

EQUATIONS-INÉQUATIONS-SYSTÈMES DANS $\mathbb{R}$:

Classe : 10^{ème} CG

Durée : 20 H

Domaine : SMT

Discipline : Mathématique

Thème : Equations-Inéquation-Système dans IR

Compétences :

- Résoudre une situation problème
- Communiquer des messages en utilisant le langage et le symbolisme mathématique.

Composantes et manifestations :

- Participer à des échanges d'informations à Caractère Scientifique, mathématique ou technologiques.
- Partager les informations relatives à la démarche Scientifique et mathématique.

Ressources Educatives

Ressources humaines : Professeurs ; élèves

Ressources Matérielles : tableau, livres, règle, équerre,

Stratégies d'animation : Travaux en groupes.

Compétence :

- ✓ Résoudre des problèmes utilisant des équations et des inéquations ;
- ✓ Résoudre des systèmes d'équations et d'inéquations.

Contenu

Séquence 1 : Equations	2
1.1. Equations du premier degré à une inconnue	2
1.2. Equations du second degré à une inconnue :	2
Séquence 2 : Inéquations	4
2.1. Inéquations du premier degré à une inconnue :	4
2.2. Inéquations du second degré à une inconnue :	4
Séquence 3 : Equations rationnelles et irrationnelles.	5
3.1. Equations rationnelles de la forme $P(x)Q(x)$; $Q(x) \neq 0$:	5
3.2. Equations irrationnelles de la forme $ax + b = cx + d$:	6
Séquence 4 : Systèmes d'équations et d'inéquations.....	6
4.1. Système de deux équations à deux inconnues :	6
4.2. Système d'équations linéaires à trois (3) inconnues :	9

Déroulement des activités

Séquence 1 : Equations

Pré-évaluation :

Pour les fonctions polynômes suivantes : $f(x) = 5x + 4$ et $h(x) = x^2 - 49$

1. Donne les degrés de ces polynômes ;
2. Résous $f(x) = 0$; $f(x) < 0$ et $h(x) = 0$.

1.1. Equations du premier degré à une inconnue

Activité 1 :

- 1) Si les côtés d'un carré sont augmentés de 11 m alors le périmètre sera 96 m.
Quelle est la longueur du côté ?
- 2) La somme de l'âge d'un père et son fils est 44ans. Le père a 30 ans de plus que le fils.
Quels âges ont-ils ?
- 3) Résous les équations suivantes :

a) $2(x - 3) + 5 = -3(x - 1)$;	c) $\frac{2x-1}{6} + \frac{3x+2}{5} = \frac{14x+9}{15}$;
b) $\frac{3(2x+5)}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7-3x}{12}$;	d) $2(x - 7) + 3(x + 3) = 5(x - 1)$.

Synthèse :

- **Définition :**
On appelle équation du premier degré à une inconnue, toute équation pouvant se ramener à la forme $ax + b = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Résoudre une telle équation c'est déterminer la valeur de x qui vérifie l'équation.

Evaluation 1 :

1. Résous les équations suivantes :

$$a) x - 14 = 0 ; b) 3x = 7 ; c) 17x = -3 ; d) \frac{8}{7}x + 6 = 2 ;$$

$$e) t - \frac{3}{4}x = 0 ; f) \frac{2}{5}x - \frac{4}{7} = \frac{3}{5} ; g) \frac{-5}{7}x = 0$$

2. Amadou dépense dans un premier magasin le quart de la somme dont il dispose. Dans un second magasin il dépense la moitié du reste. Et après avoir ensuite acheté un objet à **500 F**, il lui reste **400 F**. De quelle somme disposait-il au départ ?

1.2. Equations du second degré à une inconnue :

1.2.1. Définition :

On appelle équation du second degré à une inconnue, toute équation de la forme ou pouvant se ramener à la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

1.2.2. Forme canonique d'une expression du second degré :

Activité 2 :

Développe et réduis : $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$

Synthèse :

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$) on a :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

C'est la forme canonique d'un polynôme du second degré.

Démonstration :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

1.2.3. Résolution de l'équation de second degré en utilisant la forme canonique :

Activité 3 :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $x^2 - 4 = 0$; b) $-2x^2 + 32 = 0$; c) $x^2 + 2x + 1 = 0$; d) $2x^2 + 3x = 0$
- En utilisant leurs formes canoniques, résous les équations dans $\mathbb{R}$ suivantes :
a) $4x^2 + 4x - 3 = 0$; b) $-x^2 - x + 2 = 0$; c) $7x^2 - 6x + 5 = 0$;
1) $9x^2 - 30x + 25 = 0$.

Synthèse : Résolution :

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, $S = \emptyset$;
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux (2) solution distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou/et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ d'où } S = \{x_1 ; x_2\}$$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \text{ d'où } S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

Remarque :

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Si le réel b est divisible par 2, alors on introduit le réel $b' = \frac{b}{2}$

On calcule le discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$:

- Si $\Delta' < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, $S = \emptyset$;
- Si $\Delta' > 0$ alors l'équation admet deux (2) solution distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \text{ et } x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \text{ d'où } S = \{x_1 ; x_2\}$$

- Si $\Delta' = 0$ alors l'équation admet une solution double :

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} \text{ d'où } S = \left\{ -\frac{b'}{a} \right\}$$

1.2.4. Utilisation des Recettes

soit à résoudre $ax^2 + bx + c = 0$; ($a \neq 0$)

☞ Si $a + b + c = 0$ alors $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a}$

☞ Si $a + c = b$, alors $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{c}{a}$

Evaluation 2 : résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

- a) $3x^2 - 12x + 9 = 0$, b) $-x^2 + 8x + 9 = 0$; c) $2x^2 + 3x + 4 = 0$;
 d) $x^2 = 2\sqrt{2}x + 2$; e) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} = 0$; f) $(\sqrt{2} + 1)x^2 + 2x - \sqrt{2} + 1 = 0$
 g) $x^2 + (\sqrt{3} - 2)x - 2\sqrt{3} = 0$.

Séquence 2 : Inéquations

2.1. Inéquations du premier degré à une inconnue :

Activité 4 :

- a. Résous l'équation dans $\mathbb{R}$; $3x - \frac{9}{18} = 1$;
 b. En déduis les valeurs des inéquations suivantes : $3x - \frac{9}{18} \leq 1$ et $3x - \frac{9}{18} > 1$

Synthèse :

- Définition :
On appelle inéquation du premier degré à une inconnue, toute inéquation de la forme ou pouvant se ramener $ax + b < 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b > 0$ ou $ax + b \geq 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Résoudre une telle équation c'est déterminer l'ensemble des valeurs de x qui vérifie l'inéquation.
- Signe d'une fonction polynôme du premier degré : $f(x) = ax + b$; $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$
Signe de $f(x)$

Posons $f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe contraire de a		Signe de a

Evaluation 3 :

Résous dans $\mathbb{R}$:

- 1) $2x + 3 \geq 1$;
 2) $4(x + 1) + 2(x - 2) \geq 7(x + 3)$;
 3) $\frac{2x+1}{5} - \frac{x+1}{3} < \frac{x+4}{6}$.

2.2. Inéquations du second degré à une inconnue :

Activité 5 :

Factorise puis déduis les signes des polynômes suivants à partir leurs facteurs :

- 1) $f(x) = x^2 + 6x + 9$;
 2) $g(x) = 25 - 16x^2$
 3) $h(x) = 64 - 48x + 9x^2$

Synthèse :

- Définition :

On appelle inéquation du premier degré à une inconnue, toute inéquation ou pouvant se ramener à la forme $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$ et $ax^2 + bx + c \geq 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$.

- Signe d'un trinôme du second degré :

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$.

Pour étudier le signe de $P(x)$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta > 0$, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a		Signe de $-a$	 Signe de a

- Si $\Delta = 0$, le signe $P(x)$ sera signe de a .
- Si $\Delta < 0$, le signe $P(x)$ sera signe de a

Evaluation 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $x^2 - 2x - 15 > 0$;
- $-3x^2 + 11x - 18 \geq 0$;
- $3x^2 - 5x - 22 < 0$;
- $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$.

Séquence 3 : Equations rationnelles et irrationnelles.

3.1. Equations rationnelles de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$; $Q(x) \neq 0$:

Activité 6 :

Soient les polynômes suivants : $f(x) = 2x^2 - 18$ et $h(x) = 13x + 39$

- Résous dans $\mathbb{R}$ $f(x) = 0$ et $h(x) = 0$.
- En déduis l'ensemble solution de $\frac{f(x)}{h(x)}$.

Synthèse :

- **Définition :**

On appelle équation rationnelle, toute équation de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ avec P et Q des fonctions polynômes et $Q(x) \neq 0$.

- **Résolution :**

Pour résoudre une telle équation, on peut :

- Chercher l'ensemble de validité $D_V = \{x \in \mathbb{R} ; Q(x) \neq 0\}$;
- Puis résoudre l'équation $P(x) = 0$;
- L'ensemble solution est l'ensemble des valeurs de x qui sont dans D_V .

Evaluation 5 :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{2x-1}{3x+7} = 0$; b) $\frac{7}{2x+1} = \frac{8}{3x-8}$; c) $\frac{x^2+4x+6}{-x+2} = -2$; d) $\frac{2x-3}{3x-1} = \frac{8x+2}{x-7}$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\frac{2x+1}{x-1} \geq 0$; b) $\frac{x}{-7x+4} > 0$; c) $\frac{1}{2x+3} = \frac{2}{x-1}$; d) $\frac{x^2+2x-3}{-x+2} \leq 0$;

$$e) \frac{x}{x-2} \leq \frac{6}{x-1} ; f) \frac{4x-1}{x-1} \leq \frac{2x+3}{x+1}.$$

3.2. Equations irrationnelles de la forme $\sqrt{ax+b} = cx+d$:

Activité 7 :

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2x+1} = x+1$.

Synthèse :

Pour résoudre une telle équation ($\sqrt{ax+b} = cx+d$), on cherche l'ensemble de validité $D_V = \{x \in \mathbb{R}, ax+b \geq 0 \text{ et } cx+d \geq 0\}$; puis on élève les deux membres au carré, puis on résous. L'ensemble solution est l'ensemble des valeurs de x qui sont dans D_V .

Evaluation 6 :

Résous dans $\mathbb{R}$:

$$a) \sqrt{x+1} = 2x+4 ; b) \sqrt{x+1} = 2 ; d) \sqrt{-3x+3} = -7$$

$$a) \sqrt{3-x} = x-1 ; b) \sqrt{x+1} - x + 1 = 0 ; c) \sqrt{2x+1} = x-1 ; c) \sqrt{2-x} = x+10$$

Séquence 4 : Systèmes d'équations et d'inéquations

4.1. Système de deux équations à deux inconnues :

Activité 8 :

Représenter graphiquement sur le même repère les équations suivantes :

$$2x - 3y = -1 \text{ et } x + y = 4$$

Que constatez-vous ?

Synthèse :

- Définition :

Soit deux équations à deux inconnues :

$$ax + by + c = 0 \text{ et } a'x + b'y + c' = 0.$$

On nomme le système d'équations à deux inconnues, le système à la forme suivante :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

- Résoudre le système d'équations du premier degré à deux inconnues équivaut à résoudre le problème de l'intersection de deux équations.

- Différentes méthodes de résolutions :

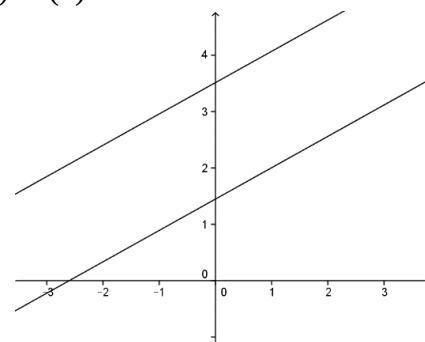
• Méthode graphique :

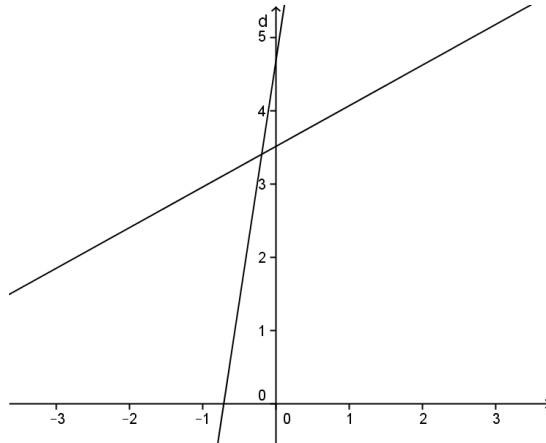
$$(S) : \begin{cases} ax + by + c = 0 \text{ (1)} \\ a'x + b'y + c' = 0 \text{ (2)} \end{cases}$$

Soit (D_1) et (D_2) les droites représentant les équations (1) et (2)

1^{er} cas :

Si $ab' - a'b = 0$ alors (D_1) et (D_2) sont parallèles. La solution du système la solution de (1)





2^{ème} cas :

Si $ab' - a'b \neq 0$ alors les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes en un point $M(x_0, y_0)$ unique ; vérifiant (1) et (2)
Alors $S = \{(x_0, y_0)\}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

- **Méthode par substitution :**

$$(S) : \begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \end{cases}$$

On tire x ou y dans l'équation (1) et (2) puis on les remplace par leur expression dans (2) ou (1).

On trouve x ou y puis on le remplace pour trouver l'autre inconnu.

Exemple :

Résous dans $\mathbb{R}^2$ par substitution :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

- **Méthode d'addition :**

$$(S) : \begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \end{cases}$$

On élimine les x au profit des y puis les y au profit des x en multipliant les équations (1) et (2) par un coefficient convenable (positif ou négatif).

Exemple :

Résous par addition dans $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

- **Méthode par comparaison :**

$$\text{Soit à résoudre le système } (S) : \begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \end{cases}$$

On tire x ou y dans les équations (1) et (2) puis on égalise les x ou les y puis on tire alors les y ou les x .

Exemple :

Résous par comparaison dans $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

• **Méthode des déterminants :**

Soit à résoudre le système (S) : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \quad (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 \quad (2) \end{cases}$

On calcule D (le déterminant) : $D = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

✓ Si $D = 0$ alors $S = \{ \}$ ou $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

Si $D \neq 0$ On calcule

D_x (le déterminant par rapport à x) : $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$

D_y (le déterminant par rapport à y) : $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$

Donc $S = \left\{ \left(\frac{D_x}{D} ; \frac{D_y}{D} \right) \right\}$

Remarque : si $D_x = D_y = 0$

Alors le système admet une infinité de solution.

Exemple : Résous dans $\mathbb{R}^2$ par déterminants :

a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$; b) $(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \begin{cases} 5x - 2y = 19 \\ 7x + 8y = 5 \end{cases}$;

Solution :

a. $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 5x - 2y = 19 \\ 7x + 8y = 5 \end{cases}$

$$D_{\text{ét}} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 5 \times 8 - (-2) \times 7 = 40 + 14 = 54$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 152 + 10 = 162$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 133 = -108$$

$$x = \frac{D_x}{D_{\text{ét}}} = \frac{162}{54} = 3 \text{ et } y = \frac{D_y}{D_{\text{ét}}} = \frac{-108}{54} = -2 \text{ et } S = \{(3; -2)\}$$

b. $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} (m+1)x + y = m+3 \\ 3x + (m-1)y = -3 \end{cases}$

$$D_{\text{ét}} = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 3 & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)(m-1) - (3)(1) = m^2 - 4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+3 & 1 \\ -3 & m-1 \end{vmatrix} = (m+3)(m-1) - (-3)(1) = m^2 + 2m$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m+1 & m+3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (m+1)(-3) - 3(m+3) = -6m - 12$$

➤ $D_{\text{ét}} \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 \text{ et } m \neq -2 :$

$$x = \frac{D_x}{D_{\text{ét}}} = \frac{m^2 + 2m}{m^2 - 4} = \frac{m(m+2)}{(m-2)(m+2)} = \frac{m}{m-2}$$

$$y = \frac{D_y}{D_{\text{ét}}} = \frac{-6m - 12}{m^2 - 4} = \frac{(-6)(m+2)}{(m-2)(m+2)} = \frac{-6}{m-2}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{m}{m-2} ; \frac{-6}{m-2} \right) \right\}$$

➤ $\text{Dét} = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ ou } m = -2 :$

☉ Pour $m=2$; le système devient :

$$\begin{cases} (2+1)x + y = 2+3 \\ 3x + (2-1)y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x + y = -3 \end{cases} \text{ Impossible} \\ S = \phi$$

☉ Pour $m = -2$; le système devient :

$$\begin{cases} (-2+1)x + y = -2+3 \\ 3x + (-2-1)y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1x + y = 1 \\ 3x - 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = -1$$

Il y a une infinité de solutions.

$$\cdot \quad x - y = -1 \Leftrightarrow x = y - 1 \\ S = \{(y - 1 ; y)\}$$

$$\cdot \quad x - y = -1 \Leftrightarrow y = x + 1 \\ S = \{(x ; x + 1)\}$$

Evaluation 7

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivantes :

a) $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 15y = 21 \\ 2x + 10y = 14 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x + 15y = -1 \\ 2x + 10y = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 5x - y = 17 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x\sqrt{2} + 2y = 3 \\ x + y\sqrt{2} = 5 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x\sqrt{3} + y = \sqrt{3} \\ 3x + y\sqrt{3} = 3 \end{cases}$; g) $\begin{cases} x + (\sqrt{2} - 1)y = 1 \\ (\sqrt{2} + 1)x + y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$; h) $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 7 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$;

2. Dans une ferme qui contient uniquement des poules et de lapins. Adja a compté 40 têtes et 104 pattes. Quel est le nombre de chacune de ses espèces.

3. Pour cinq melons et deux oranges, Abdoul a payé 160Frs. Alima a acheté trois melons et une orange et elle a payé 440Frs. Quel est le prix d'un melon ? quel est le prix d'une orange ?

4. Un car de 15 places fait la liaison entre Bamako et Ségou. Une place coute 2000 Frs pur un adulte et 1 500 Frs pour un enfant. Lors d'un départ, le gérant a enregistré 24 000 Frs de recettes. Combien d'enfants et d'adultes étaient à bord du car ?

4.2. Système d'équations linéaires à trois (3) inconnues :

4.2.1. Définition :

On appelle système de 3 équations à 3 inconnues, tout système de la forme

$$(S) (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Où $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d''$ sont des coefficients réels.

4.2.2. Différentes méthodes de résolutions :

a. Méthode de substitution :

Dans la méthode par substitution, on exprime une des trois inconnues en fonction des autres à l'aide d'une des équations, et l'on reporte (ou l'on substitue) le résultat obtenu dans l'équation restante.

Activité :

$$(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x - 3y + z = -3 & (1) \\ 5x - y + 3z = 8 & (2) \\ -x + 3y - 4z = -13 & (3) \end{cases}$$

Solution :

Dans (1) $\Rightarrow z = -2x + 3y - 3$. En remplaçant z par sa valeur dans les deux autres équations :

$$(2) \Rightarrow 5x - y + 3z = 8 \Rightarrow 5x - y + 3(-2x + 3y - 3) = 8 \Rightarrow -x + 8y = 17$$

$$(3) \Rightarrow -x + 3y - 4z = -13 \Rightarrow -x + 3y - 4(-2x + 3y - 3) = -13 \Rightarrow 7x - 9y = -25$$

$$\text{On a le système qui devient : } \begin{cases} -x + 8y = 17 & (1') \\ 7x - 9y = -25 & (2') \end{cases}$$

Dans (1') $\Rightarrow x = 8y - 17$. En remplaçant x par sa valeur dans (2'). On a :

$$(2') \Rightarrow 7x - 9y = -25 \Rightarrow 7(8y - 17) - 9y = -25 \Rightarrow y = 2.$$

En remplaçant $y = 2$ dans (1'), on obtient $x = -1$

Et enfin remplaçant $x = -1$ et $y = 2$ dans (1), on obtient $z = 5$.

$$S = \{(-1; 2; 5)\}$$

b. Méthode pivot de Gauss :

soit (S) un système de trois équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S) (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

La résolution se fera en deux :

☞ Transformation de (S) en un système équivalent (S') plus simple que (S) c'est-

$$\text{à-dire : } (S') (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} ax + by + cz = d \\ my + nz = t \\ n'z = t' \end{cases}$$

☞ Résolution de (S') .

Evaluation 8 : Résous par la méthode de Pivot de Gauss les systèmes

$$\begin{aligned} a) (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, & \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ -2x + y - 3z = -4 \end{cases} ; & b) (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, & \begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ x + 4y - z = -4 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases} \\ c) (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, & \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 5 \\ x - y = -1 \end{cases} ; & d) (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, & \begin{cases} 3x - y + 2z = 13 \\ x + 3y - 5z = -16 \\ 4x + 2y - z = 3 \end{cases} \end{aligned}$$