

Classe : 10^{ème} Commune

Chapitre : 2 Durée : 12H

Calcul dans $\mathbb{R}$ **Domaine** : Sciences, Mathématiques et Technologiques**Compétences** : Résoudre une situation problème, Communiquer des messages utilisant le langage et le symbolisme Mathématiques.**Composantes** : Diagnostiquer la situation problème, mettre à l'essai des pistes de solutions, partager les informations relatives à la démarche et formuler les résultats.**Manifestations** : Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation, établir des relations entre les données retenues, inventorier des différentes pistes de solution, Choisir une piste et l'appliquer.**Contenu** :**Ressources Educatives** :**Ressources humaines** : Professeur, élèves,**Ressources Matérielles** : Tableau, Livres, cahier, Chiffon, craie ...**Stratégies d'animation** : Travaux en groupe (pédagogie active).**Séquence1 : Rappels et compléments des propriétés de $\mathbb{R}$. (2h)****Pré évaluation** :

Répondre par vraie ou faux les affirmations suivantes ;

$$-2 \in \mathbb{N} \quad 0.6 \in \mathbb{Q} \quad -6 \in \mathbb{Z} \quad 1/2 \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{7} \in \mathbb{Q} \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}.$$

1. Quotient :**Activité** :

Effectuer les opérations suivantes :

$$1 + \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \quad -2 \times \frac{-3}{4}, \quad \frac{5}{6} \times \frac{6}{10}, \quad \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{5}{2}.$$

Synthèse :**Définition** :Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$.Le quotient de a par b est l'unique nombre réel x tel que : $bx = a$. On le note $\frac{a}{b}$.Remarque : $\frac{a}{b}$ n'a de sens que si $b \neq 0$.**Propriétés** :Soit a, b, c, d des nombres réels non nuls.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \frac{a}{b} + c = \frac{a+bc}{b}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b/c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b} \quad \frac{a/b}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}$$

2. Puissance :**Activité** :

Mettre sous forme de produit de puissance :

$$(2^2)^3 \times 3^3 \times 2; \quad 5^2 \times (7^3)^2 \times 2^4$$

Mettre sous forme de puissance d'un nombre :

$$(3^2)^3 \times 4^6; \quad (2^2)^2 \times 5^3 \times 5 \times 7^4$$

Synthèse :**Définition** :Soit $a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*$.On appelle puissance $n^{\text{ième}}$ le nombre réel noté

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}.$$

Par convention : $a^0 = 1$.**Propriétés** :Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ et $a, b \in \mathbb{R}^*$.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n \times b^n \quad (a/b)^n = a^n/b^n$$

$$a^m/a^n = a^{m-n}$$

3. Racines carrées :**Activité** :

Effectuer les opérations suivantes :

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3}, \quad \sqrt{6}/\sqrt{2}, \quad \sqrt{2}^3, \quad \sqrt{4}, \quad \sqrt{9} + \sqrt{4}$$

Synthèse :**Définition** :Soit a un nombre réel positif. $\sqrt{a}$ est l'unique nombre réel positif dont le carré est a .Remarque : $\sqrt{a}$ n'a de sens que si a est positif ou nul.**Propriétés** :Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*; n \in \mathbb{N}$.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}; \quad \sqrt{a}/\sqrt{b} = \sqrt{a/b}; \quad \sqrt{a^n} = \sqrt{a}^n.$$

$$\sqrt{a^2} = |a|; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Attention :En général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.**Evaluation1** :a) a et b étant des nombres réels non nuls, simplifier :

$$A = a^3 \times a^4; \quad B = (a^3)^5; \quad C = [(a^2)^3]^4; \quad D = (ab^2)^3; \quad E = (a^2)^4 \times (ab)^3.$$

b) Simplifier :

$$A = \frac{2^2 \times 3^2}{2 \times 3 \times 4}; \quad B = \frac{2 \times 5 \times 7^2}{2 \times 5^2 \times 7}; \quad C = \frac{4^2 \times 3^2 \times 5^4 \times 10^3}{2^4 \times 5^3 \times 10^5}.$$

Evaluation2 :

1) Factoriser :

$$f(x) = 4x^2 - 1; \quad g(x) = 16x^2 - 8x + 1; \quad k(x) = x^2 - 2x + 1 + (2x - 2) + x^2 - 1.$$

2) Développer :

$$f(x) = (x^2 + 4x - 4)(2x - 3x^2); \quad h(x) = (3a - 2)(3a + 2); \quad g(x) = (x - 2)^3.$$

Séquence2 : Différentes écritures d'un nombre réel, valeur absolue et distance (2h).1) **Différentes écritures d'un nombre rationnel :**a) **Ecriture sous forme de fraction :**

le nombre décimal 5,4 peut s'écrire sous la

forme : $\frac{54}{10} = \frac{27}{5}$. On dit alors que $\frac{54}{10}$ et $\frac{27}{5}$ sont des écritures sous forme de fraction de 5,4.

b) Ecriture décimale illimitée périodique :

Tout nombre rationnel admet une écriture décimale illimitée périodique.

Exemple :

$\frac{1}{3} = 0,33333 \dots$ avec une succession illimitée du chiffre 3, on note $\frac{1}{3} = 0,3 \dots$

Donc $\frac{1}{3} = 0,3 \dots$ est appelée écriture décimale illimitée périodique de $\frac{1}{3}$.

Evaluation :

a) Ecrire sous forme de fraction :

$a = 2,543 \dots$ $b = 1,63 \dots$ $c = -5,178 \dots$

b) Trouver l'écriture décimale illimitée périodique.

$$a = \frac{153}{33} \quad b = \frac{163}{7}$$

2) Valeur absolue :

Activité :

Calculer : $|5|$; $|-2|$; $|-7|$; $|\frac{1}{2}|$.

Synthèse :

D'une manière générale pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Activité2 :

Soient $a = -5$ $b = 2$

Calculer puis comparer :

$$|a \times b| \text{ et } |a| \times |b| \quad |a + b| \text{ et } |a| + |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| \text{ et } \frac{|a|}{|b|} \quad |a - b| \text{ et } |b - a|$$

Synthèse :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$|a| \geq 0 \quad |a \times b| = |a| \times |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad b \neq 0 \quad |a - b| = |b - a|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Evaluation : calculer pour $x = 0$; 1 ; -2 ; 4

$$A = |3x - 2| + |2x - 4| + |x + 2|$$

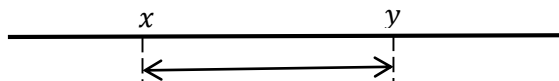
$$B = |x^3 + x| - |x^3| + |x|$$

3) Distance :

a) Définition :

x et y étant deux réels quelconques. On appelle de x à y le réel positif ou nul $|x - y|$.

On note : $d(x; y) = |x - y|$



Exemple : calculer $d(-9; 3)$

Activité :

Calculer puis comparer :

$$d(-1,5; 0,5) \text{ et } d(0,5; -1,5)$$

$$d(1; 5) \text{ et } d(1; -3) + d(-3; 5)$$

$$d(-7; 0) \text{ et } d(-7; -4) + d(-4; 0)$$

Synthèse :

En général pour tous réels x, y et z .

$$d(x; y) \geq 0 \quad d(x; y) = d(y; x)$$

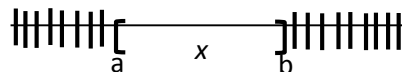
$$d(x; y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$$

Séquence3 : intervalles de $\mathbb{R}$ et équations inéquations avec valeur absolue.**1) Intervalle de $\mathbb{R}$:**

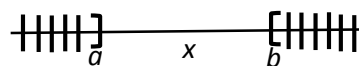
Soit a et b deux réels.

a) $[a; b]$ est appelé intervalle fermé a, b et $[a; b] = \{x / x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.



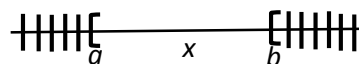
Remarque : $a \in [a; b]$, $b \in [a; b]$.

b) $]a; b[$ est appelé intervalle ouvert a, b et $]a; b[= \{x / x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$.



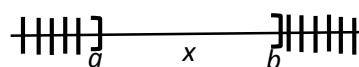
Remarque : $a \notin]a; b[$, $b \notin]a; b[$

c) $[a; b[= \{x / x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ est appelé intervalle semi-ouvert à droite (ou intervalle semi-fermé à gauche).



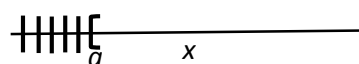
Remarque : $a \in [a; b[$, $b \notin [a; b[$

d) $]a; b] = \{x / x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$ est appelé intervalle semi-ouvert à gauche (ou intervalle semi-fermé à droite).

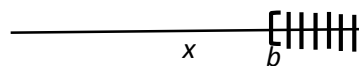


Remarque : dans chacune des définitions précédentes, a est appelé origine et b l'extrémité de l'intervalle.

e) $[a; +\infty[= \{x / x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$ est appelé intervalle fermé, infini à droite.



f) $]a; +\infty[= \{x / x \in \mathbb{R}, a < x\}$ est appelé intervalle ouvert, infini à gauche.



Remarque : $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$, $\emptyset =]a; a[$ sont aussi des intervalles.

Evaluation :

a) Ecrire sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles :

$$\mathbb{R}^+ ; \mathbb{R}_+^* ; \mathbb{R} - \{2; 3\}.$$

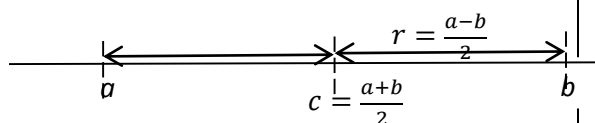
b) Ecrire sous forme ensemble les intervalles :

2) Centre et Rayon d'un intervalle :

Soit $[a; b]$ un intervalle fermé

✓ On appelle centre de l'intervalle $[a; b]$ le nombre réel $c = \frac{a+b}{2}$.

- ✓ On appelle rayon de l'intervalle $[a; b]$ le nombre réel positif non nul $r = \frac{b-a}{2}$
- ✓ $b - a$ est appelé la longueur de l'intervalle $[a; b]$.

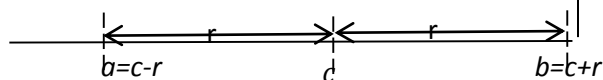

Remarque :

On notera par $I(c, r)$, l'intervalle ouvert de centre c et de rayon r .

On notera par $\bar{I}(c, r)$ l'intervalle fermé de centre c et de rayon r .

Connaissant le centre c et rayon r d'un intervalle I , on peut déterminer l'origine a et l'extrémité b de I .

On a : $a = c - r$ et $b = c + r$.


Evaluation:

a) Précise le centre et le rayon de chacun des intervalles suivants : $[2; 5]$; $]-1; 7[$; $[\frac{3}{5}; \frac{9}{2}]$

b) Préciser l'origine a et l'extrémité b de chacun des intervalles : $\bar{I}(2, 5)$; $\bar{I}(0, 2)$; $I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;

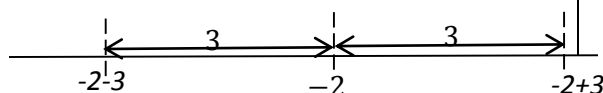
$I(-\frac{1}{3}, \frac{1}{5})$.

3) Equations et inéquations avec valeur absolue :
Activité1 :

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'équation,

$$|x + 2| = 3$$

$$|x + 2| = 3 \Rightarrow d(x; -2) = 3$$



L'ensemble solution $S = \{-5; 1\}$.

Synthèse :

De façon générale :

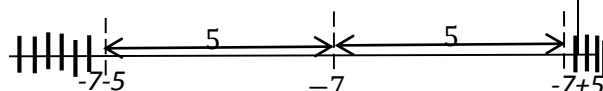
$$|x - a| = r \Rightarrow x = a - r \text{ ou } x = a + r.$$

Activité2 :

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation,

$$|x + 7| \leq 5$$

$$|x + 7| \leq 5 \Rightarrow d(x; -7) \leq 5 \Rightarrow x \in \bar{I}(-7; 5)$$



L'ensemble solution $S = [-12; -2]$.

Synthèse :

Plus généralement :

$$|x - a| \leq r \Rightarrow d(x; a) \leq r \Rightarrow x \in [a - r; a + r]$$

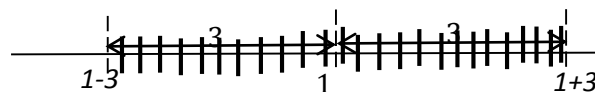
$$|x - a| < r \Rightarrow d(x; a) < r \Rightarrow x \in]a - r; a + r[$$

Activité3 :

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation,

$$|x - 1| \geq 3$$

$$|x - 1| \geq 3 \Rightarrow d(x; 1) \geq 3 \Rightarrow x \in I(1, 3)$$



L'ensemble solution $S =]-\infty; -2] \cup [4; +\infty[$

Synthèse :

Plus généralement :

$$|x - a| \geq r \Rightarrow d(x; a) \geq r$$

$$\Rightarrow x \in]-\infty; a - r] \cup [a + r; +\infty[$$

$$|x - a| > r \Rightarrow d(x; a) > r$$

$$\Rightarrow x \in]-\infty; a - r[\cup]a + r; +\infty[$$