

I – Approximations décimales d'ordre n par défaut, par excès

Soit le nombre décimal 2,37854.

- Un encadrement distingué d'amplitude 0,1 ou 10^{-1} de $x = 2,37854$ est
 $2,3 \leq 2,37854 \leq 2,4$
 $2,3$ est l'approximation décimale d'ordre 1 par défaut de 2,37854.
 $2,4$ est l'approximation décimale d'ordre 1 par excès de 2,37854.
- Un encadrement distingué d'amplitude 0,01 ou 10^{-2} de $x = 2,37854$ est
 $2,37 \leq 2,37854 \leq 2,38$
 $2,37$ est l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de 2,37854.
 $2,38$ est l'approximation décimale d'ordre 2 par excès de 2,37854.
- Définition : d et x étant deux réels, n un entier naturel

$$\left[\begin{array}{l} d \text{ est l'approximation} \\ \text{décimale d'ordre } n \\ \text{Par défaut de } x \end{array} \right] \iff \left[\begin{array}{l} \bullet d \in ID_n \\ \bullet d \leq x \leq d + 10^{-n} \end{array} \right]$$

Exemples : Déterminer l'approximation décimale d'ordre 0 ; 1 ; 2 ; 3 par défaut et par excès de $\frac{1}{7}$; de $-\frac{5}{7}$.
 $\frac{1}{7} = 0,142857.....$; $-\frac{5}{7} = -0,714285.....$

Approximation décimale		$\frac{1}{7}$		$-\frac{5}{7}$	
		Par défaut	Par excès	Par défaut	Par excès
D'ordre	0	0	1	-1	0
	1	0,1	0,2	-0,8	-0,7
	2	0,14	0,15	-0,72	-0,71
	3	0,142	0,143	-0,715	-0,714
	4	0,1428	0,1429	-0,7143	-0,7142

II– Arrondi d'ordre n

1- Règles d'arrondi d'ordre n

Pour obtenir l'arrondi d'ordre n d'un nombre dont on connaît le début de l'écriture décimale, on procède comme suit :

- Si le $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule est 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; on conserve les n premiers chiffres après la virgule. Donc l'arrondi d'ordre n est l'approximation décimale qui a la plus petite valeur absolue.
- Si le $(n+1)^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule est 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; l'arrondi d'ordre n est l'approximation décimale qui a la plus grande valeur absolue.

2- Exemples : $\pi = 3,141592654.....$; $\frac{9}{7} = 1,285714.....$; $\sqrt{7} = 2,645751.....$

L'arrondi d'ordre 2 de π est 3,14 ; L'arrondi d'ordre 4 de π est 3,1416

L'arrondi d'ordre 3 de $\frac{9}{7}$ est 1,286 ; L'arrondi d'ordre 1 de $\sqrt{7}$ est 2,6.

III – Ordre de grandeur d'un nombre décimal

1- Écriture Normalisée

On dit qu'un nombre A a une écriture normalisée, s'il s'écrit sous la forme :

$$A \times 10^p ; \text{ avec } A \in \text{ID et } p \in \mathbb{Z} .$$

Exemples : $153\,000\,000\,000 = 153 \times 10^9$; $0,000\,017 = 17 \times 10^{-6} = 1,7 \times 10^{-5}$.

2- Ordre de grandeur

Soit $A \times 10^p$ l'écriture normalisée d'un nombre décimal x. Soit k l'arrondi d'ordre 0 de A. Le nombre $k \times 10^p$ est appelé ordre de grandeur du nombre décimal x.

Exemples :

- a) $x = 0,000\,5761$ a pour écriture normalisée $5,761 \times 10^{-4}$ et pour ordre de grandeur 6×10^{-4} .
- b) $x = 0,0016$ a pour écriture normalisée $1,6 \times 10^{-3}$ et pour ordre de grandeur 2×10^{-4} .

IV- Valeur approchée

a) Cherchons un encadrement de la somme $(\sqrt{5} + \sqrt{7})$.

$$2,236 \leq \sqrt{5} \leq 2,237$$

$$2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$$

$$4,881 \leq \sqrt{5} + \sqrt{7} \leq 4,883$$

$(\sqrt{5} + \sqrt{7}) \in [4,881 ; 4,883]$ de centre $C = \frac{4,881 + 4,883}{2} = 4,882$

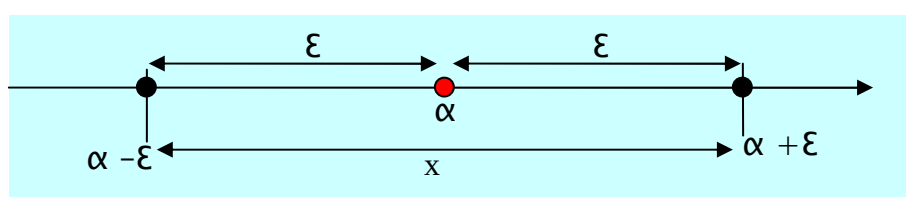
et de rayon $r = \frac{4,883 - 4,881}{2} = 0,001$.

On dit que 4,882 est une valeur approchée de $(\sqrt{5} + \sqrt{7})$ à 0,001 près.

b) Définition :

Soit x un réel donné et ϵ un réel strictement positif. On dit que le réel α est une valeur approchée à ϵ près de x lorsque :

$$|x - \alpha| \leq \epsilon \text{ ou } d(x ; \alpha) \leq \epsilon \text{ ou } x \in [\alpha - \epsilon ; \alpha + \epsilon] .$$



Le nombre réel strictement positif ϵ est appelé **incertitude associée** à la valeur approchée α ou incertitude sur x .

c) Exemple 1 :

Déterminer une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à $5 \cdot 10^{-4}$ près.

On sait que $2,236 \leq \sqrt{5} \leq 2,237$

Donc $\sqrt{5} \in [2,236 ; 2,237]$.

Déterminons le centre et le rayon de cet intervalle

$C = 2,235$ et $r = 0,0005$

On conclut que 2,235 est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à $5 \cdot 10^{-4}$ près.

d) Exemple 2 :

Soit 5,3 une valeur approchée du nombre réel x à $2 \cdot 10^{-2}$ près et soit 8,4 une valeur approchée du nombre réel y à $3 \cdot 10^{-1}$ près. Déterminer une valeur approchée du produit xy et l'incertitude associée.

Solution

Nous savons que α est une valeur approchée de x à ϵ près si et seulement si $x \in [\alpha - \epsilon ; \alpha + \epsilon]$.

(5,3 est une valeur approchée de x à $2 \cdot 10^{-2}$ près) $\Leftrightarrow (x \in [5,3 - 0,02 ; 5,3 + 0,02])$
 $\Leftrightarrow x \in [5,1 ; 5,5]$.

(8,4 est une valeur approchée de y à $3 \cdot 10^{-1}$ près) $\Leftrightarrow (y \in [8,4 - 0,3 ; 8,4 + 0,3])$
 $\Leftrightarrow y \in [8,1 ; 8,7]$.

$$x \in [5,1 ; 5,5] \Leftrightarrow 5,1 \leq x \leq 5,5.$$

$$y \in [8,1 ; 8,7] \Leftrightarrow 8,1 \leq y \leq 8,7.$$

$$\text{-----}$$

$$41,31 \leq xy \leq 47,85$$

En faisant le produit membre à membre on obtient : $41,31 \leq xy \leq 47,85$

$\Rightarrow xy \in [41,31 ; 47,85] \Rightarrow$ le centre $C = 44,58$ et le rayon $r = 3,27$.

D'où 44,58 est une valeur approchée de xy à 3,27 près. 3,27 est l'incertitude associée.