

Transformations et isométries du plan

Séquence1 : homothétie ponctuelle

Activité1

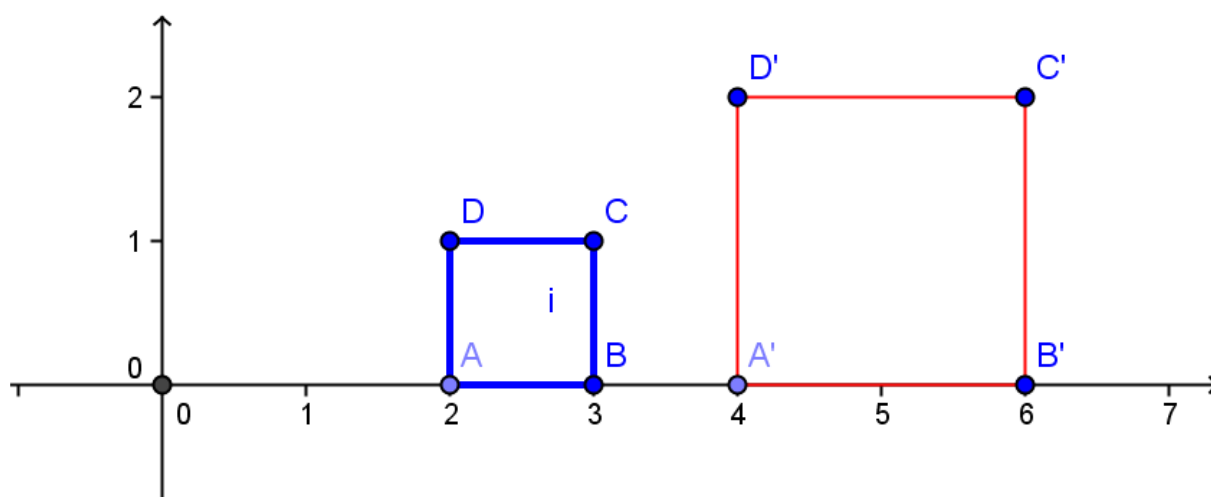
On considère dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points $A(2;0)$; $B(3;0)$; $C(3;1)$ et $D(2;1)$.

On associe à chaque point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$ (le point M' est appelé image du point M)

1°) Placez les images A' ; B' ; C' et D' des points A ; B ; C ; et D

2°) Vérifiez sur le dessin que :

$A'B'C'D'$ semble être un carré de côté 2 unités. On dit que $A'B'C'D'$ est l'image du carré $ABCD$



Synthèse1 :

la transformation qui fait correspondre à chaque point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = K\overrightarrow{OM}$ est appelé homothétie de centre O et de rapport K . Où K est un réel non nul.

Cette transformation agrandit les figures lorsque $|K| > 1$, elle les réduit lorsque $|K| < 1$

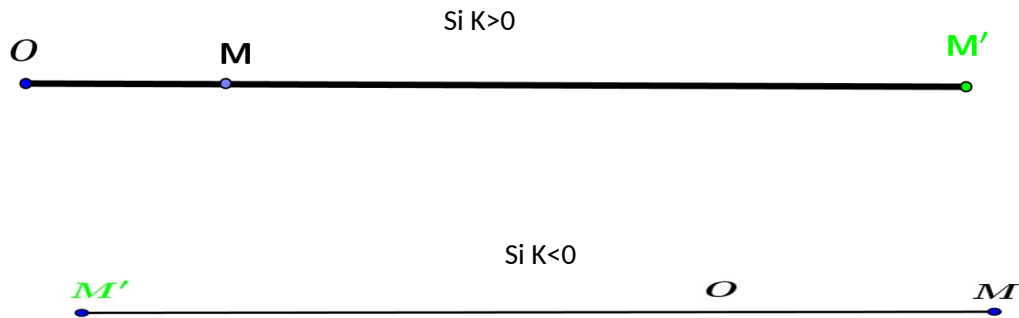
Définition :

Soit O un point, K un réel non nul.

On appelle homothétie de centre O et de rapport K la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = K\overrightarrow{OM}$.

Notation :

On note généralement $h(O; k)$ l'homothétie de centre O et de rapport K .



Exemples :

Construire les images A' et B' des points A et B par homothétie de centre O et de rapport -3 .

Construire les images M' et N' des points M et N par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{3}{2}$.

Conséquence de la définition :

Propriété1 :

Si M' est l'image M par l'homothétie de centre O , alors les trois points sont alignés.

Propriété2 :

Le seul point invariant par une homothétie de rapport K différent de 1 est son centre

Propriété3 :

Soit O un point, K un nombre réel non nul. Quels que soient les points M et M' , on a :

$$\overrightarrow{OM'} = K \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{K} \overrightarrow{OM'}$$

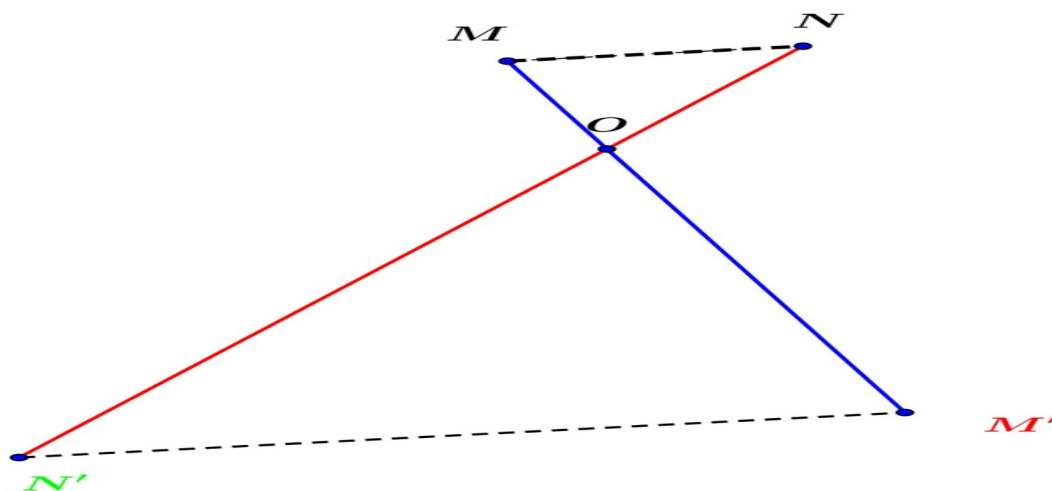
Propriété de l'homothétie :

Activité :

Soit h une homothétie de rapport -3 et de centre O .

Construire les points M' et N' image respectives par h des points M et N

Comparer les longueurs $M'N'$ et MN



Synthèse :

D'après la construction, on constate que $M'N' = 3 MN$

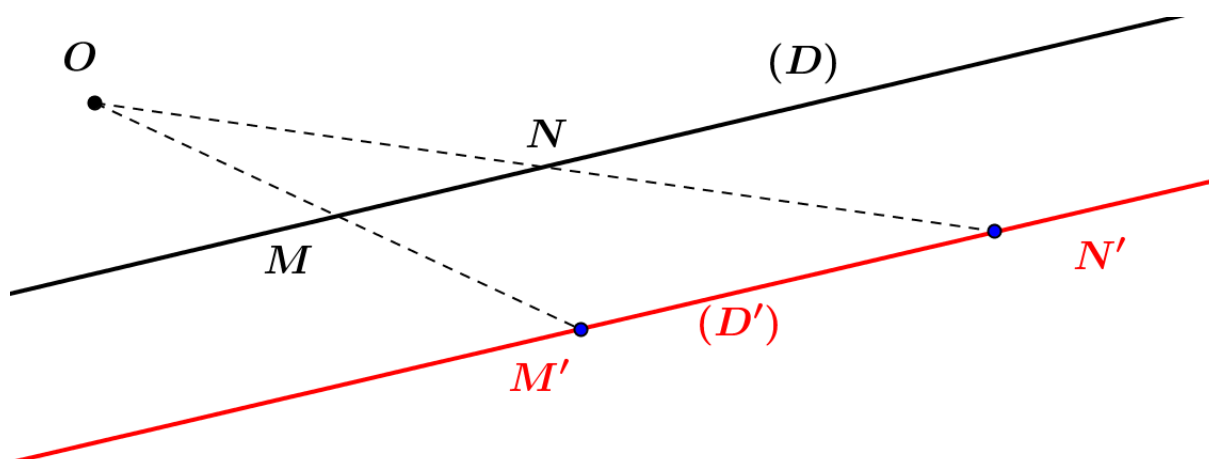
Propriété fondamentale :

Soit h une homothétie de rapport K , M' N' les images respectives par h de deux points quelconques M et N on a : $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$.

Images de figures simples :

Activité :

Soit (D) une droite, construire la droite (D') image de (D) par l'homothétie de centre O et de rapport 2



Synthèse :

On constate que l'image d'une droite (D) par une homothétie de centre O et de rapport K est une droite (D') et (D') est parallèle à (D) .

Propriété :

Soit h une homothétie de rapport K , A' , B' et I' les images respectives de A , B , I ($A \neq B$) et par h :

1°) l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$ et $(A'B')$ est parallèle à (AB)

2°) L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.

3°) L'image de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$

4°) L'image du cercle de centre I et de rayon r est le cercle de centre I' et de rayon $|K|r$.

Séquence2 : Isométries du plan

Isométrie du plan :

Définition :

Une isométrie est une transformation du plan qui conserve les mesures

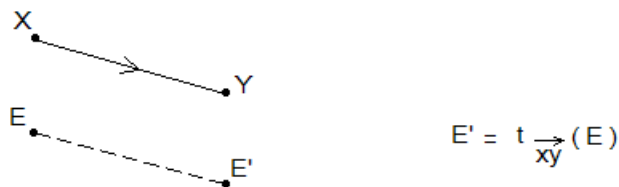
Les différents types d'isométries :

- la translation qui fait glisser les figures
- la symétrie orthogonale qui retourne les figures
- la symétrie centrale qui fait tourner les figures de 180°
- la rotation qui fait tourner les figures.

1) Translation :

Activité :

Construire l'image E' du point E par la translation du vecteur $\overrightarrow{XY}$



Synthèse :

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point

M associe M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

En général, on note $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$, et on écrit $M' = t_{\vec{u}}(M)$

Propriété :

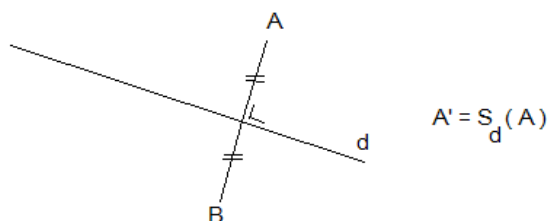
L'image d'une droite D par une translation est une droite D' parallèle à D

ou encore une translation transforme une droite en une droite parallèle.

2) la symétrie orthogonale qui retourne les figures

Activité :

Construire le point A' image de A par la symétrie orthogonale d'axe d.



Synthèse :

Définitions :

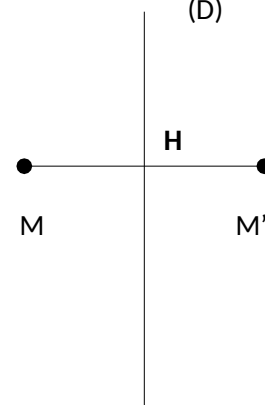
(1) Soit (D) une droite du plan, la symétrie orthogonale d'axe (D) est l'application du plan vers lui-même qui à tout point M du plan associe M' tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$ (D)

Où H est le pied de la perpendiculaire à (D) issue de M.

(2) C'est l'application du plan vers lui-même qui à tout point M associe M' tel que (D) soit la médiatrice de [MM']

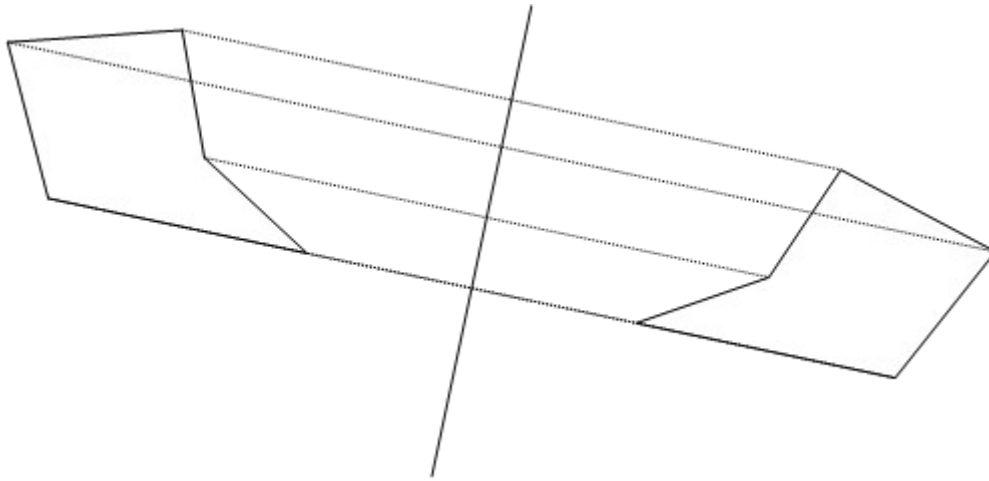
où le point M lui-même s'il est sur (D)

Les définitions sont équivalentes, cette dernière permet



Vulgarisation :

Pour obtenir le symétrique d'une figure par rapport à une droite, il suffit de plier la feuille suivant cette droite et de faire coïncider la figure transformée par transparence d'éviter l'outil vectoriel.



Propriétés :

Propriété 1 :

La symétrie orthogonale est une isométrie ; elle conserve donc l'alignement, le parallélisme et l'orthogonalité (ainsi que les angles).

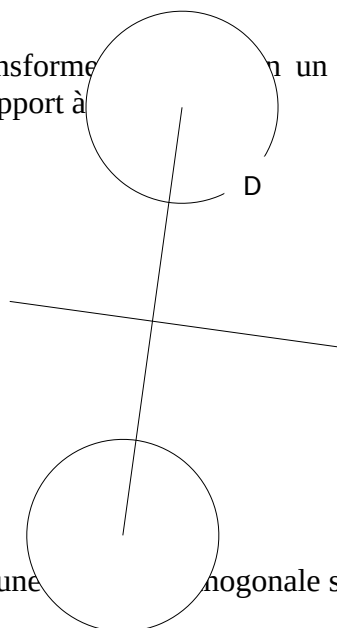
Propriété 2 :

La symétrie orthogonale est une bijection involutive (elle est égale à sa réciproque)

On dit que les points M et M' sont symétriques par rapport à (D)

Propriété 3 :

Une symétrie orthogonale transforme un cercle en un cercle de même rayon et les deux centres sont symétriques par rapport à (D)



Propriété 4 :

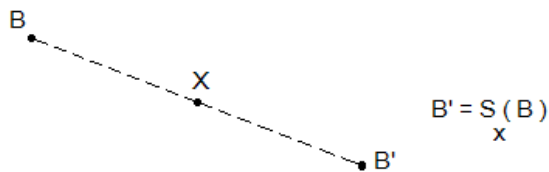
Les seuls points invariants par une symétrie orthogonale sont ceux de l'axe de symétrie.

3) la symétrie centrale qui fait tourner les figures de 180°

Activité :

Construire l'image du point B par la symétrie de centre X

Que constatez-vous ?



Synthèse :

Définitions :

- (1) une symétrie centrale de centre O est une transformation de centre O et d'angle plat.
- (2) une symétrie centrale de centre O est l'application du plan vers lui-même qui à tout point M associe M' tel que O soit le milieu de [MM'] (si M est distinct de O)

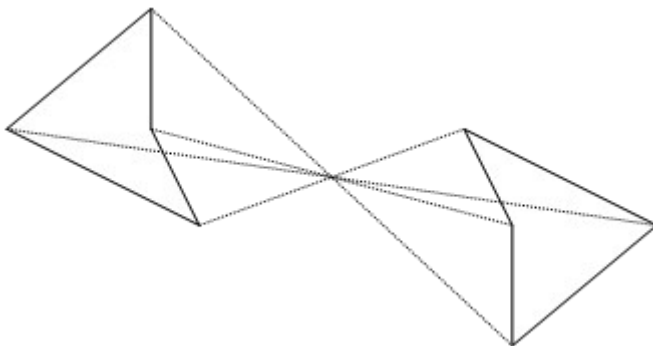
Remarque : le point M lui-même si M est confondu avec O

- (3) la symétrie centrale est aussi une homothétie de rapport -1

Conséquence : une symétrie centrale est une isométrie directe.

Elle conserve donc l'alignement, le parallélisme et l'orthogonalité (et plus généralement les angles)

Vulgarisation : comme mentionné au paragraphe précédent, on obtient le symétrique d'une figure en la faisant tourner d'un angle plat autour d'un point fixe.



Propriétés supplémentaires :

Propriété 1 :

Une symétrie centrale transforme une droite en une droite parallèle

Propriété 2 :

Si M' est le symétrique de M par rapport à O , alors M est le symétrique de M' par rapport à O

On dit que M et M' sont symétriques par rapport à O .

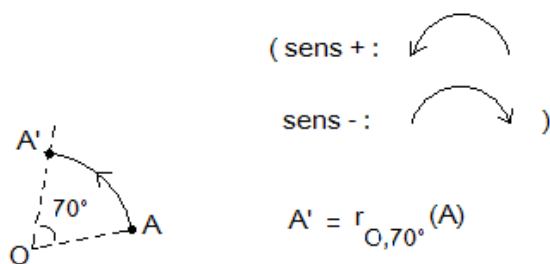
La bijection réciproque de S_o est S_o elle-même : on dit qu'elle est involutive.

4) la rotation qui fait tourner les figures

Activité :

Construire l'image du point A par la rotation de centre O et l'angle $\alpha = 70^\circ$

Que constatez-vous ?



Synthèse :

Définition :

On appelle rotation toute application r du plan vers lui-même, pour laquelle il existe un point O et un angle α (orienté) tels que $R(O) = O$ et que pour tout point M , différent de O son image $R(M)$ est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon OM avec la demi-droite issue de O qui forme avec $[OM]$ un angle égal à α .

O est le centre de la rotation

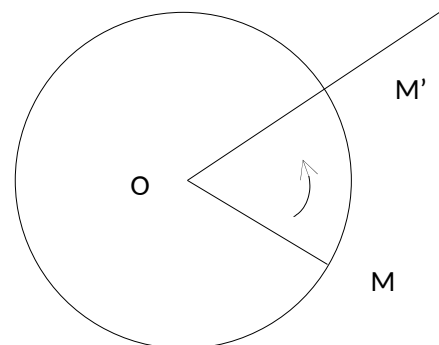
α est l'angle (orienté) de la rotation

Si α est différent de l'angle nul,

O est le seul point fixe (on dit aussi invariant) de la rotation.

La construction du transformé d'un point résulte de la définition : il suffit de tracer le cercle de centre O et de

$\Rightarrow \Rightarrow$
rayon OM et l'angle (OM, OM') égal à « α »



Les rotations sont des isométries et vérifient donc les propriétés de conservation de l'alignement, du parallélisme et de l'orthogonalité.

Cas particulier: une rotation d'angle plat (180° ou π radians) est une symétrie centrale.

Propriété :

Corollaire :

Une isométrie directe sans point invariant est une translation

Propriétés des isométries

Propriété 1 :

L'image d'une droite par une isométrie est une droite.

On peut dire aussi : « une isométrie conserve l'alignement »

Propriété 2 :

Une isométrie conserve le parallélisme

Si D_1 et D_2 sont deux droites parallèles, alors leur image D'_1 et D'_2 sont deux droites parallèles.

Attention : une isométrie ne transforme pas nécessairement une droite en une droite parallèle.

Propriété 3 :

Une isométrie conserve l'orthogonalité.

Si D_1 et D_2 sont deux droites perpendiculaires, alors leur image D'_1 et D'_2 sont deux droites perpendiculaires.

Plus généralement, une isométrie conserve les angles.

Propriété 4 :

L'image d'un cercle par une isométrie est un cercle dont le centre est le transformé du centre du cercle initial.

Une isométrie est directe si et seulement si elle conserve le sens de tous les angles du plan.

Les seules isométries directes du plan sont les translations et les rotations.

Une isométrie est indirecte si et seulement si elle inverse le sens de tous les angles du plan.

