

EQUATIONS, INEQUATIONS

I. Résolution d'équations

Activité conseillée

p126 activité1 : Notion d'équation et d'inéquation

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2010*

Activité conseillée

p60 activité1 : Notion d'équation et d'inéquation

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2014*

Exercices conseillés En devoir

-p140 n°2 à 4 -Ex 1 (page 11) p140 n°6* et 8* -PB: p144 n°60, 63, 64, 65 p145 n°69 p146 n°76*	p140 n°1, 5 p144 n°66* p145 n°74*
--	--

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2010*

Exercices conseillés En devoir

-p76 n°20 à 22 -Ex 1 (page 11) p76 n°24* p81 n°78, 79* -PB: p83 n°107, 108, 110 p84 n°113 p85 n°121	p76 n°19, 23 p83 n°111* p84 n°117*
--	---

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2014*

1. Equation-produit

Définition :

Toute équation du type $P(x) \times Q(x) = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques, est appelée équation-produit.

Remarque :

Nous rencontrerons plus particulièrement des équations produits de la forme : $(ax + b)(cx + d) = 0$.

Propriétés :

- Dire qu'un produit de facteurs est nul, équivaut à dire que l'un au moins des facteurs est nul.
- Le cas particulier de l'équation-produit $(ax + b)(cx + d) = 0$ équivaut à $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$.

Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation-produit

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$

2) $5x^2 - 4x = 0$

1) On commence par factoriser l'expression pour se ramener à une équation-produit :

$$(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$$

$$(3x + 1)[(1 - 6x) - (3x + 7)] = 0$$

$$(3x + 1)(1 - 6x - 3x - 7) = 0$$

$$(3x + 1)(-9x - 6) = 0$$

$$\text{Soit : } 3x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad -9x - 6 = 0$$

$$3x = -1 \quad \text{ou} \quad -9x = 6$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$$

Les solutions sont donc $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

$$2) 5x^2 - 4x = 0$$

$$x(5x - 4) = 0$$

$$\text{Soit : } x = 0 \quad \text{ou} \quad 5x - 4 = 0$$

$$5x = 4$$

$$x = \frac{4}{5}$$

Les solutions sont donc 0 et $\frac{4}{5}$.

Exercices conseillés	En devoir
-Ex 2 (page 11) p140 n°9, 11 et 12* p141 n°20 p141 n°23 -PB: p145 n°68 p138 n°3*	p140 n°10

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2010*

Exercices conseillés	En devoir
-Ex 2 (page 11) p76 n°25, 28 p81 n°85, 87 p82 n°99, 100 -PB: p83 n°112 p85 n°122*	p76 n°26

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2014*

TP conseillé
TP TICE 1 p133 : Recherche triangles rectangles ! TP TICE 3 p134 : Résoudre une équation avec un logiciel

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2010*

TP conseillé
p71 TP3 : Recherche triangles rectangles ! p72 TP6 : Résoudre une équation avec un logiciel

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2014*

2. Equation de la forme $x^2 = a$

Propriété :

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de a .

Si $a < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.

Si $a = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.

Si $a > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Démonstration :

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré est positif.
- Si $a = 0$, alors l'équation s'écrit $x^2 = 0$ donc $x = 0$.
- Si $a > 0$: $x^2 = a$ équivaut à : $x^2 - a = 0$

$$\text{Soit } (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$

$$x - \sqrt{a} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \sqrt{a} = 0$$

$$x = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a}$$

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $x^2 = 16$, $x^2 = -8$ et $(x+2)^2 = 9$

- L'équation $x^2 = 16$.
16 est positif donc l'équation admet deux solutions $\sqrt{16} = 4$ et $-\sqrt{16} = -4$.
- L'équation $x^2 = -8$.
-8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $(x+2)^2 = 9$.
On a alors $x+2 = 3$ ou $x+2 = -3$.
L'équation admet deux solutions $x = 3 - 2 = 1$ et $x = -3 - 2 = -5$.

Exercices conseillés	En devoir
Ex 3 et 4 (page11) p140 n°13 p141 n°21*, 22*	p140 n°15

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2010*

Exercices conseillés	En devoir
Ex 3 et 4 (page11) p76 n°29, 31, 30	p76 n°32

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2014*

3. Equation-quotient

Définition :

Toute équation du type $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques (avec $Q(x) \neq 0$), est appelée équation-quotient.

Propriété :

Pour tout x qui n'annule pas l'expression $Q(x)$, l'équation-quotient $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ équivaut à $P(x) = 0$.

Exemple :

L'équation $\frac{x+2}{x+3} = 0$ a pour solution $x = -2$.

Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation-quotient

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ b) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ c) $\frac{x^2-9}{x+3} = 0$

d) $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$

a) L'équation n'est pas définie pour $x = 1$.

Pour $x \neq 1$, l'équation $\frac{3x+5}{x-1} = 0$ équivaut à : $3x+5 = 0$.

D'où $x = -\frac{5}{3}$.

b) L'équation n'est pas définie pour $x = 4$.

Pour $x \neq 4$, l'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4} = 0$ équivaut à : $(2x+1)(x-3) = 0$.

Soit : $2x+1 = 0$ ou $x-3 = 0$

Les solutions sont : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 3$.

c) L'équation n'est pas définie pour $x = -3$.

Pour $x \neq -3$, l'équation $\frac{x^2 - 9}{x + 3} = 0$ équivaut à : $x^2 - 9 = 0$, soit $x^2 = 9$

Soit encore : $x = 3$ ou $x = -3$.

Comme $x \neq -3$, l'équation a pour unique solution : $x = 3$.

d) L'équation n'est pas définie pour $x = 2$ et $x = 3$.

Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$, l'équation $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$ équivaut à :

$$1 - \frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{2-x} = 0$$

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$$\frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0$$

$$\frac{(x-3)(2-x) - (x+3)(2-x) - 2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0$$

On développe et on réduit le numérateur :

$$\frac{2x - x^2 - 6 + 3x - 2x + x^2 - 6 + 3x - 2x + 6}{(x-3)(2-x)} = 0$$

$$\frac{4x - 6}{(x-3)(2-x)} = 0$$

Ce qui équivaut à $4x - 6 = 0$ et $(x-3)(2-x) \neq 0$

$$\text{D'où } x = \frac{3}{2}.$$

Exercices conseillés

Ex 5 et 6 (page11)
p140 n°16, 17
Ex 7 et 8 (page11)
p140 n°18
p141 n°19*

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2010*

Exercices conseillés

Ex 5 et 6 (page11)
p76 n°33, 34
Ex 7 et 8 (page11)
p81 n°82, 83,
88

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2014*

En devoir

p81 n°81

II. Tableaux de signes

1) Exemple d'introduction

a) Compléter le tableau de valeurs suivant de l'expression $2x - 10$:

x	-10	-5	0	1	6	7	10	100
$2x - 10$								

b) Compléter alors la 2^e ligne du tableau de signes de l'expression $2x - 10$:

x	$-\infty$	?		$+\infty$
$2x-10$		...	0	...

c) Pour quelle valeur x de l'expression $2x - 10$ s'annule-t-elle ?
Compléter alors la 1^{ère} ligne du tableau de signes.

d) Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique.

a)

x	-10	-5	0	1	6	7	10	100
$2x - 10$	-30	-20	-10	-8	2	4	10	190

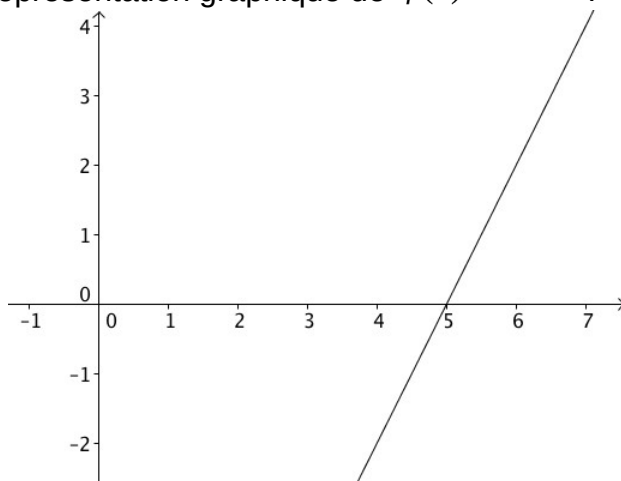
b)

x	$-\infty$	?			$+\infty$
$2x-10$		-	0	+	

c) $2x - 10 = 0$ soit $2x = 10$ soit encore $x = 5$.

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$2x - 10$	-	0	+

d) On trace la représentation graphique de $f(x) = 2x - 10$.



2) Généralisation

On considère a et b deux nombres fixés ($a \neq 0$) et x est un nombre réel.

Soit la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Déterminons l'abscisse x du point d'intersection de la droite représentative de f dans un repère avec l'axe des abscisses :

Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$$\text{soit : } ax + b = 0,$$

$$\text{soit : } ax = -b,$$

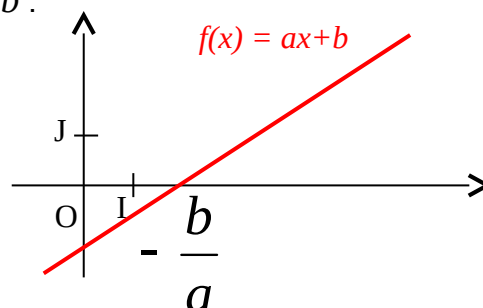
$$\text{soit encore } x = -\frac{b}{a}.$$

Si $a > 0$:

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

On obtient le tableau de signes suivant pour $ax+b$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	-	0	+

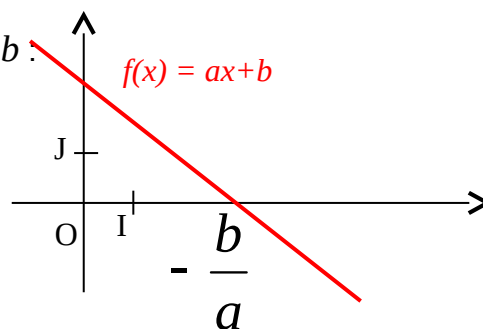


Si $a < 0$:

La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On obtient le tableau de signes suivant pour $ax+b$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	+	0	-



Méthode : Déterminer le signe d'une expression du type $ax + b$

1) Déterminer le tableau de signes de l'expression $2x + 6$, où x est un nombre réel.

Le coefficient devant « x » est **positif**, donc on a le tableau :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$+2x + 6$		$-$	$+$

$$2x + 6 = 0 \text{ pour } x = -3. \uparrow$$

2) Déterminer le tableau de signes de l'expression $-3x + 12$, où x est un nombre réel.

Le coefficient devant « x » est **négatif**, donc on a le tableau :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$-3x + 12$		$+$	$-$

$$-3x + 12 = 0 \text{ pour } x = 4. \uparrow$$

Exercices conseillés	En devoir
p141 n°24, 26, 27	p141 n°28

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2010*

Exercices conseillés	En devoir
p77 n°35, 36, 41, 40	p77 n°42

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2014*

III. Résolution d'inéquations

Exercices conseillés	En devoir
-p142 n°34 à 36 p142 n°38 -PB : p145 n°73	p142 n°37

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2010*

Exercices conseillés	En devoir
p77 n°46, 47 p82 n°93, 94, 95 -PB : p84 n°116	p77 n°47

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2014*

1. En étudiant le signe d'un produit

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un produit

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(3 - 6x)(x + 2) > 0$

Le signe de $(3 - 6x)(x + 2)$ dépend du signe de chaque facteur $3 - 6x$ et $x + 2$.

$$\begin{aligned} 3 - 6x &= 0 & \text{ou} & & x + 2 &= 0 \\ 6x &= 3 & & & x &= -2 \\ x &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs. En appliquant la règle des signes, on en déduit le signe du produit $(3 - 6x)(x + 2)$.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$3 - 6x$		+	+	0	-
$x + 2$	-	0	+		+
$(3 - 6x)(x + 2)$	-	0	+	0	-

On en déduit que $(3 - 6x)(x + 2) > 0$ pour $x \in \left] -2; \frac{1}{2} \right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3 - 6x)(x + 2) > 0$ est $\left] -2; \frac{1}{2} \right[$.

Exercices conseillés	En devoir
-Ex 9 et 10 (page11) p142 n°39, 43 p142 n°44*, 45*, 46* -PB : p146 n°75*	p141 n°25, 29

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2010*

Exercices conseillés	En devoir
-Ex 9 et 10 (page11) p77 n°39 p82 n°90, 91 p82 n°102* -PB : p85 n°120*	p77 n°37, 38

ODYSSÉE 2de HATIER *Edition 2014*

2. En étudiant le signe d'un quotient

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$.

L'équation n'est pas définie pour $3x - 2 = 0$, soit $x = \frac{2}{3}$.

Il faudra éventuellement exclure cette valeur de l'ensemble des solutions.

Le signe de $\frac{2-6x}{3x-2}$ dépend du signe des expressions $2-6x$ et $3x-2$.

$2-6x = 0$ équivaut à $x = \frac{1}{3}$.

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux expressions.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$2-6x$	+	0	-	-	
$3x-2$	-	-	0	+	
$\frac{2-6x}{3x-2}$	-	0	+		-

La double-barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour $x = \frac{2}{3}$.

On en déduit que $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ pour $x \in \left] -\infty; \frac{1}{3} \right] \cup \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ est $\left] -\infty; \frac{1}{3} \right] \cup \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$.

Exercices conseillés En devoir

Ex 11 à 14 (page11) p142 n°40, 41, 47*, 48* p141 n°31 p142 n°32 p143 n°56	p141 n°30 p144 n°62*
---	-------------------------

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2010

Exercices conseillés En devoir

Ex 11 à 14 (page11) p77 n°43 à 45 p77 n°49 p82 n°96, 97 p78 n°59	p77 n°50
---	----------

ODYSSÉE 2de HATIER Edition 2014

© Copyright

Yvan Monka – Académie de la Nouvelle-Calédonie www.maths-et-tiques.fr

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales

Exercice 1

1) $x + 7 = 4$

2) $2x - 8x - 4 = 8x + 6 - 7 + 4x$

3) $3x = 9$

4) $-(x + 5) = 5(1 - 2x)$

5) $8x = 4$

6) $9x - 7x + 5 - 9x = 6 - 4x + 8x$

7) $\frac{8}{7}x = 14$

8) $6(3y - 5) = -(-5 - y)$

9) $12x = 48$

10) $7x - 2x + 2x - 9 + 7x = 14x$

11) $\frac{x}{2} = 25$

12) $-(18 - x) + 7(3x + 5) = -(2 - 4x)$

Exercice 2

a) $(3x + 6)(3x - 1) - (3x + 6)(2x - 4) = 0$

b) $(x - 5)(5x + 1) + (x - 5)(5x + 10) = 0$

c) $(-x + 3)(2x - 1) + (-x + 3)(x - 7) = 0$

d) $(4x + 8)(-x + 4) - (4x + 8)(x + 5) = 0$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 49$

b. $x^2 = 6$

c. $x^2 = -16$

d. $x^2 - 53 = -4$

e. $(x + 1)^2 = 4$

f. $(x - 2)^2 - 14 = 2$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

- a.** $x^2 = 121$ **b.** $x^2 = 11$
c. $x^2 = -9$ **d.** $x^2 + 5 = 30$
e. $(x + 5)^2 = 49$ **f.** $(x - 4)^2 + 1 = 2$

Exercice 5

Résoudre les équations-quotients suivantes :

- a.** $\frac{3x-3}{x+1} = 0$ **b.** $\frac{4-x}{x-3} = 0$
c. $\frac{5x-2}{x^2+1} = 0$ **d.** $\frac{-7x+1}{2-4x} = 0$

Exercice 6

Résoudre les équations-quotients suivantes.

- a.** $\frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = 0$ **b.** $\frac{(2-x)(x-6)}{x-8} = 0$
c. $\frac{(2x-4)(x-6)}{3x+1} = 0$ **d.** $\frac{(-7x+7)(4x-6)}{8-x^2} = 0$

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes :

- a.** $\frac{x+1}{x+2} - 2 = 0$ **b.** $\frac{2x-1}{x+6} + 1 = 0$
c. $\frac{x-1}{3x+2} = 3$ **d.** $\frac{x-1}{2-2x} = -1$

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes :

- a.** $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} = 0$ **b.** $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} = 0$
c. $\frac{1}{2x-1} = \frac{2}{x-4}$ **d.** $\frac{4}{3x+3} = \frac{2}{2-x}$

Exercice 9

Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

- a.** $(x-3)(x-1) \leq 0$ **b.** $(x-9)(x-5) < 0$
c. $(2x+4)(3x-3) \geq 0$ **d.** $(15-5x)(x+1) > 0$

Exercice 10

Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

- a.** $(3x-4)(x+7) > 0$ **b.** $(2x-8)(10x+5) < 0$
c. $(2-x)(6x+3) \geq 0$ **d.** $(7-x)(6x+18) \leq 0$

Exercice 11

Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a. $\frac{x-3}{x+1} \leq 0$

b. $\frac{x+4}{x-6} > 0$

c. $\frac{3x-6}{x-5} \leq 0$

d. $\frac{2x-9}{1-x} \geq 0$

Exercice 12

Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a. $\frac{2x+8}{x-9} > 0$

b. $\frac{6x+1}{7-x} \geq 0$

c. $\frac{x+5}{3x-5} \leq 0$

d. $\frac{-2x-10}{4-3x} \geq 0$

Exercice 13

Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a. $\frac{2x+8}{x-1} - 1 > 0$

b. $\frac{x+1}{3-x} + 2 \geq 0$

c. $\frac{x+4}{x-5} \leq 2$

d. $\frac{2x-10}{x-4} \geq 3$

Exercice 14

Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a. $\frac{x+1}{x-2} + 3 < 0$

b. $\frac{x+2}{x-2} + 1 < 0$

c. $\frac{x-3}{x-1} \leq 5$

d. $\frac{3x-3}{5-x} \leq 2$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales