

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS – D'INÉQUATIONS

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I– Système d'équations du 1^{er} degré à 2 inconnues :

Définition :

Soient a, b, c, a', b', c' six réels donnés. Résoudre pour x et y réels le système

$$\begin{cases} ax + by = c & (E_1) \\ a'x + b'y = c' & (E_2) \end{cases}$$

Consiste à déterminer l'ensemble S des couples $(x ; y)$ de réels qui vérifient simultanément les deux équations.

1°) Différentes méthodes de résolution :

Exemple de résolution :

Résoudre pour x et y réels le système (S) $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

- 1^{ère} méthode : par combinaison linéaires

$$(S) \begin{cases} 2x - 5y = 11 \times (-3) \\ 3x + 4y = 5 \times (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 15y = -33 \\ 6x + 8y = 10 \end{cases}$$

$$23y = -23 \Leftrightarrow y = -1$$

$$(S) \begin{cases} 2x - 5y = 11 \times (4) \\ 3x + 4y = 5 \times (5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 20y = 44 \\ 15x + 20y = 25 \end{cases}$$

$$3x = 69 \Leftrightarrow x = 3$$

Le système (S) admet le couple $(3 ; -1)$ comme solution ; $S = \{ (3 ; -1) \}$.

- 2^{ème} méthode : par substitution

$$(S) \begin{cases} 2x - 5y = 11 & (1) \\ 3x + 4y = 5 & (2) \end{cases}$$

Dans l'équation (1) exprimons x en fonction y : $2x - 5y = 11 \Leftrightarrow x = \frac{5y + 11}{2}$.

Dans l'équation (2) remplaçons x par sa valeur :

$$3\left(\frac{5y + 11}{2}\right) + 4y = 5 \Leftrightarrow \frac{15y}{2} + 4y = 5 - \frac{33}{2} \Leftrightarrow 15y + 8y = -23 \Leftrightarrow 23y = -23$$

$\Leftrightarrow y = -1$. On remplace y par -1 dans l'expression de $x = \frac{5y + 11}{2}$. On obtient $x = 3$. D'où l'ensemble solution du système est $S = \{ (3 ; -1) \}$.

- **3^{ème} méthode : par Comparaison**

$$(S) \begin{cases} 2x - 5y = 11 & (1) \\ 3x + 4y = 5 & (2) \end{cases}$$

Dans l'équation (1) exprimons x en fonction y : $2x - 5y = 11 \Leftrightarrow x = \frac{5y + 11}{2}$.

Dans l'équation (2) exprimons x en fonction y : $3x + 4y = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5 - 4y}{3}$.

En comparant les valeurs de x on a : $\frac{5y + 11}{2} = \frac{5 - 4y}{3} \Leftrightarrow$

$$3(5y + 11) = 2(5 - 4y) \Leftrightarrow 15y + 33 = 10 - 8y \Leftrightarrow 23y = -23 \Leftrightarrow y = -1$$

$y = -1 \Rightarrow x = 3$. D'où l'ensemble solution du système est $S = \{ (3; -1) \}$.

- **4^{ème} méthode : par déterminant**

Soit le système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y.

$$\begin{cases} ax + by = p & (E_1) \\ cx + dy = q & (E_2) \end{cases}$$

Où a ; b ; c ; d ; p ; q sont des réels donnés. Pour résoudre ce système on calcule

le déterminant principal : $Dét = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$;

le déterminant secondaire en x: $D_x = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix} = pd - bq$;

le déterminant secondaire en y: $D_y = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix} = aq - pc$;

- Si $Dét \neq 0$; alors les droites (E_1) et (E_2) sont sécantes en un point I (x ; y). Le système admet un couple unique (x ; y) de solution tel que :

$$x = \frac{D_x}{Dét} \text{ et } y = \frac{D_y}{Dét} \text{ et } S = \{(x ; y)\}$$

- $\left. \begin{array}{l} \text{Si } Dét = 0 \\ \text{et } D_x \neq 0 \text{ ou } D_y \neq 0 \end{array} \right\}$ Alors les droites (E_1) et (E_2) sont parallèles

Le système n'admet pas de solutions, $S = \emptyset$.

- $\left. \begin{array}{l} \text{Si } Dét = 0 \\ \text{et } D_x = 0 ; D_y = 0 \end{array} \right\}$ Alors les droites (E_1) et (E_2) sont confondues.

Le système admet une infinité de solutions de la forme,

$$S = \{ (x ; \alpha x + \beta) / x \in \mathbb{R} \} \text{ ou } S = \{ (\alpha y + \beta ; y) / y \in \mathbb{R} \}.$$

Exemple 1 : Soit à résoudre par la méthode du déterminant le système

$$(S) \begin{cases} 2x - 5y = 11 & (1) \\ 3x + 4y = 5 & (2) \end{cases}$$

$$Dét = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-15) = 23 ; D_x = \begin{vmatrix} 11 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 44 - (-25) = 69 ;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - (33) = -23 ; x = \frac{D_x}{Dét} = \frac{69}{23} = 3 ; y = \frac{D_y}{Dét} = \frac{-23}{23} = -1.$$

D'où l'ensemble solution est : $S = \{ (3; -1) \}$.

Exemple 2 : Soit à résoudre par la méthode du déterminant le système

$$(S) \begin{cases} 2x - 3y = 8 & (1) \\ -4x + 6y = -1 & (2) \end{cases}$$

$$Dét = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0 ; D_x = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 48 - 3 = 45 ;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 32 = 30 ; Dét = 0 \text{ et } D_x \neq 0 ; D_y \neq 0. \text{ Le système}$$

n'admet pas de solutions. D'où l'ensemble solution est : $S = \emptyset$.

Exemple 3 : Soit à résoudre par la méthode du déterminant le système

$$(S) \begin{cases} x - 2y = 2 & (1) \\ 4x - 8y = 8 & (2) \end{cases}$$

$$Dét = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0 ; D_x = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -8 \end{vmatrix} = -16 + 16 = 0 ;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0 ; Dét = 0 \text{ et } D_x = 0 ; D_y = 0. \text{ Le système admet une}$$

infinité de solutions. $x - 2y = 2 \Leftrightarrow x = 2y + 2$.

D'où l'ensemble solution est : $S = \{ (2y + 2; y) / y \in \mathbb{R} \}$.

2°) Systèmes paramétriques :

Exemple : Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre m le système

$$(S) \begin{cases} (2m-1)x + 3my = 1 & (1) \\ 3mx + 3(2m+1)y = m+2 & (2) \end{cases}$$

II– Système d'inéquations du 1^{er} degré à 2 inconnues :

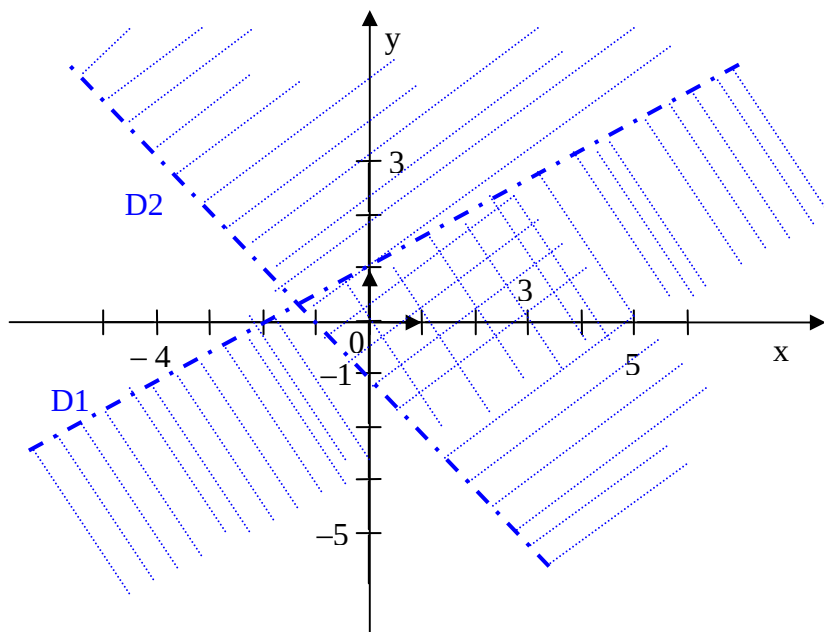
Exemple 1 :

Représentons l'ensemble des solutions du système d'inéquations :

$$\begin{cases} x - 2y + 2 \geq 0 \\ x + y + 1 \leq 0 \end{cases} \quad \text{Ce système est équivalent au système} \quad \begin{cases} y \leq \frac{1}{2}x + 1 \\ y \leq -x - 1 \end{cases}$$

il faut représenter dans le plan les droites d'équation respectives :

$$(D_1) : y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ et } (D_2) : y = -x - 1.$$



La région du plan **non hachurée est la partie solution** du système.

Exemple 2 :

Représentons l'ensemble des solutions du système d'inéquations :

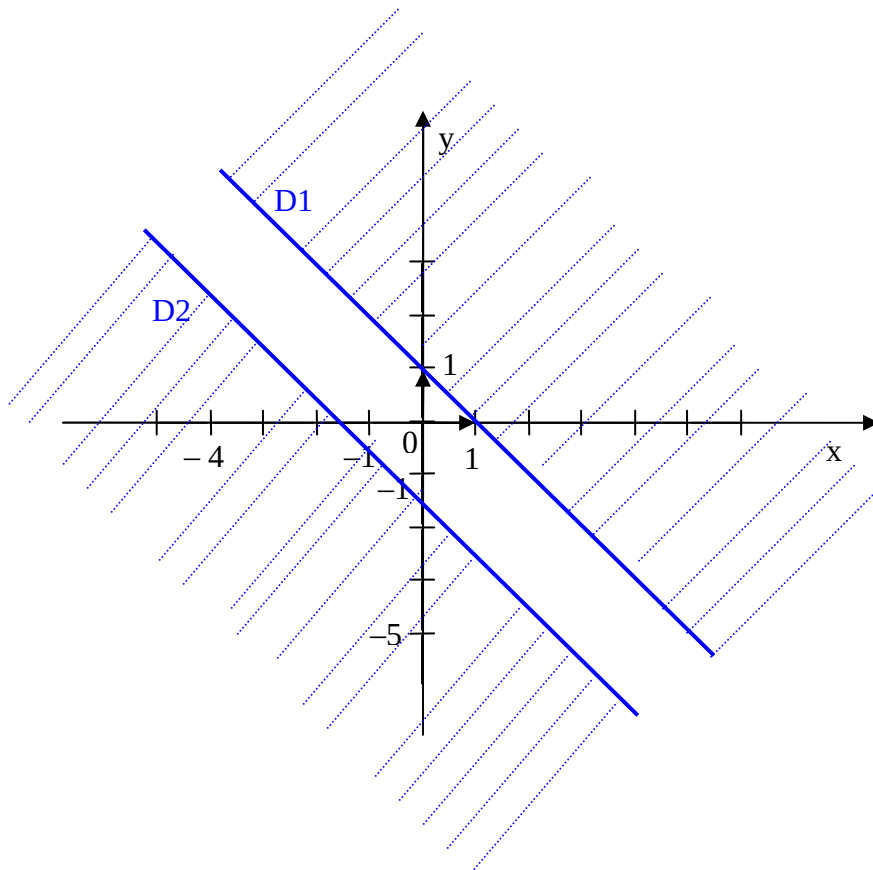
$$\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ 2x + 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq -x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

il faut représenter dans le plan les droites d'équation respectives :

$$(D_1) : y = -x + 1 \text{ et } (D_2) : y = -x - \frac{3}{2}.$$



La région du plan non hachurée est la partie solution du système.

III – Systèmes de trois équations à trois inconnues :

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ x + 3y - 5z = -16 & (L_2) \\ 4x + 2y - z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

- **Méthode de Substitution :**

$(L_3) \Rightarrow z = 4x + 2y - 3$. En remplaçant z par sa valeur dans les autres équations

on a le système devient : $\begin{cases} 11x + 3y = 19 & (1) \\ -19x - 7y = -31 & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow 3y = 19 - 11x \Leftrightarrow y = \frac{19 - 11x}{3}$. En remplaçant y par sa valeur dans (2) on

obtient : $20x = 40 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1 \quad z = 3$. D'où la solution du système est le triplet $(2 ; -1 ; 3)$. Et l'ensemble solution est $S = \{ (2 ; -1 ; 3) \}$.

- **Méthode du pivot de Gauss :**

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ x + 3y - 5z = -16 & (L_2) \\ 4x + 2y - z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

Éliminons x dans les équations (L_2) et (L_3)

(L_1)	$3x - y + 2z = 13$	$(4L_1)$	$12x - 4y + 8z = 52$
$(-3L_2)$	$-3x - 9y + 15z = 48$	$(-3L_2)$	$-12x - 6y + 3z = -9$
-----		-----	
	$= 0 - 10y + 17z = 61$		$= 0 - 10y + 11z = 43$

Le système devient : $\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ 0 - 10y + 17z = 61 & (L_2) \\ 0 - 10y + 11z = 43 & (L_3) \end{cases}$

Eliminons y dans l'équation (L_3)

$$(L_2) \quad -10y + 17z = 61$$

$$(-L_3) \quad 10y - 11z = -43$$

Le système devient :

$$= 0 + 6z = 18$$

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ 0 - 10y + 17z = 61 & (L_2) \\ 0 + 0 + 6z = 18 & (L_3) \end{cases}$$

Un tel système est dit **échelonné ou triangularisé**.

$$(L_3) \Rightarrow 6z = 18 \Leftrightarrow z = 3$$

$$(L_2) \Rightarrow -10y + 51 = 61 \Leftrightarrow y = -1 \text{ d'où } S = \{ (2; -1; 3) \}$$

$$(L_1) \Rightarrow 3x + 1 + 6 = 13 \Leftrightarrow x = 2$$