

Classe : 10^{ème} Commune

Chapitre : 3 Durée : 18H

EQUATIONS INEQUATION ET SYSTEMES

Domaine : Sciences, Mathématiques et Technologies

Compétences : Résoudre une situation problème, Communiquer des messages utilisant le langage et le symbolisme Mathématiques.

Composantes : Diagnostiquer la situation problème, mettre à l'essai des pistes de solutions et partager les informations relatives à la démarche et formuler les résultats.

Manifestations : Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation, établir des relations entre les données retenues ; Inventorier des différentes pistes de solution, Choisir une piste et l'appliquer puis tirer des conclusions.

Ressources Educatives :

Ressources humaines : Professeur, élèves,

Ressources Matérielles : Tableau, Livres ; cahier ; règle ; compas ; Equerre ; rapporteur ; Chiffon ; craie ...

Stratégies d'animation : Travaux en groupe (pédagogie active).

Contenu

Séquence 1 : Equations (03 heures)

1) Equation du premier degré à une inconnue :

Activité 1

Déterminer la valeur de x , dans chacun des cas suivantes :

a) $2x + 3 = 0$; b) $-4x + 8 = 0$;

c) $\frac{7}{2}x + \sqrt{3} = \frac{5}{2}x + 2\sqrt{3}$

Synthèse :

-Définition : On appelle équation du premier degré à une inconnue, toute équation de la forme $ax + b = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

- Résoudre une telle équation c'est déterminer la valeur de x qui vérifie l'équation.

2) Equation du second degré à une inconnue :

Activité :

Soit l'équation(E): $x^2 - 4x + 4 = 0$.

a) Montrer que (E) est équivalente à $(x - 2)^2 = 0$.

b) En déduire la résolution de (E).

Synthèse :

1) Définition :

On appelle équation du second degré à une inconnue, toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$

Exple :

$$2x^2 - 4x + 7 = 0 ; x^2 + 7 = 0 ; -x^2 + 3x = 0$$

2) Résolution :

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + bx + c = 0$. On peut :

-Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution $S = \emptyset$
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution double $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ d'où $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet 2 solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ D'où } S = \{x_1; x_2\}$$

3) Evaluation:

a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; b) $-3x^2 + 6x + 9 = 0$

c) $x^2 + 4x - 7 = 2x^2 - 3x + 2$; d) $x^2 + 2x + 2 = 0$.

3) Equation du 1^{er} degré à 2 inconnues:

Activité :

Soit la droite (d): $x + 2y + 1 = 0$

a) Représenter la droite (d) dans un repère orthonormé.

b) Trouver 2 valeurs de x et de y qui vérifient (d)

Synthèse :

-Définition : On appelle équation du 1^{er} degré à 2 inconnues, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$

-Exple : $2x + y - 3 = 34$; $-5x + 2y = 3(y - x) + 20$

-Résolution :

Pour résoudre l'équation $ax + by + c = 0$

On trace la droite (d) d'équation $ax + by + c = 0$ et l'ensemble solution est :

$$S \left\{ M \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) \in P; M \in (d) \right\}.$$

Evaluation :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes :

a) $x + 2y + 1 = 0$, b) $3x + y - 4 = 76$

c) $x = 0$; d) $7y + 14 = 0$

4) Equation rationnelle :

-Définition : On appelle équation rationnelle, toute équation de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ avec P et Q des fonctions polynômes.

-Résolution :

Pour résoudre une telle équation, On peut :

-Chercher $D_p = \{x \in \mathbb{R}; Q(x) \neq 0\}$

-Puis résoudre l'équation $P(x) = 0$

-L'ensemble solution est l'ensemble des valeurs de x qui sont dans D_p .

-Evaluation :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{2x-1}{3x+7} = 0$, b) $\frac{7}{2x+1} = \frac{8}{3x-8}$ c) $\frac{x^2+4x+6}{-x+2} = -2$

Séquence 2: Inéquations (3heures)

1) Inéquation du 1^{er} degré à une inconnue:

Activité :

Déterminer les valeurs de x qui vérifient :

a) $-2x + 4 \leq 0$ b) $x + 1 > 6$ c) $2(x - 12) \geq -3x + 5$

Synthèse :

-Définition : On appelle Inéquation du 1^{er} degré à une inconnue, toute inéquation ayant l'une des formes : $ax + b < 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$ et $ax + b > 0$.

-Résoudre une telle inéquation c'est déterminer l'ensemble des valeurs de x qui la vérifie.

2) Inéquation du second degré à une inconnue :

a) Signe d'un trinôme du second degré :

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Pour étudier le signe de $P(x)$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

-Si $\Delta > 0$, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

x_1 et x_2 sont les racines de $P(x)$.

-Si $\Delta = 0$, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de a

x_0 est le zéro de $P(x)$.

-Si $\Delta < 0$, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	

-Evaluation :

1) Etudier le signe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

; b) $g(x) = -x^2 + 4x - 3$; c) $h(x) = x^2 + 2x + 2$

2) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $f(x) < 0$; b) $g(x) \geq 0$ et c) $h(x) \leq 0$

3) Inéquation du 1^{er} degré à 2 inconnues :

Activité :

Soit la droite (d): $x + y + 2 = 0$.

1) Représenter dans un repère orthonormé la droite (d).

2) Hachurer la partie (S) du plan située en dessous de (d).

NB : (S) est appelé l'ensemble solution de $x + y + 2 \leq 0$

Synthèse :

-Définition : On appelle inéquation du 1^{er} degré à 2 inconnues, toute inéquation de la forme $ax + by + c \leq 0$; $ax + by + c \geq 0$; $ax + by + c < 0$ ou $ax + by + c > 0$.

-Résolution :

Résoudre l'inéquation $ax + by + c \leq 0$; il suffit de représenter la droite associée

(d): $ax + by + c = 0$ Dans un repère orthonormé puis hachurer la partie non solution .

-Evaluation :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ graphiquement :

a) $-4x + 2y + 7 > 0$; b) $x + 2y - 1 \leq 0$

c) $3x - 5y \geq 4x - 2y - 3$

4) Inéquation rationnelle :

Evaluation :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\frac{2x+1}{x-1} \geq 0$; b) $\frac{x}{-7x+4} > 0$ et c) $\frac{1}{2x+3} < \frac{2}{x-1}$

5) Résolution d'équation du type:

$\sqrt{ax + b} = cx + d$

Pour résoudre une telle équation, on cherche $D_v = \{x \in \mathbb{R}, ax + b \geq 0 \text{ et } cx + d \geq 0\}$, puis élever les deux membres au carré, puis résoudre. L'ensemble solution est l'ensemble des valeurs de x qui sont dans D_v .

-Evaluation :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{x+1} = 2x+4$ b) $\sqrt{x+1} = 2$

d) $\sqrt{-3x+2} = -7$

Sequence3 : Systèmes (3heures)

1) Système de 2 équations à 2 inconnues :

Activité :

Résoudre les systèmes suivants par la méthode D'addition, mixte et comparaison

a)
$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 5x - 2y = -17 \end{cases}, b) \begin{cases} 4x - 12y = 4 \\ 7x - 21y = 7 \end{cases} c) \begin{cases} 9x - 5y = 39 \\ 15x - 3y = 81 \end{cases}$$

Synthèse:

a) La méthode de déterminants:

Soit à résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

On calcul $\Delta = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$

-si $\Delta = 0$ alors $S = \emptyset$ ou $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

-Si $\Delta \neq 0$ on calcul $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

Donc $S = \left\{ \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \right\}$

b) Evaluation :

Résoudre par la méthode des déterminants les systèmes ci-dessus.

2) Les systèmes dans $\mathbb{R}^3$:

a) **Définition** : On appelle système de 3 équations

à 3 inconnues, tout système de la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases} \text{ avec les coef réels}$$

-Evaluation :

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, par méthode du Pivot de GAUSS :

$$a) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ -2x + y - 3z = -4 \end{cases} ; b) \begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ x + 4y - z = -4 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$; c) \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y + Z = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$$