}, \vec{HC}$, quels sont ceux qui sont :

- | | |
|------------------------|-------------------|
| a. de même direction ? | b. de même sens ? |
| c. de même longueur ? | d. égaux ? |

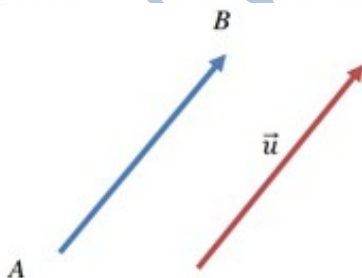
**Activité 2** Objectif : faire le bilan des prérequis sur les vecteurs et les translations.

On donne trois points M, A, T non alignés.

- Quelle est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{MA}$?
- Quelle est l'image de T par la translation de vecteur $\vec{TM}$?
- Quel est le point dont l'image est A par la translation de vecteur $\vec{TA}$?
- Quel est le vecteur de la translation qui transforme M en T ?

Situation problème

- Dessine un triangle ABC.
- Construis le point E tels que $\vec{CE} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

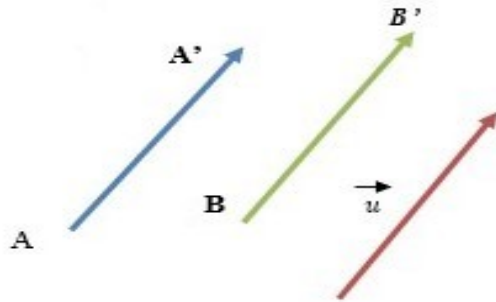
Déroulement de la leçon :**I°) Rappels : Translations et Vecteurs :****1) Définitions et notations :**On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application transformant A en B, telle que $\vec{AB} = \vec{u}$ 

Un vecteur est un objet mathématique, associé à une translation, comportant trois caractéristiques :

- Son sens (de A vers B).
- Sa direction (celle de la droite (AB)).
- Sa longueur (celle du segment [AB], c'est-à-dire AB).

On le note $\overrightarrow{AB}$

Exemple :



La translation qui transforme A en A', transforme B en B'.

On dit que les couples de points (A ;A') ;(B ;B') sont des représentants d'un même vecteur $\vec{u}$.

On note $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

A est appelé origine et A' extrémité du vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

On dit que B a pour image B' dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ ou de vecteur $\vec{u}$.

On note $t_{\vec{u}} : B \rightarrow B'$ ou $t_{\vec{u}}(B) = B'$.

2) Vecteurs égaux :

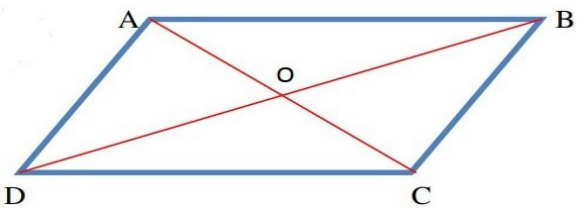
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ signifie que :

- (AA') // (BB') ou les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ ont la même direction.
- Les demi-droites [AA') et [BB') sont de même sens.
- $AA' = BB'$

3) Vecteurs et parallélogrammes :

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors on peut affirmer que :

- ✓ ABCD est un parallélogramme.
- ✓ Les segments [AC] et [DB] ont le même milieu.
- ✓ L'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est C.



Réciproquement : Si ABCD est un parallélogramme, alors on a les quatre égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} , \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} , \quad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} , \quad \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} .$$

4) Caractérisation du milieu d'un segment :

- ✓ Si le point M est le milieu du segment [AB], alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.
- ✓ Réciproquement : Si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, alors M est le milieu du segment [AB].



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= \vec{0} \end{aligned}$$

II°) Addition Vectorielle :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe je dois connaître et être capable d'utiliser la relation de Chasles pour construire le vecteur somme de deux vecteurs donnés.

1) Activité :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs distincts et A un point du plan.

1) Construis les points B et C tel que $B = t_{\vec{u}}(A)$ et $C = t_{\vec{v}}(B)$.

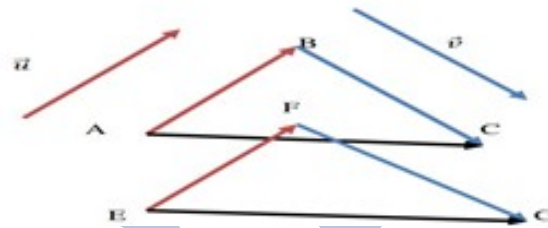
2) Sur la même figure, place un point E différents de A. Construis les points F et G tel que $t_{\vec{u}}(E) = F$ et $t_{\vec{v}}(F) = G$.

3) Compare les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{EG}$

Solution :

$\vec{v} = \vec{BC}$ signifie que $t_{\vec{v}}(B) = C$

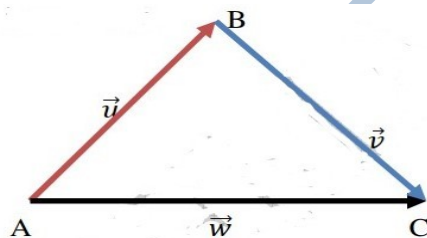
$\vec{AC}$ et $\vec{EG}$ ont même sens, même longueur et même direction

**2) Définition :**

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan. Soit B est l'image de A obtenue par la translation de vecteur $\vec{u}$ et C l'image de B obtenue par la translation de vecteur $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{w} = \vec{AC}$ est le vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$



$$\vec{u} = \vec{AB} \text{ et } \vec{v} = \vec{BC}$$

$$\vec{w} = \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{u} + \vec{v}$$

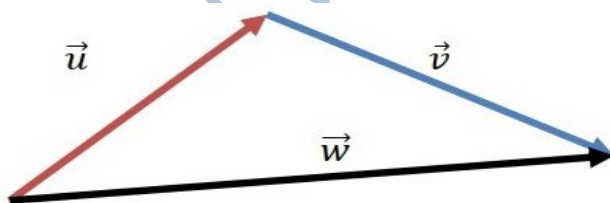
3) Relation de Chasles :

Soient trois points du plan A, B et C. On a : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Cette égalité traduit la relation de Chasles.

4) Méthode :

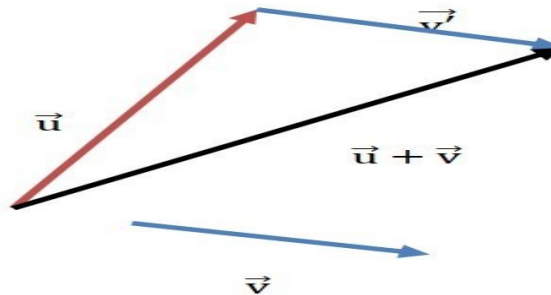
✓ Pour construire le vecteur somme de deux vecteurs dont l'origine de l'un coïncide avec l'extrémité de l'autre, on joint le bout du premier vecteur à l'extrémité du deuxième vecteur.

Exemple :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$$

- ❖ Pour construire le vecteur somme de deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
- ✓ On trace à partir de l'extrémité de $\vec{u}$ un vecteur $\vec{v}'$ qui est égal à $\vec{v}$.
 - ✓ On applique $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$

Exemple :



5) Propriété de l'addition vectorielle :

Compétences exigibles
À la fin de ce paragraphe, je dois connaître les propriétés de l'addition vectorielle et être capable de les utiliser.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs :

a) Commutativité :

L'addition des vecteurs est une opération commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

b) Associativité :

L'addition des vecteurs est une opération associative : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

c) Vecteur nul :

Par définition, le vecteur nul est le vecteur de longueur nulle, qui n'a ni direction ni sens. Il est noté $\vec{0}$ (On lit « vecteur nul »).

Pour tous les points M du plan, on a : $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

La translation de vecteur nul ne déplace aucun point du plan. On a toujours : $t_{\vec{0}}(M) = M$

d) Vecteurs opposés :

Si la somme de deux vecteurs distincts est nulle, alors ces vecteurs sont opposés.

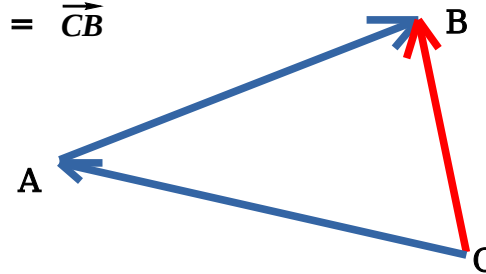
Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Remarques:

Soient A, B, C trois points quelconques du plan. On a avec la relation de Chasles :

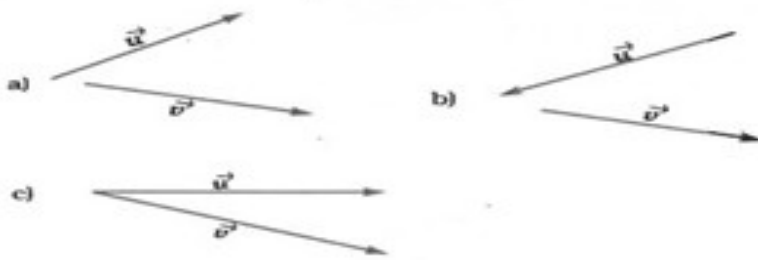
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$



6) Exercice d'application :

- 1) Reproduis les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis construis le vecteur somme dans chacun des cas suivants :



2) En utilisant la relation de Chasles, écris le plus simplement possible :

$$W = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$$

$$X = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK}$$

$$Y = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EA}$$

$$Z = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}$$

III°) Multiplication d'un vecteur par un nombre réel :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable de construire le vecteur produit d'un vecteur par un réel.

1) Définitions :

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. Le vecteur $k\vec{u}$ est appelé vecteur produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k .

- ✓ Si $k=0$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.
- ✓ Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.
- ✓ Si $k>0$, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont le même sens.
- ✓ Si $k<0$, alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont des sens contraires.

2) Propriétés :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable d'utiliser les propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs et k et k' deux réels :

- ✓ $\vec{u} = 1 \cdot \vec{u}$
- ✓ $k(k' \vec{u}) = (k \times k') \vec{u}$.
- ✓ $(k + k') \vec{u} = k \vec{u} + k' \vec{u}$.
- ✓ $k(\vec{u} + \vec{v}) = k \vec{u} + k \vec{v}$.

Exemple :

Soit à exprimer plus simplement en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, chacun des vecteurs suivants :

$$\vec{w}_1 = 2(\vec{u} + \vec{v}) - 2(\vec{u} - \vec{v}) = 4\vec{v}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{u} + 2(\vec{v} - \vec{u}) - 3(\vec{u} - \vec{v}) = -4\vec{u} + 5\vec{v}$$

$$\vec{w}_3 = 3(\vec{u} - 2\vec{v}) + 5(\vec{v} - \vec{u}) = -2\vec{u} - \vec{v}$$

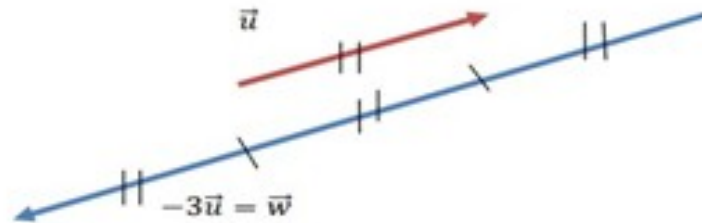
$$\vec{w}_4 = 3(-\vec{u} + \vec{v}) - 2(2\vec{u} + \vec{v}) + 3\vec{u} + \vec{v} = -4\vec{u} + 2\vec{v}$$

3) Méthode :

Pour construire le vecteur produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k , on procède comme suit :

- Construire le vecteur $\vec{u}$.
- Tracer un segment de support ayant la même direction que celui de $\vec{u}$ et de longueur égale à $|k|$ fois celle de $\vec{u}$.
- Orienter le segment de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et dans le sens contraire si $k < 0$.

Exemple : Soit à construire un vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = -3\vec{u}$.

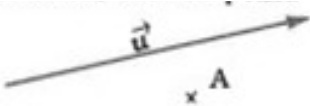
**IV°) Vecteurs colinéaires :****Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître la définition de deux vecteurs colinéaires et être capable d'utiliser une égalité vectorielle pour démontrer :

- la colinéarité de vecteurs ;
- le parallélisme de droites ;
- l'alignement de points.

1) Activité :

Soit $\vec{u}$ un vecteur et A un point.



1) Reproduis la figure puis construis les points B, C et E tels que : $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = 2\vec{u}$ et $\vec{AE} = -\vec{u}$

2) Cite les vecteurs :

- De même direction et de même sens que $\vec{u}$.
- De même direction mais de sens contraire ce celui de $\vec{u}$.

2) Définition :

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'ils sont tous deux de même direction ou si l'un d'eux est nul.

3) Propriétés :

Soit k un réel, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs :

- ✓ Si $\vec{u} = k\vec{v}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- ✓ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et non nuls, alors $\vec{u} = k\vec{v}$ (avec $k \neq 0$)

Remarque : Le vecteur nul n'a pas de direction, donc il est colinéaire à tout vecteur.

4) Méthode :

- ✓ Pour démontrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on exprime l'un d'eux en fonction de l'autre. Autrement trouver un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- ✓ Pour démontrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, on peut démontrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.
- ✓ Pour démontrer que les points A, B et C sont alignés on peut démontrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

Exemples : Montre que $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{z}$.

$$\vec{u} = -\vec{AB} \quad \text{et} \quad \vec{v} = 3\vec{AB}$$

$$\vec{w} = \frac{2}{3}\vec{MN} \quad \text{et} \quad \vec{z} = \frac{7}{2}\vec{MN}$$

$$3\vec{AB} = \vec{v} \Rightarrow \vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{v} \text{ donc } \vec{u} = -\frac{1}{3}\vec{v} \text{ d'où } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

$$2\vec{MN} = 3\vec{w} \Rightarrow \vec{MN} = \frac{3}{2}\vec{w} \text{ donc } \vec{z} = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\vec{w} = \frac{21}{4}\vec{w} \text{ d'où } \vec{w} \text{ et } \vec{z} \text{ sont colinéaires}$$

5) Exercices d'application :**Exercice 1 :**

Démontre que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires dans chacun des cas suivants :

1^{er} cas : $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = 2\vec{AB}$

2^e cas : $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\vec{v} = 4\vec{AB}$

3^e cas : $\vec{u} = \frac{3}{4}\vec{AB}$ et $\vec{v} = \frac{7}{3}\vec{AB}$

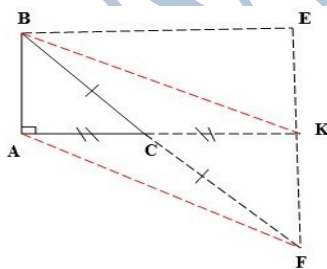
Exercice 2 :

Soit ABC un triangle rectangle en A.

E, K et F sont trois tels que : $\vec{AE} = 2\vec{AC} + \vec{AB}$, $2\vec{AC} = \vec{AK}$ et $2\vec{BC} = \vec{BF}$

- Construis le triangle ABC puis place les points E, K et F.
- Trouve une relation vectorielle entre les vecteurs $\vec{EK}$ et $\vec{KF}$.
- Déduis-en que les points E, K et F sont alignés.

Solution :



$$\vec{AE} = 2\vec{AC} + \vec{AB};$$

$$2\vec{BC} = \vec{BF}; \quad 2\vec{AC} = \vec{AK}.$$

$$(1) \vec{BE} = \vec{AK}, \text{ donc } ABEK \text{ parallélogramme} \Rightarrow \vec{BA} = \vec{EK}$$

$$(2) ABKF \text{ parallélogramme car ses diagonales se coupent en leurs milieux, donc } \vec{BA} = \vec{KF}$$

$$(1) \text{ et } (2) \vec{EK} = \vec{KF}, \text{ d'où E, K et F sont alignés}$$

FIN !!!

IA: Saint-Louis IEF: Podor CEM: Ndiourba PROF: M. NDIAYE	Chapitre 5 : TRANSFORMATIONS DU PLAN :	DATE : CLASSE : 3^e DURÉE : 8H EFFECTIF :
---	---	--

Compétences : Utiliser les notions relatives aux vecteurs, aux transformations du plan et au repérage dans le plan pour résoudre des problèmes de géométrie et des problèmes liés à la vie (pavage, dynamique, démonstration,...)

OBJECTIF GÉNÉRAL : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de maîtriser la construction de l'image d'une figure simple par une transformation.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- ✎ Définir une isométrie
- ✎ Reconnaître la transformation résultant de deux symétries orthogonales successives.
- ✎ Reconnaître la transformation résultant de deux translations successives.
- ✎ Reconnaître la transformation résultant de deux symétries centrales successives.

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogie:

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3^{ème}; CIAM 3^{ème}
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3^{ème}, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3^{ème}
- ◆ SENEMATH 3^{ème}

Matériel et supports didactiques :

- ▶ Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- ▶ Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis : Symétrie axiale et centrale, rotation, droites parallèles, droites perpendiculaires...

Commentaires: On rappelle aux professeurs qu'une transformation du plan est une bijection du plan dans lui-même alors qu'une isométrie est une transformation qui conserve la distance.

On fera construire l'image de figures simples par ces transformations et on donnera la projection orthogonale comme contre-exemple. On utilisera des dessins pour mettre en évidence les résultats que l'on pourra démontrer.

Il est à noter que les termes « composée » et « composition » ne sont pas utilisés en classe de 3^e.

Introduction: La notion de transformation, étrangère à la géométrie grecque, est en germe dans la création au quattrocento (le quinzième siècle italien) des méthodes de dessin en perspective. Ces méthodes permettaient d'engendrer de façon réglée des formes à partir d'autres : un cercle donnait une ellipse ou une parabole ou ...selon les cas. C'est à partir de ces méthodes que Desargues a élaboré un outil conceptuel qui permet de transporter des propriétés d'une configuration simple (le cercle) à une configuration plus complexe (une conique). Après plusieurs décennies d'abandon, ces méthodes seront remises en usage par G. Monge dans les dessins architecturaux, les coupes des pierres et du bois, la charpenterie, les dessins des machines, vaisseaux...

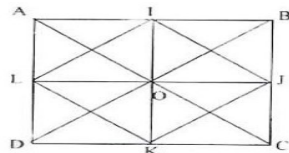
Du point de vue programme, le concept de **TRANSFORMATION DU PLAN** n'est pas nouveau. Il a été abordé au cours des années précédentes sous d'autres vocables : symétrie axiale en 6e ; symétrie centrale en 5e ; translation et rotation en 4e. Ainsi, les symétries de figures donnent avec leurs antécédents de belles formes utilisées souvent en architecture, en tapisserie et dans les arts décoratifs. Ce qui devrait susciter en vous **une faim de l'esprit**, une **saine curiosité** devant aboutir à de réelles satisfactions.

PLAN DU COURS: (Voir cours)

Activité de vérification des prérequis : (Cahier d'exercice)

Exercice 1:

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré. I, J, K et L sont les milieux des côtés.



Comment par une transformation passe-t-on :

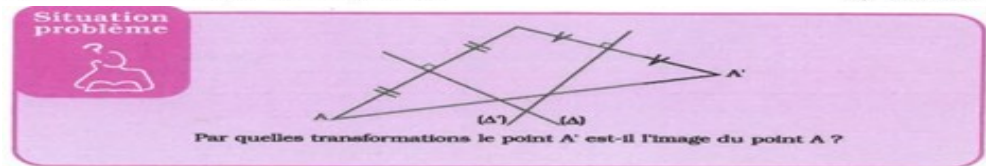
- a) du triangle ALI au triangle BJI ?
- b) du triangle ALI au triangle CJK ?
- c) du triangle ALI au triangle LDO ?
- d) du triangle IOJ au triangle LOK ?
- e) du triangle ALO au triangle IOB ?
- f) du triangle ALO au triangle DOK ?

Exercice 2 :

Soit un parallélogramme ABCD.
Soient t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et
 t' celle de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

- 1) Justifie que C est l'image de D par t .
- 2) Soit E l'image de C par t' .

- a) Précise l'image de D par t suivie de t' .
- b) Montre que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$.
- c) Déduis-en l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
- d) Quelle conclusion peux-tu en tirer ?

**Déroulement de la leçon :****I°) Exemples de transformations :****Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître une transformation, de connaître et d'utiliser ses propriétés pour résoudre des problèmes.

Commentaire : • On rappelle aux professeurs qu'une transformation du plan est une bijection du plan dans lui-même alors qu'une isométrie est une transformation qui conserve la distance.

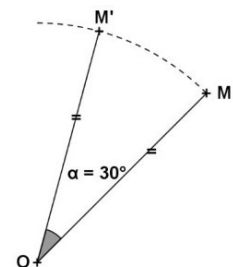
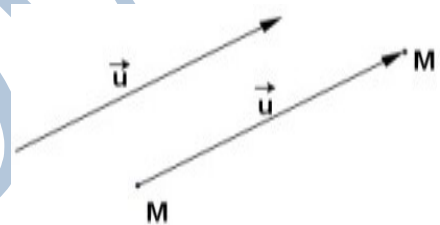
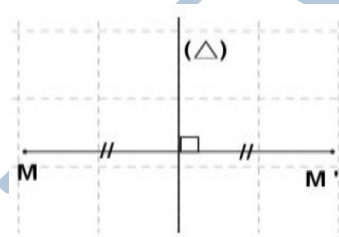
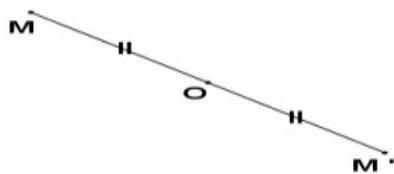
• On fera construire l'image de figures simples par ces transformations et on donnera la projection orthogonale comme contre-exemple.

Activité du professeur : Le professeur explique la notion de transformation en représentant une translation, une symétrie centrale, une symétrie axiale (orthogonale) et une rotation.

Exemple : Avec la translation, la symétrie centrale, la symétrie orthogonale (axiale) et la rotation :

- Tout point du plan admet une image et une seule.
- Les images de deux points distincts sont toujours deux points distincts.

Ce sont des **transformations** (application du plan dans lui-même).



Symétrie centrale :

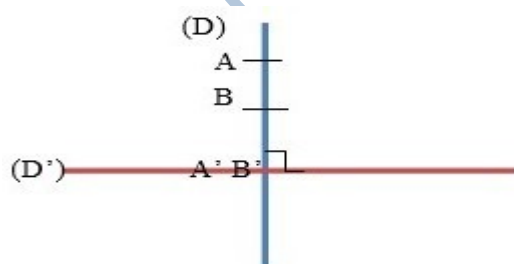
Symétrie axiale :

Translation :

Rotation :

Contre-exemple : la projection orthogonale n'est pas une transformation car elle ne vérifie pas la deuxième affirmation.

Pour cela il suffit de considérer deux droites (D) et (D') perpendiculaires, prenez deux points A et B de (D). Soient A' et B' les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur (D'). On constate A' et B' sont confondus, alors qu'une transformation, l'image de deux points distincts sont toujours deux points distincts.



Remarque :

Une isométrie est une transformation qui conserve la distance :

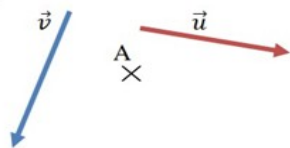
La translation, la symétrie centrale, la symétrie axiale (orthogonale) et la rotation sont des isométries.

II°) Étude de deux translations successives :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître et d'utiliser la transformation résultant de l'application de deux translations successives pour résoudre des problèmes.

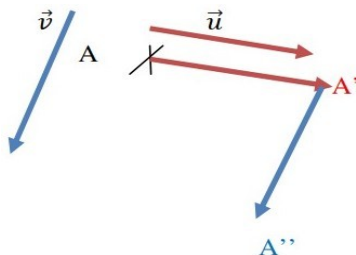
1) Activité :

a) Reproduis la figure ci-dessous où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs distincts et A, un point du plan.



b) Construis le point A' image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, puis le point A'' image de A' par la translation de vecteur $\vec{v}$.

c) Recopie et complète : $t_{\vec{u}}(A) = A'$ signifie $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$; $t_{\vec{v}}(A') = A''$ signifie $\overrightarrow{A'A''} = \vec{v}$
 $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = \vec{u} + \vec{v}$; $\overrightarrow{AA''} = \vec{u} + \vec{v}$ signifie $A'' = t_{\vec{u} + \vec{v}}(A)$

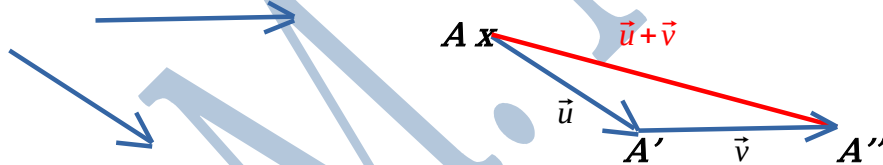
Solution :

Recopie et complète : $t_{\vec{u}}(A) = A'$ signifie $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$; $t_{\vec{v}}(A') = A''$ signifie $\overrightarrow{A'A''} = \vec{v}$

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = \vec{u} + \vec{v}; \quad \overrightarrow{AA''} = \vec{u} + \vec{v} \text{ signifie } A'' = t_{\vec{u} + \vec{v}}(A)$$

2) Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs distincts. Faire la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$ revient à faire la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Exemple :**3) Exercice d'application :**

a) Marque trois points A, B et C non alignés et construis deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de directions différentes.

b) Construis les points A'', B'' et C'' images respectives des points A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$.

c) Compare le triangle A''B''C'' au triangle ABC.

III°) Étude de deux symétries centrales successives :

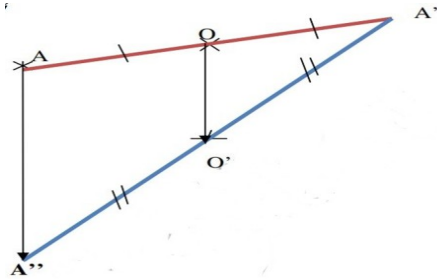
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître la transformation résultant de l'application de deux symétries centrales successives et de l'utiliser pour résoudre des problèmes.

1) Activité :

- Construis trois points non alignés A, O et O'.
- Construis le point A' image de A par la symétrie centrale de centre O.
- Construis le point A'' image de A' par la symétrie centrale de centre O'.
- Recopie et complète : $\overrightarrow{AA''} = \dots + \dots$
- Montre que $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OO'}$

solution :



Recopions et complétons $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''}$

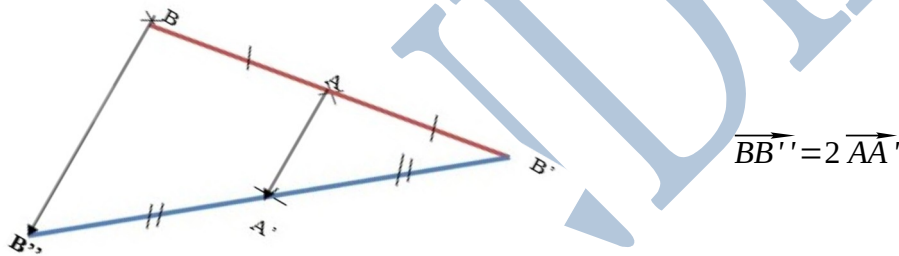
Montrons que $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OO'}$.

$$\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OA'} + 2\overrightarrow{A'O'}, \text{ donc } \overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OO'}$$

2) Propriété :

Soient O et O' deux points distincts du plan. Faire une symétrie centrale de centre O suivie d'une symétrie centrale de centre O' revient à faire la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$.

Exemple :



$$\overrightarrow{BB''} = 2\overrightarrow{AA'}$$

3) Exercice d'application :

Soit ABC un triangle quelconque.

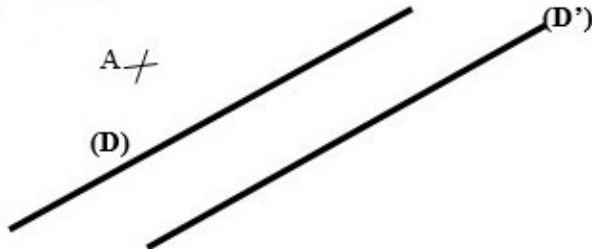
- Construis le point A' image du point A par la symétrie centrale de centre B.
- Construis le point A'' image du point A' par la symétrie de centre C.
- Justifie que $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{BC}$.

IV°) Étude de deux symétries orthogonales successives :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître la transformation résultant de deux symétries orthogonales successives et de l'utiliser pour résoudre des problèmes.

1) Activité :

a) Reproduit la figure ci-dessous où (D) et (D') sont deux droites parallèles et A, un point du plan.

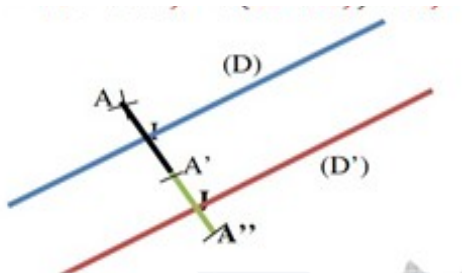


b) Construis le point A' symétrique de A par la symétrie orthogonale d'axe (D) et le point A'' symétrique de A' par la symétrie orthogonale d'axe (D').

c) Construis les points I et J tels que (I) = (D) ∩ (AA') ; (J) = (D') ∩ (A'A'').

d) Recopie et complète en remplaçant les pointillés par la lettre qui convient :

$$\overrightarrow{AA'} = 2 \dots \overrightarrow{AI} \quad ; \quad \overrightarrow{AA''} = 2 \dots \overrightarrow{A'I} + 2 \overrightarrow{A'J} \dots = 2(\dots \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{A'J} \dots) = 2 \dots$$

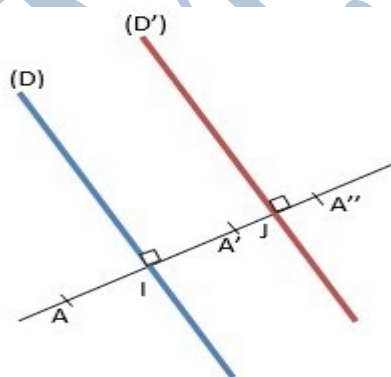
Solution :

Recopions et complétons en remplaçant les pointillés par la lettre qui convient :

$$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AI} ; \quad \overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{A'J} = 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{A'J}) = 2\overrightarrow{IJ}$$

2) Propriété :

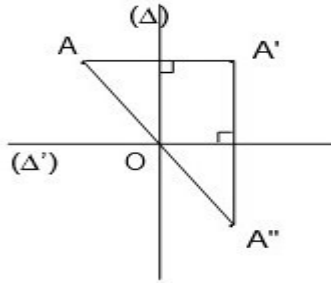
★ Soit (D) et (D') deux droites **parallèles**, faire la symétrie orthogonale d'axe (D) suivie d'une symétrie orthogonale d'axe (D'), revient à faire une **translation** de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$. IJ étant la distance des deux droites (D) et (D').

Exemple :

A'' est l'image de A par la translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$.

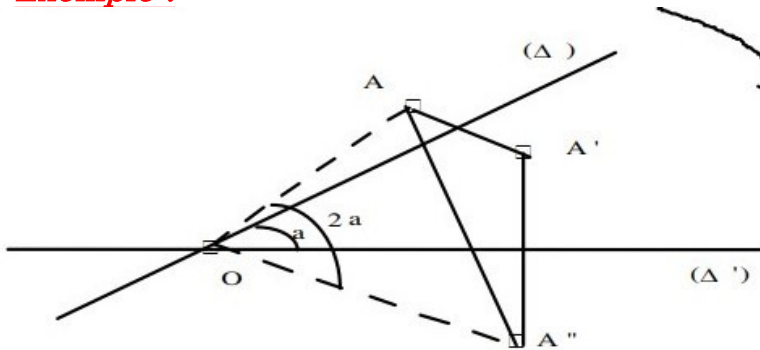
★ Soit (Δ) et (Δ') deux droites **perpendiculaires** en un point O , faire la symétrie orthogonale d'axe (Δ) suivie de la symétrie orthogonale d'axe (Δ') , revient à faire la **symétrie centrale** de centre O .

Exemple :



★ Soit (Δ) et (Δ') deux droites **sécantes** en O et formant un angle **aigu** α , faire la symétrie orthogonale d'axe (Δ) suivie de la symétrie orthogonale d'axe (Δ') , revient à faire la **rotation** de centre O et d'angle de mesure 2α .

Exemple :



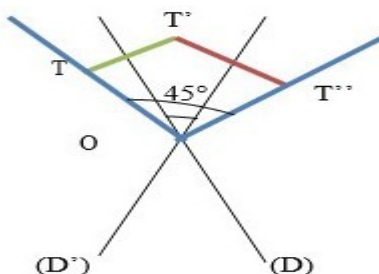
Remarque :

La symétrie où (D) est perpendiculaire à (D') est un cas particulier de la symétrie où (D) et (D') sont sécantes.

3) Exercice d'application :

- ✓ Trace deux droites (d) et (d') sécantes en O et formant un angle aigu de 45° et place un point T dans le plan.
- ✓ Construis le point T' image de T par la symétrie d'axe (d) puis construis le point T'' image de T' par la symétrie d'axe (d') . Que représente T'' pour T ?

Solution :



T'' est l'image de T par la rotation de centre O et d'angle 90° ($2 \times 45^\circ$)

FIN !!!

IA: Saint-Louis IEF: Podor CEM: Ndiourba PROF: M. NDIAYE	Chapitre 6 : REPÉRAGE DANS LE PLAN :	DATE : CLASSE : 3^e DURÉE : 12H EFFECTIF :
---	---	---

Compétences : Utiliser les notions relatives aux vecteurs, aux transformations du plan et au repérage dans le plan pour résoudre des problèmes de géométrie et des problèmes liés à la vie (pavage, dynamique, démonstration,...)

OBJECTIF GÉNÉRAL : au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de **maîtriser** la résolution des problèmes faisant intervenir les propriétés du repérage dans le plan.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES : au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- ✓ Calculer les coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormal.
- ✓ Calculer les coordonnées du vecteur somme de deux vecteurs.
- ✓ Reconnaître, à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormal, le vecteur nul, deux vecteurs égaux, deux vecteurs opposés.
- ✓ Calculer les coordonnées du vecteur produit d'un vecteur par un réel.
- ✓ Montrer à l'aide de leurs coordonnées que deux vecteurs sont :
 - colinéaires ;
 - orthogonaux.
- ✓ Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées.
- ✓ Donner une équation générale d'une droite connaissant les coordonnées de deux de ces points.
- ✓ Reconnaître l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses, à l'axe des ordonnées.
- ✓ Déterminer l'équation réduite d'une droite
- ✓ Passer de l'équation réduite à l'équation générale et inversement.
- ✓ Donner une équation générale d'une droite connaissant les coordonnées d'un point et son coefficient directeur.
- ✓ Représenter une droite dans un repère orthonormal à partir :
 - de deux de ses points,
 - d'un point et de son coefficient directeur,
 - d'un point et d'un vecteur directeur ou d'une équation.
- ✓ Donner une équation générale d'une droite connaissant : - les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur ; - les coordonnées d'un point et le coefficient directeur de la droite.
- ✓ Déterminer la position de deux droites parallèles, perpendiculaires à partir de : - leurs équations réduites, - leurs coefficients directeurs, - leurs vecteurs directeurs.

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogique:

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3^{ème}; CIAM 3^{ème}
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3^{ème}, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3^{ème}
- ◆ SENEMATH 3^{ème}

Matériel et supports didactiques :

- ▶ Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- ▶ Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis : Repérage sur une droite graduée ; sur un repère ; Notion de vecteur ; translation ; droites des milieux ; segment et milieu ; parallèle des milieux ; **Axiome d'Euclide** : par un point du plan, il passe une et seule droite parallèle à une droite donnée ; calcul de distance.

Commentaires : Ce chapitre est une introduction à la géométrie analytique. C'est à dire à la géométrie abordée sous l'angle des coordonnées: les points, les vecteurs et les droites sont « remplacés » par des couples de nombres (les coordonnées) ou par des équations (relations entre coordonnées), les propriétés purement géométriques (parallélisme, orthogonalité, distances,...) par des relations entre les coordonnées et des équations.

Les méthodes analytiques constituent un outil puissant pour la résolution des problèmes de géométrie. Cependant pour que l'outil analytique participe à la formation des élèves en géométrie, il faudra que les calculs qui s'y réfèrent ne soient pas faits pour eux-mêmes mais prennent du sens dans la traduction géométrique des situations qu'ils traitent.

L'option a été prise ici d'aborder les équations de droites parallèles aux axes avant les équations générales pour marquer la particularité de la droite d'équation $y = ax + b$.

On travaillera dans un repère orthonormal.

On rappellera qu'un repère orthonormal est un repère qui a ses axes perpendiculaires, la même unité de longueur étant choisie sur ces axes c'est-à-dire $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$ est orthonormal si $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$.

Dans un repère orthonormal si le point M a pour coordonnées x et y alors le vecteur $\vec{OM}$ a pour coordonnées x et y dans le repère $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$.

On traitera les différents cas.

Une droite est déterminée par deux de ses points :

1er cas : ces points ont la même abscisse.

2ème cas : ces points ont la même ordonnée.

3ème cas : l'un d'entre eux est l'origine du repère.

4ème cas : cas général

On veillera à ce que les élèves maîtrisent la construction d'une droite connaissant un point et le coefficient directeur de cette droite, ou un point et un vecteur directeur.

Introduction: Le repérage est le fait de représenter la position d'un point par une série de nombres. Il fait ainsi le lien entre le calcul et la géométrie. Descartes est à l'origine du repère du plan. Une anecdote raconte qu'observant une mouche qui se promenait sur les carreaux d'une fenêtre, il aurait pensé à définir, à l'aide des carreaux, des coordonnées du plan. Il explique ainsi qu'il est possible de traiter les problèmes de géométrie en problèmes numériques. Pour étudier les propriétés d'une courbe, il passe par une équation déterminée par une relation liant ses coordonnées. Celle-ci contient implicitement toutes les propriétés de la courbe.

Dans ce chapitre, il s'agit d'introduire l'aspect numérique de la géométrie appelé **géométrie analytique**. De ce fait, nous tâcherons de traduire les propriétés géométriques par des relations numériques.

Du point de vue historique, cette **géométrie analytique** (ou **géométrie avec coordonnées**) fut introduite par **RENE**

DESCARTES (1596 - 1650). D'ailleurs, **DESCARTES** disait à ce propos que « **la géométrie analytique n'est autre que l'art de résoudre des problèmes de géométrie par le calcul numérique** ». C'est dire donc, qu'il existe une interconnexion entre le calcul numérique et la géométrie pure. Ainsi, l'utilité du repérage dans le plan n'est pas à démontrer car le phénomène de repérage est consubstantiel à l'apparition de l'homme sur terre. A cet effet, le repérage est utilisé en physique (Ex : les déplacements du plan permettent de modéliser les mouvements), en géographie.

Dès lors, j'invite chacun à mettre du sien car comme le souligné avec brio **GASPARD MONGE**, la géométrie requiert de la rigueur et de la précision dans un esprit cartésien, qui présente des qualités intellectuelles, claires, logique et méthodiques.

PLAN DU COURS: (Voir cours)

Situation problème

Le plan étant muni d'un repère orthonormal (O, I, J) , place les points $A(2; 3)$ et $B(4; 2)$ et exprime le vecteur $\vec{AB}$ en fonction des vecteurs $\vec{OI}$ et $\vec{OJ}$.

Déroulement de la leçon:

I°) Coordonnées d'un vecteur :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe je dois être capable de calculer les coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormal.

Je dois être capable de reconnaître à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormal :

- deux vecteurs égaux ;
- deux vecteurs opposés.

Je dois être capable de :

- calculer les coordonnées du vecteur somme de deux vecteurs ;
- calculer les coordonnées du vecteur produit d'un vecteur par un réel ;
- reconnaître le vecteur nul.

Je dois être capable de reconnaître deux vecteurs colinéaires à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormal.

Je dois être capable de reconnaître deux vecteurs orthogonaux à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormal.

1) Activité :

- a) Dans un repère orthonormal (O, I, J), place les points A(2 ;1), B(3 ;4).
 b) Place les points E et F tels que $\vec{OE}=2\vec{OI}+3\vec{OJ}$; $\vec{OF}=-3\vec{OI}-4\vec{OJ}$.
 c) Écris $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ en fonction de $\vec{OI}$ et $\vec{OJ}$.
 d) Donne le couple de coordonnées de chacun des points E et F.

2) Définition et Notation :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), le couple de réels $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ est appelé coordonnées ou composantes du vecteur $\vec{AB}$.

$x_B - x_A$ est la première composante (ou première coordonnée) de $\vec{AB}$.

$y_B - y_A$ est la deuxième composante (ou deuxième coordonnée) de $\vec{AB}$.

On note $\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ ou $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemple :

On donne $H\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux points dans un plan muni d'un repère orthonormal. Calcule les coordonnées de $\vec{HL}$

$$\vec{HL}\begin{pmatrix} x_L - x_H \\ y_L - y_H \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{HL}\begin{pmatrix} 5 - (-7) \\ 2 - 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{HL}\begin{pmatrix} 5+7 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{HL}\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3) Coordonnées du milieu du segment :

Le plan est muni du repère orthonormal (O, I, J) si K est le milieu du segment [AB] tel que : A(x_A ; y_A) et

B(x_B ; y_B) alors $K\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$

Exemple :

On donne A(-7;3) et D(5;2) deux points dans un plan muni d'un repère orthonormal. Calcule les coordonnées du point E, milieu de [AD]

$$x_E = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{-7+5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ et } y_E = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ d'où } E(-1 ; 2,5)$$

4) Propriétés :**a) Vecteurs égaux :**

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{u}'(x' ; y')$ dans un repère orthonormal (O, I, J).

$\vec{u} = \vec{u}'$ équivaut à $(x = x' \text{ et } y = y')$.

b) Somme de deux vecteurs :

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{u}'(x' ; y')$ dans un repère orthonormal (O, I, J).

Si $\vec{u} + \vec{u}' = \vec{w}$ alors $\vec{w}$ a pour coordonnées $x + x'$ et $y + y'$ c'est-à-dire $\vec{w}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

Exemple : Soient $\vec{u}(2 ; 1)$ et $\vec{u}'(4 ; 3)$ $\Rightarrow \vec{w} = \vec{u} + \vec{u}' \Rightarrow \vec{w}\begin{pmatrix} 2+4 \\ 1+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{w}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Vecteur nul :

Le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées $(0 ; 0)$.

d) Vecteurs opposés :

Deux vecteurs sont opposés si et seulement si leurs abscisses et leurs ordonnées sont opposées.

Autrement dit, soient $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{u}'(x' ; y')$, $\vec{u} = -\vec{u}'$ si et seulement si $x = -x'$ et $y = -y'$.

Exemple : $\vec{u}$ (2; -1) et $\vec{u}'$ (-2; 1) sont opposés.

e) Produit d'un vecteur par un réel :

Étant donné un vecteur $\vec{u}$ (x; y) et nombre réel k . Les coordonnées de $k\vec{u}$ sont $(kx ; ky)$.

Exemple : $\vec{u}$ (2; 3), donc $4\vec{u}(4 \times 2; 4 \times 3) \Rightarrow 4\vec{u}(8; 12)$

f) Vecteurs colinéaires :

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ (x; y) et $\vec{u}'$ (x'; y'), $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires équivaut à : $xy' - x'y = 0$

Exemple : On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ On a : $2 \times \left(\frac{1}{2}\right) - 1 \times 1 = 1 - 1 = 0$; donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

g) Vecteurs orthogonaux :

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ (x; y) et $\vec{u}'$ (x'; y'), $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux équivaut à : $xx' + yy' = 0$.

Exemple : On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

On a : $2 \times (-1) + 1 \times 2 = -2 + 2 = 0$; donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

5) Exercice d'application :

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points R(3 ; 4) ; S(5 ; -1) ; Q(-2 ; -3) et T(1 ; 6). Calcule les coordonnées des vecteurs : $\vec{RS}$; $\vec{RT}$; $\vec{RO}$; $\vec{SQ}$ et $\vec{TS}$.

2) On trouve dans un repère les vecteurs $\vec{u} \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$ et $\vec{v}(2; 4)$. Calcule les coordonnées de : $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $2\vec{u}$; $-5\vec{v}$.

3) On donne les vecteurs $\vec{r}(2 ; 3)$, $\vec{s}(3 ; 4,5)$ et $\vec{t}(7,5 ; -5)$.

a) Les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{s}$ sont-ils colinéaires ?

b) Les vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{t}$ sont-ils orthogonaux ?

II°) Distance de deux points :

1) Activité :

a) Place les points A(1 ; 4) et B(-3 ; 1) dans un repère orthonormal (O ; I ; J).

b) Calcule la valeur de $Y = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

c) Mesure la distance AB dans le repère, puis compare le résultat obtenu avec le résultat de Y trouvé à la question b).

2) Définition :

Dans un repère orthonormé, on considère deux points A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B).

La distance entre les points A et B est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exemple :

Soit à calculer la distance MN entre les points M(2 ; 1) et N(4 ; -1).

$$MN = \sqrt{(4-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

3) Exercice d'application :

a) Dans un repère orthonormal (O ; I ; J), place les points A(4 ; 3) ; B(-2 ; 5) et C(-3 ; -1).

b) Calcule les distances AB ; BC et AC.

III°) Équation et représentation d'une droite :

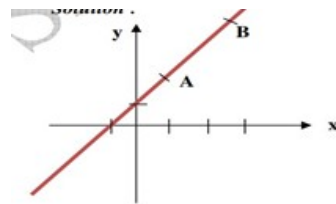
1) Activité :

a) Place dans un repère orthonormal les points A(1 ; 2) et B(3 ; 4) et trace la droite (AB).

b) Calcule les coordonnées de $\vec{AB}$

- c) Soit $M(x ; y)$ un point de la droite (AB) . Exprime en fonction de x et y les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$.
- d) Dédus-en la relation traduisant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ et écris cette relation sous la forme $ax+by+c=0$.

Solution :



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} & (x-1 ; y-2) & (x-1) \times 2 - 2(y-2) &= 0 \\ \overrightarrow{AB} & (3-1 ; 4-2) & & \\ \overrightarrow{AB} & (2 ; 2) & & \\ & & x - y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

2) Équation générale : $ax + by + c = 0$

Compétences exigibles
À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de déterminer une équation de droite à partir des coordonnées de deux de ses points.

a) Propriété :

Dans un repère orthonormal $(O ; I ; J)$ un point $M(x ; y)$ appartient à une droite (D) si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation du type $ax+by+c=0$, avec $a ; b ; c$ étant des réels. Ce type d'équation est appelé équation générale de la droite (D) .

On note $(D) : ax+by+c=0$.

b) Méthode :

Pour déterminer une équation générale (ou équation cartésienne) d'une droite passant par deux points A et B du plan muni d'un repère orthonormal $(O ; I ; J)$, on peut procéder comme suit :

- 1) Considérer un point $M(x ; y)$ quelconque de la droite (AB) .
- 2) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et exprimer celles de $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et y .
- 3) Traduire la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de leurs coordonnées.
- 4) Écrire cette relation sous la forme $ax+by+c=0$ qui est l'équation générale de la droite (AB) .

Exemple : Soit à déterminer l'équation générale de la droite (D) passant par $A(3 ; 1)$ et $B(2 ; 3)$.

$\overrightarrow{AB} (-1 ; 2)$ et $\overrightarrow{AM} (x - 3 ; y - 1)$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires si et seulement si
 $-1 \times (y - 1) - (x - 3) \times 2 = 0$; d'où $(D) : -2x - y + 7 = 0$

c) Configuration générale :

Configuration	Equation	Coefficients	Position par rapport aux axes
	$ax+by+c=0$ Exemple : $2x+3y-1=0$	$a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$	$(D): ax+by+c=0$ est sécante aux axes.
	$ax+by=0$ Exemple : $2x+3y=0$	$a \neq 0$; $b \neq 0$; $c = 0$	$(D): ax+by=0$ passe par l'origine.
	$ax+c=0$ Exemple : $2x-1=0$	$a \neq 0$; $b = 0$; $c \neq 0$	$(D): ax+c=0$ est parallèle à (OJ) .
	$by+c=0$ Exemple : $3y-1=0$	$a = 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$	$(D): by+c=0$ est parallèle à (OI) .

3) Équation réduite : $y = mx + p$

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de :

- déterminer l'équation réduite d'une droite ;
- passer de l'équation réduite d'une droite à l'une de ses équations générales et inversement si possible.

✓ Une équation réduite d'une droite est de la forme $y = mx + p$; m et p étant deux réels fixés.

Exemple : Soit à donner l'équation réduite de la droite d'équation (D) : $2x + 3y - 1 = 0$

$$3y = -2x + 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \text{ donc (D): } y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \text{ est l'équation réduite.}$$

✓ Toute droite parallèle à l'axe des abscisses a une équation réduite de la forme $y = k$ ($k \in \mathbb{R}$).

Exemple : (D): $y = -2$ est parallèle à l'axe des abscisses.

✓ Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation réduite de la forme $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$).

Exemple : (D): $x = 3$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

✓ Toute droite passant par l'origine des axes a une équation réduite de la forme $y = kx$ ($k \in \mathbb{R}$).

Exemple : (D): $y = 2x$ passe par l'origine des axes.

4) Exercice d'application :

1) Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) On donne A (4 ; 2) et B (-6 ; -3)

a) Trouve l'équation générale de la droite (d) = (AB).

b) Trouve l'équation réduite de la droite (d).

2) Donne si possible l'équation réduite de chacune des droites suivantes:

$$(D1): 6x - 2y + 10 = 0 ; (D2): 2x + 4y - 8 = 0 ; (D3): 3x - 5 = 0 \text{ et } (D4): 4y + 6 = 0.$$

3-a) Donne équation générale de chacune des droites suivantes :

$$(L1): y = -x - 1 ; (L2): y = \frac{1}{2}x + 2 \text{ et } (L3): x = 5.$$

b) Précise la position de chacune de ces droites par rapport aux axes.

IV°) Coefficient directeur et Vecteur directeur d'une droite :

Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois :

- être capable de reconnaître et de déterminer le coefficient directeur d'une droite ;
- connaître et être capable de déterminer un vecteur directeur d'une droite.

1) Définition :

(D) étant une droite d'équation $y = mx + p$,

★ m est appelé **coefficient directeur** de la droite.

Soient A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) deux points quelconques de la droite, alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

★ Le vecteur $\vec{v}(1; m)$ est appelé **vecteur directeur** de la droite.

Exemple : Soit à déterminer le coefficient directeur, puis le vecteur directeur de la droite (D) passant par A(3 ; 1) et B(2 ; 3) :

$$\text{Coefficient : } m = \frac{3-1}{2-3} = \frac{2}{-1} = -2 \text{ et vecteur directeur : } \vec{u}(1; -2).$$

NB : Si l'équation de (D) s'écrit sous la forme $ax + by + c = 0$ alors $\vec{v}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (D).

Exemple : Soit (D): $-2x - 6y + 4 = 0$ donc $\vec{u}(6; -2)$ est un vecteur directeur

2) Exercice d'application :

a) Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on donne les points A(6 ; 1) ; B(2 ; 3) et C(1 ; 3). Calcule le coefficient directeur de chacune des droites (AB) ; (BC) et (AC).

b) Détermine un vecteur directeur de chacune de ces droites suivantes: (R): $y = \frac{1}{3}x - 3$ et (S): $5x - y + 2 = 0$.

V°) Équation d'une droite dont on connaît le coefficient directeur et un point (ou un vecteur directeur et un point) :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de déterminer une équation de droite connaissant les coordonnées d'un de ses points et son coefficient directeur ou les coordonnées d'un de ses points et d'un de ses vecteurs directeurs.

1) Méthode :

- Pour déterminer une équation réduite $y = mx + p$, d'une droite (D) dont on connaît un point $A(x_A ; y_A)$ et le coefficient directeur m :

- ✓ On remplace m par sa valeur dans l'équation, de même que x et y respectivement par x_A et y_A dans l'équation qu'on vient d'obtenir.
- ✓ On calcule la valeur de p .
- ✓ On écrit une équation de la droite (D) en remplaçant m et p par leurs valeurs.

Exemple : Soit à déterminer l'équation réduite de la droite (D) passant par $S(1 ; 2)$ et coefficient directeur $m=3$.

$$y = mx + p ; y = 3x + p ; 2 = 3 \times 1 + p \Rightarrow p = -1, \text{ donc (D): } y = 3x - 1 \text{ est l'équation réduite de (D).}$$

- Pour déterminer une équation générale d'une droite (D) dont on connaît un vecteur directeur $\vec{u}$ et un point $A(x_A ; y_A)$:

- On considère un point $M(x ; y)$ de (D).
- On exprime les composantes du vecteur $\vec{AM}$ en fonction de x et y .
- On traduit la colinéarité des vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ à l'aide de leurs coordonnées pour en déduire une équation générale de (D).

Exemple :

Soit à déterminer l'équation générale de la droite (D) passant par $T(2 ; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{u} (1 ; 3)$

- ✓ **1^{re} méthode :** Soit $M(x ; y)$ un point de (D) ; $\vec{TM} (x - 2 ; y - 5)$.

$$\vec{u} \text{ colinéaire à } \vec{TM} \text{ équivaut à } 1 \times (y - 5) - 3 \times (x - 2) = 0$$

$$y - 5 - 3x + 6 = 0, \text{ donc (D): } 3x - y - 1 = 0 \text{ est l'équation générale de (D).}$$

- ✓ **2^e méthode :** Par l'équation réduite $y = mx + p$

$$\vec{u} (1 ; 3) \Rightarrow m = 3$$

$$(D) \text{ passe par } T(2 ; 5) \text{ donc } 5 = 3 \times 2 + p \Rightarrow 6 + p = 5 \Rightarrow p = 5 - 6 \Rightarrow p = -1$$

$$(D) : y = 3x - 1 \text{ est l'équation réduite de (D) d'où (D) : } 3x - y - 1 = 0 \text{ est l'équation générale de (D)}$$

2) Propriétés :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître deux droites parallèles et deux droites perpendiculaires connaissant leurs coefficients directeurs ou un vecteur directeur de chaque droite.

a) Propriété 1 :

Soient (D) et (D') deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$:

- ✓ Si $m = m'$, alors (D) est parallèle à (D').
- ✓ Si (D) est parallèle à (D'), alors $m = m'$.

Exemple : (L): $y = 5x + 3$ et (L'): $y = \frac{1}{2} + 5x$. (L) et (L') sont parallèles car $m = m' = 5$

b) Propriété 2 :

Soient (D) et (D') deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$:

- ✓ Si $m \times m' = -1$, alors (D) et (D') sont perpendiculaires.
- ✓ Si (D) et (D') sont perpendiculaires, alors $m \times m' = -1$.

Exemple : (L): $y = -2x + 3$ et (L'): $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

(L) et (L') sont perpendiculaires car $m \times m' = -2 \times \frac{1}{2} = -1$

3) Exercice d'application :

- 1- a) Détermine une équation réduite de la droite (D) passant par le point A(1 ; 3) et de coefficient directeur 2.
b) Détermine une équation générale de la droite (D') passant par B(1 ; 1) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1; \frac{1}{3})$

2) Dans un plan muni d'un repère orthonormal (O ;I ;J), on donne les droites :

$$(D): 2x - 3y + 5 = 0; (D'): \frac{3}{2}x + y + 1 = 0 \text{ et } (D''): 4x - 6y + 7 = 0.$$

Sans faire la représentation graphique, justifie que (D) est parallèle à (D'') et que (D) est perpendiculaires à (D').

FIN !!!

IA: Saint-Louis IEF: Podor CEM: Ndiourba PROF: M. NDIAYE	Chapitre 7 : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE:	DATE : CLASSE : 3^e DURÉE : 12H EFFECTIF :
---	--	---

Compétences : Mobiliser les notions relatives au théorème de Thalès, aux relations trigonométriques dans un triangle rectangle, aux angles inscrits et à la géométrie dans l'espace dans la résolution de problèmes de géométrie et de problèmes liés à la vie (détermination de grandeurs).

OBJECTIF GÉNÉRAL : Au terme de ce chapitre, l'élève devra maîtriser la résolution de problèmes en utilisant les propriétés des solides étudiés.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES : Au terme de ce chapitre, l'élève devra être capable de :

- Reconnaître une pyramide ; un cône de révolution.
- Faire une représentation plane d'une pyramide ; d'un cône de révolution
- Reconnaître un cône de révolution.
- Réaliser le patron d'une pyramide régulière ; d'un cône de révolution.
- Calculer l'aire d'une pyramide et d'un cône de révolution.
- Calculer l'aire d'une pyramide ou d'un cône de révolution obtenu par agrandissement ou par réduction.
- Calculer une aire latérale et une aire totale d'une pyramide régulier ; d'un cône de révolution.
- Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution.
- Calculer le volume d'une pyramide ou d'un cône de révolution obtenu par agrandissement ou par réduction.
- Restituer la section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à sa base.
- Utiliser le théorème de Thalès dans le plan et la section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à sa base pour calculer des longueurs dans l'espace.
- Utiliser le théorème de Pythagore dans le plan pour calculer des longueurs dans l'espace.
- Utiliser la trigonométrie dans le plan pour calculer des angles dans l'espace.

SOURCES D'INFORMATION/ pédagogique:

- ◆ Nouveau programme 2006 de mathématiques
- ◆ Manuels : Excellence 3^{eme}; CIAM 3^{eme}
- ◆ Guide d'usages des programmes de Maths 3^{eme}, septembre 2012
- ◆ Guide pédagogique 3^{eme}
- ◆ SENEMATH 3^{eme}

Matériel et supports didactiques :

- Pour le professeur, il lui faut une règle, craie, éponge et tableau propre.
- Pour l'élève, il lui faut le matériel géométrie complet, les cahiers de cours et d'exercices, des stylos et crayons, une calculatrice.

Prérequis : notion de plan et ses composantes ; théorème de Pythagore ; théorème de Thalès

Patron de solides : pavé droit, cube, cylindre, prisme droit, sphère

Cercle, arc de cercle, longueur d'un arc de cercle

Parallélisme et orthogonalité dans l'espace. Position relative de droites et plans dans l'espace.

Commentaires:

Cette partie du programme est une étape importante d'un long processus d'apprentissage. Ce thème a été introduit depuis la classe de sixième par l'observation et la description de solides usuels. Il a été consolidé en cinquième par la représentation plane et la réalisation de patrons d'autres solides usuels. Un approfondissement du thème a été fait en quatrième par l'introduction à partir de l'observation de quelques propriétés sur les positions relatives de droites et de plans dans l'espace. En classe de troisième, ce chapitre porte sur deux solides très répandus dans le milieu socioculturel des élèves. En effet, les toitures des cases d'habitation sont généralement en forme de cône de révolution ou de pyramide régulière. Ce chapitre aborde, d'une part, une synthèse de plusieurs notions acquises dans les classes antérieures et d'autre part, l'utilisation dans l'espace de deux théorèmes fondamentaux : celui de Pythagore et celui de Thalès. Il serait souhaitable de faire construire par les élèves, en activité à la maison, tous les patrons de solides du cours avant celui-ci et de les faire garder pour leur exploitation en classe pendant la leçon.

On entraînera l'élève à une représentation plane des solides étudiés.

Dans les différentes activités on utilisera les notions de géométrie dans l'espace étudiées dans les classes précédentes.

Pour la pyramide et le cône de révolution, on entraînera l'élève à faire des maquettes et des exercices sur le calcul d'aire.

On mettra en évidence le fait que si on multiplie les longueurs par k , alors l'aire est multipliée par k^2 .

On mettra en évidence le fait que si on multiplie les longueurs par k , alors le volume est multiplié par k^3 .

Introduction:

La géométrie dans l'espace consiste à étudier les objets définis dans la géométrie plane dans un espace à trois dimensions. L'étude de la géométrie dans l'espace entamée dans les classes précédentes sera poursuivie en classe de troisième avec l'étude de la pyramide et du cône de révolution. Ces deux notions sont très utilisées dans la vie courante. Par exemple, les patrons seront utilisés dans la confection des habits et la notion de réduction est utilisée en architecture pour les maquettes.

Du point de vue intérêt, comme tous les cours, la géométrie dans l'espace, revêt d'une importance capitale dans divers secteurs de nos vies tels que : la physique, l'architecture ; la chimie ; l'art ; ... ce chapitre peut-être aussi lié à, plusieurs thèmes de convergence tels que : le Développement durable ; Météorologie et climatologie ; Santé ; Sécurité ; ... et au TICE (Technologie de l'information et de la communication pour l'Éducation).

PLAN DU COURS: (Voir cours)

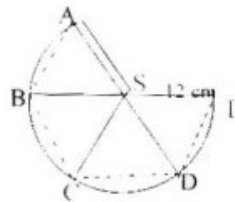
Activité préparatoire :

1. a) Reproduis le dessin ci-dessus, en respectant les dimensions indiquées (les triangles sont équilatéraux)

Nous venons de construire une surface latérale qu'on notera S .

- b) La surface S étant fermée, plie le rebord du bas, selon (AB), (BC), (CD) et (DE)

Pince le long de (SA), (SB), (SC), (SD) pour bien marquer le pli et rabat vers l'intérieur, les arcs de cercle $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ et $\widehat{DA}$



Nous venons de construire une surface pyramidale, qu'on notera S .

Le bord de la surface S qui contient les points A, B, C et D est un carré.

- c) Construis et découpe sur une feuille un carré $A'B'C'D'$ superposable au carré ABCD.
d) Colle le carré $A'B'C'D'$ en le faisant coïncider avec le carré ABCD.

La surface fermée obtenue par la réunion de S et du carré $A'B'C'D'$ forme une pyramide régulière.

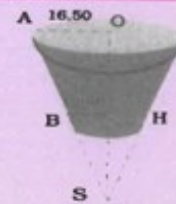
2. a) Calcule l'aire totale de la pyramide régulière (somme des aires de S et du carré ABCD)

- b) Calcule la distance SO O étant le centre du carré ABCD

La distance SO sera appelée hauteur de la pyramide et notée h .

Situation problème

La figure ci-contre représente un seau dont les dimensions sont les suivantes :
Le rayon du rebord supérieur est 16,50 cm, celui du fond est 12,50 cm et la profondeur OH est de 27 cm.
Calcule le volume de ce seau.



Déroulement de la leçon:

I°) Pyramide :

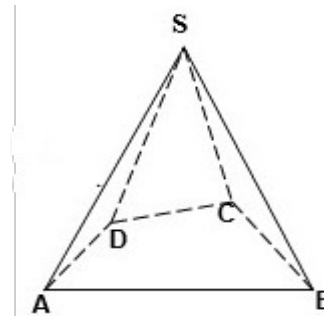
Compétences exigibles

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître et de décrire une pyramide.

1) Activité :

On donne le solide ci-contre :

- Donne la position à partir de laquelle ce solide est observé
- Donne le nombre de sommets, d'arêtes, de faces, de bases.
- Quel est le sommet qui est joint à chacun des autres par un arrête ?
Ce sommet est opposé à une face et n'appartient pas au plan de celle-ci.
- Quelle figure est représentée par cette face ?

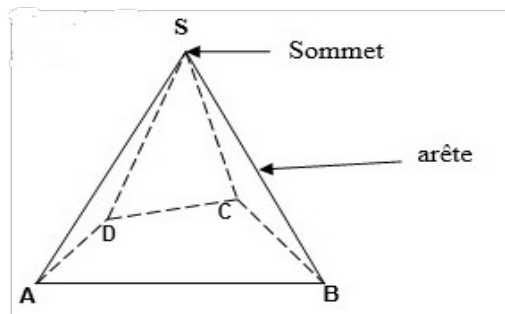


2) Présentation :

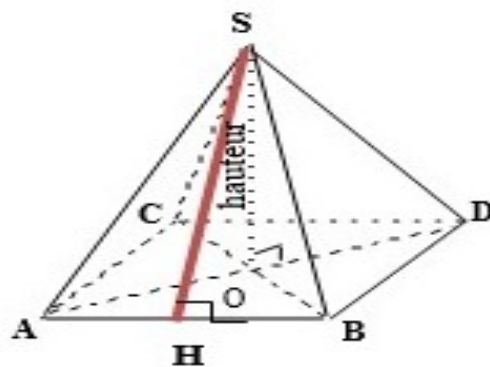
On appelle pyramide de sommet **S**, tout solide obtenu en joignant les sommets d'un polygone à un point **S** n'appartenant pas au plan de ce polygone.

Une pyramide comprend :

- ✓ une **base** qui est un polygone.
- ✓ un **sommet** n'appartenant pas au plan contenant ce polygone (ce sommet représente le sommet de la pyramide et le polygone, sa base).
- ✓ des **faces latérales** qui sont des triangles.

Exemple :**3) Pyramide régulière :**

- Si la base d'une pyramide est un polygone régulier (qui a tous ses cotés égaux et tous ses angles égaux) et si sa hauteur passe par le centre de ce polygone régulier, alors cette pyramide est dite régulière.
- Si la base est un triangle, alors cette pyramide est appelée un tétraèdre.
- Si la base est un triangle équilatéral et la hauteur passe par le centre de ce triangle, alors cette pyramide est appelée un tétraèdre régulier.
- Si une pyramide est régulière alors chacune de ses faces est un triangle isocèle de sommet S.

Exemple :

Le polygone ABCD est la base de la pyramide SABCD.

Le triangle SAB est une **face latérale**.

S est le sommet de la pyramide. [AS] est une arête.

[AS], [SB], [SD], [SC] sont **des arêtes latérales**.

[SO] est la hauteur de la pyramide.

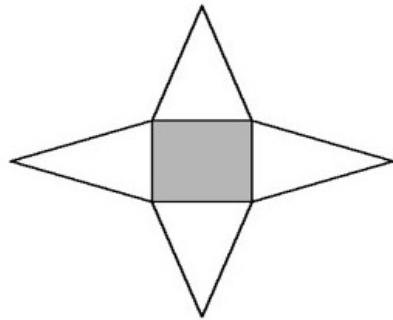
[SH] est un **apothème** de la pyramide.

4) Patron d'une pyramide (ou développement d'une pyramide) :**Compétences exigibles**

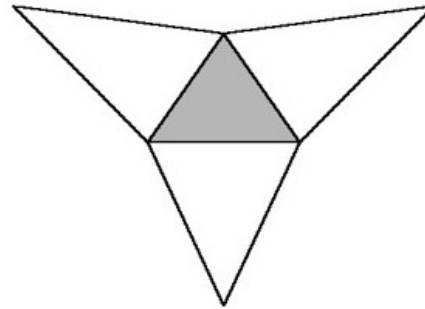
À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de dessiner le patron d'une pyramide.

On appelle patron d'une pyramide un dessin aplati qui pliage donne le solide géométrique de départ (la pyramide).

Pour représenter le patron d'une pyramide, on représente la base puis les faces latérales.

Exemple :

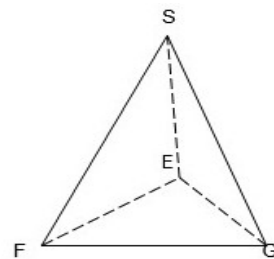
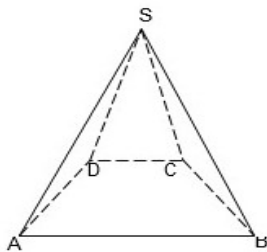
Patron d'une pyramide à base carré



Patron d'un tétraèdre

5) Exercice d'application :

1- a) Décris chacun des solides suivants :



b) Représente une pyramide SABCD de base rectangulaire ABCD.

c) Dessine le patron d'une pyramide SABC ayant pour base le triangle équilatéral de côté 4 cm pour faces latérales des triangles équilatéraux.

2) Répond par vrai ou faux.

- a) Une pyramide dont les arêtes latérales ont la même longueur est une pyramide régulière.
 b) Si une pyramide régulière a quatre faces latérales, alors la base est un carré.
 c) Les faces latérales d'une pyramide régulière sont des triangles isocèles.

II°) Cône de révolution :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de reconnaître et de décrire un cône de révolution.

1) Activité :

Voici représenté sur la figure 1, un triangle ABC rectangle en A.

On fait tourner le triangle ABC d'un tour complet autour de la droite (AC) qui reste fixe (voir fig. 1)

Le résultat de ce déplacement est représenté sur la figure 2

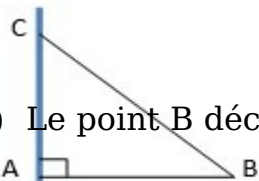


fig. 1

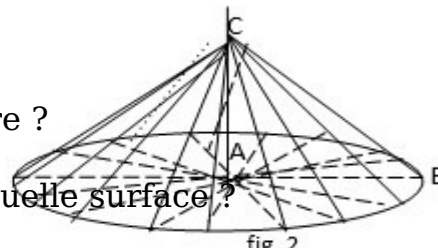


fig. 2

a) Le point B décrit quelle figure ?

b) Le segment [AB] engendre quelle surface ?

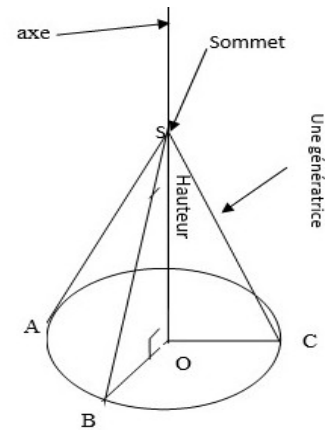
Solution :

Lorsque l'on fait tourner le triangle rectangle autour d'un de ses côtés de l'angle droit, on obtient un cône de révolution.

- a) Le point B décrit le cercle.
 b) Le segment [AB] engendre le disque de base D.

2) Présentation :

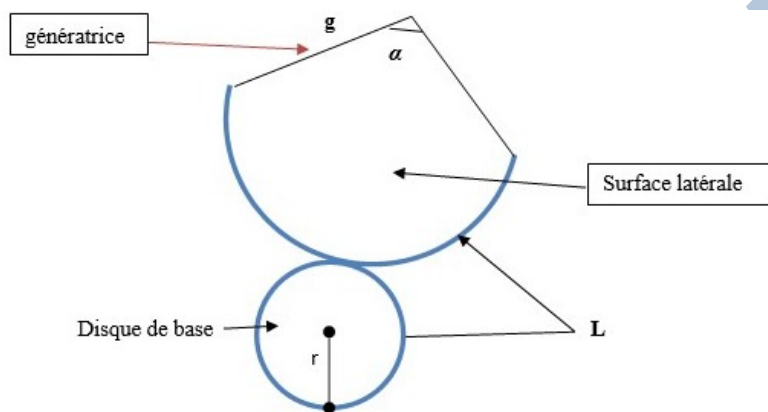
Un cône est un solide dont la base est un disque, les points du cercle de base sont reliés à un point fixe appelé sommet n'appartenant pas au plan du disque.

**3) Patron d'un cône :****Compétences exigibles**

A la fin de ce paragraphe, je dois être capable de dessiner le patron d'un cône de révolution.

Le patron d'un cône de révolution est formé de deux parties :

- Un secteur circulaire d'angle α et de rayon g (qui deviendra la génératrice du cône)
- Un disque de rayon r qui deviendra la base du cône.



Angle au centre	360°	α
longueur de l'arc	$2\pi g$	$L = 2\pi r$

Le rayon du disque de base et la génératrice étant proportionnels alors $\frac{r}{g} = \frac{\alpha}{360}$

D'où $\alpha = \frac{360}{g} r$ (en degré) et $r = \frac{g \cdot \alpha}{360}$

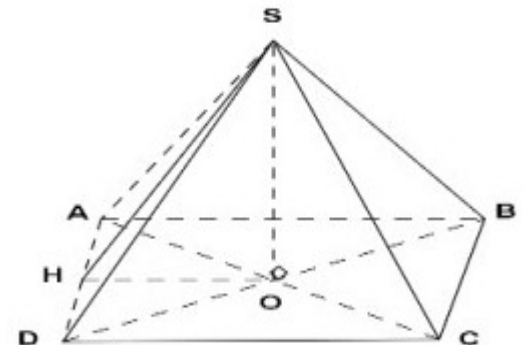
4) Exercice d'application :

- Un cône de révolution a pour rayon de base $r = 3$ cm et pour hauteur $h = 4$ cm.
 - Calculer la longueur de sa génératrice g .
 - Donner la représentation plane de ce cône de révolution.
- Fait la représentation plane d'un cône de révolution de rayon de base 4cm et de hauteur 5cm. Représente son patron.

III°) Aire d'une pyramide et d'un cône de révolution :**1) Aire d'une pyramide :****a) Activité :**

SABCD est une pyramide régulière de base ABCD, un carré de 4 cm de côté et de hauteur [SO], 6cm. Soit H un point de [AD] tel que [SH] soit son apothème.

- Montre que la longueur de l'apothème est $2\sqrt{10}$ cm.
- Montre que l'aire latérale totale $A_L = 16\sqrt{10}$ cm².
- Montre que l'aire totale A_T de la pyramide est $16(1 + \sqrt{10})$ cm²



Solution :**a) Montrons que la longueur de l'apothème est $2\sqrt{10}$ cm.**

Considérons le triangle rectangle SOH en O.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $SH = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + SO^2}$

$$SH = \sqrt{2^2 + 6^2} = SH = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

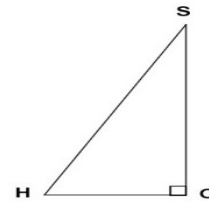
b) Montrons que l'aire latérale totale A_L $16\sqrt{10}$ cm

Puisque la pyramide est régulière, alors ses faces latérales sont des triangles isocèles en S et superposables de base [AB] et de hauteur [SH]

$$A_L = \frac{4}{2} \times SH \times AB = 16\sqrt{10} \text{ cm}^2$$

c) Montrons que l'aire totale de la pyramide est $16(1+\sqrt{10})$ cm² :

$$A_t = AB^2 + A_L = 16(1+\sqrt{10}) \text{ cm}^2$$

**b) Définition :**

- ✓ L'aire latérale d'une pyramide est égale à la somme des aires des faces latérales.

$$A_L = \text{Nb de face} \times \text{Aire d'une face}$$

- ✓ L'aire totale d'une pyramide est égale à la somme de l'aire de base et de l'aire latérale.

$$A_T = A_B + A_L$$

c) Exercice d'application :

SABCD est une pyramide régulière à base le carré ABCD de côté 4 cm et de hauteur SO = 10 cm

a) Montre que son aire latérale totale est $16\sqrt{26}$ cm²

b) En déduire son aire totale.

2) Aire du cône de révolution :**b) Définition :**

L'aire totale d'un cône est égale à la somme de l'aire du disque de base et de l'aire de la surface

latérale : $A_T = A_B + A_L$ **Démonstration :**Soit P le périmètre de base ; g la génératrice ; r le rayon du disque de base et A_L l'aire latérale du cône ; et A_B son aire de base on a : $A_B = \pi r^2$ et $P = 2\pi r$ $A_L = \frac{P \times g}{2}$ en remplaçant P par sa valeur on obtient $A_L = \pi r g$ (ou $A_L = \alpha \frac{g}{2}$; α étant en radian)

$$\text{D'où } A_T = \pi r^2 + \pi r g = \pi r (r + g)$$

b) Exercice d'application :

Un cône de révolution a pour hauteur 3 cm et pour génératrice 5 cm.

- 1) Calculer son rayon du disque de base.
- 2) Calculer son aire latérale.
- 3) Calculer son aire totale.

IV°) Volume de la pyramide et du cône de révolution :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois être capable de calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution.

1) Définition :

Le volume V d'une pyramide ou d'un cône de révolution d'aire de base B et de hauteur h est égale

$$\text{à : } V = \frac{1}{3} \times B \times h$$

2) Exercice d'application :

A) SABCD est une pyramide régulière à base le carré ABCD de côté 12 cm et de hauteur SO = 15 cm. Calcule l'aire de la base, puis le volume de cette pyramide.

B) Un flacon a la forme d'un cône de 18 cm de rayon de base et 25 cm de hauteur. Détermine la contenance de ce flacon.

V°) Section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base :**Compétences exigibles**

À la fin de ce paragraphe, je dois connaître et être capable d'utiliser la section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base.

A°) Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base :**1) Activité :**

SABCD est une pyramide régulière à base le carré ABCD. La section de cette pyramide par un plan parallèle à sa base est A'B'C'D'. Le point O est le centre de la base ABCD et [SO] est sa hauteur. On donne $SA' = \frac{1}{3} SA$

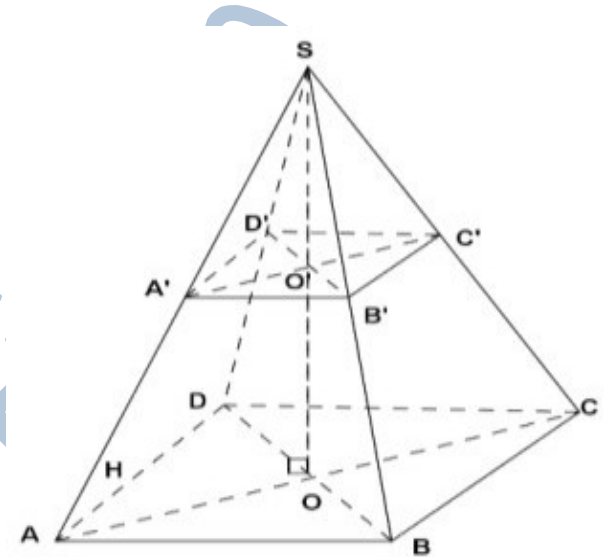
a) Reproduis la figure

b) En utilisant Thalès démontre que $SO' = \frac{1}{3} SO$ et $A'B' = \frac{1}{3} AB$.

c) En déduire que le quadrilatère A'B'C'D' est un carré

d) Exprime l'aire A' de SA'B'C'D' en fonction de l'aire A de SABCD

e) Exprime le volume V' de SA'B'C'D' en fonction du volume V de SABCD

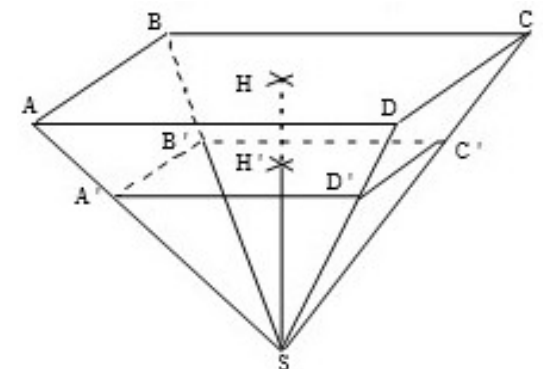
**2) Propriété :**

- ◆ La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un polygone de même nature que celle de sa base.
- ◆ Le centre de la section d'une pyramide régulière appartient à sa hauteur.
- ◆ La section d'une pyramide par un plan parallèle au plan contenant sa base, donne deux solides :
 - ✓ Une **pyramide réduite** ;
 - ✓ Un **tronc de pyramide**.
- ◆ Si on multiplie par un réel **k strictement positif** les dimensions d'une pyramide P ; d'aire **A** et de volume **V** ; on obtient une pyramide P' d'aire **A'** et de volume **V'** tel que : **$A' = k^2 A$** et **$V' = k^3 V$**
 - ✓ Si **$k > 1$** , alors **P'** est un **agrandissement** de **P**. Dans ce cas **k** est appelé **coefficient d'agrandissement** ou **échelle d'agrandissement**.
 - ✓ Si **$0 < k < 1$** alors **P'** est une **réduction** de **P**. Dans ce cas **k** est appelé **coefficient de réduction** ou **échelle de réduction**.

3) Exercice d'application :**Exercice 1 :**

Une boîte de chocolats a la forme d'une pyramide tronquée (voir figure). Le rectangle ABCD de centre H et le rectangle A'B'C'D' de centre H' sont des plans parallèles. On donne $AB = 6 \text{ cm}$; $BC = 18 \text{ cm}$; $HH' = 8 \text{ cm}$; $SH = 24 \text{ cm}$.

- a) Calcule le volume V_1 de la pyramide SABCD de hauteur SH.
- b) Quel est le coefficient k de la réduction qui permet de passer de la pyramide SABCD à la pyramide SA'B'C'D' de hauteur SH'?
- c) Déduis en le volume V_2 de la pyramide SA'B'C'D' puis le volume V_3 de la boîte de chocolats ?



Solution :

$$a) V_1 = \frac{1}{3} \times (\text{aire de base}) \times \text{hauteur}$$

$$\text{Aire de base} = 6 \times 18 = 108 \text{ cm}^2. \text{ La hauteur est } SH = 24 \text{ cm donc } V_1 = \frac{1}{3} \times 108 \times 24 = 864 \text{ cm}^3$$

$$b) \text{ Le coefficient de réduction est } k = \frac{SH'}{SH} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$c) \text{ Le volume la pyramide } SA'B'C'D' \text{ est } V_2 = k^3 V_1 \text{ soit } V_2 = 256 \text{ cm}^3$$

$$\text{Le volume } V_3 \text{ de la boîte est } V_3 = V_1 - V_2, \text{ soit } V_3 = 608 \text{ cm}^3$$

Exercice 2 :

Une pyramide régulière a pour base un carré de côté 2 cm et une hauteur de 4 cm.

a) Calcule le volume de cette pyramide.

On réduit cette pyramide à l'échelle $\frac{2}{3}$; on obtient une pyramide régulière à base carrée

b) Quel est le côté de son carré de base ?

c) Quelle est sa hauteur ?

d) Calcule le volume V' de cette pyramide.

B°) Section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base :**1) Activité :**

On coupe le cône de révolution ci-contre en M par un plan parallèle à son disque de base.

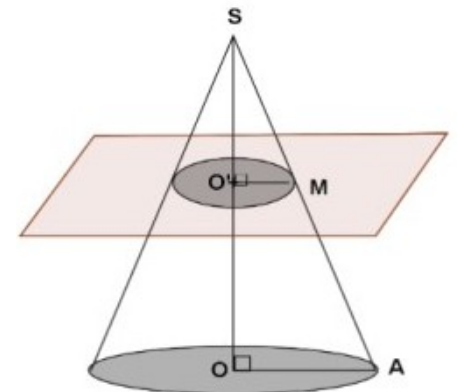
Le rayon est [OA] et la hauteur [SO]. On donne $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$

a) En utilisant le théorème de Thalès démontre que $\frac{O'M}{OA} = \frac{2}{3}$ et $\frac{SO'}{SO} = \frac{2}{3}$

b) Exprime l'aire totale A' du cône réduit en fonction de l'aire totale A du grand cône.

c) Exprime le volume total V' du cône réduit en fonction du volume total V du grand cône.

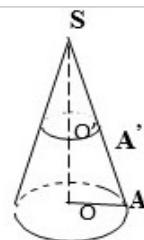
d) En déduire une expression du volume du tronc de cône.

**2) Propriétés :**

- ◆ La section d'un cône par un plan parallèle à sa base est un cercle dont le centre appartient à la hauteur du cône initial.
- ◆ La section d'un cône par un plan parallèle au plan contenant sa base, donne deux solides :
 - ✓ Un cône réduit ;
 - ✓ Un tronc de cône.
- ◆ Si on multiplie par un réel k strictement positif les dimensions du cône C ; d'aire A et de volume V ; on obtient un cône C' d'aire A' et de volume V' tel que : $A' = k^2 A$ et $V' = k^3 V$
 - ✓ Si $k > 1$, alors C' , est un agrandissement de C . Dans ce cas k est appelé **coefficient d'agrandissement** ou **échelle d'agrandissement**.
 - ✓ Si $0 < k < 1$ alors C' , est une réduction de C . Dans ce cas k est appelé **coefficient de réduction** ou **échelle de réduction**.

Exemple :Tronc de cône

$$K = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{O'A'}{OA}; \quad K \text{ est appelé coefficient ou échelle}$$



La partie ayant la forme ci-dessous obtenue par section d'un cône suivant un plan parallèle est appelée un **tronc** de cône.

3) Exercice d'application :

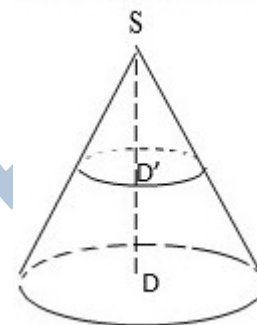
Un cône de révolution de sommet S a pour hauteur 15 cm et pour base un disque D de rayon 4 cm.

D' est la section de ce cône par un plan parallèle à la base; ce disque D' a pour rayon 3 cm.

a) Fais la figure.

b) D' est-il une réduction de D ? À quelle échelle ?

c) Calcule le volume du cône de base D, puis déduis-en le volume du cône de base D'.



FIN !!!!!