

Classe : 10^{ème} Communes Générales

CHAPITRE 4

GÉOMÉTRIE PLANE

Domaine : Sciences, Mathématiques et Technologies

Compétences : Résoudre une situation problème

Composantes : Diagnostiquer la situation – problème et Partager les informations relatives à une démarche.

Manifestations : Formuler le problème, inventorier les différentes pistes de solutions, appliquer cette piste et tirer une conclusion

Ressources éducatives : Professeur, élèves, matériels didactiques

Stratégies d'animation : Travaux en groupe (pédagogie active).



Contenu

Séquence 1 : Vecteurs du plan (3 heures)

1) Représentant d'un vecteur et plan vectoriel

Approche 1 en groupe de travail

Soient A, B et C trois points quelconques du plan.

Consignes

- 1) Construire le point D tel que ABCD soit un parallélogramme. On désigne par $\overrightarrow{AB}$ le vecteur dirigé par [AB] et $\overrightarrow{DC}$ le vecteur dirigé par [DC].
- 2) Comparer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

Synthèse Partielle 1

On dit que le vecteur $\overrightarrow{DC}$ est un représentant de $\overrightarrow{AB}$.

Synthèse Générale 1

Définition

- 1) Soit O un point du plan. L'application du plan $\mathcal{P}$ qui à tout point M du plan associe l'unique vecteur déterminé par le bipoint (O, M) tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ est un représentant de $\overrightarrow{OM}$.
- 2) On appelle *plan vectoriel* $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

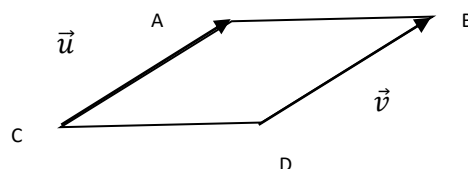
Évaluation 1

Soit ABCD un rectangle. Préciser un représentant des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2) Égalité de deux vecteurs

Approche 2 en groupe de travail

On considère les deux vecteurs du plan ainsi représentés



Consignes

Comparer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Synthèse Partielle 2

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux.

Synthèse Générale 2

Définition

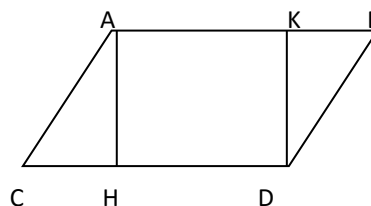
Soient les vecteurs $\vec{u}$ de représentant (A, B) et $\vec{v}$ de représentant (C, D) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si :

$$\begin{cases} (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont parallèles} \\ AB = CD \\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \end{cases}$$

Évaluation 2

On considère la figure suivante :



Comparer les vecteurs : $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{KD}$

Remarque

Le vecteur nul se note $\vec{0}$ et vaut $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = d(A, A)$ pour tout point A.

3) Opérations sur les vecteurs

Approche 3 sur l'opposé d'un vecteur

On considère le vecteur $\vec{u}$ représenté ci-dessous.

Consignes

Construire le vecteur $-\vec{u}$



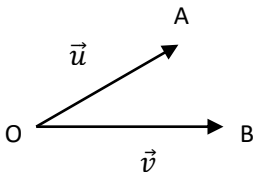
b) Approche 4 sur l'addition vectorielle

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés par leurs représentants $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ comme l'indique la figure suivante.

Copy – Writer © SAMATE L@mine - Mathématicien Émérite – Février 2016

Consignes

Construire les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$.



Synthèse Générale 3

Soient $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan on a :

- 1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité d'addition vectorielle)
- 2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativité de l'addition vectorielle).
- 3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ est le vecteur nul par l'addition vectorielle)
- 4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u} + \vec{u}) = \vec{0}$ ($-\vec{u}$ est l'opposé du vecteur $\vec{u}$)

Évaluation 3

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \vec{u} + \vec{v} + (-\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}) \text{ et } B = (\vec{i} + \vec{j}) - \vec{j} + (2\vec{j} - \vec{i})$$

d) Approche 5 sur la multiplication d'un vecteur par un réel non nul

On considère un vecteur $\vec{u}$ donné par son représentant $\overrightarrow{AB}$

Consignes

Construire les vecteurs $3\vec{u}$, $-2\vec{u}$ et $\frac{3}{2}\vec{u}$

Synthèse Générale 4

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de plan et a et b deux réels non nuls. On a :

- 1) $a\vec{u} = b\vec{u} \Leftrightarrow a = b$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
- 2) $a\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
- 3) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ (1 est l'élément neutre pour la multiplication)
- 4) $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$
- 5) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ et $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

Évaluation 4

- 1) Effectuer l'opération suivante :

$$A = 3(\vec{u} - 5\vec{v}) - 5\left(\frac{2}{3}\vec{u} - \vec{v}\right)$$

- 2) Soient A, B et C trois points non alignés du plan.

Construire les points M et N dans les cas suivants :

$$\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{NB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

4) Base du plan vectoriel

Synthèse Générale 5

Définitions

- 1) On nomme base du plan vectoriel $\mathcal{V}$ tout couple de vecteurs non colinéaire de $\mathcal{V}$.
Soit le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ainsi le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$
- 2) Le vecteur $\vec{w}$ est la décomposition des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
- 3) Soit le vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Alors le couple (x, y) est appelé couple de coordonnées ou simplement coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. on noté $\vec{u}(x, y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- 4) Soit le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $A(a; b)$. Alors le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées (a, b) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

Évaluation 5

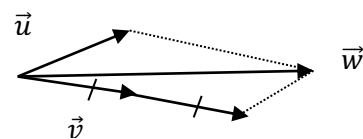
Soient les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$

- 1) Déterminer leurs coordonnées de ces deux vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
- 2) Écrire les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- 3) En déduire les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$
- 4) Prouver que le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan.

5) Combinaison linéaire de vecteurs

Approche 6 en groupe de travail

Soient les vecteurs ainsi représentés



Consignes

Écrire le vecteur $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Synthèse Partielle 3

On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Synthèse Générale 6

Définition

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan.
Le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux nombres réels a et b tels que

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Les réels a et b sont appelés coefficients de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

Évaluation 6

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$

1) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$

2) Exprimer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

6) Coordonnées d'une combinaison linéaire

Approche 7 en groupe de travail

On donne les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Consignes

Trouver les coordonnées du vecteur $\vec{w} = 2\vec{u} - 7\vec{v}$

Synthèse Générale 7

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont 2 vecteurs du plan de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors le vecteur $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ a pour coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$: $w(ax + bx'; ay + by')$

Évaluation 7

Soient les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Trouver les coordonnées des vecteurs suivants

1) $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$ 2) $\vec{w}' = 3\vec{u} - \vec{v}$

7) Déterminant de deux vecteurs

Synthèse Générale 8

Définition

Soient deux vecteurs $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(a'; b')$

On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\det(\vec{u}; \vec{v})$ tel que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

Évaluation 8

1) Trouver le déterminant des deux vecteurs suivants :

$\vec{u}(-3, 2)$ et $\vec{v}(6, 1)$

2) On donne les points $A \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{BC}$.

b) Montrer que les points A, B, C sont alignés.

8) Colinéarité des deux vecteurs

Approche 8 en groupe de travail

On considère les vecteurs $\vec{u}(3, -2)$ et $\vec{v}(-6, 4)$ et $\vec{w}(1, 7)$

Consignes

Calculer les déterminants $\det(\vec{u}, \vec{v})$, $\det(\vec{u}, \vec{w})$ et $\det(\vec{v}, \vec{w})$

Synthèse Partielle 4

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Synthèse Générale 9

Définition

Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (ou parallèles, terminologie non propice) si :

$$\begin{cases} \vec{u} = 0 \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ \text{Il existe un } k \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } \vec{u} = k\vec{v} \end{cases}$$

Autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Remarque

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires c'est-à-dire $\exists k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ alors :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens si $k > 0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire si $k < 0$

Évaluation 9

Étudier la colinéarité des vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$

9) Expression analytique de la colinéarité de 2 vecteurs

Synthèse Générale 10

Définition

Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs plan. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ c'est-à-dire

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0, \text{ soit } xy' - x'y = 0$$

Évaluation 10

Soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées respectives dans les base $(\vec{i}, \vec{j})$: $(-1; 2)$, $(2; -4)$ et $(1; y)$.

- 1) Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- 2) Trouver le réel y pour que les valeurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.
- 3) Trouver alors les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{v}, \vec{w})$

Séquence 2 : Barycentre (1 heure)

1) Barycentre

Approche 9 en groupe de travail

Soient A et B deux points quelconque du plan.

Consignes

1) Construire le point G tel que $2\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$

2) Soit M un point. Exprimer en fonction du vecteur $\vec{MG}$ le vecteur $2\vec{MA} + 3\vec{MB}$.

Synthèse Partielle 5

On dit que G est le barycentre des points A et B effectués respectivement des coefficients 2 et 3.

Synthèse Générale 11**Définition du barycentre****i) Pour deux points**

Étant donnés deux points A et B et deux réels α et β tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

On nomme barycentre de deux points pondérés (A, α) et (B, β) , le point unique G définie par $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

On dit souvent que G est le barycentre de A et B affectés respectivement des coefficients α et β .

ii) Pour trois points

Nous pouvons étendre la définition du barycentre pour plus de deux points. Ainsi on appelle barycentre de trois points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) , le point unique G tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

iii) Pour quatre points

De même soient A, B, C et D quatre points du plan et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre réels tels que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$

Il existe un point unique et un seul G tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (lorsque $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$)

Remarque

1) Si G est barycentre de (A, α) et (B, β) alors on a $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ équivaut à dire que $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$

2) G est barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, γ) ,

$(\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$ équivaut à dire que

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC}$$

c) Autre définition du barycentre

Étant donnés deux nombres réels α et β tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Le point G est barycentre de (A, α) et (B, β) équivaut à dire que pour tout point M du plan on a :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$$

2) Propriétés du barycentre

1) Si G est barycentre de (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$ alors G est situé sur la droite (AB) c'est-à-dire :

- si α et β sont de même signe alors $G \in [AB]$

- si α et β sont de contraire alors $G \notin [AB]$

2) Le barycentre de deux points reste inchangé lorsqu'on remplace les deux coefficients par des coordonnées proportionnels (non nuls). C'est-à-dire si G est barycentre de (A, α) , (B, β) , (C, δ) ... Alors pour tout $k \neq 0$, G serait barycentre de $(A, k\alpha)$, $(B, k\beta)$, $(C, k\delta)$, ...

3) Si A, B et C sont trois points du plan non alignés et si G est barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors G est dans le plan (ABC)

4) Si G est barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, δ) avec

$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et si $\alpha + \beta \neq 0$ on désigne par H le barycentre de (A, α) , (B, β) alors G est barycentre de $(H, \alpha + \beta)$ et (C, δ)

Évaluation 11

- 1) Soit [AB] un segment. Construire le barycentre G des points $(A, 3)$ et $(B, 1)$.
- 2) Soit ABC un triangle quelconque. Construire le barycentre G de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, -2)$
- 3) On considère 4 points A, B, C et D non alignés du plan. Définir et construire le point G tel que $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} - 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

3) Isobarycentre**Synthèse Générale 12****Définition**

On appelle isobarycentre des points A, B, C..., le barycentre de A, B, C, affectés d'un même coefficient non nuls... c'est-à-dire $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \dots = \vec{0}$

La propriété de l'isobarycentre est telle que si G est l'isobarycentre de trois points non alignés A, B, et C. Alors G est le centre de gravité du triangle ABC (point d'intersection des médianes).

Évaluation 12

- 1) Soit ABC un triangle et E point défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$ Montrer que E est barycentre de A, B et C affectés de coefficients à déterminer.
- 2) ABC est un triangle quelconque. Construire l'isobarycentre de ses trois sommets A, B et C.

4) Coordonnées du barycentre dans un repère**Approche 10 en groupe de travail**

Soient $A(-1, 2)$ et $B(3, 1)$ deux quelconque du plan. Soit G le barycentre du système $\{(A, 2), (B, -3)\}$

Consignes

Déterminer les coordonnées de G.

Synthèse Générale 13

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan trouvons les coordonnées de G tel que

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}, \quad (\alpha + \beta \neq 0)$$

Soit $G(x_G, y_G)$, G étant barycentre de A et B d'après ce que précède $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \end{pmatrix} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{\beta}{\alpha + \beta} x_B - \frac{\beta}{\alpha + \beta} x_A + x_A \\ y_G = \frac{\beta}{\alpha + \beta} y_B - \frac{\beta}{\alpha + \beta} y_A + y_A \end{cases} \quad \text{Soit} \quad \begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

Ces coordonnées sont également appelées moyennes pondérées des coordonnées de A et B.

De même pour le barycentre G des points (A, α) , (B, β) et (C, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ on a :

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AC}$$

d'où les coordonnées de G sont $G \left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \right)$

Évaluation 13

- 1) Soient les points $A(3, 2)$ et $B(-1, 4)$. Déterminer et construire le point G tel que G soit barycentre de $(A, 2)$ et $(B, -1)$
- 2) Soit le triangle ABC tel que $A(-1, 0)$, $B(2, -3)$ et $C(3, 4)$. Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre des points A, B, et C.

Séquence 3 : Produit scalaire (4 heures)

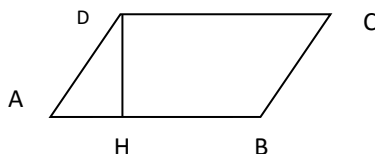
1) Expression algébrique et trigonométrique

a) Approche 11 en groupe de travail

Soit ABCD un parallélogramme tel que $AB = 7$, $AD = 3$ et la hauteur $DH = 2$.

Consignes

Calculer le produit $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$



Synthèse Partielle 6

On dit que $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ est le produit scalaire des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.

Synthèse Générale 14

Définitions

-Expression algébrique

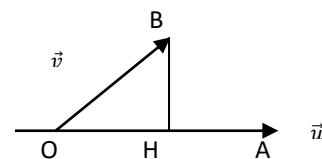
Étant donnés O, A et B trois points du plan non alignés et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ 2 vecteurs tels que $\vec{OA} = \vec{u}$ et $\vec{OB} = \vec{v}$.

On appelle produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le réel tels que :

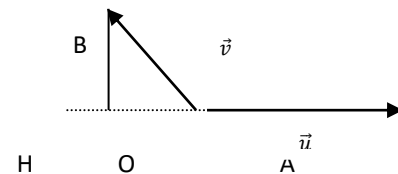
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA)

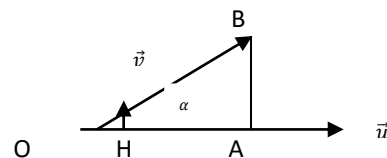
- Si $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont de même sens $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \cdot OH$



- Si $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont de sens contraires $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \cdot OH$



-Expression trigonométrique



Dans le triangle OHB, rectangle en H, on a :

$$\cos \alpha = \frac{OH}{OB} \text{ avec } \alpha = (\vec{u}, \vec{v})$$

$$\text{Alors } OH = OB \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\text{Par suite } \vec{u} \cdot \vec{v} = OA \cdot OB \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Évaluation 14

On considère un triangle ABC rectangle en A tels que

$$AC = 4, BC = 5 \text{ et l'angle } (\vec{CB}, \vec{CA}) = 45^\circ. \text{ Calculer } \vec{CB} \cdot \vec{CA}$$

Remarque

Lorsque $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ radian}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2) Norme d'un vecteur

Synthèse Générale 15

Définition

Étant donné $\vec{u}(x, y)$ un vecteur du plan.

On appelle norme de $\vec{u}$ et on note $\|\vec{u}\|$, le réel positif ou nul défini par $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Remarque

Dans l'expression du produit scalaire en désignant par

$OA = \|\vec{u}\|$ et $OB = \|\vec{v}\|$ alors on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

3) Distance de deux points définies par leurs coordonnées

Synthèse Générale 16

Définition

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. Alors la distance de A à B est le réel positif noté $d(A, B)$ ou simplement AB et vaut $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

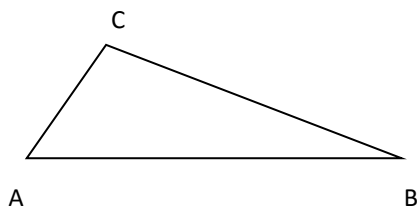
Évaluation 15

Calculer la distance des points A et B définis par

$A(2,0)$ et $B(-1,5)$

3) Autres expressions du produit scalaire

1) Soit ABC un triangle quelconque



Alors on a le produit scalaire

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$$

2) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a également :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Évaluation 16

1) On donne les vecteurs suivants :

$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v}(-1,1)$ et $\vec{w}(\sqrt{3},1)$

Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$

2) Soit ABC un triangle tel que

$AB = 5$, $AC = 4$ et $BC = 5$

Calculer le produit scalaire $\vec{CB} \cdot \vec{CA}$

4) Propriétés du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ du plan

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

3) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

4) Pour tout vecteur $\vec{u}$ on a : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (c'est-à-dire $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ appelé carré scalaire)

5) Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $k \in \mathbb{R}^*$

$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

6) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

7) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

8) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{v}') = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}'$

9) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

5) Orthogonalité de deux vecteurs

Approche 12 en groupe de travail

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$. Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

Synthèse Partielle 7

On dit que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.

Synthèse Générale 17

Définition

Étant donnés $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Évaluation 17

a) Montrer que les vecteurs $\vec{u}(1, -1)$ et $\vec{v}(-1, -1)$ sont orthogonaux.

b) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{2}$, $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 1$

Calculer $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ puis en déduire l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$

6) Expression analytique du produit scalaire

Synthèse Générale 18

Définition

Copy – Writer © SAMATE @mine - Mathématicien Émérite – Février 2016

2) Étant donnés $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs du plan

$$\text{Si } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

Cette relation se nomme expression analytique du produit scalaire.

Évaluation 18

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Soient les vecteurs $\vec{u}(2, 1)$, $\vec{v}(3, -6)$ et $\vec{w}(x, 3)$

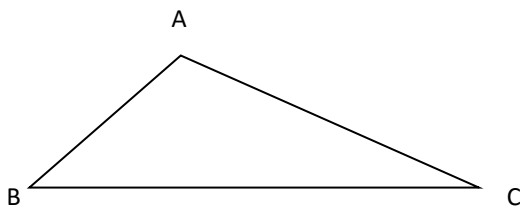
1) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

2) Trouver x pour que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soit orthogonaux.

7) Usage du produit scalaire :

i) Relation métrique dans un triangle : Théorème d'Al Kashi

Soit ABC un triangle quelconque. En désignant par $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$



$$\text{On a : } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$\text{De même on a : } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \text{ et}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos \hat{C}$$

Évaluation 19

Soit ABC un triangle quelconque tel que $BC = 5$, $AB = 7$ et

l'angle $B = 30^\circ$. Calculer la mesure du coté AC.

iii) Produit scalaire et lieux géométriques

Approche 13 en groupe de travail

Soient A et B deux points distincts du plan.

Déterminer la position du point quelconque M distinct de A et B tels que $\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ soient orthogonaux ($\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$)

Synthèse Partielle

On dit qu'il s'agit d'une ligne de niveau (niveau 0)

Synthèse Générale 19

Lignes de niveau

1) Ensemble E des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$
Étant donnés A et B deux points du plan et I le milieu de $[AB]$.
Le point quelconque M tel que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$ est tel que

1^{er} cas : si $k = 0$

On a : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$, alors le triangle AMB est rectangle en M

2^{ème} Cas : si $k \neq 0$

En se servant de la relation de Chasles, puisque I est milieu de $[AB]$, c'est-à-dire $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

On obtient :

$$\begin{aligned} \vec{MA} \cdot \vec{MB} &= (\vec{MI} + \vec{IA})(\vec{MI} + \vec{IB}) \\ &= MI^2 + \vec{MI} \cdot \vec{IB} + \vec{IA} \cdot \vec{MI} + \vec{IA} \cdot \vec{IB} \end{aligned}$$

On sait que $\vec{MI} \cdot \vec{IB} = \vec{IA} \cdot \vec{MI} = 0$ et $IA = IB = \frac{AB}{2}$ alors

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = IM^2 + \vec{IA} \cdot \vec{IB}$$

Puisque $\vec{IB} = -\vec{IA}$ alors

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = IM^2 - IA \cdot IA = IM^2 - IA^2 \text{ or } IA = \frac{AB}{2} \text{ d'où}$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = IM^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$\text{On obtient ainsi } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = k \Rightarrow IM^2 - \frac{AB^2}{4} = k$$

$$IM^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

L'ensemble des points M du plan cherché est :

a) Si $k + \frac{AB^2}{4} < 0$ alors le point M n'existe pas, autrement dit $E = \emptyset$

b) Si $k + \frac{AB^2}{4} = 0$ alors M est confondu avec I, c'est-à-dire $E = \{I\}$

c) Si $k + \frac{AB^2}{4} > 0$ alors E est le cercle de centre I et de rayon $R = \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$ (2^{ème} théorème de la médiane)

Évaluation 20

On considère un segment $[AB]$ tel que $AB = 6 \text{ cm}$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

$$1) \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 2 \quad 2) \vec{MA} \cdot \vec{MB} = \frac{-1}{4}$$

2) Ensemble E des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = k$

Étant donnés A et B deux points distincts du plan. On considère l'isobarycentre G des points A et B, c'est à dire que G est barycentre de points pondérés (A, 1) et (B, 1) avec $1 + 1 = 2 \neq 0$. Pour tout point M du plan on a :

$$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2$$

$$= MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2 + MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + GB^2$$

Alors $MA^2 + MB^2 = 2MG^2 + GA^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB})$
on sait que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ alors

$MA^2 + MB^2 = 2MG^2 + GA^2 + GB^2$. On a ainsi :

$$MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MG^2 + GA^2 + GB^2 = k \Rightarrow$$

$$2MG^2 = k - GA^2 - GB^2$$

$$MG^2 = \frac{k - GA^2 - GB^2}{2}. \text{ On pose } \alpha = \frac{k - GA^2 - GB^2}{2}$$

Alors on aura $MG^2 = \alpha$

L'ensemble E des points M du plan est tel que :

a) 1^{er} cas : si $\alpha < 0$

Alors M n'existe pas en d'autre terme $E = \emptyset$

b) 2^{ème} cas : si $\alpha = 0$

Alors M est confondu avec G c'est à dire $E = \{G\}$

c) 2^{ème} cas : si $\alpha > 0$

L'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon $R = \sqrt{\alpha}$

Évaluation 22

Soient A et B les points du plan de coordonnées respectives (1, 2) et (-2, -2)

Trouver et dessiner l'ensemble des points M tels que

$$MA^2 + MB^2 = 10$$

3) Ensemble E des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$

On considère deux points distincts A et B et I le milieu de [AB].

On peut écrire

$$MA^2 - MB^2 = (MI + IA)^2 - (MI + IB)^2$$

$$= MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2 - MI^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} - IB^2$$

Puisque $IA = IB \Rightarrow IA^2 - IB^2 = 0$ et $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$

$$MA^2 - MB^2 = MI^2 - MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot (-\overrightarrow{IA}) - IB^2$$

$$= 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA}$$

$$= 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA}$$

On a également $\overrightarrow{MI} = -\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IA} = -\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$

$$\text{Alors } MA^2 - MB^2 = 4(-\overrightarrow{IM}) \cdot \left(-\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)$$

$$= 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

On désigne par H la projection orthogonale de M sur (AB)

$$\text{On a alors } MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$MA^2 - MB^2 = k \Rightarrow 2\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = k \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{k}{2\overrightarrow{AB}}$$

D'où l'ensemble cherché est la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par le point H.

Évaluation 23

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :

a) $MA^2 - MB^2 = 8$ et $AB = 2$

b) $MA^2 - MB^2 = 10$ et $A(-1,0)$ et $B(1,1)$

4) Ensemble des points M du plan tel que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = k$

Étant donné le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et le vecteur $\vec{u}$

L'ensemble des points M tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = k$ est tel que

Soit le point A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et on désigne par (D) la droite (OA). Pour tout point M du plan de projeté orthogonal H sur (D), on a : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ alors

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = k \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = k \Rightarrow \overrightarrow{OH} = \frac{k}{\overrightarrow{OA}}$$

L'ensemble E cherché est la droite passant par H et perpendiculaire à (D).

En d'autre terme E est la droite perpendiculaire à la direction de $\vec{u}$

Évaluation 24

1) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = 4$ avec $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$

2) On donne le point $A(2, -1)$ et le vecteur $\vec{u}(1, 3)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

k étant un nombre réel, on note (E_k) l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$

Trouver et construire l'ensemble (E_k) des points M du plan tel que $k = 3$

5) Ensemble E des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$

1^{er} cas : si $k = 0$

$$\frac{MA}{MB} = 0 \Rightarrow MA = 0. \text{ c'est-à-dire } M = A, E = \{A\}$$

2^{ème} cas si $k = 1$

$$\frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow MA = MB.$$

Alors E est la médiatrice de [AB]

3^{ème} cas : si $k \notin \{0, 1\}$

1) pour $k < 0$ alors $E = \emptyset$

2) pour $k > 0$ alors $\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow \frac{MA^2}{MB^2} = k^2 \Rightarrow MA^2 = k^2 MB^2 \Rightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$. On a la forme $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$MA^2 - k^2 MB^2 = (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})$$

$$\text{On a : } MA^2 - k^2 MB^2 = 0$$

$$(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0 \text{ alors } \begin{cases} \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = 0 \\ \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = 0 \end{cases}$$

On désigne par G_1 le barycentre de (A, 1) et (B, -k) et G_2 le barycentre de (A, 1) et (B, k)

On peut écrire $\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} = (1 - k)\overrightarrow{MG_1}$ et $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = (1 + k)\overrightarrow{MG_2}$. Alors $MA^2 - k^2 MB^2 = 0$

$$(1 - k)\overrightarrow{MG_1} \cdot (1 + k)\overrightarrow{MG_2} = 0 \Rightarrow (1 - k^2)\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$$

Alors l'ensemble des points cherchés est le cercle de diamètre le segment $[G_1 G_2]$

Évaluation 25

Déterminons l'ensemble M des points du plan dans les cas suivants :

$$\text{a) } \frac{MA}{MB} = 2 \quad \text{b) } \frac{MA}{MB} = -2$$

Séquence 4 : Les droites dans le plan (4 heures)**1) Rappel sur les droites****Approche 14 en groupe de travail**

On considère les équations suivantes :
(E1) : $x + 2y + 1 = 0$ et (E2) : $x^2 - y + 1 = 0$

Consignes

Compléter les tableaux suivants correspondant à E1 et E2:

(E1)

x	-1	3	5
y			

(E2)

x	-2	0	1	2
y				

1) Tracer les graphes correspondants à ces deux équations.

2) Conclure.

Synthèse Partielle 8

L'équation (E1) est l'équation d'une droite et (E2) n'est pas l'équation d'une droite.

Synthèse Générale 20

-Par deux points distincts, on peut mener une et une seule droite.

-Par un point, on peut mener une infinité de droites.

-Une droite est algébriquement donnée par son équation cartésienne.

2) Points alignés**Approche 15 en groupe de travail**

On considère les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Consignes

Construire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis calculer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Synthèse Partielle 9

On dit que les trois points A, B et C sont alignés.

Synthèse Générale 21

Étant donnés trois A, B et C trois points du plan.

A, B et C sont alignés ou qu'ils sont sur une même droite

équivalent à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Autrement dit A, B et C sont alignés si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

Évaluation 26

On donne les points A, B et C de coordonnées respectives

$(-4 ; 2)$; $(2 ; 5)$ et $(0 ; 4)$.

Démontrer que ces points sont alignés.

3) Équation d'une droite**a) Définition**

On nomme équation cartésienne d'une droite, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ (avec a, b et $c \in \mathbb{R}$ et a et b non tous nuls).

Évaluation 27

Parmi les équations suivantes, préciser celle qui sont équation d'une droite :

$$\text{a) } -2x + y + 1 = 0 \quad \text{b) } \sqrt{2}x - y = 0 \quad \text{c) } x^2 - y + 8 = 0$$

b) Tracé d'une droite

En général on trace une droite à travers le tableau de valeurs (tableau à double entrée en x et y).

Évaluation 28

Tracer les droites d'équations : $x + y + 2 = 0$ et $y = x$ dans un repère orthonormé.

Remarque

1) Les droites d'équation $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ sont parallèles à l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ sont parallèles à l'axe des abscisses.

2) Étant donnée une droite (D) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$

a) Le point $M(\alpha; \beta)$ appartient à la droite (D) si

$$a\alpha + b\beta + c = 0$$

b) Les coordonnées d'un point quelconque M de (D) sont :

$$M(\alpha; \frac{c-a\alpha}{b}) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ ou } M(\frac{c-b\beta}{a}; \beta) \text{ Avec } \beta \in \mathbb{R}$$

Évaluation 29

1) Tracer dans un même repère les droites d'équation :

$$x = -2, x = 0, x = 1, y = -3, y = 0 \text{ et } y = 5$$

2) On considère la droite d'équation cartésienne

$$2x + 3y + 1 = 0$$

Prouver que le point A (1 ; -1) appartient à cette droite et trouver un autre point quelconque de cette droite.

c) Vecteur directeur d'une droite**Synthèse Générale 22****Définition**

Étant donnée une droite (D) d'équation cartésienne

$$ax + by + c = 0 \text{ (avec } a \text{ et } b \text{ non tous nuls).}$$

Un vecteur directeur de la droite (D) est le vecteur $\vec{u} = (-b; a)$

Remarque

Le vecteur directeur de la droite (D) est parallèle à (D).

Évaluation 30

Trouver un vecteur directeur de la droite (D) d'équation

$$3x + 4y = 0$$

d) Vecteur normal d'une droite**Définition**

Étant donnée une droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$. On nomme vecteur normal ou perpendiculaire à la droite (D) le vecteur de coordonnées $\vec{v}(a; b)$.

Évaluation 31

Trouver le vecteur normal de la droite d'équation

$$x + 2y + 12 = 0$$

e) Coefficient directeur d'une droite**Définition**

Étant donnée une droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$.

L'équation de cette droite peut être écrite sous la forme $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$ en posant $m = \frac{-a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$ on a : $y = mx + p$ alors le réel m est appelé coefficient directeur de la droite (D) et p l'ordonnée à l'origine.

Évaluation 32

On donne la droite (Δ) d'équation cartésienne

$$x + 2y + 1 = 0. \text{ Trouver le coefficient directeur de } (\Delta).$$

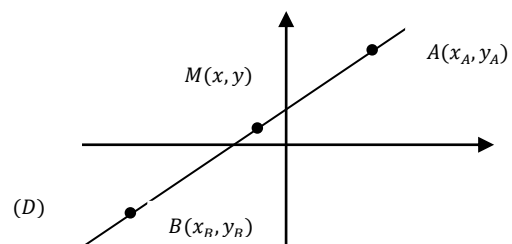
Remarque

1) Dans un repère orthogonal le coefficient directeur d'une droite est également appelé pente de la droite ou coefficient angulaire de la droite.

2) Soit (D) la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$

On peut mettre cette équation sous la forme

(D): $y = mx + p$, que l'on appelle équation réduite de (D)

f) Construction et équation d'une droite définie par deux points distincts A et B

Soit (D) la droite passant par les points

$A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. L'équation cartésienne de (D) est telle que : soit $M(x, y)$ un point de (D) les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires. On a : $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{AM}, \vec{AB}) = 0$

$$\det(\vec{AM}, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0$$

Après développement on obtient une équation cartésienne de (D)

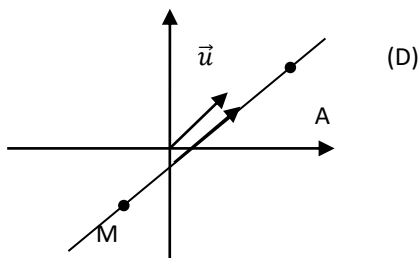
$$(D) : (y_B - y_A)x + (x_A - x_B)y - x_Ax_B + x_By_A = 0$$

Évaluation 33

Dans les cas suivants, construire la droite (AB) qui passe par A et B puis déterminer une équation de (AB)

i) $A(1,5)$ et $B(-1,3)$ ii) $A\left(\frac{-4}{5}, \frac{2}{3}\right)$ $B\left(\frac{3}{2}, \frac{-2}{7}\right)$

g) Construction et équation d'une droite définie par un point et un vecteur directeur



Soit (D) la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et admettant $\vec{u}(a, b)$ comme vecteur directeur. Alors une équation de (D) est telle que :

Soit $M(x, y)$ un point de (D)

Les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaire, c'est-à-dire $\det(\vec{AM}, \vec{u}) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a \\ y - y_A & b \end{vmatrix} = 0$$

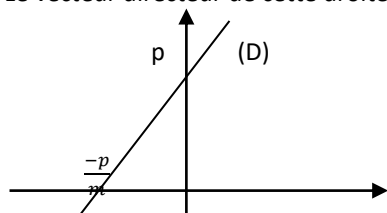
Soit (D) : $bx - ay + ay_A - bx_A = 0$

Évaluation 34

Déterminer une équation de la droite (Δ) passant par $A(3, -2)$ et de vecteur $\vec{u}(1,2)$

h) Construction et équation d'une droite définie par un point A et le coefficient directeur

Soit la droite (D) d'équation $y = mx + p$ qui est sécante à l'axe des ordonnées. Le réel p est appelé ordonnée à l'origine. Le vecteur directeur de cette droite est $(1, m)$.



Si la droite (D) passe par $A(x_A, y_A)$ $m \in \mathbb{R}$ étant le coefficient directeur de (D), alors on peut écrire :

$$y_A = mx_A + p \Rightarrow p = y_A - mx_A$$

En remplaçant p par son expression, on a $y = mx + y_A - mx_A$ d'où l'équation de (D)

$$(D) : y = mx + y_A - mx_A$$

Évaluation 35

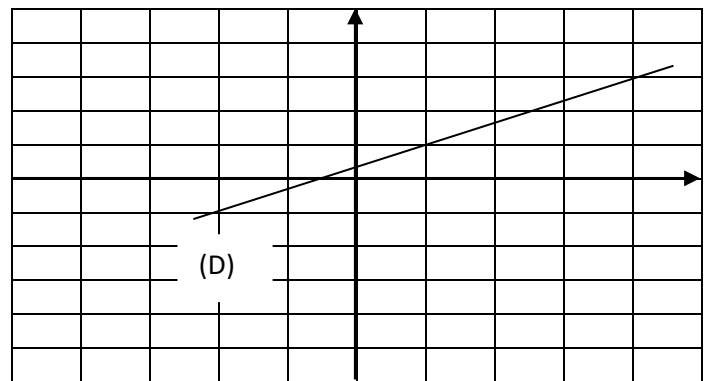
Écrire une équation de la droite (Δ) passant par le point A de coefficient directeur m dans les cas suivants :

i) $A(-3,0)$ $m = 2$ ii) $A(-3, -2)$ $m = \frac{1}{2}$

i) Détermination graphique du coefficient directeur d'une droite du plan

Évaluation 36

Soit la droite (D) ainsi représentée :



Trouver le coefficient directeur de (D).

j) Retrouver une équation à partir des données graphiques

Évaluation 37

Soit la droite (D) passant par les points $A(-1,1)$ et $B(1,2)$.

Déterminer une équation de (D).

k) Droites parallèles

Étant données (D) et (D') deux droites d'équations réduites respectives $(D): y = mx + p$ et $(D'): y = m'x + p'$

(D) et (D') sont parallèles si $m = m'$

Évaluation 38

Les droites suivantes sont-elles parallèles ?

a) $(D) : 3x - y + 5 = 0$, $(D') : -3x + y - 2 = 0$

b) $(\Delta) : -x - y - 1 = 0$, $(\Delta') : x - y - 1 = 0$

l) Droites perpendiculaires

Étant données (D) et (D') deux droites d'équations réduites respectives $(D): y = mx + p$ et $(D'): y = m'x + p'$

(D) et (D') sont perpendiculaires ssi $m \cdot m' = -1$

m) Droites sécantes

Étant données les droites (D) et (D') d'équations respectives :
 $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$

1^{er} cas : Si (D) et (D') sont parallèles

Alors elles n'ont pas de points d'intersection

1^{er} cas : Si (D) et (D') sont non parallèles

Alors (D) et (D') se coupent en un point unique.

Ce point a pour coordonnées les solutions du système d'équation formé par les deux équations.

Évaluation 39

On donne les équations des droites (D_1) et (D_2) par leurs équations.
 Préciser si elles sont sécantes ou non.
 Si elles sont sécantes trouver leur point d'intersection dans les cas suivants :

a) (D_1): $4x - 6y + 1 = 0$ (D_2): $2x - 3y + 5 = 0$

b) (D_1): $x + y = 5$ (D_2): $2x + y - 4 = 0$

n) Équation paramétrique d'une droite**i) Approche 16 en groupe de travail**

Soit la droite (D) passant par $A(1, -2)$ et dirigé par le vecteur $\vec{u}(-1, 3)$

Consignes

1) Pour tout point $M(x, y)$ de (D) prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaire c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

2) Exprimer les coordonnées de M en fonction de t.

Synthèse Partielle 10

On dit que cette expression ainsi est la représentation paramétrique de la droite (D).

ii) Définition

Étant donnée une droite (D) passant par les points $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b)$. Pour tout point $M(x, y) \in (D)$, on appelle représentation paramétrique de (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le système $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases}$ où t est un paramètre réel.

Évaluation 40

Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par $A(-1, 5)$ et dirigé par le vecteur $(1, -1)$

o) Équation cartésienne d'une droite à partir de l'équation paramétrique**Évaluation 41**

Trouver l'équation cartésienne de la droite (D) de

représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$

p) Représentation paramétrique d'une droite à partir de l'équation cartésienne**Évaluation 42**

Trouver une représentation paramétrique de la droite (D) d'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$.

q) Appartenant d'un point à une droite définie par sa représentation paramétrique**Évaluation 43**

Soit la représentation paramétrique de la droite (Δ)

$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Les points $A(2, -3)$ et $B(4, -3)$ appartient – ils à (Δ) ?

Séquence 5 : Cercle du plan (3 heures)**1) Équation d'un cercle****Approche 17 en groupe de travail**

Soit l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant l'équation

(E) : $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$

Consignes

Prouver que le point $A(3, 0)$ vérifie également (E).

Synthèse Partielle 11

On dit que le point A est sur le cercle d'équation (E)

Synthèse Générale**Définition**

Étant données A un point quelque du plan et r un nombre réel strictement positif. On nomme cercle (C) de centre A et de rayon r l'ensemble des points M du plan tel que $d(A, M) = r$.

Remarque

Un cercle est entièrement définie par :

-Son équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 9 = 0$

-Son centre et son rayon

-Son diamètre

2) Cercle défini par son centre et son rayon

Soit $A(x_A, y_A)$ un point du plan et $r \in \mathbb{R}_+$

Le cercle (C) de centre A et de rayon r est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $d(A, M) = r$

$$\text{Or } d(A, M) = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}$$

$$d(A, M) = r \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = r$$

$$\text{Soit } (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_Ax - 2y_Ay + x_A^2 + y_A^2 - r^2 = 0$$

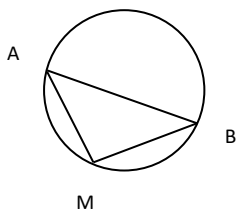
On note $\mathcal{C}(A, r)$ le cercle de centre A et de rayon r

Évaluation 44

Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) de centre $A(-1, 2)$ et de rayon 3.

3) Cercle défini par son diamètre

Étant donnés $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux distinct du plan. Le cercle (C) de diamètre [AB]. Ce cercle a pour équation telle que :



Soit $(x, y) \in (C)$. On remarque que le triangle AMB est rectangle en M, c'est-à-dire que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix} = 0$$

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

$$x^2 + y^2 - (x_A + x_B)x - (y_A + y_B)y + x_Ax_B + y_Ay_B = 0$$

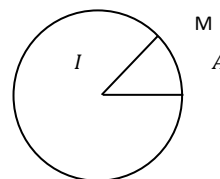
D'où l'équation du cercle (C)

Évaluation 45

Soient les points A et B de coordonnées respectives (1, -1) et (2, 0). Trouver l'équation cartésienne du cercle de diamètre [AB].

Remarque

Le centre I du cercle de diamètre [AB] est le milieu du segment [AB] ayant pour coordonnées $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

4) Cercle défini par son centre et un point quelconque sur le cercle

Soit (C) le cercle de centre $I(\alpha, \beta)$, A un point de (C)

et $M(x, y)$ un point de (C). On a :

$$\text{Soit } \begin{cases} r = IA \text{ le rayon de (C)} \\ AM = r \end{cases} \text{ et}$$

$$r = \sqrt{(x_A - \alpha)^2 + (y_A - \beta)^2} \text{ alors } IM = r \Rightarrow \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = r$$

$$\text{D'où l'équation de (C) : } (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Évaluation 46

Trouver l'équation du cercle de centre $I(-3, -2)$ et passant par $A(1, 0)$.

5) Étude du cas général

1) Étant donné un cercle (C) et $M(x, y)$ un point de (C). Il existe trois nombres réels p, q et ℓ tel que pour $M \in (C)$ on a : $x^2 + y^2 + px + qy + \ell = 0$

2) Soit $M(x, y)$ un point vérifiant $x^2 + y^2 + px + qy + \ell = 0$

L'ensemble de ces points M peut être :

-soit un cercle, soit un point ou soit l'ensemble vide

6) Reconnaissance d'un cercle (décomposition canonique)

$$\text{Soit l'équation (E) : } x^2 + y^2 + px + qy + \ell = 0$$

On transforme (E) sous la forme

$$(E) : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R, \text{ ainsi on distingue 3 cas :}$$

1^{er} cas : si $R < 0$

L'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant (E) n'existe pas c'est-à-dire $E = \emptyset$

2^{ème} cas : Si $R = 0$

L'ensemble des points M cherché est le point $I(\alpha, \beta)$ c'est-à-dire $M = I$

3^{ème} cas : si $R > 0$

L'ensemble des points M cherché est sur le cercle de centre $I(\alpha, \beta)$ et de rayon $r = \sqrt{R}$

Évaluation 47

Trouver l'ensemble des points vérifiant les équations suivantes :

a) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 20 = 0$

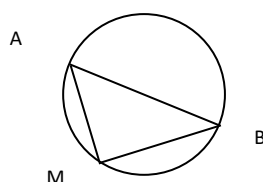
b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0$

7) Détermination du cercle passant par 3 points quelconques

Étant données A, B et C trois points non alignés du plan, il existe un et un seul cercle passant par ces trois points.

1^{er} cas : si les deux points sont diamètres du cercle



On trouve l'équation du cercle telle que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

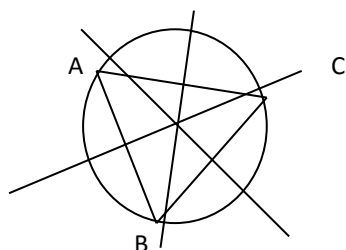
C'est-à-dire :

$$x^2 + y^2 - (x_A + y_A)x - (y_A + y_A)y + x_A x_B + y_A y_B = 0$$

Évaluation 48

On donne les points A(1, -2) et B(0,5). Soit (C) le cercle de diamètre [AB]. Déterminer une équation de (C).

2^{ème} cas : si deux points ne sont pas diamètre du cercle



Dans ce cas le centre du cercle est le point de concours des trois médiatrices des trois côtés du triangle ABC.

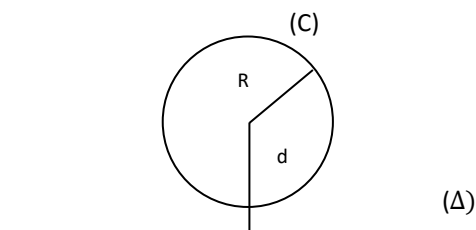
Pour trouver les coordonnées du centre I on cherche les équations de deux médiatrices et leurs points d'intersection est le point I.

Évaluation 49

Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) passant par les points A(-2,3), B(4,1) et C(-5,-1)

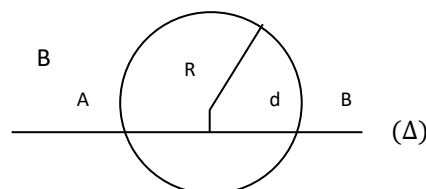
8) Position relative d'un cercle et d'une droite

1)



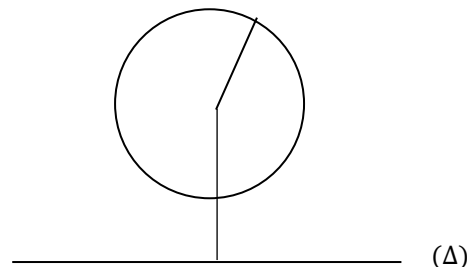
(Δ) est extérieur à (C) ($d > R$)

2)



(Δ) coupe (C) en A et B ($d < R$)

3)



(Δ) est tangente à (C) ($d = R$)

Évaluation 50

1) Construire le cercle (C) de centre I(-3,2) et de rayon 3 et la droite (D) d'équation cartésienne (D) : $x + y + 1 = 0$

2) Étudier la position relative de (C) et (D).

Histoire de mathématiciens

Al – Kachi

Al-Kachi ou Al-Kashi, le natif de Kashan. De son nom complet **Ghiyath ad-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi** (Ghiyath ad-Din: « secours de la religion », Mas'ud: « heureux », Jamshid: « Yama le brillant » en persan)
Il est mathématicien et astronome perse (vers 1380, Kashan (Iran) - 1429, Samarcande (Ouzbékistan)).

Mention légale – Mathematikos 2015/2016