

ÉQUATIONS – INÉQUATIONS

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Équations – Inéquations du premier degré à une inconnue:

1°) Équations du premier degré à une inconnue :

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3x + 12 = 0$

$$3x + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x = -12 \Leftrightarrow x = -4 ; \text{ d'où l'ensemble des solutions est } S = \{-4\}.$$

2°) Inéquations du premier degré à une inconnue :

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $3x + 12 \leq 0$

$$3x + 12 \leq 0 \Leftrightarrow 3x \leq -12 \Leftrightarrow x \leq -4 ; \text{ D'où l'ensemble des solutions est } S =]-\infty; -4].$$

II – Équations du premier degré à une inconnue:

1°) Définition:

Une équation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$ est une équation de la

forme : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (a ; b et c sont des réels).

Exemples : $-3x^2 + 4x - 1 = 0$; $x^2 - x + 3 = 2x^2 + 5x - 9$.

2°) – Résolution par la méthode du discriminant :

1^{er} cas : Si $b \neq 0$ et $c = 0$

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} ;$$

l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \left\{0; \frac{5}{2}\right\}$.

2^{ème} cas : si $b = 0$ et $c \neq 0$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $3x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -5$ impossible.

$$2x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 32 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = -4 \text{ d'où } S = \{-4; 4\}.$$

3^{ème} cas : Cas général $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$.

Posons $f(x) = ax^2 + bx + c$.

– Forme canonique d'un polynôme du second degré :

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$) ;

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow$$

$$f(x) = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \Leftrightarrow$$

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \Leftrightarrow$$

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ alors

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] .$$

Cette dernière écriture de $f(x)$ est appelée **forme canonique** du polynôme.

$\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Conclusion :

Pour résoudre une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) d'inconnu x , je calcule le discriminant noté : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$;
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} .$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution unique : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Exemples : résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3x^2 - x + 1 = 0$; b) $x^2 + x - 1 = 0$; c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

3°) –Discriminant réduit :

Si b est pair on pose $b' = \frac{b}{2} \Leftrightarrow b = 2b'$; alors on calcule le discriminant réduit

$$\Delta' = (b')^2 - ac.$$

- Si $\Delta' < 0$, alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$;
- Si $\Delta' > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} .$$

- Si $\Delta' = 0$, alors l'équation admet une solution unique : $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$.

Exemples : résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $5x^2 - 38x + 21 = 0$; b) $x^2 + 2x - 8 = 0$; c) $9x^2 + 6x - 1 = 0$

4°) – Recettes :

Soit l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

R₁) Si $a + b + c = 0$, alors $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a}$;

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3x^2 - 12x + 9 = 0$
 $3 - 12 + 9 = 0$ donc $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. D'où $S = \{1; 3\}$

R₂) Si $a + c = b$, alors $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{-c}{a}$.

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^2 + 8x + 9 = 0$
 $-1 + 9 = 8$ donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 9$. D'où $S = \{-1; 9\}$

4°) – Factorisation de $ax^2 + bx + c = 0$:

- Si x_1 et x_2 sont les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ alors on a :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) .$$

- Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.

- Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Exemple : factoriser $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$

III – Équations bicarrées:

Exemples : résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations bicarrées suivantes :

▪ $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$; $x^6 - 124x^3 - 125 = 0$.

(indication on pose $x^2 = T$ ou $x^3 = U$)

IV – Équations irrationnelles simples:

Propriété : $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ (\sqrt{a})^2 = b^2 \end{cases}$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2x+1} = x-1$.

L'ensemble de validité $D_v = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x-1 \geq 0\}$.

$$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_v = [1; +\infty[.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} = x-1 &\Leftrightarrow 2x+1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \\ x(x-4) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \notin D_v \text{ ou } x = 4 \in D_v ; \text{ d'où } S = \{4\} . \end{aligned}$$

V – Inéquations:

1°) Signe du binôme $ax + b$:

Soit le binôme $f(x) = ax + b$

• Si $a = 0$, alors $f(x)$ est du signe de b .

• Si $a \neq 0$, alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de $(-a)$	0	Signe de a

Exemple : étudier le signe de $f(x) = -2x + 12$

$$-2x + 12 = 0 \Rightarrow x = 6.$$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x + 12$	+	0	-

Pour $x \in]-\infty ; 6]$ $f(x) \geq 0$; Pour $x \in [6 ; +\infty[$ $f(x) \leq 0$

2°) Signe d'un trinôme du second degré:

Considérons le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ; Δ le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

1^{er} cas : Si $\Delta < 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a .

2^{ème} cas : Si $\Delta = 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour toutes valeurs $x \neq -\frac{b}{a}$.

3^{ème} cas : Si $\Delta > 0$, et $x_1 ; x_2$ les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($x_1 < x_2$) alors le trinôme du second degré **est du signe de a à l'extérieur des racines** et du **signe de $(-a)$ à l'intérieur des racines**.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de $(-a)$	0	Signe de a

Exemples : étudier le signe des polynômes suivants :

$$f(x) = 2x^2 + x + 1 ; g(x) = x^2 - 11x + 30 ; h(x) = \frac{x+3}{-2x+8}.$$

3°) Application à la résolution d'inéquations :

Exemples : résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$-2x^2 + 4x + 30 \leq 0 ; \quad 3x^2 + 5x + 4 \neq 0 ; \quad 9x^2 + 6x + 1 \neq 0 ; \quad \frac{x^2 + 2x - 3}{-x + 5} \leq 0 ;$$