

## **Calcul dans $\mathbb{R}$ :**

*Classe : 10<sup>ème</sup> Commune*

Chapitre : 2                      Durée : 12H

Domaine : Sciences, Mathématiques et Technologiques

Compétences : Résoudre une situation problème, Communiquer des messages utilisant le langage et le symbolisme Mathématiques.

Composantes : Diagnostiquer la situation problème, mettre à l'essai des pistes de solutions, partager les informations relatives à la démarche et formuler les résultats. Manifestations : Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation, établir des relations entre les données retenues, inventorier des différentes pistes de solution, Choisir une piste et l'appliquer.

Contenu :

Ressources Educatives :

Ressources humaines : Professeur, élèves,

Ressources Matérielles : Tableau, Livres, cahier, Chiffon, craie ...

Stratégies d'animation : Travaux en groupe (pédagogie active).

### **Séquence 1 : Rappels et compléments des propriétés de $\mathbb{R}$ :**

#### **A. Ensemble des Nombres :**

Activité 1-1 :

On donne l'ensemble  $A = \left\{ 0; -3; 100; \sqrt{5}; -1; \frac{1}{2}; -\sqrt{5}; -\frac{3}{4}; \pi; 2^5 \right\}$

- a) Quels sont les éléments de A qui sont élément de  $\mathbb{N}$  ;  $\mathbb{Z}$  ;  $\mathbb{Q}$  ; ou de  $\mathbb{R}$ ?
- b) Compare les ensembles  $\mathbb{N}$  ;  $\mathbb{Z}$  ;  $\mathbb{Q}$  ;  $\mathbb{R}$ .

**Consigne :**

C<sub>1</sub> : Travail en groupe.

C<sub>2</sub> : Durée 10 minutes

Synthèse partielle : (solution de l'activité 1-1)

**Synthèse générale :**

- L'ensemble des entiers naturels noté  $\mathbb{N}$  est défini par :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\} \quad \text{et} \quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$$

- L'ensemble des entiers relatifs noté  $\mathbb{Z}$  est défini par :

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\} \quad ; \quad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad ; \quad \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$$

- L'ensemble des nombres rationnels est noté  $\mathbb{Q}$  et défini par :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\} \quad \text{et} \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

- Un nombre  $x$  est dit carré parfait lorsqu'il existe un nombre  $a$  tel que :  $x = a^2$ .

Un nombre  $y$  est dit irrationnel lorsqu'il existe un nombre  $b$ , qui n'est pas un carré parfait, tel que :  $y = \sqrt{b}$ .

N.B :

- $\sqrt{b}$  n'a de sens que si  $b$  est positif ou nul.
- $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$

- L'ensemble des nombres réels est noté  $\mathbb{R}$  et il contient les nombres irrationnels. Ainsi :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

## B. Propriétés :

### Activité 1-2 :

Effectue les opérations suivantes :

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{2}; 3 + \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{1}{2} - 1 \quad ; \quad \frac{3}{2} - \frac{2}{5} \quad ; \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \quad ; \quad 3 \times \frac{1}{2} \quad ; \quad -2 \left( -\frac{5}{3} \right) \quad ; \quad \frac{3}{2} \div \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} \quad ; \quad -\frac{\frac{3}{9}}{\frac{5}{5}}$$

### **Consigne :**

C<sub>1</sub> : Travail en groupe.

C<sub>2</sub> : Durée 20 minutes

Synthèse partielle : (solution de l'activité 1-2)

Activité 1-3 :

a) Mets sous forme de produits de puissances de nombres premiers :

$$2^3 \times 3 \times 2 \times 3^2 \times 2^2 ; (5^2)^3 \times 3 \times 5^2 \times 3^2 \times (5^{-3})^2 ; (5^2 \times 3 \times 2^{-5})^3$$

b) Simplifie les nombres suivants :

$$\sqrt{4} ; \sqrt{36} ; \sqrt{2^3} ; \sqrt{27}$$

c) Effectue les opérations suivantes :

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} ; \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} ;$$

**Consigne :**

C<sub>1</sub>: Travail en groupe.

C<sub>2</sub>: Durée 20 minutes

Synthèse partielle : (solution de l'activité 1-3)

**Synthèse générale :**

**Propriété 1 : Quotient**

Soient  $a; b; c; d$  des nombres réels :

$$\text{☞ } \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0$$

$$\text{☞ } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad \text{avec}$$

$$b \neq 0; c \neq 0 \text{ et } d \neq 0$$

**Propriété 2 : Puissance**

Soient  $a; b$  des nombres réels non nuls :

$$\text{☞ } n \in \mathbb{N}^* : a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} \quad \text{et} \quad a^0 = 1 \text{ par convention !}$$

☞ Soient  $n; m \in \mathbb{Z}$  :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} ; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} ; \quad (a^n)^m = a^{n \times m} ;$$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n \quad ; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

**Propriété 3 : racine carrée**

$$\sqrt{0}=0 \quad ; \quad \sqrt{1}=1 \quad ; \quad \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{R}_- \end{cases}$$

Soient  $a ; b$  des nombres réels positifs non nuls :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \quad ; \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad ; \quad \sqrt{a^n} = \sqrt[n]{a}$$

$$\text{Attention !} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

**Les identités remarquables :**

|                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $(a-b)(a+b) = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ |                                       |
| $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$           | $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$           |
| $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ | $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ |
| $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$   | $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$   |

**C. Différentes écritures d'un nombre réels :**

**1. Ecriture décimale – Nombres décimaux**

La fraction  $\frac{3}{2}$  a pour écriture décimale 1,5. On dit alors que 1,5 est un nombre décimal.

En général un nombre réel  $x$  est dit nombre décimal lorsqu'il existe :

$$p \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{Z}^* \quad \text{tel que} \quad x = \frac{p}{10^n}$$

Exemple :

$$1,5 = 15 \times 10^{-1} = \frac{15}{10} \quad ; \quad 3,27 = 327 \times 10^{-2} = \frac{327}{10^2}$$

L'ensemble des nombres décimaux est noté ID.

**Remarque :**

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

## 2. Ecritures décimales illimitées périodiques :

📖 A partir d'une division on a :  $\frac{4}{3} = 1,3333\dots$  et  $\frac{45}{37} = 1,216216\dots$

- On dit alors que  $1,\underline{3}\dots$  est l'écriture décimale illimitée périodique de  $\frac{4}{3}$ .

- On dit alors que  $1,\underline{216}\dots$  est l'écriture décimale illimitée périodique de  $\frac{45}{37}$ .

📖 On a :  $\sqrt{3} = 1,732050807568877\dots$  et  $\pi = 3,1415926536\dots$

- On dit alors que  $\sqrt{3}$  ou  $\pi$  possède une écriture décimale illimitée non périodique.

**N.B :**

📖 une écriture décimale illimitée n'est pas une écriture décimale.

📖 Les nombres réels dont l'écriture décimale est illimitée périodique sont des nombres rationnels.

📖 Les nombres réels dont l'écriture décimale est illimitée non périodique sont des nombres irrationnels.

📖 Toute écriture décimale illimitée périodique admet une écriture fractionnaire :

**Exemple :** trouvons l'écriture fractionnaire de :  $a = 1,\underline{63}\dots$ ;  $b = -3,\underline{095}\dots$

▪  $a = 1,\underline{63}\dots$

$$\Rightarrow 100a = 163,\underline{63}$$

$$100a - a = 163,\underline{63} - 1,\underline{63}$$

$$99a = 162$$

Soit  $a = \frac{162}{99}$

▪  $b = -3,\underline{095}\dots$

$$\Rightarrow 1000b = -3095,\underline{095}$$

$$1000b - b = -3095,\underline{095} + 3,\underline{095}$$

$$999b = -3092$$

Soit  $b = -\frac{3092}{999}$

## Evaluations :

I. calculer les nombres réels suivants :

$$A = \frac{\frac{3}{5} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}};$$

$$B = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}};$$

$$C = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}};$$

II.  $a; b; c$  étant des nombres réels non nuls ; simplifie :

$$D = a^4 \times b^2 \times c^{-3} \times a^{-2} ; \quad E = \frac{a^3 \times b^5 \times c}{a^2 \times b^7} ;$$

III. Ecris les nombres suivants à l'aide de puissances entières de nombre premiers :

$$F = \frac{8^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^5 \times 2^6} ; \quad G = \frac{(3^4 \times 2^{-3})^3}{(9^{-1} \times 2^2)^4} ; \quad H = \frac{(-5^3) \times (-8)^3 \times (-9)^2}{(15)^2 \times (12)^4} ;$$

IV. Simplifie le plus possible les écritures suivantes (rends rationnel le dénominateur) :

$$I = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 + (\sqrt{15} - 1)^2 ; \quad J = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} ; \quad k = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 3} .$$

V.

## Séquence 2 : valeur absolue et distance

### A. Valeur absolue :

**Activité 2-1 :** calcule :  $|+5|$  ;  $|-5|$  ;  $\left|\frac{3}{5}\right|$  ;  $|182254|$

### Synthèse :

D'une manière générale  $\forall x \in \mathbb{R} ; |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$  et  $|0| = 0$ .

**Activité 2-2 :** soient  $a = -3$  et  $b = 4$ . Calcule et compare :

$$|a| \times |b| \quad \text{et} \quad |a \times b| ; \quad |a| + |b| \quad \text{et} \quad |a + b| ; \quad |a - b| \quad \text{et} \quad |b - a| ; \quad \frac{|a|}{|b|} \quad \text{et} \quad \left| \frac{a}{b} \right|$$

**Synthèse** : soient  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$ :

$$|a| \times |b| = |a \times b| ; \quad |a| + |b| \geq |a + b| ; \quad |a - b| = |b - a| ; \quad \frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right| \text{ avec } b \neq 0$$

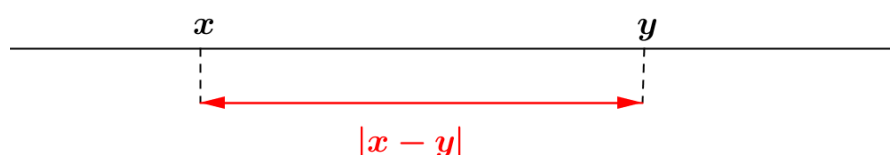
$$\text{N.B : } |a| = |b| = \begin{cases} a = b \\ \text{ou} \\ a = -b \end{cases}$$

## B. Distance sur $\mathbb{R}$ :

### 1. Définition :

Soient  $x$  et  $y$  deux nombres réels. On appelle distance de  $x$  à  $y$ , notée  $d(x, y)$ , le nombre réel positif ou nul  $|x - y|$ .

$$d(x; y) = |x - y|$$



**Exemple** :  $d(-1, 3) = |-1 - 3| = 4$

### 2. Propriétés :

**Activité 2-3** : calcule puis compare :

$$d(-2,5 ; 5) \text{ et } d(5 ; -2,5); \quad d(-1; 4) \text{ et } d(-1; -3) + d(-3, 4).$$

**Synthèse** : soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  des nombres réels :

$$\boxed{d(x, y) \geq 0}$$

$$\boxed{d(x, y) = d(y ; x)}$$

$$\boxed{d(x, y) = 0 \iff x = y}$$

$$\boxed{d(x, y) \leq d(x ; z) + d(z, y)}$$

## Séquence 3 : intervalle de $\mathbb{R}$ , équations et inéquations avec valeur absolue

### A. Intervalle de $\mathbb{R}$ :

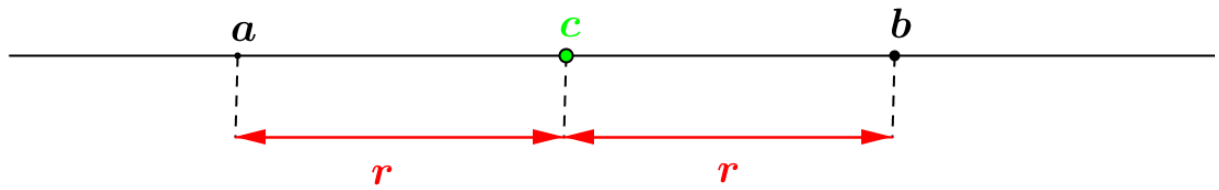
#### 1. Définitions :

| Notation               | Représentations sur la droite réelle                                                | Ensemble des réels $x$ tels que | Appellation                                                         |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $[a ; b]$              |    | $a \leq x \leq b$               | Intervalle borné fermé                                              |
| $[a ; b[$              |    | $a \leq x < b$                  | Intervalle borné semi fermé à gauche <b>ou</b> semi ouvert à droite |
| $]a ; b]$              |    | $a < x \leq b$                  | Intervalle borné semi fermé à droite <b>ou</b> semi ouvert à gauche |
| $]a ; b[$              |    | $a < x < b$                     | Intervalle borné ouvert                                             |
| $]-\infty ; b]$        |   | $x \leq b$                      | Intervalle non borné fermé à droite                                 |
| $]-\infty ; b[$        |  | $x < b$                         | Intervalle non borné ouvert à droite                                |
| $[a ; +\infty [$       |  | $a \leq x$                      | Intervalle non borné fermé à gauche                                 |
| $]a ; +\infty [$       |  | $a < x$                         | Intervalle non borné ouvert à droite                                |
| $]-\infty ; +\infty [$ |  | $x \in \mathbb{R}$              | Intervalle non borné                                                |

Remarque :  $[a ; a] = \{a\}$  et  $]a ; a[ = \emptyset$  sont des intervalles.

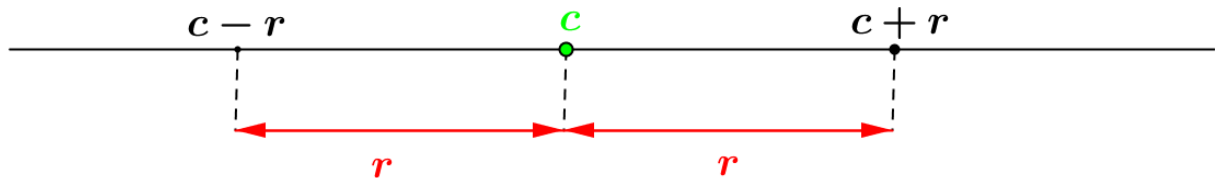
## 2. Centre et rayon d'un intervalle borné :

### a) Définitions :



- On appelle **centre**  $c$  d'un intervalle fermé  $[a; b]$  ou ouvert  $]a; b[$ ; le nombre réel  $c = \frac{a+b}{2}$
- On appelle **rayon**  $r$  d'un intervalle fermé  $[a; b]$  ou ouvert  $]a; b[$ ; le réel positif  $r = \frac{b-a}{2}$
- On appelle **amplitude**  $A$  d'un intervalle fermé  $[a; b]$  ou ouvert  $]a; b[$ ; le réel positif  $A = |b - a|$

b) Notation :



- L'intervalle fermé de centre  $c$  et de rayon  $r$  est noté  $\bar{I}(c; r)$ .
- L'intervalle ouvert de centre  $c$  et de rayon  $r$  est noté  $I(c; r)$ .

## B. Résolution graphique d'équations et d'inéquations avec valeur absolue :

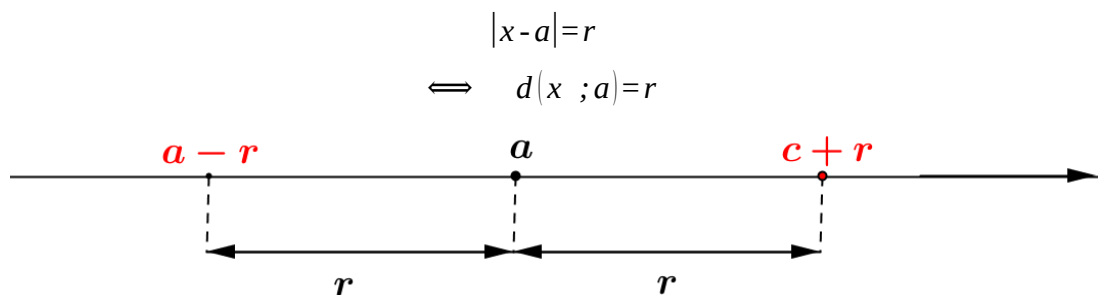
Soient  $x$  un nombre réel et  $r$  un nombre réel strictement positif.

### 1. Résolution graphique d'équations : $|x - a| = r$

Activité 3-1 : trouve tous les réels  $x$  telsque  $|x - 3| = 2$

**Synthèse :**

D'une manière générale :



Le problème revient à trouver les réels  $x$  situés à la distance  $r$  de  $a$ .

Les solutions sont  $x = a - r$  et  $x = a + r$ . D'où l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \{a - r; a + r\}$$

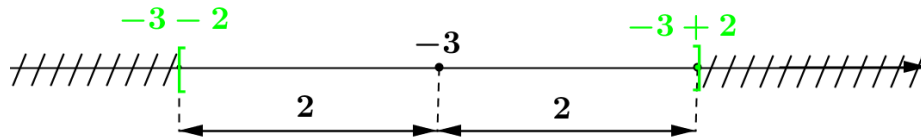
### 2. Résolution graphique d'inéquations : $|x - a| \leq r$

Activité 3-2 : trouve tous les réels  $x$  telsque  $|x+3| \leq 2$

$$|x+3| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow d(x; -3) \leq 2$$

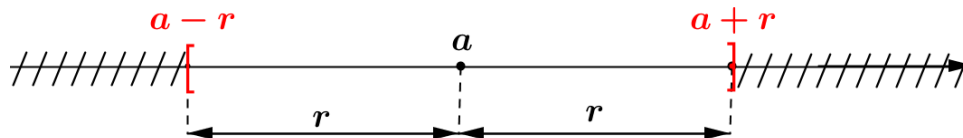
$$\Rightarrow x \in \bar{I}(-3; 2)$$



L'ensemble solution est :  $s = [-5; -1]$

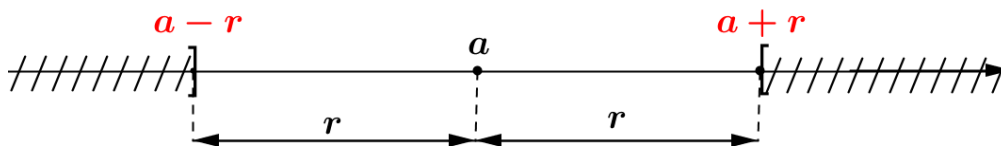
**Synthèse :** d'une manière générale

$$\triangleright |x-a| \leq r \Rightarrow d(x; a) \leq r \Rightarrow x \in \bar{I}(a; r)$$



$$S = [a-r; a+r]$$

$$\triangleright |x-a| < r \Rightarrow d(x; a) < r \Rightarrow x \in I(a; r)$$



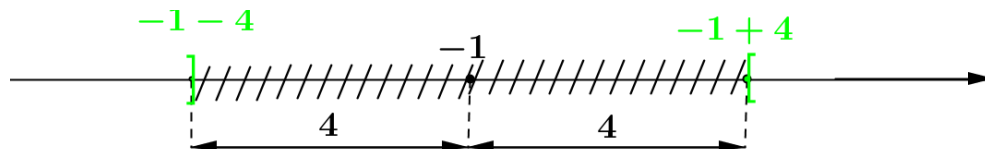
$$S = ]a-r; a+r[$$

### 3. Résolution graphique d'inéquations : $|x-a| \geq r$

Activité 3-2 : trouve tous les réels  $x$  telsque  $|x+1| \geq 4$

$$|x+1| \geq 4$$

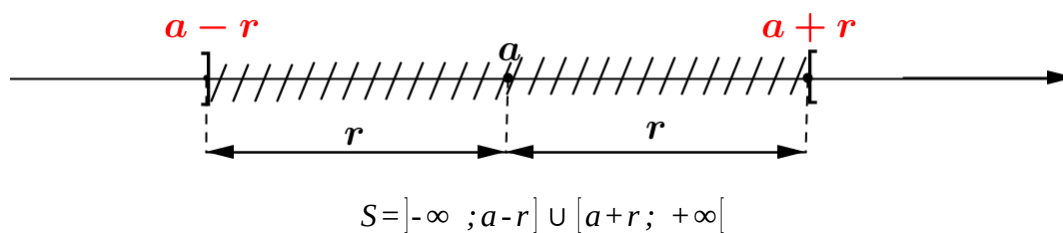
$$\Leftrightarrow d(x; -1) \geq 4$$



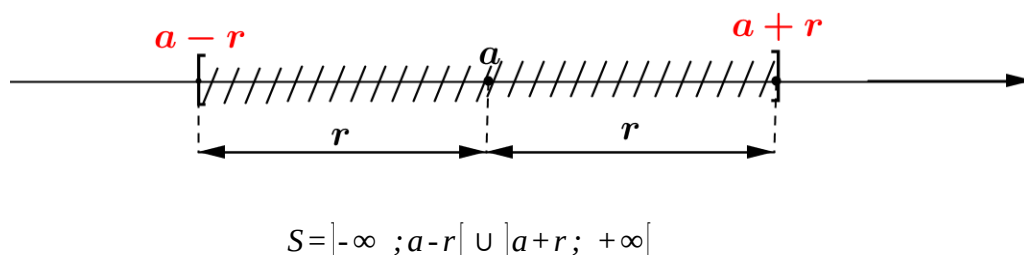
$$S = ]-\infty; -5] \cup [3; +\infty[$$

**Synthèse :** d'une manière générale

$$\triangleright |x-a| \geq r \Rightarrow d(x; a) \geq r$$



$$\triangleright |x-a| > r \implies d(x; a) > r$$



### Evaluation1:

- I. Ecris les ensembles suivants sous forme d'intervalle, puis donne leur représentation graphique :

$$A = \{x \in \mathbb{R} / -4 \leq x \leq 5\} ; \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{3}{2} \leq x < 4\right\} ; \quad C = \{x \in \mathbb{R} / -14 < x \leq 14\} ;$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / -17 < x < 1\} ; \quad E = \{x \in \mathbb{R} / x < 2\} ; \quad F = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 10\} ;$$

$$G = \mathbb{R}_- ; \quad H = \mathbb{R}_+^* \quad I = \mathbb{R} \setminus [-2; 2]$$

- II. Ecris sous forme d'ensemble, puis donne la représentation graphique des intervalles suivants :

$$J = [0 ; 12] ; \quad K = [-3 ; 3[ ; \quad L = [-5 ; -1] ;$$

$$M = [-\sqrt{3} ; 1[ ; \quad N = ]-\infty ; 0] ; \quad O = ]2 ; +\infty[$$

- III. Détermine l'amplitude  $A$ , le rayon  $r$  et le centre  $C$  des intervalles suivants :

$$P = ]-11 ; -3[ ; \quad Q = [0 ; 12] ; \quad R = ]-\sqrt{2} ; 3\sqrt{2}[ ;$$

$$S = \left]-\frac{3}{2} ; \frac{7}{2}\right[ ; \quad T = \left[-\frac{5}{4} ; 3\right] ; \quad U = \left]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right[ ;$$

IV. Détermine l'origine  $a$  et l'extrémité  $b$  de chacun des intervalles de rayon et de centre donné ci-dessous :

$$\bar{I}(3 ; 5) ; \quad I(-7 ; 4) ; \quad \bar{I}(6 ; 6) ; \quad I\left(1 ; \frac{5}{2}\right) ; \quad \bar{I}\left(\frac{31}{24} ; \frac{1}{24}\right) ; \quad I(\sqrt{2} ; 2\sqrt{2}) ; \quad \bar{I}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \sqrt{2}\right)$$

V. Résous graphiquement les équations et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

$$|x-1| \leq 3 ; \quad |3x-9|=27 ; \quad |x-4|-\frac{1}{2}=0 ; \quad |-2x+7|=5 ; \quad |2x-1| \leq 2 ;$$

$$|x+2| < -2 ; \quad |x-1|-8 \leq -5 ; \quad |x| < 3 ; \quad |1-x| \geq 4 ; \quad |-2x-6| \geq 4 ;$$

$$2 = \frac{4}{|x|} ; \quad 1 < |3x-1| \leq 3 ;$$