

CHAPITRE 2

CALCULS DANS $\mathbb{R}$

Domaine : Sciences, Mathématiques et Technologies

Compétences : Résoudre une situation problème

Composantes : Diagnostiquer la situation – problème et Partager les informations relatives à une démarche.

Manifestations : Formuler le problème, inventorier les différentes pistes de solutions, appliquer cette piste et tirer une conclusion

Ressources éducatives : Professeur, élèves, matériels didactiques

Stratégies d'animation : Travaux en groupe (pédagogie active).

=====

Contenu

Séquence 1 : Rappel sur les ensembles

Approche 1 en groupe de travail

On donne les nombres suivants : $-1; 0; 3; 2,5; \frac{5}{7}; -\frac{2}{5}; \sqrt{3}; \pi$ ConsignesRanger ces nombres dans les ensembles suivants le plus petit possible : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}$.

Synthèse Partielle 1

Chacun des nombres a pu être dans un ensemble.

Synthèse Générale 1

Nous avons connu cinq ensembles qui sont :

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, 20000, \dots\}$$

Autrement dit $\mathbb{N}$ est un ensemble infini. $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers privés de zéro

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} \text{ et } \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$$

- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- $\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des décimaux relatifs, c'est à dire l'ensemble des nombres $ax10^n$ où a et n sont les éléments de $\mathbb{Z}$.

Autrement dit, un nombre décimal est un nombre rationnel dont le développement décimal est fini par exemple $\frac{3}{4} = 0,75$

- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des rationnels, c'est-à-dire toute fraction $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ est un rationnel.

En d'autre terme un nombre est rationnel si son développement décimal est périodique. Par exemple $\frac{14}{11} = 1,272727272727$

- Un nombre qui n'est pas rationnel est irrationnel.

Par exemple : $\pi, \sqrt{5}, \dots$

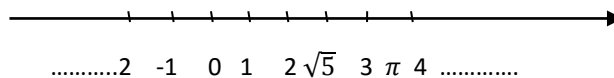
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}$ comprend les nombres rationnels (élément de $\mathbb{Q}$) et les nombres non rationnels

L'importance de $\mathbb{R}$ est de compenser les faiblesses de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

On a les inclusions suivantes $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Tous ces ensembles peuvent être représentés sur une **droite numérique** telle que.



De ce fait, on peut dire que tout nombre rationnel est un nombre réel, tout nombre décimal est un nombre rationnel, tout nombre relatif est un nombre décimal et tout nombre entier est un nombre relatif.

Séquence 1 : Opérations dans $\mathbb{R}$ et propriétés

1) Opérations d'Addition, de Multiplication et de Division des réels écrits sous forme fractionnelle

Approche 2 en groupe de travail

Soient les opérations :

$$a) \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \quad b) \frac{4}{5} - \frac{21}{4} \quad c) \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \quad d) \frac{1}{\frac{2}{5}}$$

Consignes

Effectuer les opérations ci-dessus.

Synthèse Générale 2

1) Pour tous a, b, c et d réels, on a :

$$\circ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \text{ avec } b \neq 0, d \neq 0$$

$$\circ \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \text{ avec } b \neq 0, d \neq 0$$

$$\circ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \text{ avec } b \neq 0 \text{ et } c \neq 0$$

$$\circ \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b} \text{ avec } b \neq 0$$

$$\circ \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \text{ avec } b \neq 0, c \neq 0$$

$$\circ \frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \text{ avec } b \neq 0, d \neq 0$$

$$\circ \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \text{ avec } b \neq 0, a \neq 0$$

$$\circ -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \text{ avec } b \neq 0$$

$$\circ \frac{a}{1} = a$$

$$\circ \frac{a}{-1} = \frac{-a}{1} = -a$$

$$\circ ax1 = 1xa = a$$

$$\circ \frac{0}{a} = 0$$

$$\circ \frac{a}{0} \text{ est impossible}$$

$$\circ \frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$\circ \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$$

$$\circ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

2) Quels que soient les réels a, b, c et a'

$$\circ a + b = b + a \text{ (commutativité de l'addition)}$$

$$\circ (a + b) + c = a + (b + c) \text{ (associativité de l'addition)}$$

$$\circ a + 0 = 0 + a \text{ (zéro est l'élément neutre pour l'addition)}$$

$$\circ a + a' = a' + a = 0 \text{ (il existe un réel } a' \text{ appelé opposé de } a)$$

3) Pour tous réels a, b et c

$$\bullet ab = ba \text{ (commutativité de la multiplication).}$$

$$\bullet (ab)c = a(bc) \text{ (associativité de la multiplication)}$$

$$\bullet ax1 = 1xa = a \text{ (1 est l'élément neutre de la multiplication.)}$$

$$\bullet aa' = a'a = 1 \text{ (} a' \text{ est l'inverse de } a)$$

- La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition se caractérise ainsi :

$$a(b + c) = ab + ac \text{ et } (b + c)a = ba + ca$$

Évaluation 1

Effectuer les opérations suivantes :

$$A = 1 + \frac{2}{3}$$

$$B = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$$

$$D = 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{7}$$

$$E = \frac{1}{5} + 3 \times \frac{4}{11} + 2$$

2) Opérations sur les radicaux

Approche 3 en groupe de travail

$$\text{On donne : } A = \sqrt{144} ; B = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} ; C = \sqrt{\frac{16}{9}} ; D = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}$$

Consignes

Effectuer les opérations ces opérations puis comparer A et B puis C et D.

Synthèse Générale 3

-On nomme racine carrée de x , le réel positif dont le carré est x . On note $\sqrt{x}$.

-Le symbole $\sqrt{\quad}$ est un radical et x se nomme le radicande.

-Pour tous réels a et b positifs, on a :

$$\triangleright a = \sqrt{b} \Leftrightarrow a^2 = b$$

$$\triangleright (\sqrt{a})^2 = a$$

$$\triangleright \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\triangleright \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ avec } b \neq 0$$

$$\triangleright \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Calcul sur les radicaux : Rendre rationnel le dénominateur d'un rapport

• Cas d'un radical isolé

Pour rendre rationnel le dénominateur du rapport $\frac{a}{\sqrt{b}}$, il suffit de multiplier les deux termes du rapport par le facteur irrationnel figurant au dénominateur. On a ainsi :

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \quad \text{D'où} \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$



- **Cas d'un radical associé à un nombre réel par addition ou par soustraction**

Pour rendre rationnel le dénominateur du rapport $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$, il suffit de procéder ainsi :

L'expression conjuguée du dénominateur $b + \sqrt{c}$ est $b - \sqrt{c}$ alors on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur

$$\text{Soit } \frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a}{b+\sqrt{c}} \times \frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})}$$

$(b + \sqrt{c})(b - \sqrt{c})$ est de la forme

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \text{ alors}$$

$$(b + \sqrt{c})(b - \sqrt{c}) = b^2 - (\sqrt{c})^2 = b^2 - c$$

$$\text{Alors } \frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

Évaluation 2

Rendre rationnel le dénominateur des rapports suivants :

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{3}{4\sqrt{7}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{3}{\sqrt{3}-1}$ e) $\frac{2}{4+\sqrt{5}}$ f) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$

3) Opérations sur les puissances entières

Approche 4 en groupe de travail

- a) Calculer $2^2 \times 2^3$ et 2^5 puis les comparer
 b) Calculer $\frac{3^5}{3^3}$ et 3^{5-3} puis les comparer.
 c) Calculer $(2)^6$ et $(2^2)^3$ puis les comparer.

Synthèse Générale 4

Pour tous a, b et c des réels et tous p et q des entiers naturels non nuls :

- $a^p = \underbrace{a \times a \times a \dots \times a}_p$ (p facteurs)
- $a^p \times a^q = a^{p+q}$
- $(a^p)^q = a^{pq}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$ ($b \neq 0$)
- $(abc)^p = a^p b^p c^p$

- $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

- $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ avec $a \neq 0$

- $a^0 = 1$

- $a^1 = a$

- Si $a > 0$ alors $a^p > 0$

- Si $a < 0$ et p pair alors $a^p > 0$

- Si $a < 0$ et p impair alors $a^p < 0$

Évaluation 3

Effectuer les opérations suivantes :

a) $2^4 \times 3 \times 2 \times 6 \times 8 \times 9$

b) $\frac{5.6^2.2^4}{25.2^3.6}$

Séquence 3 : Valeur absolue et distance

Approche 5 en groupe de travail

- a) Calculer $|5|$ et $|-5|$ puis les comparer
 b) La distance de la famille A de Boubou au lycée B est de 3 km. Calculer celle du lycée B à la famille A.

Synthèse Générale 5

-La valeur absolue du nombre réel x est égale au plus grand des deux nombres x ou $-x$. On note $|x| = \max(-x, x)$

-Étant donnés deux points distincts A et B sur la droite numérique d'abscisse respective x_A et x_B .

On nomme distance entre A et B , le réel notée $d(A, B)$ ou $d(B, A)$ le nombre positif :

$$d(A, B) = |x_B - x_A| = d(B, A) = |x_A - x_B|$$

-Pour tous réels x et y

- $|x| \geq 0$ (la distance de deux réels est positive)
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
- $|x| = |-x|$
- Si $|x| = r$ avec $r \geq 0 \Leftrightarrow x = r$ ou $x = -r$
- $|xy| = |x| \times |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x - y| = |y - x|$



- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| = |x - 0| = |0 - x| = d(x, 0) = d(0, x)$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ et $|x - y| \leq |x| + |y|$

(Inégalité triangulaire)

Évaluation 4

- 1) Calculer : $A = |-1 - 5| + |2 + 8| - |2 \times 3 + 4|$
- 2) Soit les points A et B d'abscisse respective $x_A = 4$ et $x_B = 1$
 - a) Trouver la distance de A à B
 - b) Cette distance est-elle égale à la distance entre B et A ?

Écriture sans le symbole de la valeur absolue

Évaluation 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on donne $B(x) = |x - 6| + |-2x + 4|$

- a) Écrire $B(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
- b) Calculer $B(-1)$ et $B(5)$.

Séquence 4 : Inégalités et intervalles de $\mathbb{R}$

Approche 6 en groupe de travail

Soit le système d'inéquation : (S) : $\begin{cases} x + 1 \leq 3 \\ 2x - 1 \geq -3 \end{cases}$

Consignes

Trouver la solution I dans $\mathbb{R}$ de (S).

Synthèse Partielle 2

On dit que I est un intervalle.

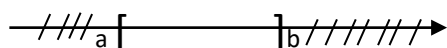
Synthèse Générale 6

1) Les intervalles

a) Intervalles fermés

Étant donnés deux réels a et b tels que $a \leq b$. On appelle intervalle fermé d'extrémités a et b et on note $[a, b]$ l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$

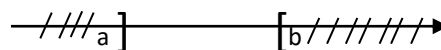
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



b) Intervalles ouverts

Étant donnés deux réels a et b tels que $a \leq b$. On nomme intervalle ouvert d'extrémités a et b noté $]a, b[$ l'ensemble des x réels tels que

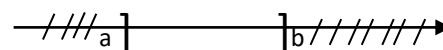
$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



c) Intervalle semi-ouvert

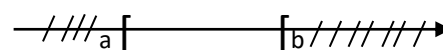
Étant donnés deux réels a et b tels que $a \leq b$. On nomme intervalle semi-ouvert (à gauche ou à droite), l'ensemble des réels x tels que :

$$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$



Semi-ouvert à gauche

$$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

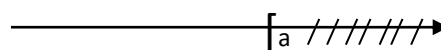


Semi-ouvert à droite

d) Intervalles illimités

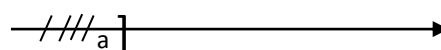
Étant donné un nombre réel a . On nomme intervalle fermé illimité à gauche et d'extrémité a (respectivement intervalle ouvert illimité à droite et d'extrémité a) et on note $] - \infty; a]$ (respectivement $]a; +\infty[$), l'ensemble des réels x tels que :

$$]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$



Illimité à gauche

$$]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$



Illimité à droite

L'intervalle illimité à gauche et à droite est l'ensemble des réels. On a : $\mathbb{R} =] - \infty; +\infty[$

Remarque

-Un ensemble A est écrit par **extension** s'il est de l'une des formes $A = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}, \dots$

-Un ensemble A est écrit par **intervalle** s'il est de l'une des formes $A = [a; b], \dots$

Évaluation 6

Écrire sous forme d'intervalle ou réunion d'intervalles les ensembles suivants :

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3 \text{ et } x > 0\}$
- b) $B = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 2\}$
- c) $C = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 5\}$
- d) $D = \{x \in \mathbb{R}, x < 2 \text{ et } x \geq -2\}$
- e) $E = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$
- f) $F = \{x \in \mathbb{R} / x > -1\}$
- g) $G = \mathbb{R}$
- h) $H = \mathbb{R} - \{2\}$
- i) $I = \mathbb{R} - \{-1; 3\}$

2) Centre, rayon et longueur d'un intervalle**Approche 9 en groupe de travail**

Soient A et B deux points d'abscisses respectives $a = 2$ et $b = -4$ et (C) le cercle de diamètre $[AB]$.

Consignes

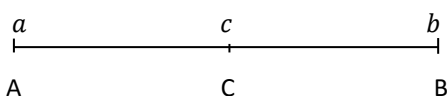
- a) Trouver le centre c de (C) . Qu'est ce qu'il représente pour le segment $[AB]$.
- b) Trouver le rayon r du cercle (C) . Qu'est ce qu'il représente pour le segment $[AB]$.
- c) Trouver la longueur L de $[AB]$.

Synthèse Partielle 3

On dit que c est le centre de l'intervalle $[a; b]$, r est son rayon et L est sa longueur.

Synthèse Générale 7

Considérons sur la droite numérique les points A et B d'abscisses respectives a et b et C un point d'abscisse c milieu du segment d'extrémités a et b .



-On appelle centre c de l'intervalle d'extrémités a et b

$$\text{le réel : } c = \frac{a+b}{2}$$

-On appelle rayon r de l'intervalle d'extrémités a et b

$$\text{le réel : } r = \frac{|b-a|}{2}$$

-On appelle longueur L de l'intervalle d'extrémités a et b ,

$$\text{le réel : } L = |b - a|$$

Définition des extrémités d'un intervalle

-L'intervalle ouvert I de centre c et de rayon r est noté $I(c, r)$

-L'intervalle fermé de centre c et de rayon r est noté $\bar{I}(c, r)$

On définit les extrémités a et b d'un intervalle de centre c et de rayon r tels que :

$$a = c - r \quad \text{et} \quad b = c + r$$

Évaluation 7

1) Déterminer le centre, le rayon et la longueur des intervalles suivants :

a) $I = [-1; 3]$

b) $J = [1; 4[$

c) $K =]\frac{1}{2}; 1[$

2) Préciser les extrémités des intervalles suivants :

a) $\bar{P}(1; 3)$

b) $Q(0; 2)$

Complémentaire de cours à titre facultatif**Comparaison des nombres réels**

Pour tous nombres réels a, b et c

1) $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$

2) $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

3) $a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \quad (a \text{ et } b \neq 0)$

4) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

5) Si $c > 0$ et $a \leq b$ alors $ac \leq bc$

5) Si $c < 0$ et $a \leq b$ alors $ac \geq bc$

Mention légale – Mathematikos 2015/2016