

ETUDES DE FONCTIONS

I. Fonctions polynômes de degré 2

1. Définition

Une fonction polynôme de degré 2 f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des nombres réels donnés et $a \neq 0$.

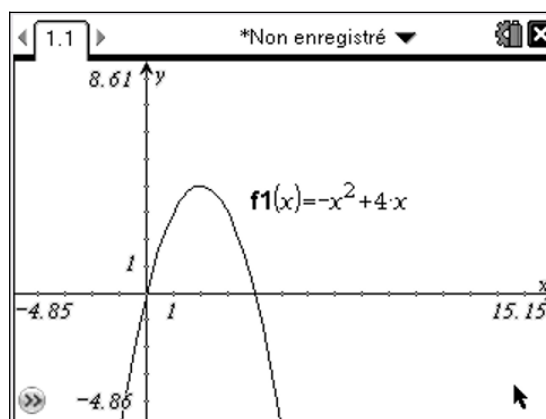
Exemples :

- $f(x) = 5x^2 - 4x + 9$. On a : $a = 5$, $b = -4$ et $c = 9$.
- $g(x) = -x^2 + 4x$. On a : $a = -1$, $b = 4$ et $c = 0$.
- La fonction carré est une fonction polynôme particulière telle que : $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$.
- $h(x) = (3x + 1)(x - 2)$.

En effet : $h(x) = 3x^2 - 6x + x - 2 = 3x^2 - 5x - 2$.

On a : $a = 3$, $b = -5$ et $c = -2$.

On peut tracer la courbe représentative d'une fonction polynôme à l'aide de la calculatrice graphique. Il s'agit d'une **parabole**.



« Jesus dit à ses disciples $y^2 = 2px$. Ils ne comprirent pas, c'était une parabole. »

Citation apocryphe

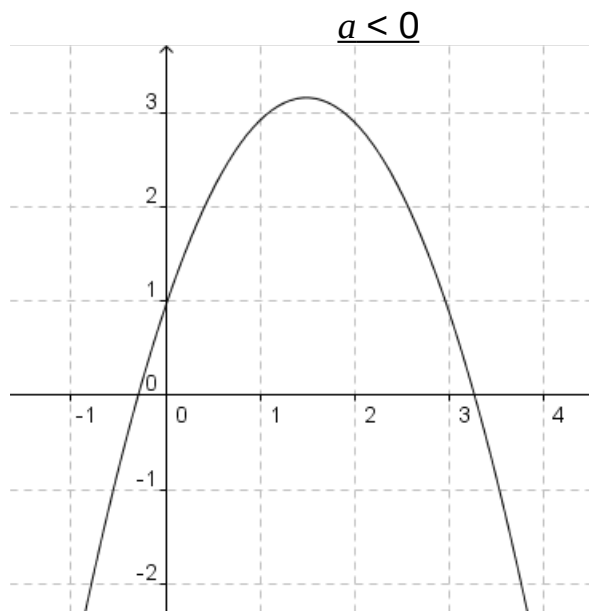
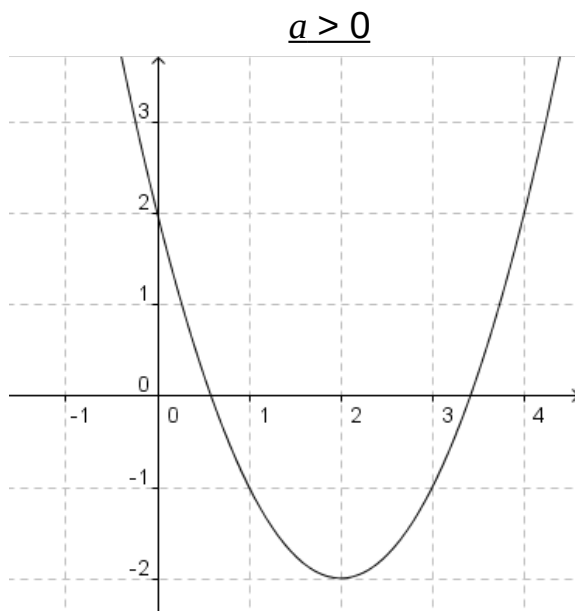
Le mot vient du grec « parabolê » qui signifiait l'action de jeter à côté : « para » pour à côté et « bolein » pour jeter.

2. Variations

Propriétés :

Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si a est positif, f est d'abord décroissante, puis croissante.
- Si a est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante.



Exercices conseillés	En devoir
Ex 1 à 3 (page 7) p117 n°1, 3 p120 n°31 Ex 4 à 11 (page 7 et 8) p117 n°12, 14, 13* ; p118 n°18* p121 n°40*	Tableaux de var. de fonctions du second degré données.

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
Ex 1 à 3 (page 7) p134 n°1 à 3 p136 n°32 Ex 4 à 11 (page 7 et 8) p138 n°42, 44, 43* p138 n°48* p140 n°63*	Tableaux de var. de fonctions du second degré données.

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

3. Extremum

La courbe représentative de f est une parabole qui admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.

Définition :

Le point de la courbe qui correspond au maximum ou au minimum est appelé le sommet de la parabole.

Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$ admet un maximum.

En effet, le coefficient devant x^2 est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante.

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Alors f admet un extremum pour $x = -\frac{b}{2a}$.

Méthode : Déterminer les coordonnées de l'extremum d'une fonction polynôme de degré 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

- Quelle est la nature de l'extremum de la fonction f ?
- Déterminer les coordonnées de cet extremum.
- Construire le tableau de variations de f , puis vérifier en traçant sa courbe représentative à l'aide de la calculatrice.

a) Le coefficient devant x^2 est positif, f admet donc un minimum.

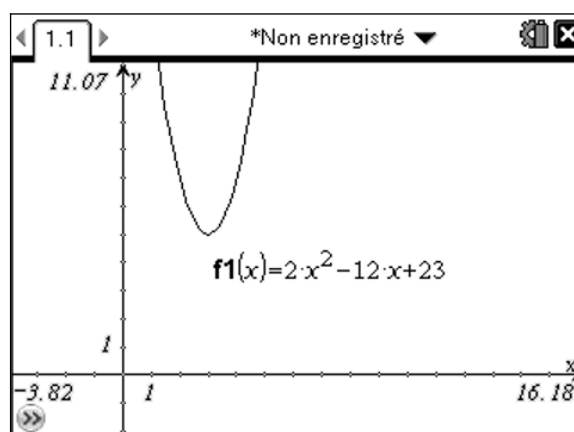
b) Le minimum est atteint en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \times 2} = 3$

Or $f(3) = 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 23 = 5$ donc f admet un minimum égal à 5 pour $x = 3$. Les coordonnées du minimum sont (3 ; 5).

c)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$		5	

On pourra tracer la parabole à l'aide d'une calculatrice graphique pour vérifier.



Exercices conseillés	En devoir
Ex 12 à 18 (page8) p117 n°5*	Ex 19 et 20 (page9)

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2010*
TP conseillé

TP Tice1 p110 : Différentes paraboles

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2010*

Exercices conseillés	En devoir
Ex 12 à 18 (page8) p136 n°33 p138 n°39*	Ex 19 et 20 (page9)

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2014*
TP conseillé

p129 TP1 : Différentes paraboles

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2014*

II. Fonctions homographiques

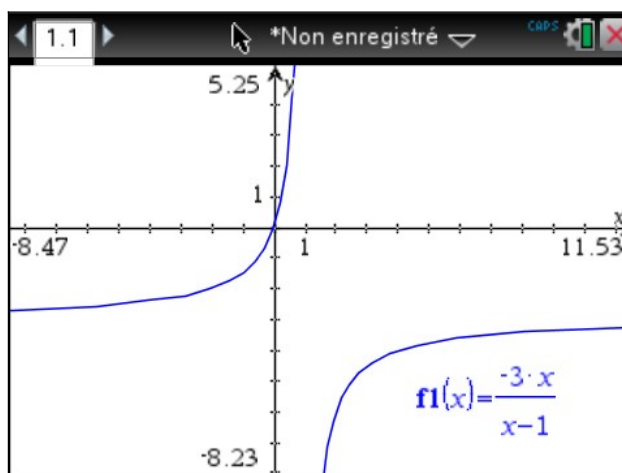
1. Définition

Une fonction homographique f est définie par $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, où a, b, c et d sont des nombres réels donnés et $c \neq 0$.

Exemples :

- $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 1}$
- $g(x) = \frac{-3x}{x - 1}$
- La fonction inverse est une fonction homographique telle que :
 $a = 0, b = 1, c = 1$ et $d = 0$.

On peut tracer la courbe représentative d'une fonction homographique à l'aide de la calculatrice graphique. Il s'agit d'une **hyperbole**.



2. Ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des nombres réels qui ont une image par f .

Une fonction homographique f de la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ est donc définie

lorsque : $cx+d \neq 0$ c'est-à-dire lorsque $x \neq -\frac{d}{c}$.

L'ensemble de définition de f est $\left] -\infty; -\frac{d}{c} \right[\cup \left] -\frac{d}{c}; +\infty \right[$.

Méthode : Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction homographique.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{3x-6}$.

Déterminer l'ensemble de définition de f .

Le dénominateur ne peut pas s'annuler.

$3x-6=0$ est équivalent à $x=2$.

La fonction f n'est donc pas définie pour x égal à 2.

L'ensemble de définition de f est $] -\infty; 2[\cup] 2; +\infty[$ qui peut aussi s'écrire $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Exercices conseillés	En devoir
Ex 21 à 25 (page9) p120 n°36 Ex 26 à 27 (page9) p119 n°27*	Solutions graphiques d'équations données.

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés	En devoir
p121 act 2 Ex 21 à 25 (page9) p136 n°35 Ex 26 à 27 (page9) p139 n°52, 55*	Solutions graphiques d'équations données.

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

3. Représentation graphique

Toutes les fonctions homographiques sont définies sur l'ensemble des nombres réels privé d'une valeur.

Pour cette valeur, la fonction homographique n'a pas d'image.

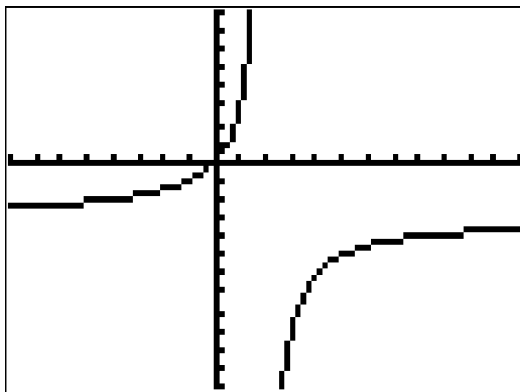
Les représentations graphiques des fonctions homographiques sont donc constituées de deux parties distinctes.

Méthode : Etude graphique d'une fonction homographique

Soit g la fonction définie sur $] -\infty ; 2[\cup] 2 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{3x}{2-x}$.

- a) Tracer la courbe représentative de g à l'aide d'une calculatrice graphique.
b) Par lecture graphique, donner les variations de g .

a)



a) Il est également possible d'afficher un tableau de valeurs de la fonction.

X	Y1	
0	-1	
1	0	
2	3	
2.0001	ERROR	
3	-9	
4	-6	
5	-3	

Press + for Δ tbl

La fonction g est croissante sur l'intervalle $] -\infty ; 2[$ et croissante sur l'intervalle $] 2 ; +\infty[$.

Exercices conseillés	En devoir
p118 n°23 Ex 28 à 30 (page9 et 10) p119 n°24 p120 n°38 p121 n°39*	p119 n°26

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2010*

Exercices conseillés	En devoir
p135 n°26 Ex 28 à 30 (page9 et 10) p135 n°27 p136 n°36	p139 n°54

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2014*



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales

Exercice

Parmi les

fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions du second degré ?

$$f(x) = 3x^2 - 3x + 2 \quad g(x) = -4x^2 + 1 \quad h(x) = -3x + 9 \quad i(x) = (x - 3)(x + 2)$$

$$j(x) = 5x - x^2 - 8 \quad k(x) = 9x^2 \quad l(x) = \frac{1}{x^2} - 3x + 2 \quad m(x) = x(3x - 6)$$

Exercice 2

Justifier que chacune des fonctions suivantes est une fonction du second degré :

$$f(x) = (2x - 1)(5 - x) \quad g(x) = 3x(x - 5) + 3$$

$$h(x) = (1 - x)(3 + x) \quad i(x) = (2 - x)^2$$

Exercice 3

A l'aide de la calculatrice, tracer dans un repère chaque fonction de l'exercice 2.

Exercice 4

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont d'abord croissantes puis décroissantes ?

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 \quad g(x) = -x^2 - 7x + 2 \quad h(x) = 5x^2 - 3x + 9 \quad i(x) = 3x - x^2 + 1$$

$$j(x) = -9x^2 + 2 \quad k(x) = (x + 3)(-x + 2) \quad l(x) = -2x(1 - 2x) \quad m(x) = (-x + 1)^2$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

- 1) À l'aide de la calculatrice, tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction f .
- 2) En déduire le tableau de variations de f .

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 - 12x + 1$.

- 1) À l'aide de la calculatrice, tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction f .
- 2) En déduire le tableau de variations de f .

Exercice 7

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles dont les variations correspondent au tableau de variations ci-contre :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 2 \quad g(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$h(x) = -2x^2 + x + 2 \quad i(x) = -2x^2 + 4x + 1$$

$$j(x) = (1 - x)(2 - x) \quad k(x) = (2x - 1)(4 + x)$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		3	

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$		1	

Exercice 8

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles dont les variations suivent :

$$f(x) = x^2 + 2x - 2 \quad g(x) = -x^2 + 5x - 3$$

$$h(x) = x^2 - 2x + 5 \quad i(x) = x^2 - 8x + 17$$

$$j(x) = (x - 4)^2 + 1 \quad k(x) = (2x - 7)(x + 3)$$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 3x - 2$.

- 1) À l'aide de la calculatrice, tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction f .
- 2) Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $3x^2 - 3x - 2 = 0$ et une valeur approchée des solutions éventuelles.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$.

- 1) À l'aide de la calculatrice, tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction f .
- 2) Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $-2x^2 + 3x + 4 = 0$ et une valeur approchée des solutions éventuelles.

Exercice 11

Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $-2x^2 + x - 5 = 0$ et une valeur approchée des solutions éventuelles.

Exercice 12

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles admettent un minimum ?

$$\begin{array}{lll} f(x) = -2x^2 + x + 2 & g(x) = -x^2 - 4x + 1 & h(x) = -x^2 + 7x + 9 \\ i(x) = 3x^2 - 2x + 6 & j(x) = (5 - x)(4 - x) & k(x) = 3x - 5 \end{array}$$

Exercice 13

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles admettent un maximum ?

$$\begin{array}{lll} f(x) = -x^2 + 6x & g(x) = 5x^2 - 2x + 9 & h(x) = -4x^2 + x + 1 \\ i(x) = x^2 + 7 & j(x) = (x - 1)(8 - 4x) & k(x) = -x - 2 \end{array}$$

Exercice 14

À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de l'extremum de chaque fonction en précisant s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$$\begin{array}{lll} f(x) = x^2 + 2x + 1 & g(x) = -2x^2 + 8x - 2 & h(x) = x^2 - 2x + 3 \\ i(x) = -x^2 + 6x + 5 & j(x) = 3x^2 + 3x & k(x) = -x^2 - 3x - 2 \end{array}$$

Exercice 15

À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de l'extremum de chaque fonction en précisant s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$$f(x) = 10x^2 + 3x + 1 \quad g(x) = -8x^2 + x - 5 \quad h(x) = 50x^2 - 6$$

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

- 1) Quelle est la nature de l'extremum de f (minimum ou maximum) ? Justifier.
- 2) Pour quelle valeur de x est-il atteint ? Calculer cet extremum.
- 3) Construire le tableau de variations de f , puis vérifier en traçant sa courbe représentative à l'aide de la calculatrice.
- 4) Reproduire la courbe dans un repère.

Exercice 17

Même exercice avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x - 1$.

Exercice 18

Même exercice avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

Exercice 19

Même exercice avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^2 + 4x - 4$.

Exercice 20

Même exercice avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9x^2 - 36x + 32$.

Exercice 21

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions homographiques ?

$$\begin{array}{llllll} f(x) = \frac{2x-1}{3x+2} & g(x) = \frac{-x-5}{7x+1} & h(x) = \frac{-1+x}{3x} & i(x) = \frac{x^2-1}{x+5} & j(x) = \frac{1}{x} \\ k(x) = \frac{-2+x}{7} & l(x) = \frac{-7x}{x+1} & m(x) = \frac{3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} & n(x) = 3x-4 & p(x) = \frac{x-1}{x} \end{array}$$

Exercice 22

Justifier que chacune des fonctions suivantes est une fonction homographique :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{x+1} \quad g(x) = 2 + \frac{3x}{2x-1} \quad h(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \quad k(x) = 2 - \frac{3-x}{1-x}$$

Exercice 23

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-2} \quad g(x) = \frac{x-6}{2x+4} \quad h(x) = \frac{-2+x}{5x} \quad i(x) = \frac{4x-1}{3x+2} \quad j(x) = \frac{3x-1}{2-5x}$$

Exercice 24

1) Donner l'expression d'une fonction homographique qui n'est pas définie pour $x=7$.

2) Même question pour $x=-5$ puis pour $x=-\frac{2}{3}$.

Exercice 25

A l'aide de la calculatrice, tracer dans un repère chaque fonction de l'exercice 23.

Exercice 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$.

1) À l'aide de la calculatrice, tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction f .

2) Lire graphiquement la solution éventuelle de l'équation $\frac{2x-1}{x+2} = 0$.

Exercice 27

1) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de la solution éventuelle de l'équation

$$\frac{4x-2}{3-x} = 4.$$

2) Même question pour l'équation $\frac{x}{1-3x} = -3$.

Exercice 28

Donner l'expression d'une fonction homographique pouvant avoir le tableau de variations ci-contre.

On pourra s'aider de la calculatrice.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

Exercice 29

Donner l'expression d'une fonction homographique décroissante et définie sur les intervalles $] -\infty; -3[$ et $] -3; +\infty[$.

Exercice 30

Construire le tableau de variations de chaque fonction.

$$f(x) = \frac{x-1}{x-3} \quad g(x) = \frac{-4x-1}{x+1} \quad h(x) = \frac{2+x}{x} \quad i(x) = \frac{x-1}{3x+4}$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales