

MATHÉMATIQUES

TRONC COMMUN SCIENTIFIQUE

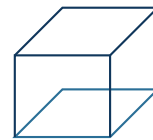
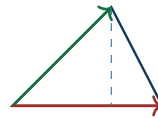
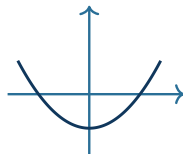
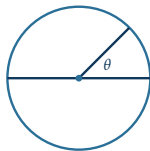
Programme marocain

Astuces · Raccourcis

Techniques · Pièges à éviter

Le guide complet de l'élève efficace

14 chapitres du programme officiel • Fiches-formulaires • Figures commentées
Plus de 120 astuces & raccourcis • 100 pièges classiques • Exercices corrigés de niveau difficile



Avant-propos : comment utiliser ce livre

Ce livre n'est pas un manuel de cours de plus. C'est un **carnet de guerre** : il rassemble ce qu'un élève de Tronc Commun Scientifique doit avoir dans la tête au moment précis où il regarde un énoncé et se demande « *par où je commence ?* ».

Le programme de TCS est le socle de tout le lycée scientifique. Les élèves qui échouent en 1^{re} et 2^e année du Baccalauréat n'échouent presque jamais à cause des nouvelles notions : ils échouent parce qu'ils traînent depuis le Tronc Commun des **réflexes faux** — un signe oublié en multipliant une inégalité, une racine carrée « simplifiée » n'importe comment, un vecteur manipulé comme un nombre. Ce livre traque ces réflexes.

Les cinq types d'encadrés

■ COURS EXPRESS

L'essentiel du chapitre, réduit à ce qui sert vraiment. Ce n'est pas un résumé du manuel : c'est la liste des outils que vous allez utiliser dans les exercices.

★ FORMULAIRE

Les formules à connaître *par cœur*, présentées de façon à être mémorisées, pas seulement lues.

ASTUCE 0.1 — Le titre de l'astuce

Un raccourci de calcul, une manière de deviner le résultat avant de le démontrer, une façon de gagner trois minutes au contrôle. **Toutes les astuces de ce livre sont mathématiquement justifiées** — aucune « recette magique » sans explication.

✗ PIÈGE 0.1 — Le titre du piège

L'erreur que le correcteur voit dix fois par paquet de copies. Chaque piège est présenté sous la forme : ✗ ce que l'élève écrit → ✓ ce qu'il fallait écrire → *pourquoi*.

📖 MÉTHODE — Le titre de la méthode

Un mode d'emploi en étapes numérotées, applicable à toute une famille d'exercices. Quand vous bloquez, cherchez d'abord la méthode correspondante.

Le contrat de l'élève

1. **Ne lisez jamais une solution avant d'avoir cherché 15 minutes.** Une solution lue donne l'illusion de comprendre ; une solution trouvée après un blocage se grave.
2. **Refaites l'exercice le lendemain, sans le corrigé.** C'est la seule vérification honnête.
3. **Tenez votre propre liste de pièges.** Chaque fois que vous perdez un point bêtement, écrivez la ligne fausse et la ligne juste, côte à côte. Le chapitre 16 vous donne le modèle.
4. **Faites les figures.** En géométrie, 70 % des exercices se résolvent en traçant correctement, à l'échelle, avec les codages (angles droits, égalités de longueurs).

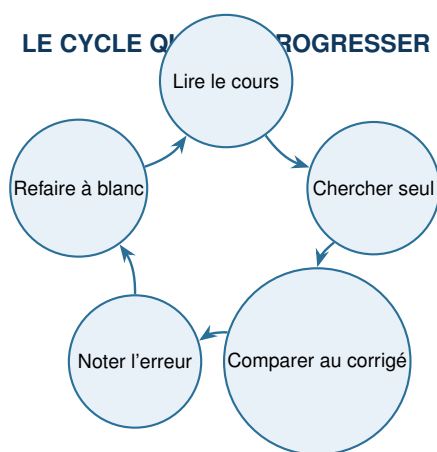


Figure A — La boucle d'apprentissage : sauter l'étape « noter l'erreur » condamne à la répéter.

Note sur le niveau des exercices. Les exercices proposés sont volontairement *difficiles* : ils combinent plusieurs chapitres, demandent une initiative (introduire une quantité auxiliaire, choisir un repère, factoriser autrement). Si vous butez, ce n'est pas anormal — c'est exactement l'inconfort qui fait progresser. Les corrigés sont rédigés comme une copie modèle, avec les justifications que le barème exige.

Table des matières

Avant-propos : comment utiliser ce livre	i
I Algèbre et Analyse	1
1 Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$	2
1.1 Reconnaître la nature d'un nombre	2
1.2 Le raisonnement par l'absurde : l'irrationalité	3
1.3 Passer d'un décimal périodique à une fraction	4
1.4 Racines carrées : le chapitre où l'on perd le plus de points	5
2 L'arithmétique dans $\mathbb{N}$	7
2.1 Les critères de divisibilité, y compris ceux qu'on n'apprend pas	7
2.2 PGCD : trois méthodes, une seule rapide	8
2.3 Le raisonnement par les restes	9
3 L'ordre dans $\mathbb{R}$	12
3.1 Comparer deux nombres : les trois techniques	12
3.2 Valeur absolue : la lire comme une distance	13
3.3 Les inégalités classiques qu'on doit savoir démontrer	14
3.4 La partie entière	15
4 Les polynômes	17
4.1 Trouver une racine sans calculatrice	17
4.2 Le trinôme du second degré	18
5 Équations, inéquations et systèmes	21
5.1 Les conditions d'existence : la moitié des points perdus	21
5.2 Le second degré déguisé	22
5.3 Systèmes	23
6 Généralités sur les fonctions	25
6.1 Le domaine de définition	25
6.2 Parité : gagner la moitié de l'étude	26
6.3 Variations : le taux de variation, et rien d'autre	26
6.4 Fonctions de référence et transformations de courbes	28
7 Le calcul trigonométrique	31
7.1 Le cercle trigonométrique : votre seule fiche de révision	31
7.2 Les angles associés : une figure, pas vingt formules	32
7.3 Résoudre une équation trigonométrique	33
7.4 Inéquations trigonométriques	35

8	Statistiques	37
8.1	Séries groupées en classes	38
II	Géométrie	40
9	Le calcul vectoriel dans le plan	41
9.1	Chasles : l'outil qui débloquent tout	42
10	La projection dans le plan	45
10.1	Écrire les rapports sans se tromper	45
10.2	La droite des milieux et ses conséquences	46
11	La droite dans le plan : étude analytique	48
11.1	Trouver l'équation d'une droite	49
11.2	Position relative de deux droites	50
12	Le produit scalaire dans le plan	52
12.1	Al-Kashi et le théorème de la médiane	53
12.2	Distance d'un point à une droite, et cercles	54
13	Les transformations du plan	57
13.1	Homothétie : le rapport et son signe	57
13.2	Images de figures	59
14	La géométrie dans l'espace	61
14.1	Parallélisme : les trois théorèmes qui règlent tout	61
14.2	Volumes et sections : les formules à connaître	63
III	Annexes	65
15	Formulaire général du Tronc Commun	66
15.1	Nombres, calcul algébrique	66
15.2	Second degré et polynômes	67
15.3	Fonctions	67
15.4	Trigonométrie	67
15.5	Géométrie	68
15.6	Statistiques	68
15.7	Les nombres à reconnaître instantanément	69
16	Les 100 pièges classiques	70
16.1	Calcul algébrique	70
16.2	Racines carrées et ensembles de nombres	70
16.3	Arithmétique	71
16.4	Ordre, valeur absolue et inégalités	71
16.5	Équations, inéquations, systèmes	72

16.6 Fonctions	72
16.7 Trigonométrie	73
16.8 Statistiques	73
16.9 Vecteurs, droites et produit scalaire	74
16.10 Transformations et espace	74
17 Méthodologie : travailler et composer	76
17.1 Comment travailler les mathématiques au Tronc Commun	76
17.2 Rédiger une copie qui rapporte des points	76
17.3 Stratégie le jour du contrôle	77
17.4 Les cinq réflexes universels	78
17.5 Un plan de révision en quatre semaines	78
18 Problèmes de synthèse	80
18.1 Arithmétique et divisibilité	80
18.2 Une inégalité à trois variables	80
18.3 Un polynôme bicarré, de l’algèbre à la trigonométrie	81
18.4 Étude d’une fonction avec centre de symétrie	81
18.5 Équation et inéquation trigonométriques	82
18.6 Géométrie analytique complète	83
18.7 Vecteurs, centre de gravité et homothéties	84
18.8 Une pyramide, de la section au volume	85
19 Auto-évaluation : 80 questions flash	86
19.1 Questions	86
19.2 Réponses	87
20 Lexique : les mots qui changent tout	89
20.1 Les verbes des énoncés	89
20.2 Les mots du raisonnement	90
20.3 Le vocabulaire technique du programme	90
20.4 Symboles et notations	92

Partie I

Algèbre et Analyse

Les ensembles de nombres $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

■ COURS EXPRESS — ce qu'il faut avoir en tête

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$: entiers naturels. $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: entiers relatifs.
- $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$: **décimaux** (écriture décimale finie).
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$: **rationnels** (écriture décimale finie ou périodique).
- $\mathbb{R}$: les réels. Un réel non rationnel est dit **irrationnel** : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, 1 + \sqrt{5}, \dots$
- Chaîne d'inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, et toutes ces inclusions sont strictes.
- Notations : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$, $\mathbb{R}^{-*} =]-\infty; 0[$.

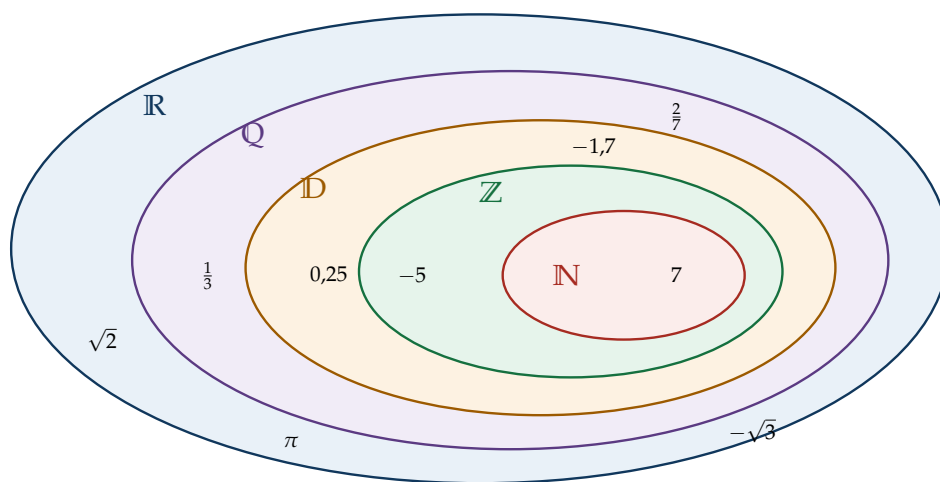


Figure 1.1 — Chaque « couronne » contient des nombres qui n'appartiennent pas à l'ensemble intérieur. C'est là que se trouvent les contre-exemples utiles : $0,25 \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$, $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.1 Reconnaître la nature d'un nombre

★ LE TEST DÉCISIF POUR $\mathbb{D}$ ET $\mathbb{Q}$

Soit $\frac{p}{q}$ une fraction **irréductible** ($\text{PGCD}(p, q) = 1$), avec $q > 0$.

$$\frac{p}{q} \in \mathbb{D} \iff q = 2^\alpha \times 5^\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}).$$

Autrement dit : après simplification, si le dénominateur ne contient que des 2 et des 5, l'écriture décimale s'arrête ; sinon elle est infinie périodique.

ASTUCE 1.1 — Décimal ou pas ? On regarde le dénominateur réduit

$\frac{21}{56}$: le dénominateur $56 = 2^3 \times 7$ contient un 7... mais il faut d'abord simplifier ! $\frac{21}{56} = \frac{3}{8}$ et $8 = 2^3$: donc $\frac{21}{56} = 0,375 \in \mathbb{D}$.

En revanche $\frac{5}{12}$ est irréductible et $12 = 2^2 \times 3$ contient un 3 : $\frac{5}{12} = 0,41\bar{6} \notin \mathbb{D}$.

❌ PIÈGE 1.1 — « Il y a une racine, donc c'est irrationnel »

✗ $\sqrt{16}$ est irrationnel. **✓** $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$.

✗ $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ est irrationnel. **✓** $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$.

✗ $(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})$ est irrationnel. **✓** $= 1 - 3 = -2 \in \mathbb{Z}$.

Pourquoi. Le symbole $\sqrt{\quad}$ n'est pas un label d'irrationalité : c'est une opération. *Simplifiez d'abord, concluez ensuite.*

❌ PIÈGE 1.2 — La somme d'irrationnels serait irrationnelle

✗ « $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont irrationnels donc leur somme aussi » : or $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{N}$.

✓ Retenir les règles *vraies* :

$$\underbrace{\text{rationnel} + \text{rationnel}}_{\text{toujours}} = \text{rationnel}$$

$$\underbrace{\text{rationnel} + \text{irrationnel} = \text{irrationnel}}_{\text{toujours, si le rationnel existe}}$$

irrationnel + irrationnel = ? (indéterminé), irrationnel $\times$ irrationnel = ? (indéterminé).

ASTUCE 1.2 — La règle en or : $r + x$ avec $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$

Si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$, alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et, si de plus $r \neq 0$, $rx \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration (à savoir refaire). Supposons $r + x = s$ avec $s \in \mathbb{Q}$. Alors $x = s - r$; or $\mathbb{Q}$ est stable par soustraction, donc $x \in \mathbb{Q}$: contradiction.

Utilisation immédiate : $3 - \frac{\sqrt{5}}{2}$ est irrationnel, $\frac{2+\pi}{7}$ aussi.

1.2 Le raisonnement par l'absurde : l'irrationalité

 MÉTHODE — Montrer qu'un nombre x est irrationnel

1. **Supposer** $x \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(p, q) = 1$ (fraction irréductible : c'est cette hypothèse qui fournira la contradiction).
2. **Éliminer les racines** en élevant au carré (une ou deux fois) pour obtenir une relation entre entiers.
3. **Chercher la contradiction** : soit une parité impossible, soit un nombre irrationnel connu qui deviendrait rationnel.
4. **Conclure** : l'hypothèse est absurde, donc $x \notin \mathbb{Q}$.

ASTUCE 1.3 — L'astuce « on isole puis on élève au carré »

Pour $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, n'élevez pas au carré tout de suite en espérant un miracle : posez $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, puis $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, donc $\sqrt{6} = \frac{x^2 - 5}{2}$.

Si x était rationnel, $\sqrt{6}$ le serait aussi (opérations dans $\mathbb{Q}$). Il ne reste plus qu'à savoir que $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$: **un seul travail difficile au lieu de deux.**

EXERCICE 1.1 (★★★ — irrationalité, raisonnement par l'absurde)

1. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et n^2 est divisible par 3, alors n est divisible par 3.
2. En déduire que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
3. Montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel.
4. En déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel, puis que $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ l'est aussi.

Solution détaillée. 1. Écrivons la division euclidienne de n par 3 : $n = 3k$, ou $n = 3k + 1$, ou $n = 3k + 2$.

- Si $n = 3k + 1$: $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, reste 1.
- Si $n = 3k + 2$: $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$, reste 1.

Dans les deux cas n^2 n'est pas divisible par 3. Par contraposée : si $3 \mid n^2$ alors $3 \mid n$.

2. Supposons $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ irréductible, $q \geq 1$. Alors $p^2 = 3q^2$, donc $3 \mid p^2$, donc (question 1) $3 \mid p$: écrivons $p = 3p'$. Il vient $9p'^2 = 3q^2$, soit $q^2 = 3p'^2$, donc $3 \mid q^2$ puis $3 \mid q$. Ainsi 3 divise à la fois p et q , ce qui contredit $\text{PGCD}(p, q) = 1$. Donc $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

3. Même schéma avec $6 = 2 \times 3$. Supposons $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$ irréductible : $p^2 = 6q^2$. Alors p^2 est pair donc p est pair (si $p = 2k + 1$, $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair) ; posons $p = 2p'$: $4p'^2 = 6q^2$ donc $2p'^2 = 3q^2$. Le membre de gauche est pair, donc $3q^2$ est pair, donc q^2 est pair (car 3 est impair), donc q est pair. Contradiction avec l'irréductibilité.

4. Posons $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ et supposons $x \in \mathbb{Q}$. Alors $x^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$, d'où $\sqrt{6} = \frac{x^2 - 5}{2}$. Comme $\mathbb{Q}$ est stable par produit, somme et quotient (par un non-nul), $x \in \mathbb{Q}$ entraînerait $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux d'après 3. Donc $x \notin \mathbb{Q}$.

Enfin $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$. Si $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ était rationnel, alors sa somme avec $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ (irrationnel) serait $2\sqrt{3}$; or somme de deux rationnels est rationnelle, donc $\sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{Q}$ donneraient une contradiction. Plus directement : $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{3}$ et $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ rationnel impliquerait $\sqrt{3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})$. Le plus propre : $\frac{1}{x}$ rationnel $\Rightarrow x = \frac{1}{1/x}$ rationnel, contradiction. ■

1.3 Passer d'un décimal périodique à une fraction

🔧 MÉTHODE — Le « truc du décalage » ($\times 10^k$)

Pour écrire $x = 0,3\overline{18} = 0,3181818\dots$ sous forme de fraction :

1. **Compter** : 1 chiffre avant la période, 2 chiffres dans la période.
2. Multiplier par 10^1 pour amener la virgule juste avant la période : $10x = 3,1\overline{8}$.
3. Multiplier par 10^{1+2} : $1000x = 318,1\overline{8}$.
4. **Soustraire** : les parties infinies s'annulent. $1000x - 10x = 318 - 3 = 315$, donc $990x = 315$.
5. Simplifier : $x = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}$.

ASTUCE 1.4 — La formule express $\frac{9\dots 90\dots 0}{\dots}$

Sans repasser par les équations : *numérateur* = (tout le nombre sans virgule jusqu'à la fin d'une période) – (la partie non périodique) ; *dénominateur* = autant de 9 que de chiffres dans la période,

suivis d'autant de 0 que de chiffres non périodiques après la virgule.

$$0,3\overline{18} = \frac{318 - 3}{990} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}, \quad 2,\overline{7} = \frac{27 - 2}{9} = \frac{25}{9}, \quad 0,14\overline{2857} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}.$$

✗ **PIÈGE 1.3** — $0,\overline{9}$ serait « un peu plus petit que » 1

✓ $0,\overline{9} = 1$ **exactement**. Preuve avec la méthode ci-dessus : $x = 0,\overline{9}$, $10x = 9,\overline{9}$, donc $9x = 9$ et $x = 1$.

Pourquoi c'est troublant. L'écriture décimale n'est pas unique pour les décimaux : $0,25 = 0,24\overline{9}$. Ce n'est pas une approximation, c'est une égalité.

1.4 Racines carrées : le chapitre où l'on perd le plus de points

★ LES SEULES RÈGLES VRAIES

Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$:

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b > 0), \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

Pour **tout** réel a (signe quelconque) : $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$ et non a .

$$\text{FAUX : } \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

✗ **PIÈGE 1.4** — $\sqrt{x^2} = x$

✗ « $\sqrt{(x-5)^2} = x-5$ ». ✓ $\sqrt{(x-5)^2} = |x-5|$, qui vaut $x-5$ si $x \geq 5$ et $5-x$ si $x < 5$.

Test rapide : avec $x = 1$, le membre de gauche vaut $\sqrt{16} = 4$ et le « résultat » faux donnerait -4 . Une racine carrée n'est *jamais* négative.

ASTUCE 1.5 — Sortir de la racine : décomposer en carrés

Décomposez le radicande en produit d'un carré parfait et d'un reste :

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}, \quad \sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = 10\sqrt{3}, \quad \sqrt{242} = \sqrt{121 \times 2} = 11\sqrt{2}.$$

Réflexe : mémorisez les carrés jusqu'à $25^2 = 625$. Vous verrez instantanément les facteurs 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.

ASTUCE 1.6 — L'expression conjuguée : le couteau suisse

Pour faire disparaître une racine d'un dénominateur (ou d'un numérateur), multipliez par le conjugué :

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}, \quad \frac{1}{\sqrt{a} - b} = \frac{\sqrt{a} + b}{a - b^2}.$$

Application classique : comparer $\sqrt{101} - \sqrt{100}$ et $\sqrt{10001} - \sqrt{10000}$ sans calculatrice. Écrivez $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$: c'est une **fonction décroissante** de n , donc le second écart est le plus petit. Immédiat, sans aucun calcul décimal.

EXERCICE 1.2 (★★★ — dénestage de radicaux)

1. Écrire $A = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ sous la forme $a + b\sqrt{3}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
2. Simplifier $B = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.
3. Rationaliser $C = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

Solution détaillée. 1. L'idée est de reconnaître une identité remarquable $(a + b\sqrt{3})^2 = a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3}$. On cherche donc a, b tels que $a^2 + 3b^2 = 7$ et $2ab = 4$. Avec $b = 1$: $a^2 = 4$ donc $a = 2$ (on prend $a > 0$ car $A > 0$). Vérification : $(2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$. ✓

Comme $2 + \sqrt{3} > 0$, on a bien $A = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 + \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3}$.

2. De même $7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$. **Attention au piège du signe** : $2 - \sqrt{3} \approx 0,27 > 0$, donc $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$. Ainsi

$$B = (2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

Si l'on avait eu $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ avec un radicande du type $(\sqrt{3} - 2)^2$, la valeur absolue aurait changé le résultat : c'est l'erreur la plus fréquente sur cet exercice.

3. On rationalise en deux temps, en groupant $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ comme un bloc :

$$C = \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(5 + 2\sqrt{6}) - 5} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}}.$$

Il reste $\sqrt{6}$ au dénominateur : on multiplie par $\sqrt{6}$:

$$C = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{2 \times 6} = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{30}}{12} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{12}.$$

■

EXERCICE 1.3 (★★ — nature d'un nombre selon un paramètre)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \frac{3n + 2}{5n + 3}$.

1. Montrer que pour tout n , u_n est une fraction irréductible.
2. Pour quelles valeurs de n le nombre u_n est-il décimal ?

Solution détaillée. 1. Soit d un diviseur commun positif de $3n + 2$ et $5n + 3$. Alors d divise toute combinaison entière : $d \mid 5(3n + 2) - 3(5n + 3) = 15n + 10 - 15n - 9 = 1$. Donc $d = 1$ et la fraction est irréductible. (Astuce : on choisit les coefficients 5 et 3 pour éliminer n .)

2. La fraction étant irréductible, $u_n \in \mathbb{D}$ si et seulement si $5n + 3 = 2^\alpha 5^\beta$. Comme $5n + 3 \equiv 3 \pmod{5}$, le nombre $5n + 3$ n'est jamais divisible par 5 : donc $\beta = 0$ et il faut $5n + 3 = 2^\alpha$. On teste : $2^\alpha \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots\}$ et $5n + 3 = 2^\alpha$ donne $n = \frac{2^\alpha - 3}{5}$, entier ssi $2^\alpha \equiv 3 \pmod{5}$. Or les restes de 2^α modulo 5 sont 1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, ... (période 4), et le reste 3 apparaît pour $\alpha \equiv 3 \pmod{4}$. Donc $\alpha \in \{3, 7, 11, \dots\}$: $\alpha = 3$ donne $n = 1$ ($u_1 = \frac{5}{8} = 0,625$), $\alpha = 7$ donne $n = 25$ ($u_{25} = \frac{77}{128}$), etc. ■

❌ PIÈGE 1.5 — Simplifier une fraction en « barrant » des termes

❌ $\frac{3n + 2}{5n + 3} \ll \frac{3 + 2}{5 + 3}$ » en barrant les n . ❌ $\frac{a + b}{a} = b$.

✓ On ne simplifie que des **facteurs**, jamais des termes d'une somme : $\frac{a(x + 1)}{a(x + 2)} = \frac{x + 1}{x + 2}$ est licite

($a \neq 0$), mais $\frac{a + x}{a + y}$ ne se simplifie pas.

L'arithmétique dans $\mathbb{N}$

■ COURS EXPRESS

- **Divisibilité** : $a \mid b$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$.
- **Division euclidienne** : pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un *unique* couple (q, r) tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.
- **Nombre premier** : entier $p \geq 2$ dont les seuls diviseurs positifs sont 1 et p .
- **Décomposition** : tout $n \geq 2$ s'écrit de façon unique $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$.
- $\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = a \times b$ (pour $a, b \in \mathbb{N}^*$).
- a et b sont **premiers entre eux** $\iff \text{PGCD}(a, b) = 1$.

2.1 Les critères de divisibilité, y compris ceux qu'on n'apprend pas

★ CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ

Par	Critère
2	dernier chiffre $\in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
3	somme des chiffres divisible par 3
4	nombre formé par les <i>deux</i> derniers chiffres divisible par 4
5	dernier chiffre 0 ou 5
6	divisible par 2 <i>et</i> par 3
8	nombre formé par les <i>trois</i> derniers chiffres divisible par 8
9	somme des chiffres divisible par 9
11	différence (somme des chiffres de rang pair) – (somme des chiffres de rang impair) divisible par 11
7	on retranche le double du dernier chiffre au nombre privé de ce chiffre ; on répète

ASTUCE 2.1 — Le test de 7 en pratique

3 689 : $368 - 2 \times 9 = 350$; puis $35 - 2 \times 0 = 35$; et $7 \mid 35$. Donc $7 \mid 3689$. **Justification** : $10a + b$ et $a - 2b$ ont les mêmes diviseurs communs avec 7, car $10(a - 2b) = 10a - 20b = (10a + b) - 21b$ et $7 \mid 21$.

ASTUCE 2.2 — Le critère de 11 à l'endroit et à l'envers

8 514 239 : chiffres alternés $9 - 3 + 2 - 4 + 1 - 5 + 8 = 8$. Comme $11 \nmid 8$, le nombre n'est pas divisible par 11. On peut partir de la gauche ou de la droite : seul le signe global change, ce qui ne modifie pas la divisibilité.

✗ PIÈGE 2.1 — Reste négatif dans la division euclidienne

✗ $-17 = 5 \times (-3) - 2$ donc « le reste est -2 ».

✓ Le reste doit vérifier $0 \leq r < 5$: $-17 = 5 \times (-4) + 3$, donc $q = -4$ et $r = 3$.

Réflexe : avec un dividende négatif, le quotient est *plus petit* que la valeur intuitive.

❌ PIÈGE 2.2 — Confondre « premiers » et « premiers entre eux »

❌ « $\text{PGCD}(8, 9) = 1$ donc 8 et 9 sont premiers ».

✓ 8 et 9 sont **premiers entre eux** ; ni l'un ni l'autre n'est un nombre premier. Deux entiers peuvent être premiers entre eux sans être premiers (4 et 25), et deux nombres premiers distincts sont toujours premiers entre eux.

2.2 PGCD : trois méthodes, une seule rapide**📖 MÉTHODE — Calculer $\text{PGCD}(a, b)$**

(1) **Par les diviseurs** — à réserver aux tout petits nombres.

(2) **Par décomposition** : PGCD = produit des facteurs premiers *communs*, chacun avec le **plus petit** exposant ; PPCM = *tous* les facteurs, chacun avec le **plus grand** exposant.

(3) **Algorithme d'Euclide** — le seul praticable sur de grands nombres : on remplace le couple (a, b) par (b, r) où r est le reste de a par b , jusqu'à un reste nul ; **le dernier reste non nul est le PGCD**.

ALGORITHME D'EUCLIDE : $\text{PGCD}(1071, 462)$

$$1071 = 462 \times 2 + 147$$

le reste devient le nouveau diviseur

$$462 = 147 \times 3 + 21$$

$$147 = 21 \times 7 + 0$$

reste nul $\Rightarrow$ on s'arrête

dernier reste non nul $\rightarrow$

$$\boxed{\text{PGCD}(1071, 462) = 21}$$

Figure 2.1 — Trois lignes suffisent là où la décomposition en facteurs premiers en demanderait dix.

ASTUCE 2.3 — $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, a - b)$: la version « soustraction »

Utile quand les deux nombres sont proches : $\text{PGCD}(1002, 996) = \text{PGCD}(996, 6) = 6$ en une ligne. Plus généralement, $\text{PGCD}(a, b)$ **divise toute combinaison** $\alpha a + \beta b$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. C'est LE théorème qui sert à démontrer qu'une fraction est irréductible.

ASTUCE 2.4 — Compter les diviseurs sans les écrire

Si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, alors le nombre de diviseurs positifs de n est

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1).$$

Exemple : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ possède $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$ diviseurs. *Corollaire utile* : n est un carré parfait $\iff$ tous les α_i sont pairs $\iff d(n)$ est impair.

❌ PIÈGE 2.3 — $\text{PPCM}(a, b) = a \times b$

❌ $\text{PPCM}(12, 18) = 216$. ✓ $\text{PPCM}(12, 18) = \frac{12 \times 18}{\text{PGCD}(12, 18)} = \frac{216}{6} = 36$.

Règle : $\text{PPCM}(a, b) = ab$ si et seulement si a et b sont premiers entre eux.

❌ PIÈGE 2.4 — « $n^2 + n + 41$ est toujours premier »

La formule donne bien des nombres premiers pour $n = 0, 1, 2, \dots, 39 \dots$ mais pour $n = 41$: $41^2 + 41 + 41 = 41 \times 43$, qui n'est pas premier.

Leçon : en arithmétique, *vérifier sur des exemples ne démontre rien*. Seule une preuve générale (division euclidienne, congruence, factorisation) est recevable.

2.3 Le raisonnement par les restes

🔑 MÉTHODE — Montrer qu'une propriété est vraie pour tout n

Beaucoup d'exercices se règlent en **discutant selon le reste** de n dans la division par b . On écrit $n = bk + r$ avec $r \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ et on traite chaque cas.

Pour la divisibilité par 3 : trois cas. Par 4 : quatre cas. Astuce de temps : pour les carrés, il suffit souvent de traiter r et $b - r$ ensemble, car $(b - r)^2$ et r^2 ont le même reste.

ASTUCE 2.5 — Factoriser plutôt que découper

Avant de discuter des cas, essayez la factorisation. Pour $n^3 - n$:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1).$$

C'est un produit de **trois entiers consécutifs** : parmi eux, il y a forcément un multiple de 2 et un multiple de 3, donc $6 \mid n^3 - n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Une ligne au lieu d'un tableau.

EXERCICE 2.1 (★★★ — PGCD et PPCM imposés)

Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que

$$\text{PGCD}(a, b) = 12 \quad \text{et} \quad \text{PPCM}(a, b) = 180.$$

Solution détaillée. Mise en place. Puisque $\text{PGCD}(a, b) = 12$, on peut écrire $a = 12a'$ et $b = 12b'$ avec $\text{PGCD}(a', b') = 1$ (c'est exactement le sens du PGCD : on a sorti tout le facteur commun).

Traduction du PPCM. On sait que $\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = ab$, donc

$$12 \times 180 = ab = 144 a' b' \implies a' b' = \frac{2160}{144} = 15.$$

Recherche. Il faut donc $a' b' = 15$ avec $\text{PGCD}(a', b') = 1$. Les décompositions de 15 en produit de deux facteurs sont $1 \times 15, 3 \times 5, 5 \times 3, 15 \times 1$ — et dans les quatre cas les deux facteurs sont bien premiers entre eux (car $15 = 3 \times 5$ n'a pas de facteur carré).

Conclusion.

$$(a, b) \in \{(12, 180), (36, 60), (60, 36), (180, 12)\}.$$

Vérification sur $(36, 60)$: $36 = 2^2 3^2, 60 = 2^2 \times 3 \times 5$; $\text{PGCD} = 2^2 \times 3 = 12$ ✓ et $\text{PPCM} = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$ ✓. ■

Remarque de méthode : la première chose à tester dans ce type d'énoncé est la condition d'existence PGCD | PPCM. Si l'énoncé avait demandé $\text{PGCD} = 12$ et $\text{PPCM} = 200$, on conclurait immédiatement qu'il n'existe aucun couple, car $12 \nmid 200$.

EXERCICE 2.2 (★★★ — restes et puissances)

- Déterminer les restes successifs de 2^n dans la division euclidienne par 7, pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.
- En déduire le reste de 2^{2026} dans la division par 7.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7 \mid 2^{3n} - 1$.
- Le nombre $2^{2026} + 3$ est-il divisible par 7 ?

Solution détaillée. 1. $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8 = 7 + 1$ (reste 1), $2^4 = 16 = 14 + 2$ (reste 2). Les restes sont donc 1, 2, 4, 1, 2, ... : la suite des restes est **périodique de période 3**.

2. Écrivons 2026 dans la division par 3 : $2026 = 3 \times 675 + 1$. Donc

$$2^{2026} = 2^{3 \times 675 + 1} = (2^3)^{675} \times 2 = 8^{675} \times 2.$$

Comme $8 = 7 + 1$, le nombre 8^{675} a pour reste 1 dans la division par 7 (le développement de $(7 + 1)^{675}$ ne contient qu'un seul terme non multiple de 7, à savoir 1). Donc 2^{2026} a le même reste que $1 \times 2 = 2$: **le reste est 2**.

3. $2^{3n} - 1 = 8^n - 1 = (8 - 1)(8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 8 + 1) = 7 \times K$ avec $K \in \mathbb{N}$, en utilisant l'identité $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \dots + 1)$. Donc $7 \mid 2^{3n} - 1$.

4. D'après 2, $2^{2026} = 7k + 2$, donc $2^{2026} + 3 = 7k + 5$: le reste est $5 \neq 0$. **Non**, ce nombre n'est pas divisible par 7. ■

EXERCICE 2.3 (★★ — irréductibilité et diviseurs)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 5n + 6}$.

- Factoriser le numérateur et le dénominateur.
- Simplifier A et préciser pour quelles valeurs de n l'écriture a un sens.
- Pour quels n le nombre A est-il un entier ?

Solution détaillée. 1. $n^2 + 3n + 2 = (n + 1)(n + 2)$ et $n^2 + 5n + 6 = (n + 2)(n + 3)$ (somme/produit : $1 + 2 = 3$, $1 \times 2 = 2$; $2 + 3 = 5$, $2 \times 3 = 6$).

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n + 2 \neq 0$ et $n + 3 \neq 0$, donc $A = \frac{(n + 1)(n + 2)}{(n + 2)(n + 3)} = \frac{n + 1}{n + 3}$. (Sur $\mathbb{N}$ aucune valeur n'est exclue ; si l'énoncé était posé dans $\mathbb{Z}$, il faudrait écarter $n = -2$ et $n = -3$.)

3. Écrivons $\frac{n + 1}{n + 3} = \frac{(n + 3) - 2}{n + 3} = 1 - \frac{2}{n + 3}$. Ce nombre est entier si et seulement si $(n + 3) \mid 2$, c'est-à-dire $n + 3 \in \{1, 2\}$ — impossible pour $n \in \mathbb{N}$ car $n + 3 \geq 3$. **Il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que $A \in \mathbb{Z}$.**

L'astuce à retenir : pour rendre entier un quotient $\frac{n + a}{n + b}$, on fait apparaître le dénominateur au numérateur et on se ramène à « $(n + b)$ divise une constante ». ■

ASTUCE 2.6 — Le crible : jusqu'où tester pour savoir si n est premier ?

Il suffit de tester les diviseurs premiers p tels que $p \leq \sqrt{n}$.

Pourquoi : si $n = ab$ avec $1 < a \leq b$, alors $a^2 \leq ab = n$ donc $a \leq \sqrt{n}$.

Exemple : 211 est-il premier ? $\sqrt{211} \approx 14,5$; on teste 2, 3, 5, 7, 11, 13 : aucun ne divise. Donc 211 est premier — six tests au lieu de deux cents.

ASTUCE 2.7 — Divisibilité d'une puissance : la factorisation $a^n - b^n$

Pour tous entiers a, b et tout $n \geq 1$:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Autrement dit : $a - b$ **divise toujours** $a^n - b^n$. C'est l'outil numéro un pour prouver qu'une expression contenant des puissances est divisible par un entier fixé, sans récurrence.

EXERCICE 2.4 (★★★ — divisibilité et chiffre des unités)

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $A_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
- Déterminer le chiffre des unités de 3^{2026} .

Solution détaillée. 1. Commençons par réécrire A_n en isolant les puissances :

$$3^{2n+1} = 3 \times 3^{2n} = 3 \times 9^n, \quad 2^{n+2} = 4 \times 2^n,$$

donc $A_n = 3 \times 9^n + 4 \times 2^n$.

L'astuce consiste à faire apparaître $9^n - 2^n$, dont on sait qu'il est divisible par $9 - 2 = 7$:

$$A_n = 3(9^n - 2^n) + 3 \times 2^n + 4 \times 2^n = 3(9^n - 2^n) + 7 \times 2^n.$$

Le premier terme est divisible par 7 (car $9 - 2 = 7$ divise $9^n - 2^n$), le second l'est manifestement. Une somme de deux multiples de 7 étant un multiple de 7, on conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 7 \mid A_n.$$

Contrôle : $A_0 = 3 + 4 = 7$ ✓ ; $A_1 = 27 + 8 = 35 = 7 \times 5$ ✓ ; $A_2 = 243 + 16 = 259 = 7 \times 37$ ✓.

2. Le chiffre des unités d'une puissance de 3 est **périodique** :

$$3^1 = 3, \quad 3^2 = 9, \quad 3^3 = 27, \quad 3^4 = 81, \quad 3^5 = 243, \dots$$

Les unités se succèdent selon le cycle 3, 9, 7, 1, de longueur 4. Il suffit donc de connaître le reste de 2026 dans la division euclidienne par 4 :

$$2026 = 4 \times 506 + 2.$$

Le reste vaut 2 : le chiffre des unités de 3^{2026} est donc le **deuxième** du cycle, c'est-à-dire **9**.

Attention au décalage : un reste nul correspond au *quatrième* terme du cycle (le chiffre 1), pas au premier. Vérifiez toujours sur un petit exposant : $3^4 = 81$ se termine bien par 1, et $4 = 4 \times 1 + 0$. ■

L'ordre dans $\mathbb{R}$

■ COURS EXPRESS

- **Définition opératoire** : $a \leq b \iff b - a \geq 0$. Tout part de là.
- On peut **ajouter** un réel quelconque aux deux membres : $a \leq b \implies a + c \leq b + c$.
- On peut **multiplier** par $c > 0$ (sens conservé), par $c < 0$ (**sens inversé**).
- On peut **additionner** deux inégalités de même sens ; on ne peut *jamais* les soustraire.
- Pour $0 < a \leq b$: $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$ et $a^2 \leq b^2$ et $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.
- $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$; $|x - a|$ est la **distance** de x à a .
- $E(x)$ (partie entière) est l'unique entier tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

3.1 Comparer deux nombres : les trois techniques

🔧 MÉTHODE — Comparer A et B

1. **La différence** (technique universelle) : étudier le signe de $A - B$. Presque toujours, il faut *factoriser* $A - B$.
2. **Le quotient** : si $A > 0$ et $B > 0$, comparer $\frac{A}{B}$ à 1. Idéal pour des produits, des puissances, des factorielles.
3. **La fonction monotone** : appliquer aux deux nombres une même fonction dont on connaît le sens de variation ($x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$).

💡 ASTUCE 3.1 — Comparer des racines : élever au carré (avec précaution)

Comparer $A = 3\sqrt{5}$ et $B = 2\sqrt{11}$. Les deux sont positifs, donc on peut comparer les carrés : $A^2 = 45$, $B^2 = 44$. Comme $45 > 44$ et que $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante, $A > B$.

Condition d'emploi : $A \geq 0$ et $B \geq 0$. Avec $A = -3$ et $B = 2$ on aurait $A^2 > B^2$ et pourtant $A < B$.

⚠️ PIÈGE 3.1 — Multiplier une inégalité par une quantité de signe inconnu

✗ « $\frac{2}{x} < 3$ donc $2 < 3x$ donc $x > \frac{2}{3}$ ».

✓ Il faut discuter : si $x > 0$, l'inégalité équivaut à $2 < 3x$ soit $x > \frac{2}{3}$; si $x < 0$, alors $\frac{2}{x} < 0 < 3$ est toujours vraie. L'ensemble solution est donc $] -\infty; 0[\cup] \frac{2}{3}; +\infty[$.

Réflexe : devant $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq k$, on ne multiplie pas en croix — on **ramène à 0** puis on fait un **tableau de signes**.

⚠️ PIÈGE 3.2 — $a < b \implies a^2 < b^2$

✗ $-5 < 2$ donc $25 < 4$.

✓ L'implication $a < b \implies a^2 < b^2$ n'est valable que si $0 \leq a < b$. Sur $\mathbb{R}^-$ la fonction carré est *décroissante* : $-5 < -2$ donne $25 > 4$.

❌ PIÈGE 3.3 — Soustraire deux inégalités

❌ De $2 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 3$, on « déduit » $1 \leq x - y \leq 2$.

✓ On transforme d'abord : $1 \leq y \leq 3 \implies -3 \leq -y \leq -1$, puis on *additionne* :

$$2 + (-3) \leq x - y \leq 5 + (-1) \implies -1 \leq x - y \leq 4.$$

Règle absolue : on n'additionne que des inégalités *de même sens*, et on ne soustrait jamais. Pour une différence, on encadre l'opposé.

❌ PIÈGE 3.4 — Encadrer un quotient « en divisant les bornes »

❌ De $2 \leq x \leq 5$ et $1 \leq y \leq 3$: « $\frac{2}{1} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{5}{3}$ ».

✓ On encadre $\frac{1}{y}$: $1 \leq y \leq 3 \implies \frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq 1$ (les bornes s'échangent !), puis on multiplie les encadrements de *quantités positives* : $\frac{2}{3} \leq \frac{x}{y} \leq 5$.

3.2 Valeur absolue : la lire comme une distance**★ LES ÉQUIVALENCES À CONNAÎTRE**

Pour $r > 0$:

$$|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r, \quad |x| \geq r \iff x \leq -r \text{ ou } x \geq r,$$

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r \iff x \in [a - r; a + r].$$

$$|ab| = |a| |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad |a + b| \leq |a| + |b| \text{ (inégalité triangulaire)}, \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

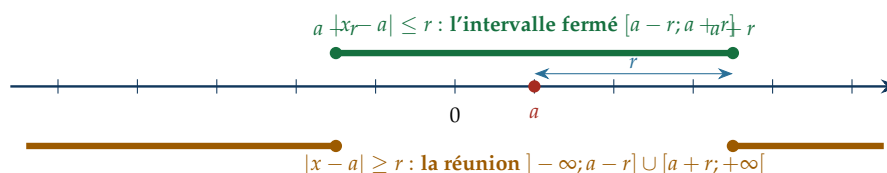


Figure 3.1 — Une valeur absolue n'est pas un obstacle : c'est une lecture géométrique. $|x - a|$ se lit « distance entre x et a ». Le seul point délicat est le sens de l'inégalité : $\leq$ donne un segment, $\geq$ donne son complémentaire.

❌ PIÈGE 3.5 — $|a + b| = |a| + |b|$ et $|-x| = x$

❌ $|3 + (-7)| = 3 + 7 = 10$. ✓ $|3 - 7| = |-4| = 4$.

✓ L'égalité $|a + b| = |a| + |b|$ n'a lieu que si a et b ont le même signe (au sens large).

❌ « $|-x| = x$ ». ✓ $|-x| = |x|$, qui vaut $-x$ si $x < 0$.

🔧 MÉTHODE — Résoudre une équation ou inéquation avec plusieurs valeurs absolues

1. Repérer les points d'annulation de chaque expression entre barres.
2. Découper $\mathbb{R}$ en intervalles délimités par ces points.
3. Sur chaque intervalle, remplacer chaque valeur absolue par $+(\cdot)$ ou $-(\cdot)$ selon le signe.
4. Résoudre l'équation obtenue, puis ne garder que les solutions appartenant à l'intervalle étudié (c'est l'étape que 90 % des élèves oublient).
5. Réunir les solutions des différents cas.

EXERCICE 3.1 (★★★ — valeurs absolues emboîtées)Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|2x - 1| + |x + 3| = 5$.

Solution détaillée. Points d'annulation : $2x - 1 = 0$ pour $x = \frac{1}{2}$; $x + 3 = 0$ pour $x = -3$. On découpe $\mathbb{R}$ en $] -\infty; -3[$, $[-3; \frac{1}{2}[$ et $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$		$-$	0	$+$
$x + 3$	$-$	0	$+$	

Cas 1 : $x < -3$. Alors $2x - 1 < 0$ et $x + 3 < 0$, donc l'équation devient $-(2x - 1) - (x + 3) = 5$, soit $-3x - 2 = 5$, d'où $x = -\frac{7}{3}$. Or $-\frac{7}{3} \approx -2,33$ n'appartient pas à $] -\infty; -3[$: **on rejette**.

Cas 2 : $-3 \leq x < \frac{1}{2}$. Alors $2x - 1 < 0$ et $x + 3 \geq 0$: $-(2x - 1) + (x + 3) = 5 \implies -x + 4 = 5 \implies x = -1$. Et $-1 \in [-3; \frac{1}{2}[$: **on garde**.

Cas 3 : $x \geq \frac{1}{2}$. Les deux expressions sont positives : $(2x - 1) + (x + 3) = 5 \implies 3x + 2 = 5 \implies x = 1$. Et $1 \in [\frac{1}{2}; +\infty[$: **on garde**.

Conclusion : $S = \{-1; 1\}$. Vérification : $|-3| + |2| = 5$ ✓ et $|1| + |4| = 5$ ✓. ■

3.3 Les inégalités classiques qu'on doit savoir démontrer

★ TROIS INÉGALITÉS UNIVERSELLES

Pour tous réels a, b et tous réels strictement positifs x, y :

$$(I) \ a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (II) \ x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (III) \ \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \text{ (moyennes)}$$

Toutes découlent de la même idée : **un carré est positif**.

ASTUCE 3.2 — Le réflexe « $(\dots)^2 \geq 0$ »

(I) : $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$. Égalité ssi $a = b$.

(II) : pour $x > 0$, $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x - 1)^2}{x} \geq 0$. Égalité ssi $x = 1$.

(III) : $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \geq 0$.

Conséquence à connaître : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (on additionne (I) écrite trois fois et on divise par 2).

EXERCICE 3.2 (★★★ — une inégalité à quatre étages)

Soient a et b deux réels strictement positifs.

- Montrer que $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$.
- Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ et préciser le cas d'égalité.
- Montrer que $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.
- En déduire que si $a + b = 1$, alors $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$.

Solution détaillée. 1. Développons : $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$. Il suffit donc de montrer $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, ce qui est l'objet de la question suivante.

2. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$. Comme $a > 0$ et $b > 0$, on a $ab > 0$ et $(a-b)^2 \geq 0$, donc le quotient est positif ou nul. **Égalité** si et seulement si $(a-b)^2 = 0$, c'est-à-dire $a = b$. En reportant dans 1 : $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 2 + 2 = 4$. ✓

3. $2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 = 2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$. Donc $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, avec égalité ssi $a = b$. (Remarquez que la même identité $(a-b)^2$ sert pour la troisième fois : c'est le fil rouge de tout l'exercice.)

4. Si $a+b=1$: d'après 3, $1 = (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, donc $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

D'après 1, $1 \times \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$, donc $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$. Dans les deux cas, l'égalité a lieu pour $a = b = \frac{1}{2}$. ■

3.4 La partie entière

ASTUCE 3.3 — Les trois seules choses à savoir sur $E(x)$

1. **Définition encadrante** : $E(x) \leq x < E(x) + 1$, ce qui donne aussi $x - 1 < E(x) \leq x$.
2. **Translation entière** : pour $n \in \mathbb{Z}$, $E(x+n) = E(x) + n$. On ne peut sortir de la partie entière qu'un nombre entier.
3. Pour les nombres négatifs, on « descend » : $E(-2,3) = -3$ et non -2 .

❌ PIÈGE 3.6 — $E(x+y) = E(x) + E(y)$ et $E(-x) = -E(x)$

- ❌ Avec $x = y = 0,7$: $E(1,4) = 1$ mais $E(0,7) + E(0,7) = 0$.
- ❌ Avec $x = 1,5$: $E(-1,5) = -2$ alors que $-E(1,5) = -1$.
- ✓ La seule règle sûre est $E(x+n) = E(x) + n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 3.3 (*** — l'identité de Hermite (cas $n = 2$))

Montrer que pour tout réel x : $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$.

Solution détaillée. **Idée directrice** : poser $n = E(x)$ et $t = x - n \in [0; 1[$ la partie fractionnaire, puis distinguer selon que $t < \frac{1}{2}$ ou $t \geq \frac{1}{2}$.

On a $x = n + t$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq t < 1$.

Cas 1 : $0 \leq t < \frac{1}{2}$.

- $E(x) = n$.
- $x + \frac{1}{2} = n + t + \frac{1}{2}$ avec $\frac{1}{2} \leq t + \frac{1}{2} < 1$, donc $E\left(x + \frac{1}{2}\right) = n$.
- $2x = 2n + 2t$ avec $0 \leq 2t < 1$, donc $E(2x) = 2n$.

La somme du membre de gauche vaut $n + n = 2n = E(2x)$. ✓

Cas 2 : $\frac{1}{2} \leq t < 1$.

- $E(x) = n$.
- $x + \frac{1}{2} = n + t + \frac{1}{2}$ avec $1 \leq t + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$, donc $E\left(x + \frac{1}{2}\right) = n + 1$.
- $2x = 2n + 2t$ avec $1 \leq 2t < 2$, donc $E(2x) = 2n + 1$.

La somme vaut $n + (n + 1) = 2n + 1 = E(2x)$. ✓

Dans les deux cas l'égalité est vérifiée, donc elle est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. ■

Astuce transférable : chaque fois qu'une partie entière apparaît, écrivez $x = E(x) + t$ avec $t \in [0; 1[$. L'exercice devient un simple encadrement.

Les polynômes

■ COURS EXPRESS

- $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$: $\deg P = n$, a_n est le **coefficient dominant**, $a_0 = P(0)$ le **terme constant**.
- **Égalité** de deux polynômes $\iff$ égalité *coefficient par coefficient* (identification).
- $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$; $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ (inégalité, pas égalité !).
- **Théorème fondamental** : a est racine de $P \iff P(x)$ est divisible par $(x - a)$, c'est-à-dire $P(x) = (x - a)Q(x)$ avec $\deg Q = \deg P - 1$.
- **Division euclidienne** : $P = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$.

★ IDENTITÉS REMARQUABLES — LES NEUF À CONNAÎTRE

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 & a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\
 (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) & a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\
 (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc & x^n - 1 &= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)
 \end{aligned}$$

✗ PIÈGE 4.1 — Les signes dans $a^3 \pm b^3$

✗ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 - ab + b^2)$.

✓ **Moyen mnémotechnique** : dans le *petit* facteur, le signe est celui de l'énoncé ; dans le *grand* facteur, le terme du milieu porte le signe **opposé**, et les deux carrés sont toujours en + :

$$\begin{array}{c}
 a^3 - b^3 = (a \quad - \quad b)(a^2 \quad + \quad ab + b^2) \\
 \downarrow \qquad \qquad \text{même} \qquad \qquad \text{opposé}
 \end{array}$$

4.1 Trouver une racine sans calculatrice

ASTUCE 4.1 — $P(1)$ = somme des coefficients, $P(-1)$ = somme alternée

Pour tester si 1 est racine : additionnez tous les coefficients. Si la somme est nulle, 1 est racine.
 Pour -1 : additionnez en alternant les signes (en partant du terme constant).

Exemple : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 4$. Somme = $2 - 5 - 1 + 4 = 0$: 1 **est racine**, sans le moindre calcul.

ASTUCE 4.2 — Où chercher les racines rationnelles

Si P est à coefficients *entiers* et si $\frac{p}{q}$ (irréductible) est racine, alors

$$p \mid a_0 \text{ (terme constant)} \quad \text{et} \quad q \mid a_n \text{ (coefficient dominant)}.$$

Pour $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$: les candidats sont $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}$. On teste : $P(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 4 + 4 = 0$. Racine trouvée en quatre essais au maximum.

MÉTHODE — Factoriser un polynôme de degré 3

1. **Chercher une racine évidente** : tester 1, -1, 2, -2, puis les diviseurs du terme constant.
2. **Diviser** $P(x)$ par $(x - a)$ — par division posée ou, plus rapide, par *identification* ou par le *schéma de Horner*.
3. **Factoriser le trinôme** obtenu (discriminant, ou somme-produit).
4. **Vérifier** en développant le terme dominant et le terme constant.

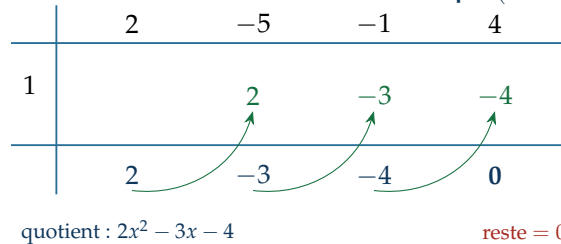
SCHEMA DE HORNER : diviser $2x^3 - 5x^2 - x + 4$ par $(x - 1)$ 

Figure 4.1 — Horner : on descend le premier coefficient, on multiplie par la racine, on ajoute, on recommence. Le dernier nombre obtenu est le reste ; les précédents sont les coefficients du quotient.

❌ PIÈGE 4.2 — Oublier les termes manquants dans une division posée

Pour diviser $x^4 - 1$ par $x - 1$, il faut écrire $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1$.

❌ Poser la division avec $x^4 - 1$ conduit à décaler les colonnes et à un résultat faux.

✓ **Complétez toujours par des 0** avant de poser la division.

4.2 Le trinôme du second degré**★ TOUT LE SECOND DEGRÉ SUR UNE PAGE**

Pour $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$:

- $\Delta > 0$: deux racines $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- $\Delta = 0$: racine double $x_0 = \frac{-b}{2a}$ et $P(x) = a(x - x_0)^2$.
- $\Delta < 0$: aucune racine réelle, $P(x)$ garde le signe de a sur tout $\mathbb{R}$.

Forme canonique : $P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$; sommet $\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a} \right)$.

Somme et produit : $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Signe : $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines, du signe de $-a$ entre les racines.

ASTUCE 4.3 — Les racines évidentes du trinôme : deux réflexes qui font gagner 2 minutes

Si $a + b + c = 0 \implies x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a}$. Si $a - b + c = 0 \implies x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{c}{a}$.

Exemple : $2026x^2 - 2030x + 4 = 0$. On a $2026 - 2030 + 4 = 0$, donc $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{4}{2026} = \frac{2}{1013}$.
Calculer Δ ici serait une perte de temps considérable.

ASTUCE 4.4 — Le discriminant réduit (quand b est pair)

Si $b = 2b'$, posez $\Delta' = b'^2 - ac$. Alors $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$.

Pour $x^2 - 6x + 5$: $b' = -3$, $\Delta' = 9 - 5 = 4$, $x = 3 \pm 2$, soit 1 et 5. Aucun grand nombre manipulé.

ASTUCE 4.5 — Somme-produit : reconstruire un trinôme à partir de ses racines

Deux nombres de somme S et de produit P sont racines de $X^2 - SX + P = 0$.

Attention au signe : c'est $-S$ et $+P$. Utilisez-le pour factoriser mentalement : $x^2 - 7x + 12$: quelle paire a pour somme 7 et produit 12 ? 3 et 4. Donc $(x - 3)(x - 4)$.

❌ PIÈGE 4.3 — Utiliser Δ sans avoir vérifié que $a \neq 0$

❌ « Résolvons $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$: $\Delta = \dots$ ».

✓ Il faut **d'abord** traiter le cas $m = 1$, où l'équation devient $-2x + 3 = 0$ (premier degré, une seule solution $x = \frac{3}{2}$). Le calcul du discriminant ne concerne que $m \neq 1$.

Réflexe : dès qu'un paramètre apparaît devant x^2 , la première ligne de la copie est la discussion sur l'annulation de ce coefficient.

EXERCICE 4.1 (★★★ — factorisation complète et paramètre)

On considère $P(x) = x^3 + (m - 3)x^2 + (2m - 13)x + 6$, où m est un réel.

- Déterminer m pour que 1 soit racine de P .
- Pour cette valeur de m , factoriser complètement $P(x)$.
- Résoudre alors l'inéquation $P(x) \geq 0$.
- En déduire les solutions de $P(x) = 0$ dans $\mathbb{Z}$, puis le signe de $P(\sqrt{2})$ sans calculatrice.

Solution détaillée. 1. On applique l'astuce « $P(1)$ = somme des coefficients » :

$$P(1) = 1 + (m - 3) + (2m - 13) + 6 = 3m - 9.$$

$$\text{Donc } P(1) = 0 \iff \boxed{m = 3}.$$

2. Avec $m = 3$: $P(x) = x^3 + 0 \cdot x^2 - 7x + 6 = x^3 - 7x + 6$. Comme 1 est racine, $P(x) = (x - 1)Q(x)$. Par Horner sur les coefficients 1, 0, -7, 6 avec la racine 1 :

$$1 \rightarrow 1; \quad 0 + 1 = 1; \quad -7 + 1 = -6; \quad 6 + (-6) = 0 \quad (\text{reste nul } \checkmark)$$

donc $Q(x) = x^2 + x - 6$. Ce trinôme se factorise par somme-produit : deux nombres de somme -1 et de produit -6 sont -3 et 2. Ainsi $Q(x) = (x + 3)(x - 2)$ et

$$\boxed{P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)}.$$

Vérification rapide : le produit des termes constants donne $(-1)(-2)(3) = 6$ ✓ et le terme dominant est bien x^3 ✓.

3. Les racines rangées dans l'ordre croissant sont $-3 < 1 < 2$, et le coefficient dominant est $1 > 0$: le signe est + après la plus grande racine, puis alterne.

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$		
$x+3$		$-$	0	$+$			
$x-1$		$-$		0	$+$		
$x-2$			$-$		0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

$$S = [-3; 1] \cup [2; +\infty[.$$

4. Les solutions de $P(x) = 0$ sont -3, 1 et 2 : toutes entières, donc $S_{\mathbb{Z}} = \{-3; 1; 2\}$. Enfin $\sqrt{2} \approx 1,41$ appartient à l'intervalle $]1; 2[$, sur lequel P est *négligé* d'après le tableau : $P(\sqrt{2}) < 0$. **Contrôle direct** : $P(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 6 = 6 - 5\sqrt{2}$, et $5\sqrt{2} = \sqrt{50} > \sqrt{36} = 6$. ✓

EXERCICE 4.2 (★★★ — reste d'une division sans poser la division)

Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(x) = x^{2026} + x + 1$ par $B(x) = x^2 - 1$.

Solution détaillée. Idée. Le reste R vérifie $\deg R < \deg B = 2$, donc $R(x) = ax + b$ avec a, b à déterminer. On écrit la division :

$$x^{2026} + x + 1 = (x^2 - 1) Q(x) + ax + b.$$

Cette égalité est vraie *pour tout* x ; on l'évalue en les racines de B , c'est-à-dire $x = 1$ et $x = -1$, ce qui annule le premier terme.

En $x = 1$: $1 + 1 + 1 = 0 + a + b$, donc $a + b = 3$.

En $x = -1$: $(-1)^{2026} + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$, et le membre de droite vaut $-a + b$, donc $-a + b = 1$.

Le système $\begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = 1 \end{cases}$ donne, par addition, $2b = 4$ soit $b = 2$, puis $a = 1$.

Conclusion : le reste est $R(x) = x + 2$.

Généralisation à retenir : pour diviser par un polynôme dont on connaît les racines, on n'effectue jamais la division — on évalue en ces racines. Pour un diviseur de degré n ayant n racines distinctes, on obtient un système de n équations à n inconnues. ■

❌ PIÈGE 4.4 — $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$

❌ « La somme de deux polynômes de degré 3 est de degré 3 ».

✓ Avec $P(x) = x^3 + x$ et $Q(x) = -x^3 + 1$, la somme est $x + 1$, de degré 1. Les termes dominants peuvent se détruire. En revanche, pour le *produit*, $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ est une égalité toujours vraie (le produit des coefficients dominants n'est jamais nul).

Équations, inéquations et systèmes

■ COURS EXPRESS

- **Produit nul** : $A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$. C'est la seule façon de résoudre une équation de degré ≥ 3 au Tronc Commun : factoriser.
- **Quotient nul** : $\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0$.
- **Signe d'un produit / quotient** : tableau de signes. Le signe d'un quotient suit la même règle que celui du produit ; seules les **doubles barres** changent (valeur interdite).
- **Équation avec radical** : $\sqrt{A} = B \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
- **Système 2×2** : substitution, combinaison linéaire, ou déterminant.

5.1 Les conditions d'existence : la moitié des points perdus

🔑 MÉTHODE — Toute résolution commence par le domaine

Avant toute manipulation, écrivez l'ensemble de définition D :

- un **dénominateur** doit être non nul ;
- un **radicande** (sous $\sqrt{}$) doit être positif ou nul ;
- une racine carrée est **toujours** ≥ 0 : cela peut suffire à conclure.

À la fin, ne conservez que les solutions appartenant à D .

✗ PIÈGE 5.1 — Élever au carré sans contrôler le signe

✗ $\sqrt{x+5} = x-1 \Rightarrow x+5 = (x-1)^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 4\}$.

✓ L'élevation au carré est une implication, **pas** une équivalence : elle crée des solutions parasites. Ici $x-1$ doit être ≥ 0 , donc $x \geq 1$: la valeur -1 est à rejeter. Test : $\sqrt{-1+5} = 2$ alors que $-1-1 = -2$. ✗ Seule $x = 4$ convient ($\sqrt{9} = 3 = 4-1$ ✓).

✗ PIÈGE 5.2 — Diviser par x (ou par une expression qui peut s'annuler)

✗ $x^3 = 4x \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. La solution $x = 0$ a disparu !

✓ On ramène tout à 0 et on factorise : $x^3 - 4x = 0 \iff x(x^2 - 4) = 0 \iff x(x-2)(x+2) = 0 \iff x \in \{-2; 0; 2\}$.

Règle : on ne divise jamais par une expression contenant l'inconnue — on factorise.

✗ PIÈGE 5.3 — Multiplier en croix dans une inéquation

✗ $\frac{x+1}{x-2} \leq 3 \Rightarrow x+1 \leq 3(x-2)$.

✓ Le signe de $x-2$ est inconnu. On ramène à 0 :

$$\frac{x+1}{x-2} - 3 \leq 0 \iff \frac{x+1-3x+6}{x-2} \leq 0 \iff \frac{-2x+7}{x-2} \leq 0.$$

Puis tableau de signes : le numérateur s'annule en $\frac{7}{2}$, le dénominateur en 2 (valeur interdite). On obtient $S =]-\infty; 2[\cup]\frac{7}{2}; +\infty[$.

LE TABLEAU DE SIGNES : mode d'emploi

x	$-\infty$		2		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$-2x + 7$		+		+	0		-
$x - 2$		-	0	+			+
quotient		-		+	0		-

double barre : valeur interdite

zéro : valeur acceptée si $\leq$ ou $\geq$

Figure 5.1 — Ce qui distingue une valeur interdite (||) d'un zéro (0) est la seule subtilité du tableau. Un crochet ne peut jamais être fermé sur une double barre.

5.2 Le second degré déguisé

ASTUCE 5.1 — Le changement d'inconnue : reconnaître un trinôme caché

Dès qu'une expression apparaît deux fois, posez $X =$ cette expression.

$$\begin{array}{ll} x^4 - 5x^2 + 4 = 0 & \text{posez } X = x^2 \ (X \geq 0) \\ (x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0 & \text{posez } X = x^2 - x \\ x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 & \text{posez } X = \sqrt{x} \ (X \geq 0) \\ \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x} + 6 = 0 & \text{posez } X = \frac{1}{x} \ (X \neq 0) \end{array}$$

Ne jamais oublier de revenir à x à la fin, et de vérifier la contrainte sur X (par exemple $X \geq 0$ élimine d'emblée les valeurs négatives).

❌ PIÈGE 5.4 — Oublier la contrainte sur l'inconnue auxiliaire

Pour $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$: avec $X = x^2$, on trouve $X = 1$ ou $X = -4$.

❌ « $x^2 = -4$ donc $x = \pm 2i$ » ou « $x = \pm 2$ ».

✓ $X = x^2 \geq 0$: la valeur $X = -4$ est **rejetée**. Il reste $x^2 = 1$, soit $S = \{-1; 1\}$.

EXERCICE 5.1 (★★★ — équation avec radical)

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-1} = 1$.

Solution détaillée. Domaine. Il faut $2x+3 \geq 0$ (soit $x \geq -\frac{3}{2}$) et $x-1 \geq 0$ (soit $x \geq 1$). Donc $D = [1; +\infty[$.

Isoler avant d'élever au carré. On écrit $\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{x-1}$. Les deux membres sont positifs sur D , donc l'élévation au carré est ici une **équivalence** :

$$2x+3 = 1 + 2\sqrt{x-1} + (x-1) \iff 2x+3 = x + 2\sqrt{x-1} \iff x+3 = 2\sqrt{x-1}.$$

Deuxième élévation. Sur D , $x+3 > 0$ et $2\sqrt{x-1} \geq 0$, donc de nouveau équivalence :

$$(x+3)^2 = 4(x-1) \iff x^2 + 6x + 9 = 4x - 4 \iff x^2 + 2x + 13 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 4 - 52 = -48 < 0$: **aucune solution réelle**.

Conclusion : $S = \emptyset$.

Contrôle de bon sens : sur D , la fonction $x \mapsto \sqrt{2x+3} - \sqrt{x-1}$ vaut $\sqrt{5} \approx 2,24$ en $x = 1$ et croît ensuite ; elle ne redescend jamais jusqu'à 1. Le résultat est cohérent.

Moralité : « pas de solution » est une réponse parfaitement valable, à condition d'être démontrée. ■

5.3 Systèmes

★ **RÉSoudre** $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Déterminant : $\Delta = ab' - a'b$.

- $\Delta \neq 0$: solution unique $x = \frac{cb' - c'b}{\Delta}$, $y = \frac{ac' - a'c}{\Delta}$.
- $\Delta = 0$: soit **aucune** solution (droites strictement parallèles), soit une **infinité** (droites confondues).

Système symétrique : si $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$, alors x et y sont les racines de $t^2 - St + P = 0$. Solutions réelles ssi $S^2 - 4P \geq 0$.

ASTUCE 5.2 — Repérer un système symétrique

Un système est symétrique si l'échange de x et y le laisse inchangé. On se ramène alors systématiquement à $S = x + y$ et $P = xy$ grâce aux identités :

$$x^2 + y^2 = S^2 - 2P, \quad x^3 + y^3 = S^3 - 3SP, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{S}{P}, \quad (x - y)^2 = S^2 - 4P.$$

Deux inconnues deviennent deux inconnues... mais l'équation devient linéaire ou du second degré.

EXERCICE 5.2 (★★ — système symétrique)

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$

Solution détaillée. Traduction en S et P . Posons $S = x + y$ et $P = xy$. La seconde équation se factorise : $x^2y + xy^2 = xy(x + y) = PS$. Le système devient

$$\begin{cases} S + P = 11 \\ SP = 30 \end{cases}$$

Résolution intermédiaire. S et P sont donc eux-mêmes de somme 11 et de produit 30 : ce sont les racines de $t^2 - 11t + 30 = 0$, soit $\Delta = 121 - 120 = 1$ et $t = \frac{11 \pm 1}{2}$, c'est-à-dire $t = 5$ ou $t = 6$. Deux cas.

Cas A : $S = 5$ et $P = 6$. Alors x et y sont racines de $t^2 - 5t + 6 = 0$, donc $\{x, y\} = \{2, 3\}$. On vérifie : $2 + 3 + 6 = 11$ ✓ et $6 \times 5 = 30$ ✓.

Cas B : $S = 6$ et $P = 5$. Alors $t^2 - 6t + 5 = 0$ donne $\{x, y\} = \{1, 5\}$. Vérification : $1 + 5 + 5 = 11$ ✓ et $5 \times 6 = 30$ ✓.

Conclusion :

$$S = \{(2, 3), (3, 2), (1, 5), (5, 1)\}.$$

Point de méthode : dans un système symétrique, si (x_0, y_0) est solution alors (y_0, x_0) l'est aussi — pensez à donner **les deux** couples. ■

EXERCICE 5.3 (★★ — discussion selon un paramètre)

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $(E_m) : (m - 1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$.

1. Discuter, selon m , le nombre de solutions de (E_m) .
2. Pour $m \neq 1$, exprimer la somme S et le produit P des racines en fonction de m .

3. Déterminer m pour que (E_m) admette deux racines dont la somme des inverses vaut 2.

Solution détaillée. 1. Cas $m = 1$. L'équation devient $-2x + 3 = 0$, du premier degré : **une** solution $x = \frac{3}{2}$.
 Cas $m \neq 1$. Second degré. Utilisons le discriminant réduit ($b = -2m$ donc $b' = -m$) :

$$\Delta' = m^2 - (m-1)(m+2) = m^2 - (m^2 + m - 2) = -m + 2 = 2 - m.$$

• $2 - m > 0$, soit $m < 2$ (et $m \neq 1$) : **deux** racines distinctes.

• $2 - m = 0$, soit $m = 2$: une **racine double** $x = \frac{m}{m-1} = 2$.

• $2 - m < 0$, soit $m > 2$: **aucune** racine réelle.

2. $S = \frac{2m}{m-1}$ et $P = \frac{m+2}{m-1}$.

3. La somme des inverses vaut $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}$, à condition que $P \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq -2$. On résout

$$\frac{S}{P} = \frac{2m}{m-1} \times \frac{m-1}{m+2} = \frac{2m}{m+2} = 2 \iff 2m = 2m + 4 \iff 0 = 4,$$

ce qui est impossible. **Aucune valeur de m ne convient.**

Interprétation : $\frac{2m}{m+2} = 2 - \frac{4}{m+2}$ est toujours strictement inférieur à 2 lorsque $m+2 > 0$, et strictement supérieur lorsque $m+2 < 0$ — la valeur 2 est une asymptote, jamais atteinte. ■

✗ PIÈGE 5.5 — Utiliser S et P sans vérifier que les racines existent

✗ « $S = \frac{2m}{m-1}$ pour tout $m \neq 1$ » — vrai formellement, mais si $\Delta < 0$ il n'y a *pas* de racines réelles, donc parler de leur somme n'a aucun sens.

✓ Toute question du type « trouver m tel que les racines vérifient... » commence par **imposer** $\Delta \geq 0$, et la réponse finale doit être intersectée avec cette condition.

Généralités sur les fonctions

■ COURS EXPRESS

- D_f : ensemble des x pour lesquels $f(x)$ existe. **Toujours la première ligne de la copie.**
- $f(a)$ est l'**image** de a ; si $f(a) = b$, alors a est **un** antécédent de b (il peut y en avoir plusieurs, ou aucun).
- f est **paire** si D_f est symétrique par rapport à 0 et $f(-x) = f(x)$: courbe symétrique par rapport à l'axe (Oy) .
- f est **impaire** si D_f est symétrique et $f(-x) = -f(x)$: courbe symétrique par rapport à l'origine O .
- **Taux de variation** entre $a \neq b$: $T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. $T > 0$ sur $I \Rightarrow f$ croissante sur I ; $T < 0 \Rightarrow$ décroissante.

6.1 Le domaine de définition

★ LES TROIS SOURCES D'INTERDICTION

$$\frac{A(x)}{B(x)} : B(x) \neq 0 \quad \sqrt{A(x)} : A(x) \geq 0 \quad \frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}} : B(x) > 0 \text{ (strictement !)}$$

Quand plusieurs conditions coexistent, on les traduit en un **système**, et D_f est l'*intersection* des ensembles obtenus.

ASTUCE 6.1 — Le domaine se lit sur la forme non simplifiée

Pour $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, on a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, **même si** $f(x) = x + 2$ après simplification. La courbe de f est la droite $y = x + 2$ *privée du point* $(2; 4)$.

Ordre correct : (1) domaine, (2) simplification, (3) étude.

✗ PIÈGE 6.1 — Simplifier avant de chercher le domaine

✗ « $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$ donc $D_f = \mathbb{R}$ ».

✓ La simplification n'est licite que pour $x \neq 2$. Écrire $D_f = \mathbb{R}$ change la fonction.

EXERCICE 6.1 (★★ — domaine avec plusieurs contraintes)

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2 - x - 6}$.

Solution détaillée. Deux conditions simultanées :

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -3 \\ (x-3)(x+2) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq 3 \text{ et } x \neq -2 \end{cases}$$

(la factorisation vient de la somme-produit : $-3 + 2 = -1$ et $-3 \times 2 = -6$... attention, on cherche somme 1

et produit -6 , ce sont 3 et -2).

$$D_f = [-3; -2[\cup] -2; 3[\cup] 3; +\infty[.$$

Remarque : $x = -3$ est autorisé (le numérateur vaut 0 , ce qui est permis), mais $x = -2$ ne l'est pas bien que $\sqrt{x+3}$ y existe : **une seule condition violée suffit à exclure la valeur.** ■

6.2 Parité : gagner la moitié de l'étude

📘 MÉTHODE — Étudier la parité

1. **Vérifier que D_f est symétrique** par rapport à 0 : $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$. Si ce n'est pas le cas, on conclut immédiatement : f n'est ni paire ni impaire.
2. Calculer $f(-x)$ et **simplifier**.
3. Comparer à $f(x)$ et à $-f(x)$.
4. Conclure — et **exploiter** : il suffit alors d'étudier f sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$, puis de compléter la courbe par symétrie.

✗ PIÈGE 6.2 — Oublier la symétrie du domaine

Soit $f(x) = x^2$ définie sur $[-1; 3]$. On a bien $f(-x) = f(x)$ quand les deux existent, mais D_f n'est pas symétrique ($-3 \notin D_f$) : **f n'est pas paire.**

Réflexe : la symétrie du domaine se vérifie *avant* tout calcul.

✗ PIÈGE 6.3 — « Ni paire ni impaire » n'est pas une catégorie rare

✗ Croire qu'une fonction est forcément paire ou impaire.

✓ La plupart ne sont ni l'une ni l'autre : $f(x) = x^2 + x$ vérifie $f(-1) = 0$ et $f(1) = 2$, donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$. Un seul contre-exemple numérique suffit à conclure — c'est même la rédaction la plus rapide.

ASTUCE 6.2 — Parité par inspection des exposants

Pour un polynôme : si tous les exposants sont **pairs** (le terme constant compte comme x^0), la fonction est **paire** ; si tous sont **impairs**, elle est **impaire** ; si les deux types coexistent, elle n'est ni l'une ni l'autre.

$$x^4 - 3x^2 + 7 \text{ paire} \quad x^5 - 2x \text{ impaire} \quad x^3 + x^2 \text{ ni l'une ni l'autre}$$

Règles de composition utiles : paire $\times$ paire = paire, impaire $\times$ impaire = paire, paire $\times$ impaire = impaire (exactement comme les entiers à l'addition).

6.3 Variations : le taux de variation, et rien d'autre

★ LES QUATRE TAUX À CONNAÎTRE PAR CŒUR

Pour $a \neq b$:

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b, \quad \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{-1}{ab},$$

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \quad \frac{b^3 - a^3}{b - a} = a^2 + ab + b^2.$$

Ces quatre calculs reviennent dans 80 % des exercices de variation du Tronc Commun.

ASTUCE 6.3 — La factorisation qui débloque tout

Le taux de variation contient toujours $b - a$ au dénominateur : votre **unique** objectif est de faire apparaître $b - a$ en *facteur* au numérateur, puis de simplifier.

- Différence de carrés $\rightarrow b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$.
- Différence de fractions $\rightarrow$ mettre au même dénominateur : $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab}$.
- Différence de racines $\rightarrow$ multiplier par la quantité conjuguée.

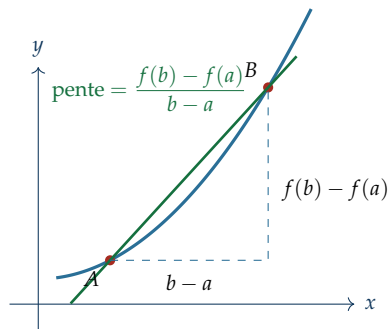


Figure 6.1 — Le taux de variation est la pente de la corde $[AB]$. Son signe donne le sens de variation : corde qui monte $\Rightarrow$ fonction croissante entre a et b .

❌ PIÈGE 6.4 — Conclure d'un tableau de valeurs

❌ « $f(0) = 1, f(1) = 3, f(2) = 7$: donc f est croissante sur $\mathbb{R}$ ».

✓ Trois points ne disent rien du comportement entre eux ni au-delà. Une variation se **démontre** par le signe de $f(b) - f(a)$ pour a et b quelconques dans l'intervalle.

❌ PIÈGE 6.5 — Additionner les sens de variation n'importe comment

✓ **Vrai** : f et g croissantes sur $I \Rightarrow f + g$ croissante sur I .

❌ **Faux** : f et g croissantes $\Rightarrow f \times g$ croissante. Contre-exemple sur $\mathbb{R}$: $f(x) = g(x) = x$ sont croissantes, mais $fg(x) = x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

✓ **Vrai** : si f est croissante et *strictement positive*, alors $\frac{1}{f}$ est décroissante.

EXERCICE 6.2 (★★★ — une fonction classique et redoutable)

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

1. Montrer que pour tous $a, b > 0$ avec $a \neq b$: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 1 - \frac{1}{ab} = \frac{ab - 1}{ab}$.
2. En déduire les variations de f sur $]0; 1]$ puis sur $[1; +\infty[$.
3. Montrer que f admet un minimum sur $]0; +\infty[$ que l'on précisera.
4. Étudier la parité de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x + \frac{1}{x}$, et en déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^*$.

Solution détaillée. 1. Calculons la différence :

$$f(b) - f(a) = \left(b + \frac{1}{b}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right) = (b - a) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = (b - a) + \frac{a - b}{ab} = (b - a) \left(1 - \frac{1}{ab}\right).$$

En divisant par $b - a \neq 0$: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 1 - \frac{1}{ab} = \frac{ab - 1}{ab}$.

2. Comme $a > 0$ et $b > 0$, le dénominateur ab est strictement positif : **le signe du taux est celui de $ab - 1$.**

- Si $a, b \in]0; 1]$ avec $a \neq b$, alors $0 < ab < 1$, donc $ab - 1 < 0$: le taux est négatif, f **est strictement décroissante** sur $]0; 1]$.
 - Si $a, b \in [1; +\infty[$ avec $a \neq b$, alors $ab > 1$, donc le taux est positif : f **est strictement croissante** sur $[1; +\infty[$.
3. f décroît jusqu'en 1 puis croît : elle atteint donc un minimum en $x = 1$, égal à $f(1) = 1 + 1 = 2$. Autrement dit

$$\forall x > 0, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$ — on retrouve l'inégalité classique du chapitre 3, cette fois par une étude de fonction.

4. $D_g = \mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0, et

$$g(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -g(x),$$

donc g **est impaire**. La courbe est symétrique par rapport à l'origine. On en déduit sur $\mathbb{R}^*$ le comportement « renversé » : g est croissante sur $] -\infty; -1]$ et décroissante sur $[-1; 0[$, avec un *maximum* local $g(-1) = -2$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
g	$\nearrow$	-2	$\searrow$	2	$\searrow$

■

6.4 Fonctions de référence et transformations de courbes

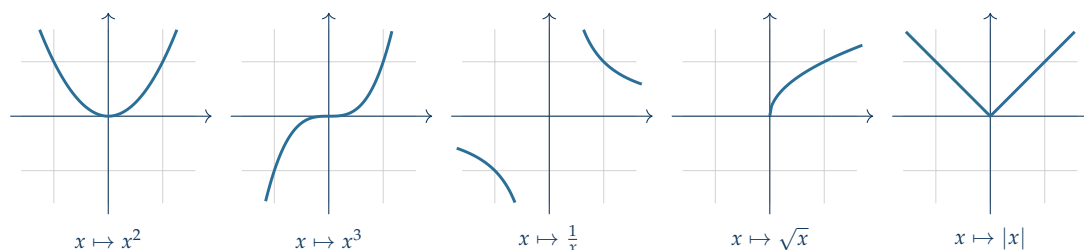


Figure 6.2 — Les cinq courbes de référence. Deux sont paires (x^2 , $|x|$), deux sont impaires (x^3 , $\frac{1}{x}$), la dernière n'est ni l'une ni l'autre (domaine non symétrique).

★ TRANSFORMER UNE COURBE

Soit $\mathcal{C}$ la courbe de f . La courbe de :

- $f(x) + k$ s'obtient par **translation verticale** de vecteur $k \vec{j}$;
- $f(x - a)$ par **translation horizontale** de vecteur $a \vec{i}$ (attention au signe : $-a$ dans la formule, $+a$ dans le déplacement) ;
- $-f(x)$ par **symétrie** par rapport à l'axe (Ox) ;
- $f(-x)$ par **symétrie** par rapport à l'axe (Oy) ;
- $|f(x)|$ en **rabattant** au-dessus de (Ox) la partie de $\mathcal{C}$ située en dessous.

✗ PIÈGE 6.6 — Le sens de la translation horizontale

✗ « La courbe de $f(x - 3)$ est celle de f décalée de 3 vers la gauche ».

✓ Elle est décalée de 3 vers la **droite**. *Vérification imparable* : la courbe de $g(x) = (x - 3)^2$ a son sommet en $x = 3$, à droite du sommet de x^2 .

EXERCICE 6.3 (★★★ — fonction homographique et centre de symétrie)

Soit $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$.

1. Déterminer D_f , puis trouver deux réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+2}$.
2. En déduire les variations de f sur chacun des intervalles de D_f .
3. Montrer que le point $\Omega(-2; 2)$ est centre de symétrie de la courbe de f .
4. Résoudre $f(x) \geq 1$.

Solution détaillée. 1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. On force l'apparition du dénominateur au numérateur :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2} = \frac{2(x+2)-5}{x+2} = 2 - \frac{5}{x+2}.$$

Donc $a = 2$ et $b = -5$.

2. Soient $a < b$ dans $] -2; +\infty[$ (donc $a+2 > 0$ et $b+2 > 0$). Alors

$$f(b) - f(a) = -\frac{5}{b+2} + \frac{5}{a+2} = 5 \cdot \frac{(b+2) - (a+2)}{(a+2)(b+2)} = \frac{5(b-a)}{(a+2)(b+2)} > 0.$$

Donc f est **strictement croissante** sur $] -2; +\infty[$. Le même calcul sur $] -\infty; -2[$ donne un dénominateur $(a+2)(b+2) > 0$ (produit de deux négatifs) : f y est **aussi croissante**.

Attention : on dit « croissante sur chacun des deux intervalles », jamais « croissante sur D_f » : $f(-3) = 7$ et $f(0) = -\frac{1}{2}$ montrent qu'il n'y a pas de croissance globale.

3. Utilisons la caractérisation : $\Omega(\alpha; \beta)$ est centre de symétrie si, pour tout h tel que $\alpha \pm h \in D_f$,

$$f(\alpha + h) + f(\alpha - h) = 2\beta.$$

Ici $\alpha = -2$, $\beta = 2$ et, pour $h \neq 0$:

$$f(-2+h) + f(-2-h) = \left(2 - \frac{5}{h}\right) + \left(2 - \frac{5}{-h}\right) = 4 - \frac{5}{h} + \frac{5}{h} = 4 = 2 \times 2. \quad 3$$

Donc $\Omega(-2; 2)$ est bien centre de symétrie. *Lecture rapide* : sous la forme $f(x) = a + \frac{b}{x-a}$, le centre de symétrie est *toujours* le point $(a; a)$, intersection des deux asymptotes.

4. $f(x) \geq 1 \iff \frac{2x-1}{x+2} - 1 \geq 0 \iff \frac{2x-1-x-2}{x+2} \geq 0 \iff \frac{x-3}{x+2} \geq 0$. Tableau de signes : le numérateur s'annule en 3, le dénominateur en -2 (valeur interdite).

$$S =] -\infty; -2[\cup [3; +\infty[.$$

ASTUCE 6.4 — Position relative de deux courbes

Pour comparer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on étudie le signe de $d(x) = f(x) - g(x)$:

- $d(x) > 0$: $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathcal{C}_g$;
- $d(x) = 0$: les courbes se **coupent** ;
- $d(x) < 0$: $\mathcal{C}_f$ est **en dessous**.

Exemple à connaître : sur $[0; 1]$, $x^3 \leq x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$; sur $[1; +\infty[$, l'ordre est exactement *inversé*. Beaucoup d'élèves apprennent une seule des deux moitiés.

EXERCICE 6.4 (★★ — une fonction avec radical)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$.

1. Déterminer D_f .
2. Étudier le sens de variation de f à l'aide du taux de variation.

3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq x$.**Solution détaillée.** 1. Il faut $x + 2 \geq 0$, donc $D_f = [-2; +\infty[$.2. Soient a et b deux éléments distincts de D_f . On multiplie par la **quantité conjuguée** :

$$T = \frac{\sqrt{b+2} - \sqrt{a+2}}{b-a} = \frac{(b+2) - (a+2)}{(b-a)(\sqrt{b+2} + \sqrt{a+2})} = \frac{1}{\sqrt{a+2} + \sqrt{b+2}}.$$

Ce quotient est strictement positif dès que a et b ne sont pas tous deux égaux à -2 : f est donc **strictement croissante** sur $[-2; +\infty[$.3. On travaille sur $D_f = [-2; +\infty[$ et on **discute selon le signe de x** (le membre de droite doit être positif pour pouvoir élever au carré).*Cas 1* : $-2 \leq x < 0$. Alors $f(x) \geq 0 > x$: l'inégalité est vraie. Tout l'intervalle $[-2; 0[$ est solution.*Cas 2* : $x \geq 0$. Les deux membres sont positifs, on peut élever au carré (équivalence dans ce cas) :

$$\sqrt{x+2} \geq x \iff x+2 \geq x^2 \iff x^2 - x - 2 \leq 0 \iff (x-2)(x+1) \leq 0 \iff -1 \leq x \leq 2.$$

Avec $x \geq 0$, il reste $[0; 2]$.**Conclusion** : $S = [-2; 0[\cup [0; 2] = [-2; 2]$.*Contrôle* : pour $x = 2$, $f(2) = 2$: l'égalité est bien atteinte à la borne ✓ ; pour $x = 3$, $f(3) = \sqrt{5} \approx 2,24 < 3$, et $3 \notin S$ ✓. ■

Le calcul trigonométrique

■ COURS EXPRESS

- **Radians** : $180^\circ = \pi \text{ rad}$. Conversion : $\frac{\text{deg}}{180} = \frac{\text{rad}}{\pi}$.
- Sur le cercle trigonométrique, le point M associé à x a pour coordonnées $(\cos x; \sin x)$.
- **Relation fondamentale** : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (pour $\cos x \neq 0$) ; $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$: *toujours*.
- Périodicité : $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $\tan(x + k\pi) = \tan x$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.1 Le cercle trigonométrique : votre seule fiche de révision

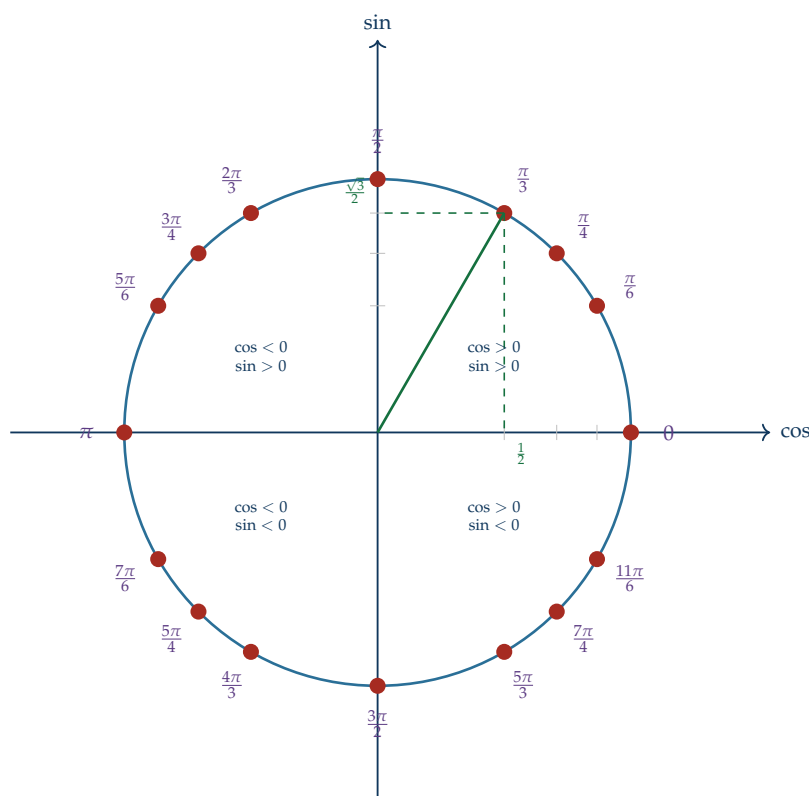


Figure 7.1 — Le cercle trigonométrique complet. Abscisse = cos, ordonnée = sin : tout le reste s'en déduit. Les seize points marqués suffisent pour la totalité des exercices de TCS.

★ LES VALEURS REMARQUABLES

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

ASTUCE 7.1 — La règle du $\frac{\sqrt{n}}{2}$: n'apprenez plus rien par cœur

Écrivez sous les angles $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ les nombres $0, 1, 2, 3, 4$; prenez la racine, divisez par 2 : vous obtenez la ligne des **sinus**. Lue à l'envers $(4, 3, 2, 1, 0)$, la même règle donne la ligne des **cosinus**. **Contrôle mental** : quand x augmente de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le sinus *augmente* de 0 à 1 et le cosinus *diminue* de 1 à 0 . Un tableau écrit dans le mauvais sens se repère instantanément.

✗ PIÈGE 7.1 — Confondre $\sin^2 x$ et $\sin(x^2)$

$\sin^2 x$ est une **notation abrégée** de $(\sin x)^2$: on calcule d'abord le sinus, puis on élève au carré. Ce n'est pas $\sin(x^2)$.

Avec $x = \frac{\pi}{2}$: $\sin^2 x = 1$ alors que $\sin(x^2) = \sin\left(\frac{\pi^2}{4}\right) \approx 0,62$.

✗ PIÈGE 7.2 — $\cos(a+b) = \cos a + \cos b$

✗ Avec $a = b = \frac{\pi}{3}$: le membre de droite donnerait 1 , alors que $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

✓ Le cosinus n'est pas linéaire. Utilisez les formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Mnémotechnique : le cosinus « mélange les mêmes » avec un signe *contraire* ; le sinus « croise » avec le *même* signe.

7.2 Les angles associés : une figure, pas vingt formules

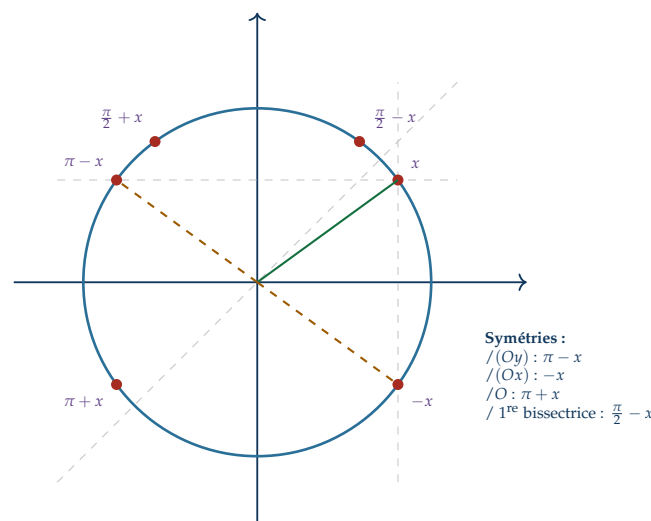


Figure 7.2 — Chaque « angle associé » est l'image de $M(x)$ par une symétrie simple. Il suffit de regarder si l'abscisse et l'ordonnée changent de signe ou s'échangent.

★ LE TABLEAU DES ANGLES ASSOCIÉS

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
cos	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
sin	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
tan	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$-\frac{1}{\tan x}$

ASTUCE 7.2 — Retrouver n'importe quelle ligne en trois secondes

1. **Y a-t-il un $\frac{\pi}{2}$?** Si oui, cos et sin **s'échangent**. Sinon, ils restent.
2. **Quel est le signe ?** Placez x dans le premier quadrant (petit angle positif), repérez le quadrant de l'angle associé, et lisez le signe du cosinus / du sinus dans ce quadrant.

Exemple : $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$ — il y a un $\frac{\pi}{2}$ donc on passe au cosinus ; $\frac{\pi}{2} + x$ est dans le *deuxième* quadrant où le sinus est positif ; donc $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = +\cos x$. ✓

EXERCICE 7.1 (★★ — simplification d'expression)

Simplifier, pour tout réel x :

$$A = \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(-x) + \sin(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Solution détaillée. On traite chaque terme séparément, en s'appuyant sur le tableau :

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

En sommant :

$$A = -\cos x + \cos x + \cos x - \sin x + \cos x = 2\cos x - \sin x.$$

Contrôle numérique (indispensable) : pour $x = 0$, l'expression initiale vaut $-1 + 1 + 1 + 0 + 1 = 2$, et $2\cos 0 - \sin 0 = 2$. ✓ ■

7.3 Résoudre une équation trigonométrique

★ LES TROIS ÉQUATIONS DE BASE

$$\begin{aligned} \cos x = \cos a &\iff \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} & \sin x = \sin a &\iff \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \\ \tan x = \tan a &\iff x = a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Condition d'existence : $\cos x = m$ ou $\sin x = m$ n'a de solution que si $-1 \leq m \leq 1$.

ASTUCE 7.3 — Se souvenir de la deuxième famille : lire le cercle

Ne mémorisez pas $-a$ et $\pi - a$: **dessinez**.

- $\cos x = m$: on cherche les points d'abscisse m — une **droite verticale** coupe le cercle en deux points symétriques par rapport à (Ox) , d'où $\pm a$.
- $\sin x = m$: on cherche les points d'ordonnée m — une **droite horizontale** coupe le cercle en deux points symétriques par rapport à (Oy) , d'où a et $\pi - a$.

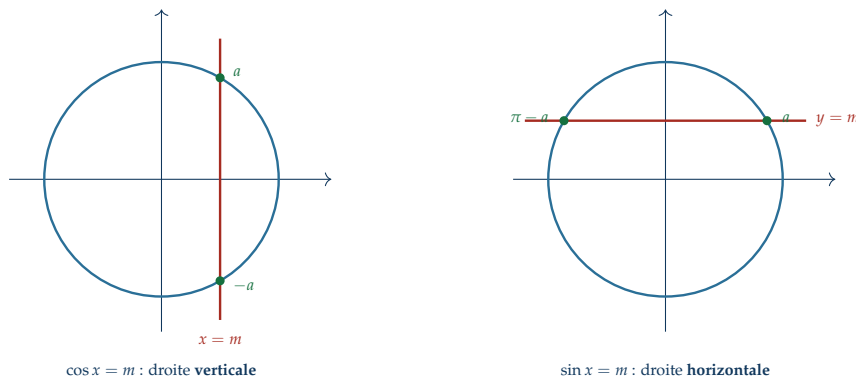


Figure 7.3 — La forme de la deuxième solution ($-a$ ou $\pi - a$) n'est pas à apprendre : elle se lit sur la symétrie de la figure.

❌ PIÈGE 7.3 — Oublier « $+2k\pi$ » ou oublier la seconde famille

❌ « $\cos x = \frac{1}{2}$ donc $x = \frac{\pi}{3}$ ».

✓ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Si l'énoncé demande les solutions dans un intervalle donné, par exemple $[0; 2\pi[$, on fait varier k : $x = \frac{\pi}{3}$ ($k = 0$) et $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ ($k = 1$). Deux solutions.

🔑 MÉTHODE — Équation du second degré en cos ou sin

1. **Homogénéiser** : s'il y a à la fois des $\cos^2$ et des $\sin^2$, remplacer $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ pour n'avoir qu'une seule fonction.
2. **Poser** $X = \cos x$ (ou $\sin x$) avec la contrainte $-1 \leq X \leq 1$.
3. Résoudre le trinôme en X et **éliminer les racines hors de** $[-1; 1]$.
4. Revenir à x et donner *toutes* les familles de solutions.
5. Si un intervalle est imposé, faire varier k et ne garder que ce qui convient.

EXERCICE 7.2 (★★★ — équation du second degré en cos)

Résoudre dans $[0; 2\pi[$: $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Solution détaillée. Homogénéisation. On remplace $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0 \iff -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \iff 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

Changement d'inconnue. Posons $X = \sin x$ avec $X \in [-1; 1]$:

$$2X^2 - X - 1 = 0.$$

Astuce des coefficients : $2 - 1 - 1 = 0$, donc $X = 1$ est racine, et l'autre est $\frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$. Les deux valeurs appartiennent à $[-1; 1]$: on les garde toutes les deux.

Retour à x .

- $\sin x = 1$: le seul point du cercle d'ordonnée 1 est $\frac{\pi}{2}$. Donc $x = \frac{\pi}{2}$.
- $\sin x = -\frac{1}{2}$: on connaît $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, donc $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$. Dans $[0; 2\pi[$: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.

Conclusion : $S = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$.

Vérification sur $x = \frac{7\pi}{6}$: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\cos^2 x = \frac{3}{4}$, et $2 \times \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$ ✓.

EXERCICE 7.3 (*** — argument composé et intervalle imposé)

Résoudre dans $] -\pi; \pi]$: $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solution détaillée. Étape 1 : identifier l'angle de référence. $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$.

Étape 2 : écrire les deux familles — sans toucher à l'argument pour l'instant :

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Étape 3 : isoler x .

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \implies x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \\ 2x &= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \implies x = \frac{\pi}{12} + k\pi. \end{aligned}$$

Attention : en divisant par 2, le terme $2k\pi$ devient $k\pi$ — c'est l'erreur numéro un sur ce type d'exercice.

Étape 4 : balayer k pour rester dans $] -\pi; \pi]$.

- $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$: $k = 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ✓ ; $k = -1 \rightarrow -\frac{3\pi}{4}$ ✓ ; $k = 1 \rightarrow \frac{5\pi}{4} > \pi$ ✗.
- $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$: $k = 0 \rightarrow \frac{\pi}{12}$ ✓ ; $k = -1 \rightarrow -\frac{11\pi}{12}$ ✓ ; $k = 1 \rightarrow \frac{13\pi}{12} > \pi$ ✗.

Conclusion : $S = \left\{ -\frac{11\pi}{12}; -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4} \right\}$. ■

7.4 Inéquations trigonométriques**MÉTHODE** — Résoudre $\cos x \geq m$ ou $\sin x \leq m$

1. Tracer le cercle et la droite (*verticale* pour le cosinus, *horizontale* pour le sinus).
2. Marquer les deux points d'intersection et leurs angles.
3. **Colorier l'arc** qui satisfait l'inégalité (à droite / à gauche de la verticale ; au-dessus / en dessous de l'horizontale).
4. Lire l'intervalle en **parcourant le cercle dans le sens direct**, en partant de la borne qui permet un intervalle « d'un seul tenant ».

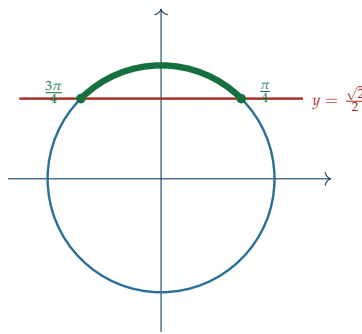
EXERCICE 7.4 (** — inéquation sur le cercle)

Résoudre dans $[0; 2\pi[$: $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solution détaillée. Les solutions de $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0; 2\pi[$ sont $\frac{\pi}{4}$ et $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

La condition $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ signifie que le point $M(x)$ est *au-dessus* de la droite horizontale $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$: c'est l'arc **supérieur**, parcouru de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{3\pi}{4}$.

$$S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right].$$



Piège fréquent : écrire $S = \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right]$ ou réunir deux morceaux. Un coup d'œil à l'arc colorié règle la question. ■

ASTUCE 7.4 — Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, donc

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

De même $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. **Contrôle :** $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \approx 0,966$, proche de 1 — cohérent pour un angle de 15° . Vérifiez toujours l'ordre de grandeur.

✗ PIÈGE 7.4 — $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$

✓ $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$.

La simplification en $\cos x$ n'est licite que si l'on sait que $\cos x \geq 0$, c'est-à-dire si x appartient au premier ou au quatrième quadrant. Un énoncé qui précise « $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ » attend justement $-\cos x$.

Statistiques

■ COURS EXPRESS

Série de N valeurs $x_1, \dots, x_p$ d'effectifs $n_1, \dots, n_p$ (avec $\sum n_i = N$) :

- **Fréquence** : $f_i = \frac{n_i}{N}$, et $\sum f_i = 1$ (contrôle systématique).
- **Moyenne** : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i = \sum_{i=1}^p f_i x_i$.
- **Médiane** M_e : valeur qui partage la série ordonnée en deux moitiés d'effectifs égaux.
- **Variance** : $V = \frac{1}{N} \sum n_i (x_i - \bar{x})^2$; **écart-type** : $\sigma = \sqrt{V}$.
- **Formule de König** (la seule à utiliser en pratique) : $V = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$

ASTUCE 8.1 — König : une colonne au lieu de deux passages

Le calcul direct de V oblige à calculer d'abord $\bar{x}$, puis à revenir sur toute la série pour les écarts. Avec König, on remplit *en une seule fois* un tableau à trois colonnes $n_i, n_i x_i, n_i x_i^2$, puis :

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N}, \quad V = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2.$$

Contrôle d'erreur gratuit : si vous trouvez $V < 0$, le calcul est faux — une variance est toujours positive ou nulle.

✗ PIÈGE 8.1 — La moyenne des moyennes

Une classe A de 30 élèves a 12 de moyenne ; une classe B de 20 élèves a 15.

✗ Moyenne globale = $\frac{12 + 15}{2} = 13,5$.

✓ Il faut **pondérer par les effectifs** :

$$\bar{x} = \frac{30 \times 12 + 20 \times 15}{50} = \frac{360 + 300}{50} = 13,2.$$

La moyenne simple n'est correcte que si les deux groupes ont le même effectif.

✗ PIÈGE 8.2 — Confondre effectif et fréquence

n_i est un **nombre d'individus** (entier) ; f_i est une **proportion** (entre 0 et 1, ou en %). Une fréquence de 0,25 ne signifie pas 25 individus. Vérifiez toujours que $\sum f_i = 1$: c'est le test qui détecte une erreur de recopie.

8.1 Séries groupées en classes

☞ MÉTHODE — Traiter une série en classes $[a_i; a_{i+1}[$

1. Remplacer chaque classe par son **centre** $c_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$.
2. Appliquer les formules usuelles avec les c_i : la moyenne et la variance obtenues sont des *approximations* (on suppose les valeurs uniformément réparties dans chaque classe).
3. Pour la médiane : construire les **effectifs cumulés croissants**, repérer la classe qui contient $\frac{N}{2}$, puis **interpoler linéairement** à l'intérieur de cette classe.

ASTUCE 8.2 — Interpolation linéaire pour la médiane : la règle de trois

Si la classe médiane est $[a; b[$, avec E_a effectifs cumulés avant a et E_b après b :

$$M_e = a + (b - a) \times \frac{\frac{N}{2} - E_a}{E_b - E_a}.$$

Lecture : on avance dans la classe proportionnellement au nombre d'individus qu'il reste à « consommer » pour atteindre la moitié de l'effectif.

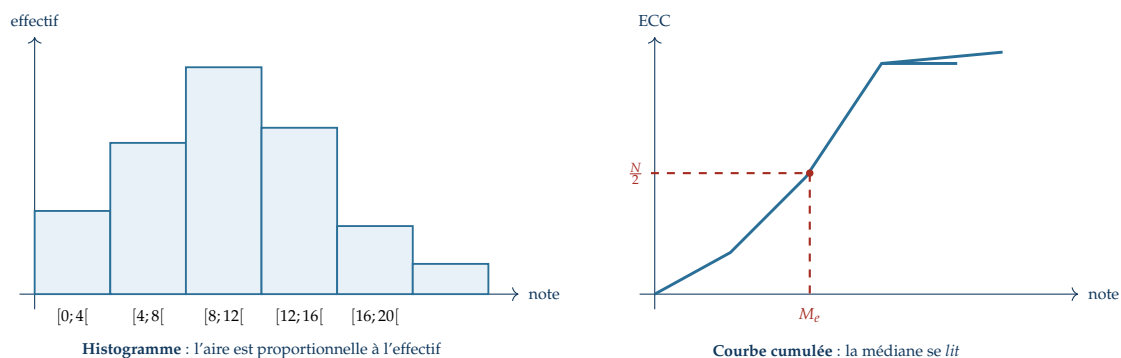


Figure 8.1 — Deux graphiques, deux usages : l'histogramme montre la forme de la distribution, la courbe des effectifs cumulés croissants (ECC) donne médiane et quartiles par simple lecture.

✗ PIÈGE 8.3 — Histogramme à classes d'amplitudes inégales

✗ Tracer des rectangles dont la *hauteur* est l'effectif quand les classes n'ont pas la même largeur : le graphique devient mensonger.

✓ C'est l'*aire* qui doit être proportionnelle à l'effectif. On trace donc en hauteur la *densité* $\frac{n_i}{\text{amplitude}}$. Une classe deux fois plus large avec le même effectif doit être deux fois moins haute.

EXERCICE 8.1 (★★★ — série complète)

Les notes d'une classe de 40 élèves sont regroupées ainsi :

Classe	$[0; 4[$	$[4; 8[$	$[8; 12[$	$[12; 16[$	$[16; 20[$
Effectif	4	9	14	10	3

1. Calculer la moyenne et l'écart-type (arrondi à 0,01).
2. Déterminer la médiane par interpolation linéaire.
3. Le professeur ajoute 1 point à chaque élève, puis multiplie toutes les notes par $\frac{20}{21}$. Que deviennent la moyenne et l'écart-type ?

Solution détaillée. 1. Centres : 2, 6, 10, 14, 18. On dresse le tableau de König.

c_i	2	6	10	14	18	Total
n_i	4	9	14	10	3	40
$n_i c_i$	8	54	140	140	54	396
$n_i c_i^2$	16	324	1400	1960	972	4672

$$\bar{x} = \frac{396}{40} = 9,9; \quad V = \frac{4672}{40} - 9,9^2 = 116,8 - 98,01 = 18,79; \quad \sigma = \sqrt{18,79} \approx 4,33.$$

2. Effectifs cumulés croissants : 4 ; 13 ; 27 ; 37 ; 40. On cherche le rang $\frac{N}{2} = 20$: il est atteint dans la classe $[8; 12[$ (car $13 < 20 \leq 27$).

$$M_e = 8 + 4 \times \frac{20 - 13}{27 - 13} = 8 + 4 \times \frac{7}{14} = 8 + 2 = 10.$$

3. Notons $y = \frac{20}{21}(x + 1) = \frac{20}{21}x + \frac{20}{21}$. Les règles de transformation affine $y = ax + b$ sont :

$$\bar{y} = a\bar{x} + b, \quad \sigma_y = |a| \sigma_x.$$

(Ajouter une constante décale la série sans changer sa dispersion ; multiplier dilate les deux.)

$$\bar{y} = \frac{20}{21} \times 9,9 + \frac{20}{21} = \frac{20}{21} \times 10,9 \approx 10,38; \quad \sigma_y = \frac{20}{21} \times 4,33 \approx 4,12.$$

ASTUCE 8.3 — Le changement d'origine pour alléger les calculs

Si les valeurs sont grandes et régulièrement espacées, posez $u_i = \frac{x_i - x_0}{h}$ (x_0 = valeur centrale, h = pas). Calculez $\bar{u}$ et σ_u sur des petits entiers, puis revenez : $\bar{x} = x_0 + h\bar{u}$ et $\sigma_x = h\sigma_u$.
Sur la série 1000, 1010, 1020, 1030 : avec $x_0 = 1015$ et $h = 5$, on travaille sur $-3, -1, 1, 3$. Le calcul mental devient possible.

❌ PIÈGE 8.4 — L'écart-type n'a pas la même unité que la variance

Si les données sont en centimètres, la variance est en cm^2 et l'écart-type en cm. C'est pourquoi on préfère l'écart-type pour *commenter* une dispersion : il se compare directement à la moyenne.
Interprétation utile : dans une série usuelle, l'intervalle $[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma]$ contient la majorité des valeurs. Deux séries de même moyenne mais d'écart-types 1 et 6 n'ont rien à voir.

EXERCICE 8.2 (★★ — retrouver une donnée manquante)

Une série de 5 valeurs entières a pour moyenne 7, pour médiane 6 et pour étendue 10. La plus petite valeur est 3. Déterminer une telle série, puis dire si elle est unique.

Solution détaillée. Notons la série ordonnée $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$.

- Étendue = $x_5 - x_1 = 10$ et $x_1 = 3$, donc $x_5 = 13$.
 - Médiane (série de 5 valeurs, effectif impair) = $x_3 = 6$.
 - Moyenne : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \times 7 = 35$, donc $3 + x_2 + 6 + x_4 + 13 = 35$, soit $x_2 + x_4 = 13$.
- Avec les contraintes $3 \leq x_2 \leq 6$ et $6 \leq x_4 \leq 13$:

$$(x_2, x_4) \in \{(3, 10), (4, 9), (5, 8), (6, 7)\}.$$

Il y a donc **quatre** séries possibles, par exemple 3, 5, 6, 8, 13. **La série n'est pas unique** : moyenne, médiane et étendue ne suffisent jamais à reconstituer une série.

Partie II

Géométrie

Le calcul vectoriel dans le plan

■ COURS EXPRESS

- Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par une **direction**, un **sens** et une **longueur**. Deux vecteurs sont égaux s'ils ont ces trois caractéristiques identiques (le point d'application ne compte pas).
- **Relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ — valable pour *tous* points A, B, C .
- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- **Colinéarité** : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$) sont colinéaires $\iff$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k \vec{v}$.
- En coordonnées, $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires $\iff \boxed{xy' - x'y = 0}$ (déterminant nul).
- I milieu de $[AB]$ $\iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \iff \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

★ DANS UN REPÈRE $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Pour $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad I_{[AB]} \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}, \quad k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}, \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

✗ PIÈGE 9.1 — Le sens de la soustraction des coordonnées

$$\text{✗ } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}.$$

✓ **Arrivée moins départ** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, donc on soustrait les coordonnées de A à celles de B .

Vérification instantanée : avec $A(0;0)$ et $B(3;1)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ doit valoir $(3;1)$ — si votre formule donne $(-3; -1)$, elle est inversée.

✗ PIÈGE 9.2 — Écrire $\overrightarrow{AB} = AB$ ou « diviser par un vecteur »

✗ $\overrightarrow{AB} = 5$: un vecteur n'est pas un nombre. On écrit $AB = 5$ (longueur) ou $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$.

✗ $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = 2$: la division par un vecteur n'existe pas.

✓ On écrit $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, ce qui signifie que B est l'image de C dans l'homothétie de centre A et de rapport 2 — et qui traduit à la fois l'alignement et le rapport de longueurs.

9.1 Chasles : l'outil qui débloquent tout

ASTUCE 9.1 — Insérer un point pour tout ramener à une origine commune

La technique universelle : **choisir un point de référence** (souvent A , ou O) et *insérer* ce point dans tous les vecteurs :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}.$$

Toute relation vectorielle se réécrit alors avec deux vecteurs de base seulement, et l'exercice devient un calcul algébrique.

MÉTHODE — Démontrer que trois points A, B, C sont alignés

1. **Sans repère** : exprimer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de deux vecteurs de base (par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ d'un parallélogramme), puis montrer que $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$.
2. **Avec repère** : calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis vérifier que le déterminant $xy' - x'y$ est nul.

Toujours partir du même point (A ici) : comparer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ fonctionne aussi, mais mélanger $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CA}$ multiplie les erreurs de signe.

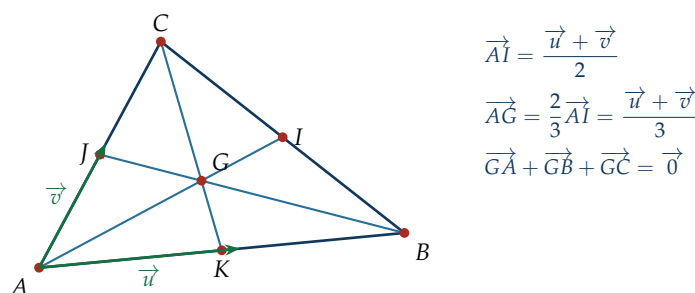


Figure 9.1 — Le triangle et son centre de gravité. Toute la configuration s'exprime avec deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$: c'est le principe de la décomposition dans une base.

EXERCICE 9.1 (*** — alignement sans repère)

Soit ABC un triangle. On définit les points M, N et P par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA}.$$

1. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
2. Les points M, N, P sont-ils alignés ?
3. Montrer que les triangles ABC et MNP ont le même centre de gravité.

Solution détaillée. 1. On ramène tout au point A .

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \vec{u}.$$

Pour N : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \vec{u} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u}$, donc

$$\overrightarrow{AN} = \vec{u} + \frac{1}{3}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{2}{3} \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{v}.$$

Pour P : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = \vec{v} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CA} = \vec{v} - \frac{1}{3} \vec{v} = \frac{2}{3} \vec{v}$.

D'où

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{v} = \frac{1}{3} \vec{u} + \frac{1}{3} \vec{v},$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \frac{2}{3}\overrightarrow{v}.$$

2. Cherchons k tel que $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MN}$: il faudrait $-\frac{1}{3} = \frac{k}{3}$ (coordonnée sur $\overrightarrow{u}$) donc $k = -1$, et simultanément $\frac{2}{3} = \frac{k}{3}$ donc $k = 2$. **Contradiction.** Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires (ce sont deux côtés d'un vrai triangle), la décomposition est unique : les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas colinéaires. **Les points M, N, P ne sont pas alignés** — ils forment bien un triangle.

3. Soit G le centre de gravité de ABC et G' celui de MNP . On utilise la caractérisation $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$. De même,

$$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \frac{2}{3}\overrightarrow{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{v} + \frac{2}{3}\overrightarrow{v}\right) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).$$

Donc $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG'}$, c'est-à-dire $G = G'$. ■

Ce qu'il faut retenir : l'unicité de la décomposition dans une base ($x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{u} + y'\overrightarrow{v} \Rightarrow x = x'$ et $y = y'$) est l'argument qui permet d'identifier les coefficients. C'est l'équivalent vectoriel de l'identification des polynômes.

❌ PIÈGE 9.3 — Identifier les coefficients avec une base... qui n'en est pas une

L'implication « $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow x = y = 0$ » n'est valable que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **non colinéaires**. Si $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u}$, alors $2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ avec des coefficients non nuls. **Vérifiez toujours** que vos deux vecteurs de référence ne sont pas colinéaires avant d'identifier — en pratique, dites : « ABC est un triangle, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ».

EXERCICE 9.2 (★★★ — avec un repère)

Dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne $A(-1; 2)$, $B(3; 0)$ et $C(5; -1)$.

1. Les points A, B, C sont-ils alignés ?
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.
3. Déterminer m pour que les points A, B et $E(m; m - 4)$ soient alignés.

Solution détaillée. 1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \times (-3) - 6 \times (-2) = -12 + 12 = 0.$$

Le déterminant est nul : **les trois points sont alignés** (on a d'ailleurs $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$).

2. **Attention à l'ordre des lettres** : dans le parallélogramme $ABDC$, les côtés sont $[AB]$, $[BD]$, $[DC]$, $[CA]$. La condition est donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - 5 \\ y_D + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_D = 9, y_D = -3.$$

Donc $D(9; -3)$. *Contrôle par les diagonales* : dans $ABDC$, les diagonales sont $[AD]$ et $[BC]$; leurs milieux doivent coïncider. Milieu de $[AD]$: $\left(\frac{-1+9}{2}; \frac{2-3}{2}\right) = (4; -0,5)$; milieu de $[BC]$: $\left(\frac{3+5}{2}; \frac{0-1}{2}\right) = (4; -0,5)$. ✓

3. $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} m+1 \\ m-6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. L'alignement équivaut à

$$(m+1) \times (-2) - 4 \times (m-6) = 0 \iff -2m - 2 - 4m + 24 = 0 \iff -6m + 22 = 0 \iff m = \frac{11}{3}.$$

✗ PIÈGE 9.4 — $ABCD$ parallélogramme $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

✗ Dans $ABCD$ (dans cet ordre), la relation correcte est $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, pas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (qui donnerait un parallélogramme croisé).

✓ **Méthode sûre** : « $ABCD$ est un parallélogramme » $\iff$ « les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu ». Cette caractérisation ne dépend d'aucune convention d'orientation et se calcule en trois secondes.

ASTUCE 9.2 — Lire un rapport de longueurs sur une relation vectorielle

$\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbb{R}$ signifie :

- $M \in (AB)$ (alignement automatique) ;
- $AM = |k| \times AB$;
- $M \in [AB]$ si et seulement si $0 \leq k \leq 1$;
- M est du côté opposé à B si $k < 0$.

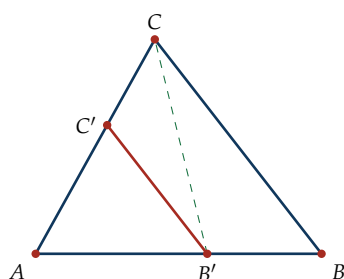
Ainsi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ place M au *premier tiers* en partant de A — et non au tiers en partant de B , confusion très fréquente sur les figures.

La projection dans le plan

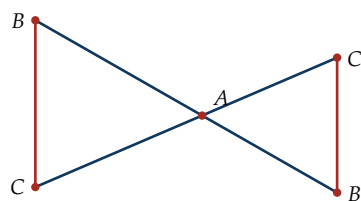
■ COURS EXPRESS

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes. La **projection sur (D) parallèlement à (Δ)** associe à tout point M le point M' intersection de (D) et de la parallèle à (Δ) passant par M .

- Elle **conserve** : l'alignement, le milieu, les rapports de mesures algébriques, le parallélisme, le barycentre.
- Elle **ne conserve pas** : les longueurs, les angles, la perpendicularité (sauf cas particulier de la projection orthogonale).
- **Théorème de Thalès** : si $(BC) \parallel (B'C')$ avec A, B, B' et A, C, C' alignés, alors $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$.



Configuration « triangle »



Configuration « papillon »

Figure 10.1 — Les deux configurations de Thalès. Dans le papillon, les rapports sont les mêmes, mais les mesures algébriques sont de signes opposés : c'est pourquoi on écrit $\overline{AB}$ (avec barre) et non AB dès qu'on travaille sur une droite orientée.

10.1 Écrire les rapports sans se tromper

🔑 MÉTHODE — La règle du « même trajet »

Pour écrire correctement les égalités de Thalès :

1. Repérer le **sommet commun** (A dans la figure).
2. Sur chaque droite, écrire le rapport en partant *toujours* du sommet : $\frac{AB'}{AB}$ et $\frac{AC'}{AC}$ — jamais $\frac{AB'}{B'B}$.
3. Le troisième rapport, celui des *segments parallèles*, se place en dernier : $\frac{B'C'}{BC}$, avec les lettres « primées » au numérateur, comme les deux autres.

Contrôle : les trois numérateurs concernent le *petit* triangle, les trois dénominateurs le *grand*. Si un rapport est « à l'envers » par rapport aux autres, il y a erreur.

✗ **PIÈGE 10.1** — Utiliser $\frac{AB'}{B'B}$ dans l'égalité de Thalès

✗ $\frac{AB'}{B'B} = \frac{B'C'}{BC}$: c'est faux.

✓ $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$. Le rapport $\frac{AB'}{B'B}$ est bien égal à $\frac{AC'}{C'C}$ (les deux droites sont coupées de la même façon), mais il ne peut pas être comparé au rapport des côtés parallèles.

✗ PIÈGE 10.2 — Appliquer la réciproque sans vérifier l'ordre des points

La réciproque de Thalès exige que A, B, B' d'une part et A, C, C' d'autre part soient alignés **dans le même ordre** (ou, en langage vectoriel, que $\overrightarrow{AB'} = k \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = k \overrightarrow{AC}$ avec *le même* k , signe compris).

Si les rapports sont égaux en valeur absolue mais que les points sont disposés en sens contraires, les droites ne sont pas parallèles.

Rédaction sûre : passez par les vecteurs. Montrer $\overrightarrow{B'C'} = k \overrightarrow{BC}$ prouve le parallélisme sans aucune discussion de configuration.

ASTUCE 10.1 — Thalès en version vectorielle : plus courte et sans piège

Au lieu de manipuler des rapports de longueurs, écrivez :

$$\overrightarrow{AB'} = k \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC'} = k \overrightarrow{AC} \implies \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'} = k (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = k \overrightarrow{BC}.$$

Trois lignes, aucune configuration à discuter, et l'on obtient *à la fois* le parallélisme et le rapport de longueurs. **C'est la rédaction à privilégier au Tronc Commun.**

10.2 La droite des milieux et ses conséquences

★ TROIS ÉNONCÉS ÉQUIVALENTS

Dans un triangle ABC , soit I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$:

$$(IJ) \parallel (BC) \quad \text{et} \quad IJ = \frac{BC}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}.$$

Réciproque : la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un deuxième côté coupe le troisième en son milieu.

EXERCICE 10.1 (★★★ — le théorème de Varignon)

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque (non croisé). On note I, J, K, L les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.
3. Que devient $IJKL$ si les diagonales de $ABCD$ ont la même longueur ? si elles sont perpendiculaires ?

Solution détaillée. 1. Dans le triangle ABC , I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$: d'après le théorème de la droite des milieux, $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.

Dans le triangle ACD , L est le milieu de $[AD]$ et K celui de $[DC]$; le même théorème donne $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.

Rédaction vectorielle équivalente, sans invoquer de théorème :

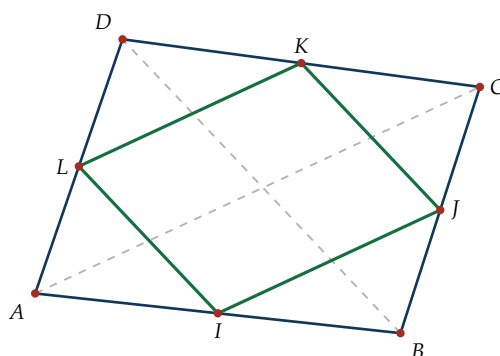
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \right) - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}.$$

2. On a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$, donc $IJKL$ est un **parallélogramme** (un quadrilatère dont deux côtés opposés sont

représentés par le même vecteur). Ce résultat est le **théorème de Varignon** : il est vrai pour *n'importe quel* quadrilatère, même non convexe.

3. Par le même raisonnement dans les triangles ABD et CBD , on obtient $\vec{IL} = \frac{1}{2}\vec{BD}$. Ainsi les côtés de $IJKL$ sont parallèles aux diagonales de $ABCD$ et mesurent la moitié de leur longueur.

- Si $AC = BD$: alors $IJ = IL$, le parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux : **$IJKL$ est un losange**.
- Si $(AC) \perp (BD)$: alors $(IJ) \perp (IL)$: **$IJKL$ est un rectangle**.
- Si les deux conditions sont réunies : **$IJKL$ est un carré**.



$IJKL$: toujours un parallélogramme

ses côtés sont parallèles aux diagonales

Figure 10.2 — Le théorème de Varignon. La figure de départ peut être quelconque : c'est ce qui rend le résultat surprenant et très souvent utilisé en exercice.

EXERCICE 10.2 (★★ — calcul de longueur par Thalès)

Dans un triangle ABC , un point M de $[AB]$ vérifie $AM = 4$ et $MB = 6$. La parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N . On donne $BC = 15$.

1. Calculer MN .
2. Sachant que $AC = 12,5$, calculer NC .
3. Comparer les aires des triangles AMN et ABC .

Solution détaillée. 1. $AB = AM + MB = 10$, et le rapport de réduction est $k = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = 0,4$. Thalès donne $\frac{MN}{BC} = k$, donc $MN = 0,4 \times 15 = 6$.

2. $\frac{AN}{AC} = k$ donne $AN = 0,4 \times 12,5 = 5$, puis $NC = AC - AN = 12,5 - 5 = 7,5$.

3. Les triangles AMN et ABC sont *semblables* de rapport $k = 0,4$. Les aires sont dans le rapport k^2 :

$$\frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(ABC)} = k^2 = 0,16.$$

L'aire du petit triangle représente donc 16 % de celle du grand.

Piège classique : beaucoup répondent 40 %. Les longueurs sont multipliées par k , les aires par k^2 , les volumes par k^3 .

❌ PIÈGE 10.3 — Croire que la projection conserve les longueurs

❌ « M' est le projeté de M , donc $M'N' = MN$ ».

✓ Une projection ne conserve les longueurs que si la direction de projection est parallèle à la droite (MN) ... ce qui est un cas dégénéré. En revanche, elle conserve **toujours** les *rapports* de longueurs sur une même droite : c'est précisément ce qu'affirme Thalès, et c'est ce qui rend la projection utile.

La droite dans le plan : étude analytique

■ COURS EXPRESS

- **Équation cartésienne** : toute droite admet une équation $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Un **vecteur directeur** est alors $\vec{u}(-b; a)$.
- **Équation réduite** : $y = mx + p$ pour toute droite *non verticale* ; m est le **coefficient directeur**, p l'**ordonnée à l'origine**.
- Une droite verticale a pour équation $x = k$: elle **n'a pas** de coefficient directeur.
- $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (si $x_A \neq x_B$).
- Deux droites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont **parallèles** $\iff m = m'$, et **sécantes** $\iff m \neq m'$.
- Avec des équations cartésiennes : $(D) \parallel (D') \iff ab' - a'b = 0$.

★ PASSER D'UNE FORME À L'AUTRE

$$ax + by + c = 0 \xrightarrow{b \neq 0} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad \text{donc} \quad m = -\frac{a}{b}.$$

$$\vec{u}(\alpha; \beta) \text{ directeur} \implies m = \frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0) \quad y = mx + p \implies \vec{u}(1; m).$$

Droite passant par $A(x_A; y_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta)$:

$$M(x; y) \in (D) \iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \iff \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0.$$

ASTUCE 11.1 — Le vecteur directeur en une seconde

À partir de $ax + by + c = 0$: on prend les coefficients a et b , on les **échange** et on **change un signe** : $\vec{u}(-b; a)$.

Pour $3x - 2y + 7 = 0$: $\vec{u}(2; 3)$. **Vérification** : le coefficient directeur doit être $m = \frac{3}{2}$, et effectivement $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$. ✓

Ne confondez pas avec le vecteur $\vec{n}(a; b)$, qui est **normal** (perpendiculaire) à la droite — voir chapitre 12.

✗ PIÈGE 11.1 — Oublier la droite verticale

✗ « Toute droite s'écrit $y = mx + p$ ».

✓ La droite $x = 3$ n'a pas d'équation de cette forme. Dans un exercice avec paramètre, c'est presque toujours le cas particulier oublié.

Réflexe : si l'énoncé donne deux points A et B , commencez par vérifier si $x_A = x_B$. Si oui, la réponse est $x = x_A$ et le calcul de m est impossible (division par zéro).

✗ PIÈGE 11.2 — Calculer m à l'envers

✗ $m = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$.

✓ $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$: le coefficient directeur mesure « de combien on monte quand on avance de 1 ».

Contrôle graphique systématique : si la droite *monte* de gauche à droite, $m > 0$; si elle *descend*, $m < 0$. Un signe faux se détecte en un coup d'œil sur la figure.

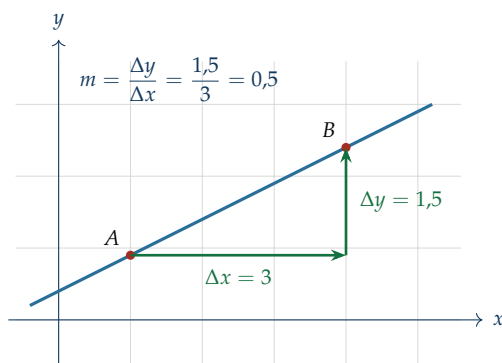


Figure 11.1 — Le coefficient directeur se lit sur un « escalier » : on avance horizontalement, on mesure la montée. Il ne dépend pas des deux points choisis.

11.1 Trouver l'équation d'une droite

MÉTHODE — Trois situations, trois départs

- (a) **Deux points A et B** : calculer m , puis déterminer p en écrivant que A appartient à la droite ($y_A = mx_A + p$).
- (b) **Un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$** : utiliser le déterminant $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$ — méthode qui fonctionne *aussi* pour les droites verticales.
- (c) **Un point A et une droite parallèle (D')** : reprendre le coefficient directeur de (D') et appliquer (a).

ASTUCE 11.2 — La méthode du déterminant : universelle

Pour la droite passant par $A(2; -1)$ et $B(2; 5)$: $\overrightarrow{AB}(0; 6)$, et pour $M(x; y)$,

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (x - 2) \times 6 - 0 \times (y + 1) = 6(x - 2) = 0 \iff x = 2.$$

La méthode donne *d'elle-même* la droite verticale, sans cas particulier à traiter. C'est pourquoi il faut la préférer dès qu'un paramètre apparaît.

EXERCICE 11.1 (*** — famille de droites et point fixe)

Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère la droite (D_m) d'équation

$$(m + 1)x - (m - 2)y + 3m = 0.$$

- Vérifier que (D_m) est bien une droite pour toute valeur de m .
- Déterminer m pour que (D_m) soit parallèle à la droite $(\Delta) : 2x - y + 5 = 0$.
- Déterminer m pour que (D_m) passe par le point $A(1; 2)$.
- Montrer que toutes les droites (D_m) passent par un même point fixe Ω que l'on déterminera.

Solution détaillée. 1. Il faut $(a, b) \neq (0, 0)$, c'est-à-dire $(m + 1; -(m - 2)) \neq (0; 0)$. Or $m + 1 = 0$ donne $m = -1$, et $m - 2 = 0$ donne $m = 2$: ces deux valeurs ne sont jamais atteintes simultanément. Donc, pour tout m , l'un au moins des deux coefficients est non nul : (D_m) est toujours une droite.

2. Un vecteur directeur de (D_m) est $\vec{u}(m - 2; m + 1)$ (règle : $(-b; a)$ avec $b = -(m - 2)$ et $a = m + 1$). Un

vecteur directeur de (Δ) est $\vec{v}(1;2)$. Le parallélisme équivaut à la nullité du déterminant :

$$(m-2) \times 2 - 1 \times (m+1) = 0 \iff 2m - 4 - m - 1 = 0 \iff m = 5.$$

Vérification : $(D_5) : 6x - 3y + 15 = 0$, soit $2x - y + 5 = 0$ — c'est (Δ) elle-même ! Les droites sont donc confondues, cas particulier du parallélisme qu'il convient de signaler.

3. $A(1;2) \in (D_m) \iff (m+1) \times 1 - (m-2) \times 2 + 3m = 0$, soit

$$m + 1 - 2m + 4 + 3m = 0 \iff 2m + 5 = 0 \iff m = -\frac{5}{2}.$$

4. **Technique du point fixe** : on regroupe l'équation selon les puissances de m :

$$(m+1)x - (m-2)y + 3m = 0 \iff m(x-y+3) + (x+2y) = 0.$$

Cette égalité doit être vraie pour tout m : cela impose que les deux parenthèses soient nulles simultanément.

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

De la seconde, $x = -2y$; en reportant : $-2y - y + 3 = 0$ donc $y = 1$ et $x = -2$.

$$\Omega(-2; 1)$$

Vérification : $(m+1)(-2) - (m-2)(1) + 3m = -2m - 2 - m + 2 + 3m = 0$ ✓ pour tout m . ■

Point de méthode : la technique « regrouper en m et annuler chaque bloc » est la même que l'identification des polynômes (chapitre 4). C'est un exemple typique de transfert entre chapitres.

11.2 Position relative de deux droites

★ RÉSUMÉ

Pour $(D) : ax + by + c = 0$ et $(D') : a'x + b'y + c' = 0$, on pose $\delta = ab' - a'b$.

$\delta \neq 0$	$\delta = 0$	
sécantes un point d'intersection	strictement parallèles aucun point commun (coefficients proportionnels sauf c)	confondues une infinité (proportionnalité totale)

ASTUCE 11.3 — Distinguer parallèles strictes et confondues sans calcul

Quand $\delta = 0$, testez **un seul point** : prenez un point évident de (D) et vérifiez s'il appartient à (D') . S'il y appartient, les droites sont confondues ; sinon, strictement parallèles. Un point suffit — inutile de comparer les trois coefficients.

EXERCICE 11.2 (★★ — intersection et discussion)

On considère $(D_1) : x + 2y - 3 = 0$ et $(D_2) : 2x + 4y - 6 = 0$ et $(D_3) : 2x + 4y + 1 = 0$.

1. Préciser la position relative de (D_1) et (D_2) , puis de (D_1) et (D_3) .
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (D_1) et de la droite $(D_4) : 3x - y + 2 = 0$.

Solution détaillée. 1. Pour (D_1) et (D_2) : $\delta = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$, elles sont parallèles. Le point $(3;0)$ appartient à (D_1) ($3 + 0 - 3 = 0$) ; testons-le dans (D_2) : $6 + 0 - 6 = 0$ ✓. Elles sont **confondues** (en effet (D_2) est (D_1) multipliée par 2).

Pour (D_1) et (D_3) : $\delta = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$ également. Test du point $(3;0)$ dans (D_3) : $6 + 0 + 1 = 7 \neq 0$. Elles

sont donc **strictement parallèles**.

2. $\delta = 1 \times (-1) - 3 \times 2 = -7 \neq 0$: les droites sont sécantes. On résout

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

Par combinaison : la seconde ligne multipliée par 2 donne $6x - 2y = -4$; en additionnant à la première : $7x = -1$, soit $x = -\frac{1}{7}$. Puis $y = 3x + 2 = -\frac{3}{7} + 2 = \frac{11}{7}$.

$$(D_1) \cap (D_4) = \left\{ \left(-\frac{1}{7}; \frac{11}{7} \right) \right\}$$

Vérification dans (D_1) : $-\frac{1}{7} + \frac{22}{7} - 3 = \frac{21}{7} - 3 = 0$ ✓. ■

✗ PIÈGE 11.3 — Croire qu'un système sans solution signifie une erreur de calcul

Lorsqu'on résout un système de deux équations de droites et qu'on aboutit à « $0 = 5$ », ce n'est pas une faute : cela **signifie** que les droites sont strictement parallèles. De même, « $0 = 0$ » signifie qu'elles sont confondues (une infinité de solutions).

Rédaction attendue : ne pas s'arrêter sur l'absurdité — l'interpréter géométriquement.

Le produit scalaire dans le plan

■ COURS EXPRESS — quatre expressions du même objet

1. Avec l'angle : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$, où $\theta = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.
2. En coordonnées (repère orthonormé) : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
3. Par projection : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) .
4. Par les normes : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

Propriétés : symétrie, bilinéarité, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, et surtout

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

ASTUCE 12.1 — Laquelle des quatre formules choisir ?

- Coordonnées connues → formule 2 (la plus rapide, toujours).
- Longueurs et angle connus → formule 1.
- Figure géométrique sans repère, avec des perpendiculaires apparentes → formule 3 (projection) : elle transforme un produit scalaire en produit de longueurs.
- Uniquement des longueurs (pas d'angle, pas de repère) → formule 4.

Perdre du temps vient presque toujours du choix d'une formule inadaptée, jamais du calcul lui-même.

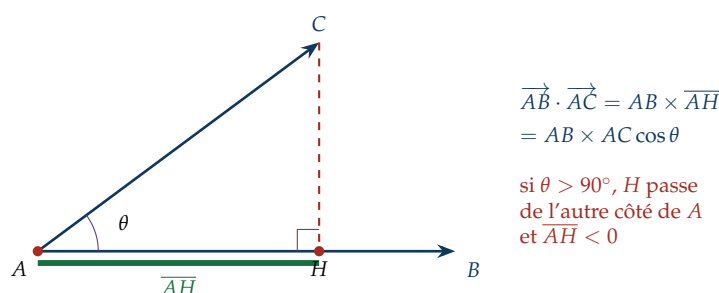


Figure 12.1 — L'interprétation par projection. La mesure algébrique $\overline{AH}$ porte le signe : c'est elle qui rend la formule valable pour un angle obtus.

✗ PIÈGE 12.1 — Oublier que le repère doit être orthonormé

La formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ n'est vraie que dans un repère **orthonormé** ($\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$).

Dans un repère quelconque, elle est fautive — de même que $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Les énoncés précisent toujours « repère orthonormé » : si cette mention est absente, c'est qu'on attend une méthode vectorielle, pas des coordonnées.

✗ PIÈGE 12.2 — Simplifier par un vecteur

✗ « $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ donc $\vec{v} = \vec{w}$ ».

✓ Faux : l'égalité signifie $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$, c'est-à-dire que $\vec{u}$ est **orthogonal** à $\vec{v} - \vec{w}$. Il existe une infinité de vecteurs $\vec{w}$ possibles.

De même, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ n'entraîne pas $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$: deux vecteurs non nuls perpendiculaires ont un produit scalaire nul. *Le produit scalaire ne se simplifie pas comme un produit de nombres.*

★ LES IDENTITÉS DE POLARISATION

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 & \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

Ce sont *exactement* les identités remarquables du chapitre 4, avec $\|\cdot\|^2$ à la place du carré.

Conséquence : $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ est faux en général (c'est le piège du « carré d'une somme »).

12.1 Al-Kashi et le théorème de la médiane

★ DEUX THÉORÈMES, UNE SEULE DÉMONSTRATION

Al-Kashi (loi des cosinus) — dans un triangle ABC , avec $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Théorème de la médiane — si I est le milieu de $[BC]$:

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Les deux se démontrent en développant $\|\vec{AB} - \vec{AC}\|^2$, respectivement $\|\vec{AB} + \vec{AC}\|^2$.

ASTUCE 12.2 — Al-Kashi contient Pythagore

Si $\hat{A} = 90^\circ$, alors $\cos \hat{A} = 0$ et la formule devient $a^2 = b^2 + c^2$.

Lecture du signe : si $\hat{A}$ est *aigu*, $\cos \hat{A} > 0$ donc $a^2 < b^2 + c^2$; si $\hat{A}$ est *obtus*, $a^2 > b^2 + c^2$. Cela donne un moyen instantané de déterminer la nature d'un triangle à partir de ses trois côtés, sans calculer aucun angle.

✗ PIÈGE 12.3 — Le signe dans Al-Kashi

✗ $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \hat{A}$.

✓ C'est un **moins**. Moyen de contrôle : le membre de droite doit se réduire à $b^2 + c^2$ quand l'angle est droit, et doit *diminuer* quand $\hat{A}$ diminue (un angle plus fermé donne un côté opposé plus court). Avec $\hat{A} = 0$, on doit obtenir $a = |b - c|$: testez, la formule avec $-2bc$ donne bien $(b - c)^2$.

EXERCICE 12.1 (★★★ — triangle en repère orthonormé)

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1;1)$, $B(5;3)$ et $C(2;6)$.

1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ de deux façons différentes, puis en déduire $\cos \hat{A}$.
2. Le triangle ABC est-il rectangle ? isocèle ?
3. Calculer son aire.

4. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A.

Solution détaillée. 1. $\vec{AB}(4;2)$ et $\vec{AC}(1;5)$.

- Par les coordonnées : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 1 + 2 \times 5 = 14$.
- Par les normes : $AB = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$, $AC = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$ et $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = (-3;3)$ donc $BC = \sqrt{18}$. La formule 4 donne

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (20 + 26 - 18) = \frac{28}{2} = 14.3$$

Puis

$$\cos \hat{A} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{14}{\sqrt{20}\sqrt{26}} = \frac{14}{\sqrt{520}} = \frac{14}{2\sqrt{130}} = \frac{7}{\sqrt{130}} \approx 0,614,$$

soit $\hat{A} \approx 52^\circ$.

2. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 14 \neq 0$: l'angle en A n'est pas droit. Testons les deux autres : $\vec{BA}(-4;-2)$ et $\vec{BC}(-3;3)$ donnent $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 12 - 6 = 6 \neq 0$; $\vec{CA}(-1;-5)$ et $\vec{CB}(3;-3)$ donnent $-3 + 15 = 12 \neq 0$. **Le triangle n'est pas rectangle.** Les longueurs $\sqrt{20}$, $\sqrt{26}$, $\sqrt{18}$ étant deux à deux distinctes, il n'est pas isocèle non plus : **il est quelconque.**

3. Aire = $\frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{1}{2} |4 \times 5 - 1 \times 2| = \frac{18}{2} = 9$. Contrôle par la formule trigonométrique : $\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \sqrt{520} \times \sin(52^\circ) \approx \frac{1}{2} \times 22,8 \times 0,79 \approx 9$. ✓

4. La hauteur issue de A est la droite passant par A et **perpendiculaire** à (BC) ; donc $\vec{BC}(-3;3)$ en est un vecteur *normal*. Pour $M(x;y)$:

$$M \in (h) \iff \vec{AM} \cdot \vec{BC} = 0 \iff -3(x-1) + 3(y-1) = 0 \iff -3x + 3y = 0 \iff y = x.$$

Vérification : A(1;1) vérifie bien $y = x$ ✓, et le vecteur directeur (1;1) de cette droite est orthogonal à (-3;3) car $-3 + 3 = 0$ ✓. ■

ASTUCE 12.3 — Vecteur normal $\leftrightarrow$ équation cartésienne : la lecture directe

Dans un repère orthonormé, la droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet

$$\vec{n}(a; b) \text{ comme vecteur } \mathbf{normal}, \quad \vec{u}(-b; a) \text{ comme vecteur } \mathbf{directeur}.$$

Donc, pour écrire l'équation d'une droite dont on connaît un point A et un vecteur normal $\vec{n}(a;b)$, il suffit d'écrire $ax + by + c = 0$ et de déterminer c en injectant les coordonnées de A. **C'est la méthode la plus rapide pour les hauteurs et les médiatrices.**

12.2 Distance d'un point à une droite, et cercles**★ FORMULES ANALYTIQUES**

Repère orthonormé, (D) : $ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0; y_0)$:

$$d(M_0, (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Cercle de centre $\Omega(\alpha; \beta)$ et de rayon R :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Cercle de diamètre [AB] : ensemble des M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

❌ PIÈGE 12.4 — Oublier la valeur absolue ou le dénominateur

❌ $d = ax_0 + by_0 + c$: une distance ne peut pas être négative.

❌ $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2}$: le dénominateur est $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Test rapide : pour la droite $x = 0$ (soit $a = 1, b = 0, c = 0$) et le point $(3; 7)$, la formule doit donner 3. Vérifiez-la sur cet exemple chaque fois que vous doutez.

EXERCICE 12.2 (*** — ensemble de points)

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1; 2)$ et $B(3; 4)$.

- Déterminer l'ensemble (E_1) des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.
- Déterminer l'ensemble (E_2) des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 30$.
- Calculer la distance du point A à la droite $(D) : 3x - 4y + 1 = 0$, puis dire si le cercle de centre A et de rayon 2 coupe (D) .

Solution détaillée. 1. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ caractérise le **cercle de diamètre** $[AB]$. Son centre est le milieu $I(1; 3)$ et son rayon vaut $\frac{AB}{2}$ avec $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, donc $R = \sqrt{5}$.

$$(E_1) : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5.$$

Vérification analytique : $\vec{MA}(-1 - x; 2 - y)$ et $\vec{MB}(3 - x; 4 - y)$, donc

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (-1 - x)(3 - x) + (2 - y)(4 - y) = x^2 - 2x - 3 + y^2 - 6y + 8 = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5.$$

En complétant les carrés : $(x - 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 + 5 = 0$, soit $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$. ✓

2. On utilise le **théorème de la médiane** avec I milieu de $[AB]$:

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2MI^2 + \frac{20}{2} = 2MI^2 + 10.$$

L'équation devient $2MI^2 + 10 = 30$, soit $MI^2 = 10$ et $MI = \sqrt{10}$.

$$(E_2) : \text{cercle de centre } I(1; 3) \text{ et de rayon } \sqrt{10}.$$

Sans le théorème de la médiane, il faudrait développer deux carrés puis compléter — trois fois plus long. C'est l'exemple type où connaître le bon outil change tout.

3.

$$d(A, (D)) = \frac{|3 \times (-1) - 4 \times 2 + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-10|}{5} = 2.$$

La distance du centre à la droite vaut exactement le rayon : **la droite (D) est tangente** au cercle de centre A et de rayon 2 (un seul point commun). ■

ASTUCE 12.4 — Position d'une droite et d'un cercle : une seule comparaison

Soit d la distance du centre à la droite et R le rayon :

$$d > R \Rightarrow \text{aucun point commun}; \quad d = R \Rightarrow \text{tangente}; \quad d < R \Rightarrow \text{deux points d'intersection}.$$

On évite ainsi de résoudre un système du second degré : **une division remplace un discriminant**.

❌ PIÈGE 12.5 — $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

❌ « $AB = 3$ et $BC = 4$ donc $AC = 7$ ».

✓ $AC = 7$ seulement si A, B, C sont alignés dans cet ordre. En général, $AC \leq AB + BC$ (inégalité

triangulaire). Si l'angle en B est droit, $AC = 5$.

Traduction vectorielle : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$: c'est le *double produit* qu'on oublie.

Les transformations du plan

■ COURS EXPRESS

Transformation	Définition	Points fixes
Translation $t_{\vec{u}}$	$M \mapsto M'$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	aucun (si $\vec{u} \neq \vec{0}$)
Symétrie centrale S_O	O milieu de $[MM']$	O seul
Symétrie axiale $S_{(D)}$	(D) médiatrice de $[MM']$	tous les points de (D)
Homothétie $h(\Omega, k)$	$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$, $k \neq 0$	Ω seul (si $k \neq 1$)
Rotation $r(\Omega, \theta)$	$\Omega M' = \Omega M$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta$	Ω seul

★ CE QUE CHAQUE TRANSFORMATION CONSERVE

	Longueurs	Angles	Aires	Parallélisme	Alignement
Translation	✓	✓	✓	✓	✓
Symétrie centrale	✓	✓	✓	✓	✓
Symétrie axiale*	✓	✓	✓	✓	✓
Rotation	✓	✓	✓	✓	✓
Homothétie de rapport k	$\times k $	✓	$\times k^2$	✓	✓

* la symétrie axiale conserve la mesure des angles mais *inverse* leur orientation.

Les quatre premières sont des **isométries** : elles ne déforment rien. L'homothétie *agrandit ou réduit* sans déformer : elle conserve les angles et les rapports.

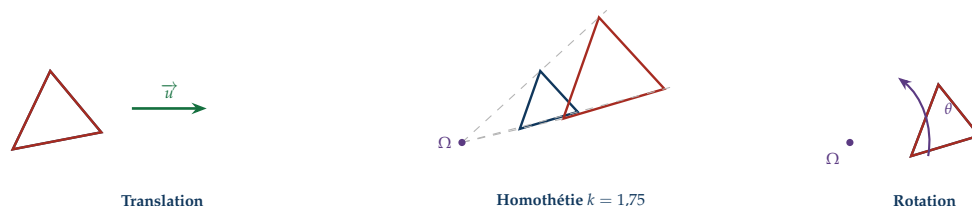


Figure 13.1 — Trois transformations, trois « mouvements » : glisser, agrandir, tourner. La figure image (en rouge) est toujours semblable à l'originale.

13.1 Homothétie : le rapport et son signe

ASTUCE 13.1 — Lire une homothétie sur une relation vectorielle

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} :$$

- $k > 1$: agrandissement, M' au-delà de M , du même côté de Ω ;
- $0 < k < 1$: réduction, M' entre Ω et M ;
- $k < 0$: M' de l'autre côté de Ω — la figure est retournée ;
- $k = -1$: c'est exactement la **symétrie centrale** de centre Ω .

❌ PIÈGE 13.1 — Confondre le rapport des longueurs et le rapport des aires

Une homothétie de rapport $k = 3$ multiplie les longueurs par 3, les **aires** par 9 et les volumes par 27.

❌ « L'aire est multipliée par 3 » : erreur qui coûte systématiquement des points dans les exercices sur les figures semblables (voir aussi le chapitre 10).

❌ PIÈGE 13.2 — Un rapport nul, un vecteur nul

❌ Parler d'une homothétie de rapport $k = 0$: elle enverrait tous les points sur Ω et ne serait pas une transformation (pas bijective). La définition impose $k \neq 0$.

❌ La « translation de vecteur $\vec{0}$ » existe : c'est l'identité. C'est le seul cas dégénéré autorisé.

🔍 MÉTHODE — Déterminer le centre d'une homothétie

Si l'on sait que $M' = h(\Omega, k)(M)$ et $N' = h(\Omega, k)(N)$ avec k connu :

1. Le centre est **aligné** avec chaque couple : $\Omega \in (MM')$ et $\Omega \in (NN')$. Il est donc à l'intersection de ces deux droites.

2. *Analytiquement* : de $\vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M}$ on tire $\vec{\Omega M'} - k\vec{\Omega M} = \vec{0}$, puis en introduisant l'origine O :

$$\vec{O\Omega} = \frac{\vec{OM'} - k\vec{OM}}{1 - k} \quad (k \neq 1).$$

EXERCICE 13.1 (★★★ — composition et reconnaissance)

Dans le plan, on considère l'homothétie $h_1 = h(A; 2)$ et $h_2 = h(B; \frac{1}{2})$, où A et B sont deux points distincts.

1. Soit M un point du plan, $M_1 = h_1(M)$ et $M_2 = h_2(M_1)$. Exprimer $\vec{BM_2}$ en fonction de $\vec{BM}$ et de $\vec{BA}$.
2. En déduire la nature de la transformation $h_2 \circ h_1$.
3. Que se passe-t-il si l'on remplace le rapport de h_2 par $\frac{1}{3}$?

Solution détaillée. 1. Par définition, $\vec{AM_1} = 2\vec{AM}$ et $\vec{BM_2} = \frac{1}{2}\vec{BM_1}$.

Exprimons $\vec{BM_1}$ en passant par A (relation de Chasles) :

$$\vec{BM_1} = \vec{BA} + \vec{AM_1} = \vec{BA} + 2\vec{AM} = \vec{BA} + 2(\vec{AB} + \vec{BM}) = \vec{BA} - 2\vec{BA} + 2\vec{BM} = -\vec{BA} + 2\vec{BM}.$$

Donc

$$\vec{BM_2} = \frac{1}{2}(-\vec{BA} + 2\vec{BM}) = \vec{BM} - \frac{1}{2}\vec{BA}.$$

2. Réécrivons ce résultat en faisant apparaître $\vec{MM_2}$:

$$\vec{MM_2} = \vec{MB} + \vec{BM_2} = -\vec{BM} + \vec{BM} - \frac{1}{2}\vec{BA} = -\frac{1}{2}\vec{BA} = \frac{1}{2}\vec{AB}.$$

Le vecteur $\vec{MM_2}$ est **constant** (indépendant de M) : la transformation $h_2 \circ h_1$ est donc la **translation de vecteur** $\frac{1}{2}\vec{AB}$.

Règle générale à retenir : la composée de deux homothéties de rapports k et k' est une homothétie de rapport kk' ... **sauf si** $kk' = 1$, auquel cas c'est une translation. Ici $2 \times \frac{1}{2} = 1$: on est précisément dans le cas d'exception.

3. Avec $k' = \frac{1}{3}$, le produit des rapports vaut $\frac{2}{3} \neq 1$: la composée est alors une **homothétie de rapport $\frac{2}{3}$** , dont le centre appartient à la droite (AB) . Déterminons-le : en reprenant le calcul, $\overrightarrow{BM_2} = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BM}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$. Le centre Ω est le point fixe, donc vérifie $\overrightarrow{B\Omega} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B\Omega} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$, soit $\frac{1}{3}\overrightarrow{B\Omega} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$, d'où $\overrightarrow{B\Omega} = -\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$: le centre est le symétrique de A par rapport à B . ■

ASTUCE 13.2 — Reconnaître une transformation à son écriture

Toute relation de la forme $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{c}$ (constant) est une **translation**.

Toute relation $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ est une **homothétie** (ou une symétrie centrale si $k = -1$, l'identité si $k = 1$).

Stratégie d'exercice : quand on vous demande « la nature de la transformation », calculez $\overrightarrow{MM'}$. S'il ne dépend pas de M , c'est une translation ; sinon, cherchez le point fixe en résolvant $M' = M$.

13.2 Images de figures

★ IMAGE D'UNE FIGURE PAR UNE TRANSFORMATION

- L'image d'une **droite** est une droite ; elle lui est *parallèle* pour une translation, une symétrie centrale et une homothétie.
- L'image d'un **segment** $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- L'image d'un **cercle** de centre Ω et de rayon R est le cercle de centre Ω' (image du centre) et de rayon : R pour une isométrie, $|k|R$ pour une homothétie de rapport k .
- L'image du **milieu** est le milieu de l'image (conservation du milieu).

✗ PIÈGE 13.3 — Image d'un cercle : oublier de transformer le centre

✗ « L'image du cercle $\mathcal{C}(\Omega; R)$ par $h(A; 3)$ est le cercle $\mathcal{C}(\Omega; 3R)$ ».

✓ Le centre bouge aussi : c'est $\mathcal{C}(\Omega'; 3R)$ avec $\overrightarrow{A\Omega'} = 3\overrightarrow{A\Omega}$.

Méthode en deux temps, toujours : (1) image du centre, (2) nouveau rayon.

EXERCICE 13.2 (★★ — transformations en coordonnées)

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit $A(2; -1)$.

1. Donner l'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(3; -2)$.
2. Donner l'expression analytique de l'homothétie de centre A et de rapport -2 .
3. Déterminer l'image de la droite $(D) : x + 2y - 4 = 0$ par cette homothétie.

Solution détaillée. 1. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ se traduit par $\begin{cases} x' - x = 3 \\ y' - y = -2 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}$

2. $\overrightarrow{AM'} = -2\overrightarrow{AM}$ donne

$$\begin{cases} x' - 2 = -2(x - 2) \\ y' + 1 = -2(y + 1) \end{cases} \iff \begin{cases} x' = -2x + 6 \\ y' = -2y - 3 \end{cases}$$

Contrôle : le centre $A(2; -1)$ doit être invariant : $-2 \times 2 + 6 = 2$ ✓ et $-2 \times (-1) - 3 = -1$ ✓.

3. **Méthode par les antécédents** (la plus sûre) : on exprime x et y en fonction de x' et y' puis on reporte dans l'équation de (D) .

$$x = \frac{6 - x'}{2}, \quad y = \frac{-3 - y'}{2}.$$

En reportant dans $x + 2y - 4 = 0$:

$$\frac{6 - x'}{2} + 2 \cdot \frac{-3 - y'}{2} - 4 = 0 \iff \frac{6 - x' - 6 - 2y' - 8}{2} = 0 \iff -x' - 2y' - 8 = 0.$$

L'image est donc la droite (D') : $x + 2y + 8 = 0$.

Contrôle de cohérence : (D) et (D') ont les mêmes coefficients a et b , elles sont donc bien **parallèles** — ce que la théorie prévoit pour une homothétie. ✓ ■

✗ PIÈGE 13.4 — Substituer x' à la place de x dans l'équation

✗ Remplacer directement x par $x' = -2x + 6$ dans l'équation de la droite.

✓ L'équation de (D) porte sur les points *de départ*. Pour obtenir l'équation de l'image, il faut exprimer les **antécédents** x et y en fonction de x' et y' , puis substituer.

Moyen mnémotechnique : « pour l'image, on utilise la transformation *réci-proque* ».

La géométrie dans l'espace

■ COURS EXPRESS — les règles d'incidence

- Par **trois points non alignés** passe un unique plan. Par une droite et un point extérieur aussi ; par deux droites sécantes aussi ; par deux droites parallèles aussi.
- Si deux points d'une droite appartiennent à un plan, **la droite entière** y est contenue.
- Deux plans distincts sont soit **parallèles**, soit **sécants suivant une droite**.
- Deux droites de l'espace peuvent être : coplanaires (sécantes ou parallèles) ou **non coplanaires** — cas qui n'existe pas dans le plan.

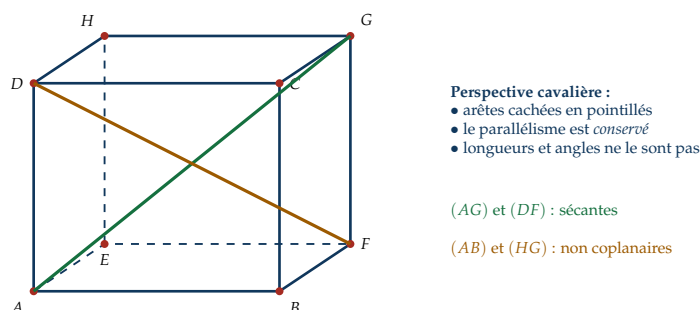


Figure 14.1 — Le cube, support de presque tous les exercices d'espace du Tronc Commun. Apprendre à y lire les positions relatives dispense de longues démonstrations.

✗ PIÈGE 14.1 — « Deux droites qui ne se coupent pas sont parallèles »

✗ Vrai dans le plan, **faux dans l'espace**. Dans le cube ci-dessus, (AB) et (HG) ne se coupent pas et ne sont pas parallèles : elles sont **non coplanaires**.

✓ Deux droites sont parallèles *si et seulement si* elles sont coplanaires et sans point commun (ou confondues). La rédaction correcte commence donc toujours par : « (d) et (d') sont coplanaires car... ».

✗ PIÈGE 14.2 — Angles droits apparents en perspective cavalière

Dans une représentation en perspective cavalière, un angle dessiné à 90° ne l'est pas forcément dans la réalité, et réciproquement : sur la figure, l'angle $\widehat{BAE}$ est droit dans le cube réel, mais apparaît aigu.

Conséquence : on ne *lit* jamais un angle ou une longueur sur une figure d'espace. On les **calcule**, souvent en isolant un triangle rectangle dans une face ou une section plane.

14.1 Parallélisme : les trois théorèmes qui règlent tout

★ À CITER MOT POUR MOT

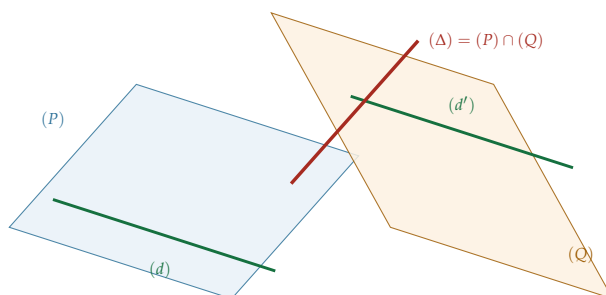
(T1) Droite et plan. Si une droite (d) est parallèle à une droite (d') contenue dans un plan (P), alors $(d) \parallel (P)$.

(T2) Deux plans. Si deux droites sécantes d'un plan (P) sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan (Q), alors $(P) \parallel (Q)$.

(T3) Théorème du toit. Si $(d) \parallel (d')$, si $(d) \subset (P)$, $(d') \subset (Q)$ et si $(P) \cap (Q) = (\Delta)$, alors

$(\Delta) \parallel (d) \parallel (d')$.

(T4) Si $(P) \parallel (Q)$ et si un plan (R) coupe (P) selon (d) et (Q) selon (d') , alors $(d) \parallel (d')$. C'est l'outil numéro un pour construire une section plane.



Théorème du toit : si $(d) \parallel (d')$, alors la droite d'intersection (Δ) est parallèle à toutes les deux.

Figure 14.2 — Le « toit » : deux versants, une ligne de faîte. Ce théorème sert dès qu'on doit construire l'intersection de deux plans dont on connaît deux droites parallèles.

🔧 MÉTHODE — Construire une section plane d'un solide par un plan

1. **Repérer les points donnés** et, pour chaque *face* du solide, chercher deux points du plan de coupe appartenant à cette face : ils déterminent le segment de section sur cette face.
2. Quand une face ne contient qu'un seul point connu, utiliser **(T4)** : si deux faces sont parallèles, les traces du plan sécant y sont **parallèles**. On trace alors la parallèle.
3. En dernier recours, chercher un **point d'intersection auxiliaire** en prolongeant deux droites coplanaires (attention : ne prolonger que des droites appartenant à un *même* plan).
4. Vérifier que le polygone obtenu est **fermé** et que chaque côté est bien tracé *sur une face*.

✗ PIÈGE 14.3 — Faire se couper deux droites non coplanaires

✗ Prolonger (IJ) (dans la face avant) et (GK) (dans la face de droite) et marquer leur « intersection » sur la figure.

✓ Deux droites ne peuvent se couper que si elles sont **coplanaires**. En perspective, deux traits se croisent souvent sur le papier sans que les droites se rencontrent dans l'espace.

Discipline de rédaction : avant d'écrire « soit L le point d'intersection de (IJ) et (GK) », dites dans quel plan vous travaillez.

EXERCICE 14.1 (★★★ — section d'un cube)

Soit $ABCDEFGH$ un cube dont $ABCD$ est la face supérieure et $EFGH$ la face inférieure, A étant au-dessus de E , B au-dessus de F , C au-dessus de G et D au-dessus de H . On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AD]$.

1. Justifier que $(IJ) \parallel (BD)$, puis que $(IJ) \parallel (FH)$.
2. Montrer que la section du cube par le plan (IJG) ne rencontre la face $EFGH$ qu'au point G .
3. Construire cette section et déterminer la position exacte du point K où le plan coupe l'arête $[BF]$.
4. Donner la nature du polygone obtenu.

Solution détaillée. 1. Dans le triangle ABD , I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AD]$: d'après le théorème de la droite des milieux, $(IJ) \parallel (BD)$.

Par ailleurs $BDHF$ est un rectangle (côtés $[BF]$ et $[DH]$ égaux et parallèles, car ce sont deux arêtes verticales

du cube), donc $(BD) \parallel (FH)$. Par transitivité, $(IJ) \parallel (FH)$.

2. Les plans $(ABCD)$ et $(EFGH)$ sont parallèles. Le plan de coupe (IJG) rencontre $(ABCD)$ selon la droite (IJ) ; d'après **(T4)**, sa trace sur $(EFGH)$ est donc la parallèle à (IJ) passant par G , c'est-à-dire — grâce à la question 1 — **la parallèle à (FH) passant par G** . Or $[FH]$ est une diagonale du carré $EFGH$ et G est un sommet situé hors de cette diagonale : la parallèle à (FH) menée par G sort immédiatement du carré. Elle ne rencontre donc le carré $EFGH$ qu'en G .

3. Trace sur la face supérieure : I et J appartiennent au plan de coupe et à la face $ABCD$, donc la trace est le segment $[IJ]$.

Point auxiliaire. Dans le plan $(ABCD)$, les droites (IJ) et (BC) sont sécantes (car $(IJ) \parallel (BD)$, et (BD) n'est pas parallèle à (BC)). Notons P leur point d'intersection. Alors :

- $P \in (IJ)$, donc P appartient au plan de coupe ;
- $P \in (BC)$, donc P appartient au plan de la face $BCGF$.

Les points P et G sont donc deux points communs au plan de coupe et au plan $(BCGF)$: la trace du plan de coupe sur cette face est la droite (PG) , qui coupe l'arête $[BF]$ en K .

Position de P . Prenons l'arête du cube comme unité et travaillons dans le plan $(ABCD)$. Comme $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ et $\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AD}$, la droite (IJ) coupe la droite (BC) en P tel que $\vec{BP} = -\frac{1}{2}\vec{BC}$: le point P est sur (BC) , à une demi-arête de B , **du côté opposé à C** .

Position de K par Thalès. Dans le plan de la face $BCGF$, les droites (BF) et (CG) sont parallèles (arêtes verticales), et la droite (PG) les coupe respectivement en K et en G . Thalès donne

$$\frac{BK}{CG} = \frac{PB}{PC} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{3} \implies BK = \frac{1}{3}CG = \frac{1}{3}BF.$$

Donc $\vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BF}$: **K est au tiers de l'arête $[BF]$ en partant de B** .

Par le même raisonnement sur la face $DCGH$ (avec Q intersection de (IJ) et (DC)), le plan coupe l'arête $[DH]$ en L tel que $\vec{DL} = \frac{1}{3}\vec{DH}$.

4. La section est le **pentagone $IKGLJ$** , dont les côtés se répartissent sur cinq faces : $[IJ]$ sur $ABCD$, $[IK]$ sur $ABFE$, $[KG]$ sur $BCGF$, $[GL]$ sur $DCGH$ et $[LJ]$ sur $ADHE$. Les faces $ABFE$ et $DCGH$ étant parallèles, on a de plus $(IK) \parallel (GL)$; de même $(KG) \parallel (JL)$.

Enfin le plan diagonal $(ACGE)$ échange I et J , K et L , et fixe G : le pentagone est **symétrique** par rapport à ce plan, avec $IK = JL$ et $KG = LG$. ■

Conseil de rédaction : faites d'abord un dessin **grand** (une demi-page), arêtes cachées en pointillés. Une section correcte se « voit » : le polygone est fermé et chaque côté est tracé *sur une face*. Puis seulement, rédigez les justifications face par face.

14.2 Volumes et sections : les formules à connaître

★ VOLUMES USUELS

$$\text{Cube d'arête } a : V = a^3 \quad \text{Pavé : } V = L\ell h \quad \text{Cylindre : } V = \pi R^2 h$$

$$\text{Prisme / cylindre : } V = \mathcal{B} \times h \quad \text{Pyramide / cône : } V = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$$

$$\text{Sphère : } V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad \mathcal{A} = 4\pi R^2$$

Réduction : une section d'une pyramide par un plan parallèle à la base, à la hauteur k de l'apex, produit une pyramide semblable de rapport k : les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3 .

ASTUCE 14.1 — Le facteur $\frac{1}{3}$: comment ne plus l'oublier

Une pyramide « remplit le tiers » du prisme de même base et de même hauteur. Vérification mentale : une pyramide de base 6×6 et de hauteur 6 a pour volume $\frac{36 \times 6}{3} = 72$, soit le tiers de $216 = 6^3$.

Ordre de grandeur : un cône ou une pyramide a toujours un volume *plus petit* que le cylindre ou le prisme qui l'enveloppe. Si votre résultat est plus grand, le $\frac{1}{3}$ est passé à la trappe.

EXERCICE 14.2 (★★ — section d'une pyramide)

Une pyramide $SABCD$ de base carrée a une hauteur $SO = 12$ cm et une base de côté 9 cm. Un plan parallèle à la base coupe la pyramide à 4 cm du sommet S .

1. Quel est le coefficient de réduction ?
2. Calculer le côté et l'aire de la section.
3. Calculer le volume de la petite pyramide, puis celui du tronc restant.

Solution détaillée. 1. Le coefficient est le rapport des distances au sommet : $k = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

2. Côté de la section : $9 \times \frac{1}{3} = 3$ cm. Aire de la section : $3^2 = 9$ cm², soit bien $81 \times k^2 = 81 \times \frac{1}{9} = 9$ cm². ✓

3. Volume total : $V = \frac{81 \times 12}{3} = 324$ cm³. Volume de la petite pyramide : $V' = k^3 V = \frac{1}{27} \times 324 = 12$ cm³.

Contrôle direct : $\frac{9 \times 4}{3} = 12$ ✓.

Volume du tronc : $324 - 12 = 312$ cm³.

Piège classique : calculer $\frac{324}{3} = 108$ en croyant que « réduire d'un tiers les longueurs divise le volume par trois ». C'est k^3 , donc 27. ■

❌ PIÈGE 14.4 — Appliquer Pythagore sur une figure d'espace sans isoler un plan

❌ « Dans le cube d'arête a , la grande diagonale vaut $a\sqrt{2}$ ».

✓ On procède en deux étapes, chacune dans un plan :

1. dans la face carrée : diagonale de face = $a\sqrt{2}$;

2. dans le triangle rectangle formé par une arête et cette diagonale de face : $D = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

Règle d'or de la géométrie dans l'espace : on ne calcule jamais « dans l'espace » ; on isole toujours un triangle plan.

Partie III

Annexes

Formulaire général du Tronc Commun

Cette annexe rassemble, en quelques pages, tout ce qui doit être su par cœur. Photocopiez-la, pliez-la, relisez-la cinq minutes avant chaque contrôle. Une formule que vous devez « retrouver » pendant un devoir est une formule qui vous coûtera du temps.

15.1 Nombres, calcul algébrique

★ PUISSANCES ET RACINES

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\ (a^m)^n &= a^{mn} \\ (ab)^n &= a^n b^n \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, \quad a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \end{aligned}$$

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a, b \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$$

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad (\text{pour tout } a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \times$$

★ IDENTITÉS REMARQUABLES

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \end{aligned}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

★ VALEUR ABSOLUE ET ORDRE ($r > 0$)

$$\begin{aligned} |x| \leq r &\iff -r \leq x \leq r \\ |x - a| \leq r &\iff x \in [a - r; a + r] \\ |x| \geq r &\iff x \leq -r \text{ ou } x \geq r \\ |ab| &= |a| |b|, \quad |a + b| \leq |a| + |b| \end{aligned}$$

$$0 < a \leq b \implies \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

$$0 \leq a \leq b \implies a^2 \leq b^2 \text{ et } \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (x > 0)$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad (x, y \geq 0)$$

★ ARITHMÉTIQUE

- Division euclidienne : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$ (unicité de (q, r)).
- $\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = ab$; $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$ (Euclide).
- $d \mid a$ et $d \mid b \implies d \mid \alpha a + \beta b$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.
- $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} \implies \text{nombre de diviseurs} = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.
- n premier $\iff$ aucun diviseur premier $\leq \sqrt{n}$.

15.2 Second degré et polynômes

★ TRINÔME $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad S = -\frac{b}{a} \quad P = \frac{c}{a}$$

$$\text{Forme canonique : } a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad \text{Sommet : } \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

Signe : du signe de a à l'extérieur des racines, du signe de $-a$ entre les racines (et du signe de a partout si $\Delta < 0$).

Raccourcis : $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -\frac{c}{a}$; $a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$.

Somme-produit : deux nombres de somme S et de produit P sont racines de $X^2 - SX + P = 0$.

★ POLYNÔMES

- a racine de $P \iff (x - a)$ divise $P \iff P(x) = (x - a)Q(x)$.
- $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$; $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$.
- Division euclidienne : $P = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$.
- $P(1) =$ somme des coefficients ; $P(-1) =$ somme alternée.
- Racine rationnelle $\frac{p}{q}$: $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

15.3 Fonctions

★ DOMAINES ET TAUX DE VARIATION

$$\frac{A}{B} : B \neq 0 \quad \sqrt{A} : A \geq 0 \quad \frac{A}{\sqrt{B}} : B > 0$$

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} : \quad \frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b, \quad \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = \frac{-1}{ab}, \quad \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Parité : D_f symétrique et $f(-x) = f(x)$ (paire) ou $f(-x) = -f(x)$ (impaire).

Axe de symétrie $x = \alpha$: $f(\alpha + h) = f(\alpha - h)$. **Centre** $\Omega(\alpha; \beta)$: $f(\alpha + h) + f(\alpha - h) = 2\beta$.

Homographique $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = A + \frac{B}{cx + d}$: centre de symétrie $\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right)$.

15.4 Trigonométrie

★ L'ESSENTIEL

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}, \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\cos x = \cos a \iff x = \pm a + 2k\pi \quad \sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

15.5 Géométrie

★ VECTEURS ET DROITES (repère quelconque)

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad I_{[AB]} \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$$

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad ax + by + c = 0 : \vec{u}(-b; a) \text{ directeur, } m = -\frac{a}{b}$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (D) \parallel (D') \iff m = m' \iff ab' - a'b = 0$$

★ PRODUIT SCALAIRE (repère orthonormé)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad \vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$d(M_0, (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \hat{A}$$

$$\text{Al-Kashi : } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \quad \text{Médiane : } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\text{Cercle : } (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \quad \text{Diamètre } [AB] : \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$$\text{Droites perpendiculaires : } mm' = -1 \text{ (si aucune n'est verticale)} \iff \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0.$$

★ TRANSFORMATIONS ET SOLIDES

$$t_{\vec{u}} : \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \quad h(\Omega, k) : \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \quad S_{\Omega} = h(\Omega, -1)$$

Homothétie de rapport k : longueurs $\times |k|$, aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$.

$$V_{\text{prisme}} = Bh \quad V_{\text{pyramide}} = \frac{Bh}{3}$$

$$V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \mathcal{A}_{\text{sphère}} = 4\pi R^2$$

Diagonale d'un cube d'arête a : $a\sqrt{3}$ (diagonale de face : $a\sqrt{2}$).

15.6 Statistiques

★ PARAMÈTRES

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum n_i x_i \quad V = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2 \quad \sigma = \sqrt{V}$$

$$y = ax + b \implies \bar{y} = a\bar{x} + b, \quad \sigma_y = |a| \sigma_x$$

$$M_e = a + (b - a) \times \frac{\frac{N}{2} - E_a}{E_b - E_a} \quad (\text{interpolation dans la classe médiane})$$

15.7 Les nombres à reconnaître instantanément

★ TABLES DE RÉFÉRENCE

Carrés parfaits

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25	30
n^2	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	625	900

Puissances de 2 et de 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Valeurs approchées utiles

$$\sqrt{2} \approx 1,414 \quad \sqrt{3} \approx 1,732 \quad \sqrt{5} \approx 2,236 \quad \pi \approx 3,142$$

Nombres premiers jusqu'à 100

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

ASTUCE 15.1 — Pourquoi ces tables font gagner des points

Reconnaître $289 = 17^2$ ou $729 = 3^6$ évite une factorisation laborieuse et, surtout, permet de **vérifier** un résultat en deux secondes. La plupart des énoncés sont construits à partir de ces nombres : les repérer, c'est souvent deviner la structure de l'exercice avant de l'avoir résolu.

Les 100 pièges classiques

Voici la liste des erreurs qui font perdre le plus de points au Tronc Commun. Elles ne sont presque jamais dues à un manque d'intelligence : ce sont des **automatismes faux** installés depuis le collège. La bonne façon d'utiliser cette annexe : lisez dix pièges par jour, et après chaque devoir corrigé, cochez ceux que vous avez commis. Au bout d'un mois, vous connaîtrez vos trois ou quatre erreurs personnelles — celles qui vous coûtent réellement des points.

16.1 Calcul algébrique

N°	✗ Ce que l'élève écrit	✓ Ce qu'il fallait écrire
1	$(a + b)^2 = a^2 + b^2$	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: le double produit ne disparaît jamais.
2	Pour $x = -3$: $-x^2 = 9$	$-x^2 = -(x^2) = -9$. La puissance passe <i>avant</i> le signe.
3	$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$	Aucune simplification possible. On ne coupe que le numérateur : $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.
4	$\frac{a+b}{a} = b$	$\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$. On ne simplifie que des facteurs .
5	$a^m + a^n = a^{m+n}$	La règle vaut pour le <i>produit</i> : $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
6	$(-2)^4 = -16$	$(-2)^4 = 16$; c'est -2^4 qui vaut -16 . Les parenthèses décident.
7	$3x^2$ pour $x = 2$ vaut 36	$3 \times 2^2 = 12$: on élève au carré <i>avant</i> de multiplier.
8	$-(a - b) = -a - b$	$-(a - b) = -a + b$. Le signe se distribue sur <i>tous</i> les termes.
9	$a^3 + b^3 = (a + b)^3$	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
10	$x \times x = 2x$	$x \times x = x^2$; c'est $x + x$ qui vaut $2x$.
11	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$	On multiplie par l' inverse : $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.
12	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$	On additionne les numérateurs, jamais les dénominateurs : $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.
13	$(a - b)^2 = -(b - a)^2$	$(a - b)^2 = (b - a)^2$: un carré efface le signe.
14	$\frac{1}{a^{-1} + b^{-1}} = a + b$	$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab}{a + b}$.

16.2 Racines carrées et ensembles de nombres

N°	✗ Ce que l'élève écrit	✓ Ce qu'il fallait écrire
15	$\sqrt{a^2} = a$	$\sqrt{a^2} = a $. C'est le piège numéro un du chapitre 1.
16	$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	Faux : $\sqrt{9+16} = 5 \neq 3+4$. La racine ne traverse qu'un produit ou un quotient.
17	$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ toujours	Uniquement si $a \geq 0$ et $b \geq 0$.
18	$2\sqrt{3} = \sqrt{6}$	$2\sqrt{3} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{12}$.

N°	✗ Ce que l'élève écrit	✓ Ce qu'il fallait écrire
19	$\sqrt{-4} = -2$	$\sqrt{-4}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.
20	Rationaliser en multipliant seulement le numérateur	On multiplie haut et bas par le conjugué : la valeur de la fraction ne doit pas changer.
21	$\frac{\pi}{3} \in \mathbb{Q}$ car c'est une fraction	Une fraction de <i>deux entiers</i> seulement. π est irrationnel, donc $\frac{\pi}{3}$ aussi.
22	La somme de deux irrationnels est irrationnelle	Faux : $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$. En revanche rationnel + irrationnel = irrationnel.
23	Tout rationnel est décimal	Faux : $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. Réciproque vraie : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
24	$0,999 \dots < 1$	$0,999 \dots = 1$ (méthode du décalage, chapitre 1).
25	$\sqrt{2} \subset \mathbb{R}$	Confusion $\in / \subset$: $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

16.3 Arithmétique

N°	✗ Ce que l'élève écrit	✓ Ce qu'il fallait écrire
26	$-17 = 5 \times (-4) + 3$ donc le reste est -3	Le reste vérifie $0 \leq r < b$. Ici $-17 = 5 \times (-4) + 3$: le reste est 3.
27	« a et b sont premiers » pour dire $\text{PGCD}(a, b) = 1$	On dit premiers entre eux . 8 et 9 le sont sans être premiers.
28	$\text{PPCM}(a, b) = ab$	Seulement si $\text{PGCD}(a, b) = 1$. Sinon $\text{PPCM}(a, b) = \frac{ab}{\text{PGCD}(a, b)}$.
29	1 est un nombre premier	Non : un premier a <i>exactement</i> deux diviseurs.
30	Tout nombre impair est premier	9, 15, 21... sont impairs et composés.
31	$a \mid c$ et $b \mid c$ donc $ab \mid c$	Faux si a et b ne sont pas premiers entre eux : $4 \mid 12$, $6 \mid 12$, mais $24 \nmid 12$.
32	Divisible par 4 si le dernier chiffre l'est	On regarde les deux derniers chiffres ($n = 100k + \overline{ab}$).
33	$\text{PGCD}(0, a) = 0$	$\text{PGCD}(0, a) = a$: tout entier divise 0.
34	Tester tous les diviseurs jusqu'à $\frac{n}{2}$	Il suffit d'aller jusqu'à $\sqrt{n}$: gain de temps décisif en devoir.
35	$n^2 + n + 41$ est toujours premier	Faux pour $n = 41$: le nombre vaut 41×43 .

16.4 Ordre, valeur absolue et inégalités

N°	✗ Ce que l'élève écrit	✓ Ce qu'il fallait écrire
36	On multiplie l'inégalité par x	Interdit tant que le signe de x n'est pas discuté : le sens peut changer.
37	$a < b \implies a^2 < b^2$	Faux : $-5 < 2$ mais $25 > 4$. Il faut $0 \leq a < b$.
38	$a < b$ et $c < d$ donc $a - c < b - d$	On ne soustrait jamais deux inégalités. On additionne $a < b$ et $-d < -c$.
39	$a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	Vrai seulement si a et b ont le même signe.
40	$ x \geq r \iff -r \geq x \geq r$	$ x \geq r \iff x \leq -r$ ou $x \geq r$: une réunion, pas un encadrement.

N°	✗ Ce que l'élève écrit	✓ Ce qu'il fallait écrire
41	$ x + y = x + y $	Seulement si x et y ont le même signe. Sinon $ x + y \leq x + y $.
42	Division par -2 sans changer le sens	Multiplier ou diviser par un négatif renverse l'inégalité.
43	$x^2 \geq 0$ donc $x \geq 0$	Le carré ne dit rien du signe de x .
44	$\sqrt{x} \leq x$	Faux pour $0 < x < 1$: $\sqrt{0,25} = 0,5 > 0,25$.
45	$x + \frac{1}{x} \geq 2$ pour tout x	Uniquement pour $x > 0$; pour $x < 0$ on a $x + \frac{1}{x} \leq -2$.
46	$E(x + y) = E(x) + E(y)$	Faux : $E(0,5) + E(0,5) = 0$ mais $E(1) = 1$.
47	Encadrer $\frac{a}{b}$ en divisant les bornes	Il faut encadrer $\frac{1}{b}$ d'abord (sens renversé), puis multiplier — avec des bornes de signe connu.

16.5 Équations, inéquations, systèmes

N°	✗ Ce que l'élève écrit	✓ Ce qu'il fallait écrire
48	On élève au carré et on garde toutes les solutions	L'élévation au carré n'est pas une équivalence : vérification obligatoire dans l'équation de départ.
49	On simplifie par x des deux côtés	On perd la solution $x = 0$. Il faut factoriser : $x(\dots) = 0$.
50	$AB = 0$ donc $A = 0$ et $B = 0$	$A = 0$ ou $B = 0$.
51	$AB = 1$ donc $A = 1$ et $B = 1$	Aucune règle de ce type : seul le produit <i>nul</i> se casse.
52	Multiplication en croix sans condition	Il faut d'abord poser le domaine (dénominateurs $\neq 0$) et le rappeler dans la conclusion.
53	$ A = B$ donne $A = \pm B$	... à condition que $B \geq 0$. Sinon aucune solution.
54	$\sqrt{A} = B$ donne $A = B^2$	... à condition que $B \geq 0$ et $A \geq 0$.
55	$\Delta < 0$: « l'équation n'existe pas »	L'équation existe, elle n'a simplement aucune solution réelle .
56	$\frac{A}{B} \geq 0$: on multiplie par B	Le signe de B est inconnu : on fait un tableau de signes .
57	Dans le tableau de signes, un 0 sous le dénominateur	On y met une double barre : la valeur est exclue du domaine.
58	$\cos x = \frac{3}{2}$: on cherche x	Impossible : $ \cos x \leq 1$. On conclut $S = \emptyset$ immédiatement.
59	$X = x^2$: on garde $X = -4$	Le changement d'inconnue impose $X \geq 0$; on rejette les valeurs négatives.
60	On additionne deux équations d'un système sans le dire	Toute combinaison doit être justifiée, et le système final doit rester équivalent au départ.

16.6 Fonctions

N°	✗ Ce que l'élève écrit	✓ Ce qu'il fallait écrire
61	$\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ existe pour $x \geq 1$	$x > 1$ strictement : le dénominateur ne doit pas s'annuler.
62	$f(x) = \frac{x^2}{x}$ et $g(x) = x$ sont égales	Elles ont la même expression simplifiée mais $D_f = \mathbb{R}^* \neq D_g$: ce sont deux fonctions différentes .
63	« f est paire car $f(-x) = f(x)$ »	Il faut d'abord vérifier que D_f est symétrique par rapport à 0 .
64	« f est croissante car $f(1) < f(2)$ »	Deux valeurs ne prouvent rien : on étudie le signe du taux de variation pour <i>tous</i> $a \neq b$.
65	$f(a+b) = f(a) + f(b)$	Faux en général : essayer $f(x) = x^2$.
66	Produit de deux fonctions croissantes : croissant	Faux si elles changent de signe ($x \times x = x^2$ sur $\mathbb{R}$).
67	f décroissante donc $\frac{1}{f}$ croissante	Vrai seulement si f garde un signe constant sur l'intervalle.
68	Confusion image / antécédent	$f(3) = 5$: 5 est l' <i>image</i> de 3, 3 est un <i>antécédent</i> de 5.
69	Lire la solution sur le graphique et s'arrêter là	Le graphique conjecture , le calcul démontre .
70	$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$: centre en $\left(\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$	Le centre est $\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$: attention au signe.

16.7 Trigonométrie

N°	✗ Ce que l'élève écrit	✓ Ce qu'il fallait écrire
71	$\cos^2 x = \cos(x^2)$	$\cos^2 x = (\cos x)^2$. Notations très différentes.
72	$\sin(a+b) = \sin a + \sin b$	$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
73	$\cos x = \cos a \implies x = a + 2k\pi$	Il manque la famille $x = -a + 2k\pi$.
74	$\sin x = \sin a \implies x = a + 2k\pi$	Il manque $x = \pi - a + 2k\pi$.
75	Oublier $+2k\pi$	Sans le $2k\pi$, la solution est incomplète — et la sélection des solutions d'un intervalle devient impossible.
76	Mélanger degrés et radians	Dans tout le programme, on travaille en radians sauf mention contraire.
77	$\tan x$ existe partout	$\tan x$ n'est pas définie pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
78	$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Retenez : le cosinus <i>décroît</i> de 1 à 0.
79	$\cos 2a = 2 \cos a$	$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$.
80	Une seule solution sur $[0; 2\pi[$	Sur un tour complet, une équation $\cos x = c$ ($-1 < c < 1$) a deux solutions. Contrôlez sur le cercle.

16.8 Statistiques

N°	✗ Ce que l'élève écrit	✓ Ce qu'il fallait écrire
81	Moyenne générale = moyenne des moyennes	Il faut pondérer par les effectifs.

N°	✗ Ce que l'élève écrit	✓ Ce qu'il fallait écrire
82	Médiane = moyenne du plus petit et du plus grand	La médiane partage l'effectif en deux ; elle se lit sur les effectifs cumulés.
83	Médiane calculée sans trier la série	Le tri est la première étape, toujours.
84	$V = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^2$	Formule de König : $V = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$. L'oubli de $-\bar{x}^2$ est l'erreur la plus fréquente du chapitre.
85	Confondre effectif cumulé et fréquence cumulée	L'un se compte en individus, l'autre en % (ou en proportion de 1).
86	Histogramme à classes inégales : hauteur = effectif	C'est l' aire qui doit être proportionnelle à l'effectif.

16.9 Vecteurs, droites et produit scalaire

N°	✗ Ce que l'élève écrit	✓ Ce qu'il fallait écrire
87	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$	Chasles exige que le point d'arrivée du premier soit le point de départ du second : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.
88	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
89	$\vec{u} = k \vec{v}$ suffit pour la colinéarité	Il faut traiter le cas $\vec{v} = \vec{0}$; la caractérisation universelle est $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
90	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ dans un repère quelconque	Cette formule suppose le repère orthonormé .
91	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ donc $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$	Non : cela signifie que les vecteurs sont orthogonaux .
92	$d(M, (D)) = ax_0 + by_0 + c $	Il faut diviser par $\sqrt{a^2 + b^2}$.
93	Coefficient directeur d'une droite verticale	Une droite $x = k$ n'a pas de coefficient directeur ; on utilise le vecteur directeur $(0; 1)$.
94	$mm' = -1$ appliqué à une verticale	Le critère $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$ fonctionne, lui, dans tous les cas.
95	Milieu : $(\frac{x_B - x_A}{2}; \dots)$	Le milieu est une <i>somme</i> : $(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2})$.
96	Aire = $ \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) $	Ne pas oublier le facteur $\frac{1}{2}$ pour un triangle (le déterminant donne l'aire du parallélogramme).

16.10 Transformations et espace

N°	✗ Ce que l'élève écrit	✓ Ce qu'il fallait écrire
97	Homothétie de rapport 3 : aires $\times 3$	Aires $\times 9$, volumes $\times 27$.
98	Image du cercle $\mathcal{C}(\Omega; R)$ par $h(A; k)$: $\mathcal{C}(\Omega; k R)$	Le centre bouge aussi : $\mathcal{C}(\Omega'; k R)$ avec $\overrightarrow{A\Omega'} = k\overrightarrow{A\Omega}$.
99	Substituer x' dans l'équation de (D)	Pour l'image d'une droite, on exprime les antécédents x, y en fonction de x', y' .
100	Deux droites sans point commun sont parallèles	Vrai dans le plan, faux dans l'espace : elles peuvent être non coplanaires.

N°	✗ Ce que l'élève écrit	✓ Ce qu'il fallait écrire
101	Lire un angle droit sur une perspective cavalière	La perspective ne conserve ni les angles ni les longueurs — seulement le parallélisme et les milieux.
102	Grande diagonale du cube = $a\sqrt{2}$	$a\sqrt{3}$; $a\sqrt{2}$ est la diagonale d'une <i>face</i> .
103	Pythagore appliqué « dans l'espace »	On isole toujours un triangle plan avant tout calcul.
104	Volume d'une pyramide = Bh	$V = \frac{Bh}{3}$.
105	Réduction de rapport $\frac{1}{3}$: volume divisé par 3	Divisé par 27.
106	Prolonger deux droites non coplanaires pour les couper	Deux droites ne se coupent que si elles sont dans un même plan : dites lequel avant de tracer.

ASTUCE 16.1 — Votre fiche personnelle d'erreurs

Recopiez sur une fiche les numéros des pièges que vous avez réellement commis dans vos trois derniers devoirs. Il y en aura entre trois et six, pas plus. Relisez cette fiche — et elle seule — avant chaque contrôle. C'est le geste qui fait gagner le plus de points pour le moins de travail.

Méthodologie : travailler et composer

17.1 Comment travailler les mathématiques au Tronc Commun

■ LE PRINCIPE DE BASE

On n'apprend pas les mathématiques en *lisant* des corrigés, mais en *produisant* des solutions. Un corrigé lu et compris donne l'illusion de la maîtrise : le lendemain, devant la feuille blanche, rien ne vient. La règle est simple :

tant que vous n'avez pas refait l'exercice seul, feuille blanche, vous ne le savez pas.

📖 MÉTHODE — Le protocole des trois passages

1. **Passage 1 — la lutte (20 min).** Vous cherchez seul, sans corrigé, sans téléphone. Vous avez le droit de ne rien trouver : c'est pendant cette lutte que le cerveau installe les connexions. Notez au brouillon toutes les pistes essayées, même fausses.
2. **Passage 2 — la lecture active.** Vous lisez le corrigé *une étape à la fois* : dès que vous comprenez le déclic, vous refermez le corrigé et vous continuez seul.
3. **Passage 3 — la restitution (48 h plus tard).** Vous refaites l'exercice **intégralement**, sans rien sous les yeux. S'il vous manque une étape, retour au passage 1. C'est ce troisième passage, et lui seul, qui fabrique la mémoire durable.

ASTUCE 17.1 — La règle des 48 heures et la répétition espacée

Une notion revue le jour même, puis à +2 jours, puis à +1 semaine, puis à +1 mois est retenue pour l'année. Une notion révisée quatre fois la veille du contrôle est oubliée en trois jours. **Même temps total, résultat incomparable.**

★ LE CARNET DE BORD (une page par chapitre)

Pour chaque chapitre du programme, tenez une page unique comportant :

- les **formules** qui ne se déduisent pas (à savoir par cœur, pas plus de dix) ;
- les **trois méthodes** types du chapitre, résumées en trois lignes chacune ;
- vos **erreurs personnelles** relevées dans les devoirs (voir l'annexe B) ;
- un **exercice-modèle** que vous savez refaire de mémoire, et qui résume le chapitre.

Ces pages, et rien d'autre, constituent votre matériel de révision d'avant-contrôle.

17.2 Rédiger une copie qui rapporte des points

★ CE QUE LE CORRECTEUR CHERCHE

Un correcteur n'attribue pas des points à un résultat, mais à une **chaîne de justifications**. Concrètement, il coche :

- l'**énoncé du théorème** ou de la propriété utilisée (par son nom) ;
- la **vérification des hypothèses** (« $a \geq 0$ donc... », « $x \neq 2$ donc... ») ;
- le **calcul** lui-même ;

- la **conclusion rédigée**, qui répond à la question posée avec ses mots à elle (« donc $S = \{-1; 3\}$ », « donc $ABCD$ est un parallélogramme »).

Un résultat juste sans justification vaut souvent moins qu'un résultat faux bien justifié.

ASTUCE 17.2 — Les six mots qui rapportent des points

« Donc », « car », « or », « d'après », « on en déduit », « conclusion ». Une copie où ces mots n'apparaissent jamais est une copie de calculs, pas de mathématiques. Objectif : au moins un connecteur logique toutes les trois lignes.

❌ PIÈGE 17.1 — Les fautes de rédaction les plus coûteuses

- ❌ Utiliser $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ au hasard, ou les employer comme des abréviations de « donc » au milieu d'une phrase française.
- ❌ Écrire une suite d'égalités fausse du type $x^2 = 4 = x = 2$.
- ❌ Ne pas conclure : le lecteur doit chercher la réponse dans un coin de la page.
- ❌ Donner un résultat sans unité, ou une probabilité supérieure à 1 sans réagir.
- ✓ Une ligne = une idée ; un symbole logique = une affirmation vérifiée ; une question = une phrase de conclusion.

17.3 Stratégie le jour du contrôle

📖 MÉTHODE — Les cinq premières minutes

1. **Lire tout le sujet**, y compris la dernière question. On repère souvent qu'une question finale est indépendante et facile.
2. **Coter chaque exercice** : ✓ (je sais faire), ~ (je vois le début), ? (je ne vois pas).
3. **Commencer par les ✓**, quel que soit l'ordre du sujet. Rien n'oblige à traiter l'exercice 1 en premier : il suffit de numéroter clairement.
4. **Répartir le temps** proportionnellement au barème, et fixer une heure limite par exercice.

ASTUCE 17.3 — Le tiers du temps en fin d'épreuve

Prévoyez de terminer le premier passage à $\frac{2}{3}$ du temps. Le dernier tiers sert à : (1) reprendre les questions ~, (2) relire les calculs des questions ✓, (3) rédiger les conclusions manquantes. C'est le tiers qui rapporte le plus de points à l'heure.

★ LES SEPT VÉRIFICATIONS DE FIN DE COPIE

1. Chaque question a-t-elle une **phrase de conclusion** ?
2. Les **domaines de définition** et conditions d'existence sont-ils posés ?
3. Les solutions d'une équation avec racine ou carré ont-elles été **vérifiées** ?
4. Les **ordres de grandeur** sont-ils plausibles (une longueur négative, une probabilité > 1 , une variance négative sont impossibles) ?
5. Les cas particuliers ont-ils été traités (dénominateur nul, $\Delta = 0$, $\vec{u} = \vec{0}$, $k = 1$) ?
6. Les figures sont-elles **grandes, codées et légendées** ?
7. Les résultats sont-ils **encadrés** ou soulignés ?

17.4 Les cinq réflexes universels

★ À APPLIQUER QUAND ON EST BLOQUÉ

1. **Tester un cas particulier** ($n = 1$, $x = 0$, un triangle équilatéral) : cela révèle souvent la structure, et parfois l'erreur d'énoncé qu'on avait mal recopiée.
2. **Nommer l'inconnue utile**. Beaucoup de problèmes deviennent triviaux dès qu'on pose $X = x^2$, $t = \cos x$ ou $u = x + \frac{1}{x}$.
3. **Revenir à la définition**. « Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme » $\rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. « Montrer que I est le milieu » $\rightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
4. **Utiliser la question précédente**. Dans un devoir bien construit, la question n sert presque toujours à la question $n + 1$. Si vous ne l'utilisez pas, vous vous compliquez la vie.
5. **Changer de représentation** : passer du calcul à la figure, ou de la figure au calcul ; passer d'une équation à un tableau de signes ; passer de $\mathbb{R}$ au cercle trigonométrique.

ASTUCE 17.4 — Le contrôle final d'un résultat

Avant d'encadrer une réponse, posez-vous trois questions : *est-elle du bon signe ? du bon ordre de grandeur ? cohérente avec la figure ?* Ce réflexe de dix secondes intercepte la majorité des erreurs de calcul — et il ne demande aucune connaissance supplémentaire.

17.5 Un plan de révision en quatre semaines

★ LE PRINCIPE

Quatre semaines suffisent à remettre à niveau une année entière — à condition de ne pas relire, mais de **produire**. Chaque séance dure une heure et se découpe toujours de la même façon : 10 minutes de rappel actif (fiche cachée), 40 minutes d'exercices, 10 minutes de bilan (qu'est-ce que j'ai raté, et pourquoi ?).

Semaine	Contenu	Objectif de fin de semaine
1 — Bases	Ensembles de nombres, arithmétique, ordre et valeur absolue. Annexe E, questions 1 à 30.	Plus aucune erreur sur $\sqrt{a^2} = a $, sur les inéquations et sur les restes.
2 — Algèbre	Polynômes, équations, inéquations, systèmes. Exercices ** des chapitres 4 et 5.	Savoir résoudre une équation avec radical ou valeur absolue <i>sans oublier la vérification</i> .
3 — Fonctions et trigo	Domaines, variations, symétries ; cercle trigonométrique et équations.	Retracer le cercle trigonométrique de mémoire en deux minutes, avec les 16 angles.
4 — Géométrie et synthèse	Vecteurs, droites, produit scalaire, espace. Puis les huit problèmes de l'annexe D.	Traiter un problème complet en 40 minutes, rédaction comprise.

ASTUCE 17.5 — Les trois séances hebdomadaires idéales

Séance A (lundi) : découverte ou révision du cours, construction de la fiche du chapitre.

Séance B (mercredi) : exercices d'application, chronométrés.

Séance C (samedi) : *sans rien sous les yeux*, on refait deux exercices de la séance B et un exercice de

la semaine précédente. C'est la séance C qui fait la différence entre un élève qui « comprend en classe » et un élève qui réussit en devoir.

✗ PIÈGE 17.2 — Les quatre façons de perdre son temps de révision

- ✗ Relire le cours en surlignant : sensation de travail, aucun effet mesurable.
- ✗ Refaire uniquement les exercices déjà réussis : agréable, inutile.
- ✗ Travailler avec le corrigé ouvert à côté : le cerveau n'encode rien de ce qu'il n'a pas cherché.
- ✗ Réviser six heures la veille : la fatigue annule le bénéfice, et le sommeil manquant coûte plus de points que les six heures n'en rapportent.
- ✓ Trois séances d'une heure, espacées, avec une feuille blanche : c'est tout.

Problèmes de synthèse

Les huit problèmes qui suivent mélangent volontairement plusieurs chapitres : c'est exactement ce que font les devoirs surveillés et l'examen. Cherchez-les d'abord seul, pendant vingt minutes chacun, avant de lire le corrigé.

18.1 Arithmétique et divisibilité

EXERCICE 18.1 (★★ — un produit toujours divisible)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A_n = n(n+1)(2n+1)$.

1. Montrer que A_n est divisible par 2.
2. Montrer que A_n est divisible par 3.
3. En déduire que A_n est divisible par 6, puis calculer $\text{PGCD}(A_3, A_4)$.

Solution détaillée. 1. Parmi deux entiers consécutifs n et $n+1$, l'un au moins est pair. Le produit $n(n+1)$ est donc divisible par 2, et A_n aussi.

2. Discutons selon le reste de n dans la division par 3.

- Si $n = 3k$: $3 \mid n$, donc $3 \mid A_n$.
- Si $n = 3k + 1$: alors $2n + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$, donc $3 \mid A_n$.
- Si $n = 3k + 2$: alors $n + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1)$, donc $3 \mid A_n$.

Dans tous les cas, $3 \mid A_n$.

3. A_n est divisible par 2 et par 3, et $\text{PGCD}(2, 3) = 1$: donc A_n est divisible par $2 \times 3 = 6$.

Remarque importante : c'est parce que 2 et 3 sont **premiers entre eux** que l'on peut multiplier les deux diviseurs. Voir la section « Arithmétique » de l'annexe B.

Enfin $A_3 = 3 \times 4 \times 7 = 84$ et $A_4 = 4 \times 5 \times 9 = 180$. Algorithme d'Euclide : $180 = 84 \times 2 + 12$, puis $84 = 12 \times 7 + 0$. Donc $\text{PGCD}(A_3, A_4) = 12$. ■

18.2 Une inégalité à trois variables

EXERCICE 18.2 (★★★ — inégalité avec contrainte)

Soient a, b, c trois réels strictement positifs tels que $a + b + c = 1$. Montrer que

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right) \left(\frac{1}{b} - 1\right) \left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8.$$

Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Solution détaillée. *Idée directrice* : utiliser la contrainte pour transformer chaque parenthèse en *somme*, puis appliquer l'inégalité entre moyennes.

Comme $a + b + c = 1$, on a $1 - a = b + c$, donc

$$\frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} = \frac{b+c}{a}, \quad \frac{1}{b} - 1 = \frac{a+c}{b}, \quad \frac{1}{c} - 1 = \frac{a+b}{c}.$$

Le produit s'écrit donc

$$\Pi = \frac{(b+c)(a+c)(a+b)}{abc}.$$

Or, pour tous réels positifs x et y , on a $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ (car $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$). D'où

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}, \quad a + c \geq 2\sqrt{ac}, \quad a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Les trois membres étant strictement positifs, on peut multiplier ces inégalités :

$$(b+c)(a+c)(a+b) \geq 8\sqrt{bc}\sqrt{ac}\sqrt{ab} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$$

En divisant par $abc > 0$ (ce qui ne change pas le sens) :

$$\Pi \geq \frac{8abc}{abc} = 8.$$

Cas d'égalité. Il faut l'égalité dans les trois inégalités de départ, c'est-à-dire $b = c$, $a = c$ et $a = b$, donc $a = b = c$. Avec $a + b + c = 1$, cela donne $a = b = c = \frac{1}{3}$. On vérifie : $(3-1)^3 = 8$. ✓

À retenir : quand une contrainte du type $a + b + c = 1$ apparaît, le premier réflexe est de **remplacer 1 par $a + b + c$** partout où il figure. C'est ce remplacement, et lui seul, qui débloque l'exercice.

18.3 Un polynôme bicarré, de l'algèbre à la trigonométrie

EXERCICE 18.3 (★★ — $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$)

- Factoriser $P(x)$ en produit de quatre facteurs du premier degré.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$.
- Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ l'équation $P(\cos x) = 0$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(\sqrt{x}) = 0$.

Solution détaillée. 1. Posons $X = x^2$ (avec $X \geq 0$). L'équation $X^2 - 5X + 4 = 0$ a pour racines évidentes $X = 1$ et $X = 4$ (car $1 - 5 + 4 = 0$, donc $X_1 = 1$ et $X_2 = \frac{4}{1} = 4$). Ainsi $X^2 - 5X + 4 = (X - 1)(X - 4)$, d'où

$$P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2).$$

2. Tableau de signes avec les racines $-2 < -1 < 1 < 2$. Le polynôme est de degré 4 à coefficient dominant positif : il est positif « aux extrémités » et change de signe à chaque racine (toutes simples).

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$P(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Donc $S = [-2; -1] \cup [1; 2]$.

3. $P(\cos x) = 0$ équivaut à $\cos x \in \{-2; -1; 1; 2\}$. Comme $|\cos x| \leq 1$, on rejette -2 et 2 (voir l'annexe B, section « Équations ») et il reste

$$\cos x = 1 \text{ ou } \cos x = -1.$$

Sur $] -\pi; \pi]$: $\cos x = 1$ donne $x = 0$; $\cos x = -1$ donne $x = \pi$. Donc $S = \{0; \pi\}$.

4. L'équation impose $x \geq 0$. En posant $t = \sqrt{x} \geq 0$, on résout $P(t) = 0$ avec $t \geq 0$: il reste $t = 1$ et $t = 2$, d'où $\sqrt{x} = 1$ ou $\sqrt{x} = 2$, soit $x = 1$ ou $x = 4$. Donc $S = \{1; 4\}$.

Contrôle : $P(\sqrt{4}) = P(2) = 16 - 20 + 4 = 0$ ✓.

18.4 Étude d'une fonction avec centre de symétrie

EXERCICE 18.4 (★★★ — $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$)

Soit f définie par $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$.

- Déterminer D_f .
- Montrer que le point $\Omega(1; 1)$ est centre de symétrie de la courbe de f .
- Étudier les variations de f sur $]1; +\infty[$ et en déduire son minimum sur cet intervalle.

4. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq x$.

Solution détaillée. 1. Le dénominateur doit être non nul : $x \neq 1$. Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, ensemble symétrique par rapport à 1 (ce qui rend la question 2 plausible).

2. Pour tout réel $h \neq 0$, les nombres $1+h$ et $1-h$ appartiennent à D_f et

$$f(1+h) = 1+h+\frac{1}{h}, \quad f(1-h) = 1-h+\frac{1}{-h} = 1-h-\frac{1}{h}.$$

Donc

$$f(1+h) + f(1-h) = 2 = 2 \times 1.$$

C'est exactement la caractérisation du centre de symétrie $\Omega(\alpha; \beta)$ avec $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. Le point $\Omega(1; 1)$ est donc centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

3. Soient a et b dans $]1; +\infty[$ avec $a \neq b$. Le taux de variation vaut

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(b-a) + \left(\frac{1}{b-1} - \frac{1}{a-1}\right)}{b-a} = 1 + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(a-1) - (b-1)}{(a-1)(b-1)} = 1 - \frac{1}{(a-1)(b-1)}.$$

Sur $]1; +\infty[$, on a $(a-1)(b-1) > 0$, donc :

- si $(a-1)(b-1) > 1$, alors $T > 0$: f est croissante ;
- si $(a-1)(b-1) < 1$, alors $T < 0$: f est décroissante.

La frontière est atteinte pour $a = b = 2$ (puisque $(2-1)^2 = 1$). Précisément : f est **décroissante** sur $]1; 2]$ et **croissante** sur $[2; +\infty[$.

Le minimum est donc $f(2) = 2 + \frac{1}{1} = 3$, atteint en $x = 2$.

Contrôle par une inégalité connue : pour $x > 1$, en posant $u = x - 1 > 0$, $f(x) = 1 + u + \frac{1}{u} \geq 1 + 2 = 3$, avec égalité si $u = 1$, c'est-à-dire $x = 2$. ✓ (On retrouve l'inégalité $u + \frac{1}{u} \geq 2$ du chapitre 3.)

4. $f(x) \geq x \iff \frac{1}{x-1} \geq 0 \iff x-1 > 0 \iff x > 1$. Donc $S =]1; +\infty[$.

Interprétation : la droite d'équation $y = x$ est « au-dessous » de la courbe pour $x > 1$ et au-dessus pour $x < 1$; c'est une asymptote oblique de $\mathcal{C}_f$, ce que la symétrie de centre $\Omega(1; 1)$ laissait prévoir. ■

18.5 Équation et inéquation trigonométriques

EXERCICE 18.5 (★★ — $2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0$)

1. Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ l'équation $2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0$.
2. Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ l'inéquation $2 \sin^2 x - 3 \cos x \geq 0$.

Solution détaillée. 1. Tout ramener à $\cos x$ grâce à $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0 \iff -2 \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0 \iff 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0.$$

Posons $t = \cos x$ avec la condition $-1 \leq t \leq 1$ (c'est elle qui fera le tri).

$$2t^2 + 3t - 2 = 0, \quad \Delta = 9 + 16 = 25, \quad t = \frac{-3 \pm 5}{4} \implies t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = -2.$$

On rejette $t_2 = -2$ (hors de $[-1; 1]$). Il reste

$$\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Dans $] -\pi; \pi]$: $S = \left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\}$.

2. L'inéquation s'écrit $-2t^2 - 3t + 2 \geq 0$, soit $2t^2 + 3t - 2 \leq 0$ avec $t = \cos x$. Le trinôme $2t^2 + 3t - 2$ a pour racines -2 et $\frac{1}{2}$ et son coefficient dominant est positif : il est négatif ou nul entre les racines. Donc

$$-2 \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

Comme on a toujours $t = \cos x \geq -1$, la condition se réduit à $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

Sur le cercle trigonométrique, $\cos x \leq \frac{1}{2}$ correspond aux points situés à gauche de la droite verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$, soit, dans $] -\pi; \pi]$:

$$S =]-\pi; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}; \pi].$$

Contrôle : pour $x = \pi$, $2\sin^2 \pi - 3\cos \pi = 0 + 3 = 3 \geq 0$ ✓ ; pour $x = 0$, on obtient $-3 < 0$, et 0 n'est effectivement pas dans S ✓. ■

18.6 Géométrie analytique complète

EXERCICE 18.6 (★★★ — triangle et cercle circonscrit)

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne $A(1; -2)$, $B(5; 2)$ et $C(-1; 4)$.

1. Calculer AB , AC et BC . En déduire la nature du triangle ABC .
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) , puis la distance de C à (AB) .
3. Calculer l'aire du triangle ABC de deux façons différentes.
4. Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit à ABC .

Solution détaillée. 1. $\overrightarrow{AB}(4; 4)$, $\overrightarrow{AC}(-2; 6)$, $\overrightarrow{BC}(-6; 2)$.

$$AB = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}, \quad AC = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}, \quad BC = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10}.$$

Comme $AC = BC$, le triangle est **isocèle en C**. Est-il rectangle ? $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (2)(6) + (-6)(-2) = 12 + 12 = 24 \neq 0$, donc non. (On vérifie aussi $AB^2 = 32$ et $AC^2 + BC^2 = 80 \neq 32$.)

2. $\overrightarrow{AB}(4; 4)$ est directeur, donc (AB) a une équation de la forme $x - y + c = 0$ (un vecteur directeur $(-b; a)$ avec $a = 1, b = -1$ donne bien $(1; 1)$, colinéaire à $(4; 4)$). En reportant $A(1; -2)$: $1 + 2 + c = 0$, d'où $c = -3$:

$$(AB) : x - y - 3 = 0.$$

Contrôle avec B : $5 - 2 - 3 = 0$ ✓.

$$d(C, (AB)) = \frac{|(-1) - 4 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

3. Première méthode (base $\times$ hauteur) :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times d(C, (AB)) = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 32 = 16.$$

Deuxième méthode (déterminant) :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |4 \times 6 - 4 \times (-2)| = \frac{1}{2} \times 32 = 16. \quad 3$$

4. Le centre Ω du cercle circonscrit est le point d'intersection des médiatrices.

- Médiatrice de $[AB]$: elle passe par le milieu $I(3; 0)$ et est orthogonale à $\overrightarrow{AB}(4; 4)$. Son équation est $4(x - 3) + 4(y - 0) = 0$, soit $x + y - 3 = 0$.
- Médiatrice de $[AC]$: milieu $J(0; 1)$, orthogonale à $\overrightarrow{AC}(-2; 6)$: $-2(x - 0) + 6(y - 1) = 0$, soit $-x + 3y - 3 = 0$.

Réolvons le système :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + 3y = 3 \end{cases} \implies 4y = 6 \implies y = \frac{3}{2}, \quad x = \frac{3}{2}.$$

Donc $\Omega \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right)$ et

$$R = \Omega A = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Contrôle avec C : $\Omega C = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \checkmark$.

Le cercle circonscrit a donc pour équation $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{2}$. ■

18.7 Vecteurs, centre de gravité et homothéties

EXERCICE 18.7 (★★★ — le triangle médian)

Soit ABC un triangle, A' , B' , C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$, et G le centre de gravité de ABC .

1. Rappeler pourquoi $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
2. Montrer que A' est l'image de A par l'homothétie $h_1 = h\left(G; -\frac{1}{2}\right)$. En déduire l'image du triangle ABC par h_1 .
3. Quel est le rapport des aires des triangles $A'B'C'$ et ABC ?
4. Soit $h_2 = h\left(A; \frac{1}{2}\right)$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h_2 \circ h_1$.

Solution détaillée. 1. Le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. (Résultat du chapitre 9.)

2. De $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ on tire $\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. Par conséquent

$$\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}.$$

C'est exactement la définition de $h_1 = h\left(G; -\frac{1}{2}\right)$: donc $h_1(A) = A'$.

Le même calcul, appliqué aux médianes issues de B et de C , donne $h_1(B) = B'$ et $h_1(C) = C'$. L'image du triangle ABC par h_1 est donc le **triangle médian** $A'B'C'$.

3. Une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2 . Ici $k = -\frac{1}{2}$, donc

$$\frac{\mathcal{A}_{A'B'C'}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Le triangle médian a le **quart** de l'aire du triangle initial (et non la moitié : voir l'annexe B, section « Transformations »).

4. Le rapport de la composée est le produit des rapports : $k = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \neq 1$. La composée $h_2 \circ h_1$ est donc une **homothétie de rapport** $-\frac{1}{4}$.

Recherche du centre. Notons Ω ce centre : c'est l'unique point fixe. Travaillons avec des vecteurs d'origine A .

$$\bullet h_1(M) = M_1 \text{ avec } \overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM_1} = \overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AG}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}.$$

$$\bullet h_2(M_1) = M_2 \text{ avec } \overrightarrow{AM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM_1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AM}.$$

Le point fixe vérifie $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Omega}$, d'où

$$\frac{5}{4}\overrightarrow{A\Omega} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} \implies \overrightarrow{A\Omega} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AG}.$$

Ainsi $h_2 \circ h_1$ est l'homothétie de rapport $-\frac{1}{4}$ dont le centre Ω appartient au segment $[AG]$, avec $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AG}$.
Contrôle : le rapport étant négatif, Ω doit se trouver « entre » chaque point et son image, ce qui est cohérent avec un centre situé à l'intérieur du triangle. ■

18.8 Une pyramide, de la section au volume

EXERCICE 18.8 (★★ — pyramide à base carrée)

$SABCD$ est une pyramide de base carrée $ABCD$ de côté 6 cm, de sommet S , dont la hauteur $[SO]$ mesure 9 cm (O est le centre du carré).

1. Calculer la longueur d'une arête latérale SA .
2. Soit I le milieu de $[SA]$. Le plan passant par I et parallèle à la base coupe la pyramide selon un carré. Déterminer son côté et son aire.
3. Calculer le volume de la pyramide, puis celui du tronc situé entre le plan de coupe et la base.
4. Calculer l'aire du triangle SBD .

Solution détaillée. 1. On isole le triangle SOA , rectangle en O (car $[SO]$ est la hauteur). La diagonale du carré vaut $AC = 6\sqrt{2}$, donc $OA = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$. Pythagore :

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 = 81 + (3\sqrt{2})^2 = 81 + 18 = 99 \Rightarrow SA = \sqrt{99} = 3\sqrt{11} \approx 9,95 \text{ cm.}$$

Contrôle d'ordre de grandeur : l'arête latérale doit être un peu plus longue que la hauteur 9 cm. ✓

2. La section par un plan parallèle à la base est une **réduction** de la base. Le coefficient est le rapport des distances au sommet ; comme I est le milieu de $[SA]$, ce rapport vaut $k = \frac{1}{2}$.

$$\text{côté} = 6 \times \frac{1}{2} = 3 \text{ cm}, \quad \mathcal{A} = 3^2 = 9 \text{ cm}^2 = 36 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2. \quad 3$$

3. Volume de la pyramide :

$$V = \frac{B \times h}{3} = \frac{36 \times 9}{3} = 108 \text{ cm}^3.$$

La petite pyramide (au-dessus du plan de coupe) est une réduction de rapport $\frac{1}{2}$: son volume est multiplié par k^3 , soit

$$V' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 108 = \frac{108}{8} = 13,5 \text{ cm}^3.$$

Volume du tronc : $V - V' = 108 - 13,5 = 94,5 \text{ cm}^3$.

Piège classique : diviser par 2 au lieu de 8 (voir l'annexe B, section « Transformations »).

4. Les points B, O, D sont alignés (O est le milieu de $[BD]$), et (SO) est perpendiculaire au plan de base donc à (BD) : $[SO]$ est la **hauteur du triangle** SBD issue de S .

$$BD = 6\sqrt{2} \Rightarrow \mathcal{A}_{SBD} = \frac{BD \times SO}{2} = \frac{6\sqrt{2} \times 9}{2} = 27\sqrt{2} \approx 38,2 \text{ cm}^2. \quad \blacksquare$$

■ ET MAINTENANT ?

Si vous avez traité ces huit problèmes seul, avec au plus une aide ponctuelle du corrigé, vous possédez l'essentiel du programme de Tronc Commun scientifique. Ce qui vous reste à faire tient en une phrase : **refaire, à intervalles espacés, les exercices que vous n'avez pas su faire du premier coup**. Le reste — l'aisance, la vitesse, la confiance — vient tout seul.

Auto-évaluation : 80 questions flash

Répondez de tête, sans papier, à raison d'une dizaine de questions par séance. Chronométrez-vous : une question doit être traitée en moins de trente secondes. Toute question ratée renvoie au chapitre correspondant — ce n'est pas une note, c'est un diagnostic. Les réponses figurent à la fin de l'annexe.

19.1 Questions

Ensembles de nombres et calcul (1–10)

1. Simplifier $\sqrt{(-5)^2}$.
2. Le nombre 0,25 appartient-il à $\mathbb{D}$? à $\mathbb{Q}$?
3. $\frac{1}{3}$ est-il décimal ?
4. Donner l'écriture fractionnaire de $0,\overline{7}$.
5. Rationaliser $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$.
6. Développer $(2x-3)^2$.
7. Factoriser x^2-7 .
8. Calculer $(2^3)^2 \div 2^4$.
9. La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est-elle irrationnelle ?
10. Simplifier $\sqrt{50} - \sqrt{18}$.

Arithmétique (11–20)

11. Quel est le reste de -17 dans la division euclidienne par 5 ?
12. PGCD(24, 36) ?
13. PPCM(4, 6) ?
14. Combien 36 a-t-il de diviseurs ?
15. 91 est-il premier ?
16. Jusqu'où tester pour savoir si 211 est premier ?
17. Critère de divisibilité par 9 ?
18. Critère de divisibilité par 4 ?
19. PGCD(a, b) $\times$ PPCM(a, b) = ?
20. 8 et 9 sont-ils premiers entre eux ?

Ordre, valeur absolue, inégalités (21–30)

21. Résoudre $|x-3| \leq 2$.
22. Résoudre $|x| \geq 4$.
23. Si $a < b$, que dire de $-2a$ et $-2b$?
24. Si $-3 \leq x \leq 2$, encadrer x^2 .
25. Minimum de $x + \frac{1}{x}$ pour $x > 0$?
26. A-t-on toujours $a^2 + b^2 \geq 2ab$?
27. $E(-2, 3) = ?$
28. Si $0 < a < b$, comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.
29. $|x+y| \leq |x| + |y|$: toujours vrai ?
30. Traduire $x \in [a-r; a+r]$ avec une valeur absolue.

Polynômes et équations (31–42)

31. Racines de $x^2 - 5x + 6 = 0$ (de tête).
32. Somme et produit des racines de $2x^2 - 6x + 1 = 0$?
33. Si $a + b + c = 0$, quelle est une racine évidente ?
34. Signe de $-x^2 + 4$ sur $\mathbb{R}$?
35. Que vaut $P(1)$ pour $P(x) = 3x^3 - x + 2$?
36. 2 est racine de P : que peut-on factoriser ?
37. Résoudre $x^2 = 9$.
38. Résoudre $\sqrt{x} = -2$.
39. Condition pour que $|A| = B$ ait des solutions ?
40. Que faire avant de résoudre $\frac{x+1}{x-2} = 3$?
41. Résoudre $x(x-3) = 0$.
42. Si $\Delta = 0$, combien de solutions ?

Fonctions (43–52)

43. Domaine de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

44. Domaine de $g(x) = \sqrt{3-x}$.

45. $f(x) = x^3$ est-elle paire, impaire ?

46. Taux de variation de $x \mapsto x^2$ entre a et b ?

47. Taux de variation de $x \mapsto \frac{1}{x}$ entre a et b ?

48. Sens de variation de $x \mapsto \sqrt{x}$?

49. Sommet de la parabole $y = x^2 - 4x + 1$?

50. Centre de symétrie de $\frac{3x+1}{x-2}$?

51. Que faut-il vérifier avant de conclure à la parité ?

52. Image ou antécédent : dans $f(2) = 7$, que représente 7 ?

Trigonométrie (53–62)

53. $\cos \frac{\pi}{6} = ?$

54. $\sin \frac{\pi}{3} = ?$

55. $\cos(\pi - x) = ?$

56. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ?$

57. Résoudre $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$.

58. Résoudre $\sin x = 1$ dans $\mathbb{R}$.

59. $\cos^2 x + \sin^2 x = ?$

60. $\sin 2a = ?$

61. Combien de solutions pour $\cos x = 0,3$ sur $[0; 2\pi[$?

62. $\tan x$ est-elle définie en $\frac{\pi}{2}$?

Statistiques (63–68)

63. Formule de la variance (König) ?

64. Si $y = 3x + 2$, que vaut σ_y ?

65. La médiane se lit sur quelle courbe ?

66. Peut-on faire la moyenne de deux moyennes ?

67. Que représente l'aire d'un rectangle d'histogramme ?

68. Unité de l'écart-type ?

Géométrie (69–80)

69. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = ?$

70. Critère de colinéarité de $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$?

71. Vecteur directeur de $3x - 2y + 1 = 0$?

72. Coefficient directeur de la même droite ?

73. Expression du produit scalaire en repère orthonormé ?

74. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ signifie ?

75. Formule d'Al-Kashi ?

76. Distance de M_0 à $ax + by + c = 0$?

77. Aire du triangle ABC à l'aide d'un déterminant ?

78. Homothétie de rapport -3 : effet sur les aires ?

79. Diagonale d'un cube d'arête a ?

80. Volume d'une pyramide de base $\mathcal{B}$ et de hauteur h ?

19.2 Réponses

1. 5 (c'est $|-5|$).

2. Oui aux deux : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

3. Non (dénominateur 3).

4. $\frac{7}{9}$.

5. $\sqrt{5} + 2$.

6. $4x^2 - 12x + 9$.

7. $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$.

8. $2^{6-4} = 4$.

9. Oui (démonstration par l'absurde).

10. $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

11. 3, car $-17 = 5 \times (-4) + 3$.

12. 12.

13. 12.

14. 9 (car $36 = 2^2 \times 3^2$).

15. Non : $91 = 7 \times 13$.

16. Jusqu'à $\sqrt{211} \approx 14,5$, donc 14.

17. Somme des chiffres divisible par 9.

18. Nombre formé par les deux derniers chiffres divisible par 4.
19. ab .
20. Oui : $\text{PGCD}(8, 9) = 1$.
21. $[1; 5]$.
22. $] - \infty; -4] \cup [4; +\infty[$.
23. $-2a > -2b$.
24. $0 \leq x^2 \leq 9$.
25. 2, atteint en $x = 1$.
26. Oui, pour tous réels.
27. -3 .
28. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
29. Oui (inégalité triangulaire).
30. $|x - a| \leq r$.
31. 2 et 3.
32. $S = 3, P = \frac{1}{2}$.
33. $x = 1$.
34. Positif sur $[-2; 2]$, négatif ailleurs.
35. $3 - 1 + 2 = 4$.
36. $P(x) = (x - 2)Q(x)$.
37. $x = 3$ ou $x = -3$.
38. Aucune solution.
39. $B \geq 0$.
40. Poser $x \neq 2$.
41. $x = 0$ ou $x = 3$.
42. Une solution double.
43. $]2; +\infty[$.
44. $] - \infty; 3]$.
45. Impaire.
46. $a + b$.
47. $-\frac{1}{ab}$.
48. Croissante sur $[0; +\infty[$.
49. $(2; -3)$.
50. $(2; 3)$.
51. La symétrie du domaine par rapport à 0.
52. L'image de 2.
53. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
54. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
55. $-\cos x$.
56. $\cos x$.
57. $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.
58. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
59. 1.
60. $2 \sin a \cos a$.
61. Deux.
62. Non.
63. $V = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$.
64. $3\sigma_x$.
65. La courbe des effectifs cumulés croissants.
66. Seulement en pondérant par les effectifs.
67. L'effectif (ou la fréquence) de la classe.
68. La même que celle des données.
69. $\overrightarrow{AC}$.
70. $xy' - x'y = 0$.
71. $\overrightarrow{u}(2; 3)$.
72. $m = \frac{3}{2}$.
73. $xx' + yy'$.
74. $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ (ou l'un est nul).
75. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.
76. $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
77. $\frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \right|$.
78. Multipliées par 9.
79. $a\sqrt{3}$.
80. $\frac{Bh}{3}$.

ASTUCE 19.1 — Comment exploiter votre score

Moins de 50 bonnes réponses : reprenez les chapitres concernés depuis le *Cours express*.

Entre 50 et 68 : vos bases sont là, travaillez les exercices ** des chapitres faibles.

Plus de 68 : passez directement aux problèmes de synthèse de l'annexe D.

Dans tous les cas, refaites ce test dans trois semaines : c'est l'écart entre les deux scores qui mesure vos progrès, pas le score lui-même.

Lexique : les mots qui changent tout

En mathématiques, chaque mot de l'énoncé est une consigne technique. Confondre « résoudre » et « simplifier », ou « montrer que » et « étudier », c'est répondre à côté et perdre la totalité des points d'une question pourtant comprise. Ce lexique est à lire une fois entièrement, puis à consulter chaque fois qu'un énoncé vous paraît ambigu.

20.1 Les verbes des énoncés

Consigne	Ce que le correcteur attend exactement
Calculer	Un résultat numérique ou une expression simplifiée, avec les étapes du calcul. Le résultat final doit être encadré.
Simplifier	Réduire l'expression à sa forme la plus courte. Attention : il faut souvent préciser les valeurs interdites.
Résoudre	Donner l' ensemble des solutions, avec la notation $S = \{\dots\}$ ou $S = [\dots]$, après avoir posé le domaine.
Discuter	Résoudre <i>selon les valeurs</i> d'un paramètre : il faut découper en cas et donner la conclusion dans chaque cas.
Montrer que	Le résultat est donné : on part des hypothèses et on aboutit à ce résultat. Interdit de partir du résultat pour retomber sur les hypothèses.
En déduire	Vous devez impérativement utiliser la question précédente . Si votre démonstration ne s'en sert pas, elle est hors sujet.
Étudier	Faire une analyse complète : domaine, parité, variations, valeurs remarquables, selon le contexte.
Déterminer	Trouver <i>et</i> justifier. Un résultat annoncé sans justification vaut peu.
Vérifier	Remplacer et contrôler ; c'est un calcul, pas une démonstration.
Justifier	Nommer la propriété utilisée et vérifier ses hypothèses.
Construire	Faire une figure à la règle et au compas, en laissant les traits de construction apparents.
Interpréter	Traduire un résultat mathématique en phrase concrète (géométrie, statistique...).
Comparer	Étudier le signe de la <i>différence</i> , ou le rapport si les quantités sont strictement positives.
Conjecturer	Émettre une hypothèse à partir d'un dessin ou de cas particuliers. Une conjecture n'est pas une preuve : elle appelle une démonstration.

❌ PIÈGE 20.1 — « Montrer que » : le sens de la démonstration

❌ Pour montrer que $a^2 + b^2 \geq 2ab$, écrire $a^2 + b^2 \geq 2ab$ puis $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ puis $(a - b)^2 \geq 0$ « ce qui est vrai ».

✓ On part du vrai : « Pour tous réels a, b , $(a - b)^2 \geq 0$. En développant, $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, donc $a^2 + b^2 \geq 2ab$. »

Règle : une démonstration va des hypothèses vers la conclusion. Le raisonnement inverse ne vaut

que si chaque étape est une *équivalence* — et il faut alors l'écrire explicitement.

20.2 Les mots du raisonnement

Terme	Sens précis
Si... alors	Implication : l'hypothèse entraîne la conclusion. Ne dit rien de la réciproque.
Si et seulement si	Équivalence : les deux implications sont vraies. Deux fois plus de travail — et deux fois plus de points.
Il existe	Il suffit d'exhiber un exemple pour prouver ; il faut tout épuiser pour réfuter.
Pour tout	Il suffit d' un contre-exemple pour réfuter ; il faut une démonstration générale pour prouver.
Contre-exemple	Un seul cas qui met en défaut l'affirmation. C'est une preuve complète de fausseté : ne vous en excusez pas, encadrez-le.
Par l'absurde	On suppose le contraire de ce qu'on veut prouver et on aboutit à une contradiction. À utiliser pour les irrationalités et les « il n'existe pas ».
Disjonction de cas	On découpe la situation en cas exhaustifs (par exemple selon le signe de x ou le reste modulo 3) et on conclut dans chacun.
Condition nécessaire	Sans elle, c'est faux — mais elle ne suffit pas.
Condition suffisante	Elle garantit le résultat — mais d'autres chemins existent.
Réciproque	On échange hypothèse et conclusion. Elle peut être vraie ou fausse : elle se démontre à part.

20.3 Le vocabulaire technique du programme

Mot	Définition utilisable en devoir
Entiers consécutifs	n et $n + 1$. Parmi deux consécutifs, un est pair.
Premiers entre eux	$\text{PGCD}(a, b) = 1$. N'implique pas que a ou b soit premier.
Décimal	S'écrit $\frac{a}{10^n}$; de façon équivalente, sa fraction irréductible a un dénominateur de la forme $2^\alpha 5^\beta$.
Irréductible (fraction)	Numérateur et dénominateur premiers entre eux.
Valeur absolue	Distance à zéro : $ x = x$ si $x \geq 0$, $-x$ sinon. Toujours positive.
Partie entière	$E(x)$ est le plus grand entier $\leq x$. Attention aux négatifs : $E(-2,3) = -3$.
Encadrement	Une double inégalité $a \leq x \leq b$. Son <i>amplitude</i> est $b - a$.
Valeurs interdites	Valeurs qui annulent un dénominateur ou rendent un radicande négatif.
Racine (d'un polynôme)	Valeur qui annule le polynôme. Équivaut à un facteur $(x - a)$.
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$: son signe donne le nombre de racines réelles.
Fonction paire / impaire	$f(-x) = f(x)$ / $f(-x) = -f(x)$, sur un domaine symétrique.
Taux de variation	$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$: son signe donne le sens de variation.

Mot	Définition utilisable en devoir
Extremum	Maximum ou minimum ; on précise toujours <i>en quel point</i> il est atteint.
Radian	Unité d'angle telle que le tour complet vaut 2π . $180^\circ = \pi$ rad.
Angles associés	$-x, \pi - x, \pi + x, \frac{\pi}{2} - x, \frac{\pi}{2} + x$: leurs lignes trigonométriques se déduisent de celles de x .
Effectif / fréquence	Un nombre d'individus / une proportion (entre 0 et 1, ou en %).
Écart-type	Racine carrée de la variance ; mesure la dispersion, dans l'unité des données.
Colinéaires	Deux vecteurs de même direction : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
Orthogonaux	Produit scalaire nul. Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.
Vecteur directeur	Vecteur non nul donnant la direction d'une droite. Pour $ax + by + c = 0$: $\vec{u}(-b; a)$.
Médiatrice	Ensemble des points équidistants de deux points ; perpendiculaire au segment en son milieu.
Isométrie	Transformation qui conserve les distances : translation, symétries, rotation.
Homothétie	$\vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M}$: conserve les angles, multiplie les longueurs par $ k $.
Coplanaires	Situés dans un même plan. Deux droites de l'espace peuvent ne pas l'être.
Section plane	Intersection d'un solide et d'un plan : c'est un polygone (ou un disque).
Perspective cavalière	Représentation plane d'un solide : conserve le parallélisme et les milieux, pas les angles ni les longueurs.

ASTUCE 20.1 — Le test du vocabulaire

Avant un contrôle, prenez cette liste et cachez la colonne de droite. Si vous ne savez pas redonner la définition d'un mot en une phrase, vous ne saurez pas l'utiliser dans une démonstration. La maîtrise du vocabulaire n'est pas un supplément de culture : c'est la moitié de la note de rédaction.

20.4 Symboles et notations

$\in$	appartient à	$\subset$	est inclus dans
$\cup$	réunion	$\cap$	intersection
$\emptyset$	ensemble vide	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$ privé de 0
$\mathbb{R}^+$	réels positifs	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}$ privé de 1
$\Rightarrow$	implique	$\Leftrightarrow$	équivalent à
$\forall$	pour tout	$\exists$	il existe
$ $	divise	$\nmid$	ne divise pas
$ x $	valeur absolue	$E(x)$	partie entière
$\overrightarrow{AB}$	vecteur	$\vec{u} \cdot \vec{v}$	produit scalaire
$\ \vec{u}\ $	norme	$\det(\vec{u}, \vec{v})$	déterminant
$\parallel$	parallèle à	$\perp$	perpendiculaire à
$[AB]$	segment	(AB)	droite
PGCD	plus grand commun diviseur	PPCM	plus petit commun multiple

■ DERNIER MOT

Un livre d'astuces ne remplace pas le travail : il le rend rentable. Vous savez maintenant *où* sont les pièges et *comment* on gagne du temps. Le reste dépend d'une seule chose, la seule que personne ne peut faire à votre place : **prendre une feuille blanche et chercher.**

Bon courage, et bonne année scolaire.