

I – Ensemble des nombres

Nous avons utilisé des nombres comme 42 ; - 19 ; $\frac{13}{4}$; $\sqrt{3}$; π .

a) 42 est un nombre **entier naturel**. L'ensemble des **entiers naturels** est noté :

$$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$$

b) (-19) est un nombre **entier relatif**. L'ensemble des **entiers relatifs** est noté :

$$\mathbb{Z} = \{\dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$$

c) $\frac{13}{4}$ est un **nombre rationnel**. L'ensemble des **nombres rationnels** est noté : $\mathbb{Q}$

Un nombre est dit nombre rationnel s'il s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$; $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

d) On remarque qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est égal à 3.

Le nombre $\sqrt{3}$ est un nombre réel. L'ensemble des **nombres réels** est noté : $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

II – Différentes écritures d'un nombre réel

1– Écriture décimale – Nombres décimaux

La fraction $\frac{5}{2}$ a pour écriture décimale 2,5.

On dit que 2,5 est un nombre décimal

- Définition : x étant un nombre réel quelconque

$$\left(\begin{array}{c} x \text{ est un nombre} \\ \text{décimal} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{s'il existe un entier relatif } p \text{ tel que} \\ x = \frac{p}{10^n} ; n \in \mathbb{Z}^* \end{array} \right).$$

- Exemples

$$2,5 = 25 \times 10^{-1} = \frac{25}{10} ; 3,717 = 3717 \times 10^{-3} = \frac{3717}{10^3} ; 7,59 = 759 \times 10^{-2} = \frac{759}{10^2}$$

L'ensemble des nombres décimaux est noté ID et nous avons :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \text{ID} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

2- Écritures décimales illimitées

Trouvons une écriture décimale de $\frac{45}{37}$

$\frac{45}{37} = 1, \underline{216}.....$; $1, \underline{216}.....$ est appelé l'écriture décimale illimitée de $\frac{45}{37}$.

La fraction $\frac{45}{37}$ admet une écriture décimale illimitée périodique.

Remarque : une écriture décimale illimitée n'est pas une écriture décimale.

Ainsi $\frac{45}{37}$ n'est pas un nombre décimal car il n'admet pas une écriture décimale

- $\sqrt{5} = 2,2360678.....$ possède une écriture décimale illimitée non périodique
- $\pi = 3,141592.....$ possède une écriture décimale illimitée non périodique.
- Les nombres réels dont l'écriture décimale est illimitée périodique sont des nombres rationnels.
- Les nombres réels dont l'écriture décimale est illimitée non périodique sont des nombres irrationnels.

III – Comparaison des nombres réels

1- Propriétés : soient a et b deux nombres réels positifs

- $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$
- $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
- Si a et b sont deux réels strictement positifs alors : $a \leq b \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$
- $\forall (x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 ; x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z.$
- Si $z > 0$ et $x \leq y$ Alors $x z \leq y z$
- Si $z < 0$ et $x \leq y$ Alors $x z \geq y z.$
- Somme membre à membre : $\forall (x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3$
Si $x \leq y$
et $z \leq t$

alors $x + z \leq y + t$

2- Règles fondamentales

Pour comparer deux nombres réels a et b on peut :

- Étudier le signe de leur différence $a - b$:
$$\begin{cases} \text{Si } a - b \leq 0 \text{ alors } a \leq b \\ \text{Si } a - b \geq 0 \text{ alors } a \geq b \\ \text{Si } a - b = 0 \text{ alors } a = b \end{cases}$$

Exemple : comparer les réels $\frac{17}{3}$ et $\frac{11}{2}$; $\frac{141}{5}$ et $\frac{178}{6}$

- S'ils sont strictement positifs, comparer leurs carrés ; leurs racines carrées ou leurs inverses.

Exemple : comparer les réels $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{5}$; $5\sqrt{3}$ et $4\sqrt{5}$; $9+\sqrt{7}$ et $15+\sqrt{8}$.

IV– Les quantificateurs logiques

Le symbole $\forall$ se lit « **quelque soit** » ou « **pour tout** »

Le symbole $\Leftrightarrow$ se lit « **équivalent à** » ou « **si et seulement si** »

Le symbole $\Rightarrow$ se lit « **implique** » ou « **Alors** »

Le symbole $\exists$ se lit « **il existe au moins** »

Le symbole $\exists!$ se lit « **il existe un unique** ».

V – Quelques identités remarquables et formules d'une puissance

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^n \times a^p = a^{n+p}$	$(a^n)^p = a^{n \times p}$
$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	$(a \times b \times c)^n = a^n \times b^n \times c^n$