

A) Définition d'une fonction

Activité :

Dans une boutique de vente d'un article unique, coûte 45 Dhs, avec prix de livraison fixe de 20 Dhs quel que soit le nombre d'articles ou la distance.

On note :

x : le nombre d'articles achetés.

$f(x)$: le prix total à payer qui dépend de x .

1- Déterminer la relation entre $f(x)$ et x . (On peut dire "Déterminer $f(x)$ en fonction de x ").

2- Quel est le prix à payer pour 7 articles ?

3- Calculer $f(3)$ et $f(25)$.

4- Quel est le nombre de produits qu'on peut acheter à 425 Dhs ?

Définition :

Une fonction f est un procédé qui permet d'associer à tout nombre x , élément d'un ensemble E , un nombre **unique** notée $f(x)$.

L'élément x de E est appelée **la variable**.

Le nombre $f(x)$ est **l'image** de x par la fonction f .

Si x vérifie $f(x) = y$, on dit que x est **un antécédent** de y .

Exemple : Soit la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 5]$ par l'expression : $f(x) = x^2 - x + 2$

L'ensemble de définition est $[-3; 5]$.

Le nombre 4 a pour image $f(4) = 14$.

On calcule $f(0) = 2$ et $f(1) = 2$. Ainsi 0 et 1 sont deux antécédents de 2 par f .

Exemple : Soit la fonction $f : x \rightarrow x^2 - x$

Déterminer l'image de -5 ; 0 ; 3 et 10, puis rechercher les antécédents de 0

B) Ensemble de définition d'une fonction

Définition :

On appelle **ensemble de définition** de la fonction f l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable x dans le calcul de $f(x)$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 6]$ par l'expression $f(x) = 3x^2 - 1$

L'ensemble de définition de f est $[-1; 6]$; pour tout nombre x de $[-1; 6]$ le nombre $f(x)$ Existe dans $\mathbb{R}$.

Exemple : Soit la fonction g définie par l'expression $g(x) = \frac{1}{x}$

Pour pouvoir calculer $g(x)$, le nombre x ne doit pas être égal à zéro.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} - \{0\}$ ou encore $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Exemple : Soit la fonction $h : x \rightarrow \sqrt{x}$.

Pour pouvoir calculer $h(x)$, le nombre x ne doit pas être négatif.

L'ensemble de définition de h est donc $[0, +\infty[$.

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x+3} ; \quad g : x \mapsto \frac{1}{x^2+9} ; \quad h : x \mapsto \frac{x-4}{2x+5} ; \quad u : x \mapsto \sqrt{x-7} ;$$

$$v : x \mapsto \sqrt{x^2-6x+5} ; \quad p : x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}}{x-5}$$

C) Courbe représentative d'une fonction

Définition :

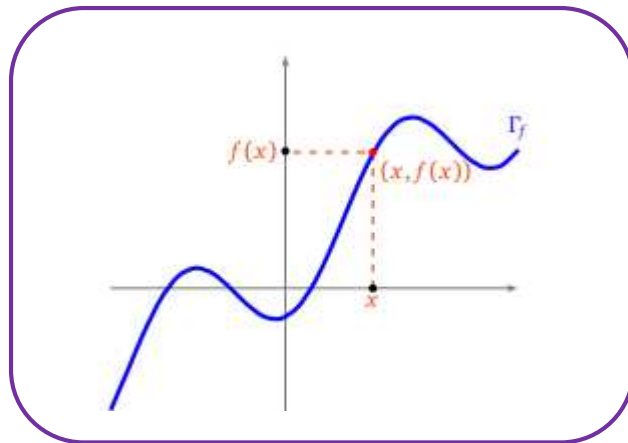
On appelle **une courbe représentative**

(ou représentation graphique)

de la fonction f l'ensemble des points M du

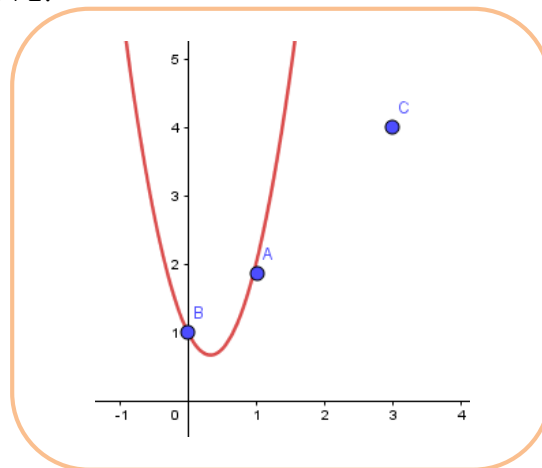
Plan de coordonnées $(x, f(x))$, où x parcourt l'ensemble de définition E de f .

En d'autres termes, le point $M(x; y)$ est sur la courbe représentative de la fonction f si et seulement si $y = f(x)$.



Exemple : Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

- ✓ $A(1, 2)$ est sur la courbe de f , car $f(1) = 2$.
- ✓ $B(0, 1)$ est sur la courbe de f , car $f(0) = 1$.
- ✓ $C(3, 4)$ n'est pas sur la courbe de f , car $f(3) = 22$.



Exercice 2 On sait que la fonction f vérifie les conditions suivantes :

- son ensemble de définition est $D = [-5; 4]$;
- les nombres -4 et 4 ont la même image 3 ;
- les solutions de l'équation $f(x) = -2$ sont 1 et 2 ;
- le nombre -5 est un antécédent de 0 par f ;
- $f(-2) = -1$, $f(0) = -3$ et $f(3) = 0$, 5 .

Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f .

D) Egalité de deux fonctions numériques:

Définition :

Soient f et g deux fonctions numériques à variable réelle de domaines de définition D_f et D_g . On dit que **les fonctions f et g sont égales** si et seulement

$$\text{si : } \begin{cases} D_f = D_g \\ \text{pour tout } x \in D_f, f(x) = g(x) \end{cases}$$

Exemple : Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = x$.

On a $D_f = \mathbb{R}$ parce que $x^2 \geq 0$ pour tout réel x ; donc $D_f = D_g$.

Puisque $\sqrt{x^2} = x$ pour tout réel x ; alors $f(x) = g(x)$ d'où $f = g$.

Exercice d'application : Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $h(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

a) Montrer que $f \neq h$.

b) Montrer que $f = h$ sur $I =]0; +\infty[$.

E) La parité d'une fonction

a) Fonction paire.

Soit f une fonction numérique à variable réelle x dont l'ensemble de définition est D

On dit que **f est une fonction paire** si et seulement si :

$$\text{Pour tout } x \text{ appartenant à } D \begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

Exemple : La fonction $f : x \mapsto f(x) = x^2 - 1$ est paire.

En effet : Le domaine de définition est $\mathbb{R}$.

i) Soit $x \in \mathbb{R}$, $-x$ appartenant à $\mathbb{R}$ ii) $f(-x) = (-x)^2 - 1$

$$x^2 - 1 = f(x)$$

Donc pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. Par suite f est une fonction paire.

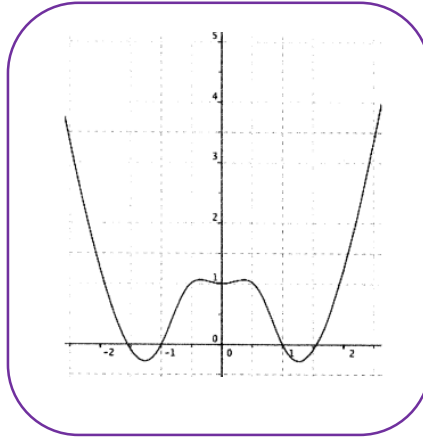
Exercice d'application :

Montrer que la fonction $f : x \mapsto f(x) = x - 4x^2 - 1$ est paire.

b) Interprétation graphique :

Soit f une fonction numérique à variable réelle et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $O \vec{i} \vec{j}$

Si f est une fonction **paire** alors sa représentation graphique C est **symétrique** par rapport à l'axe des ordonnées.

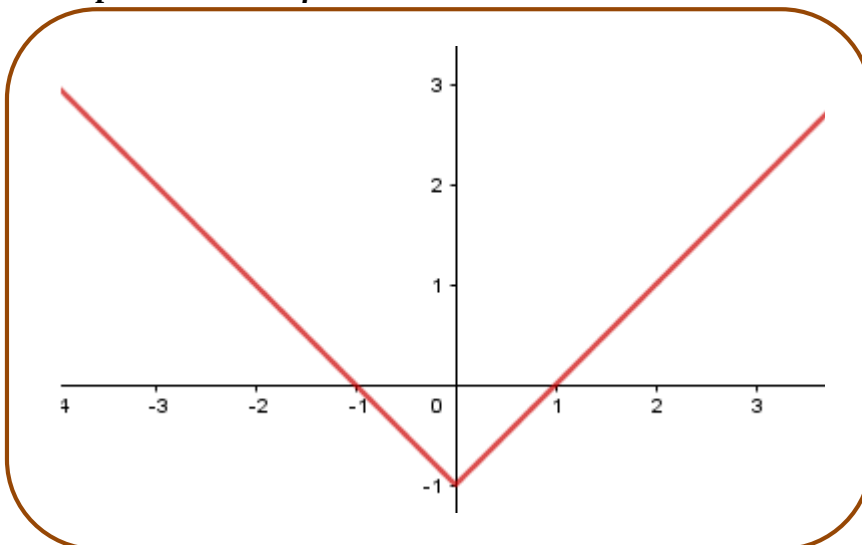


Exercice d'application

- Vérifier que la fonction $f : x \rightarrow f(x) = x^2 - 1$ est paire.
- Ecrire $f(x)$ sans le symbole f .
- Tracer la courbe (C) dans un repère orthogonal $O \vec{i} \vec{j}$.

Solution

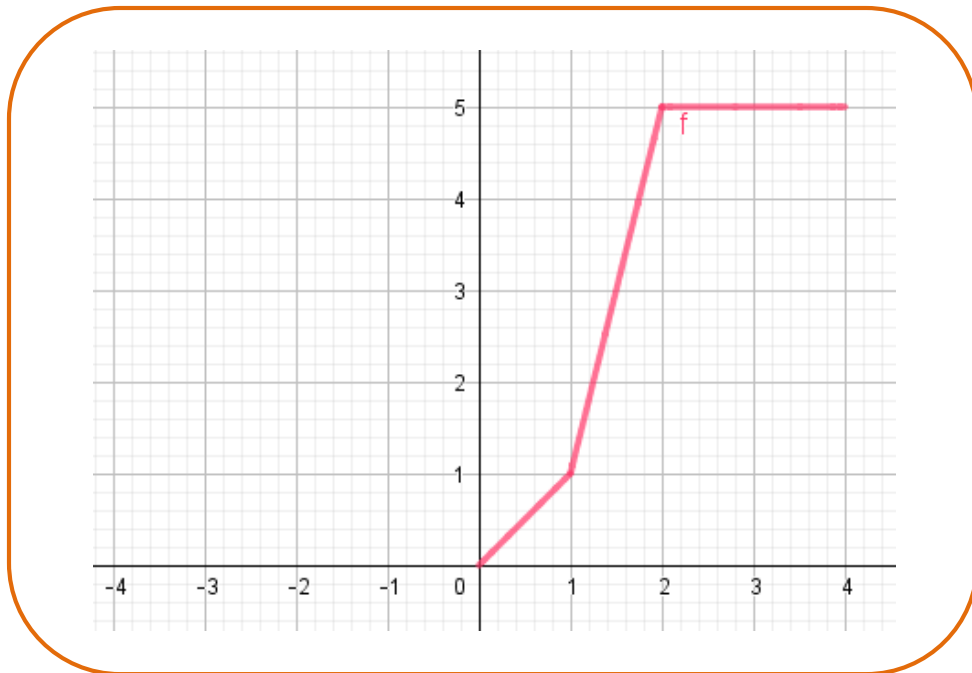
- Voir l'exercice d'application 1 :
- Si $x \geq 0$, $x = x$ d'où $f(x) = x^2 - 1$
Si $x < 0$, $x = -x$ d'où $f(x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1$
- La courbe représentative de f .



Exercice d'application :

Sachant que f est une fonction paire définie sur l'intervalle $[-4; 4]$.

Compléter la courbe de f .



b) Fonction impaire :

Soit f une fonction numérique à variable réelle x dont l'ensemble de définition est D

On dit que **f est une fonction impaire** si et seulement si :

Pour tout x appartenant à D $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Exemple : Soit f une fonction numérique à variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

i) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 \geq 0\}$

$= \mathbb{R}$

ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1}$

$= -\frac{x}{x^2+1}$

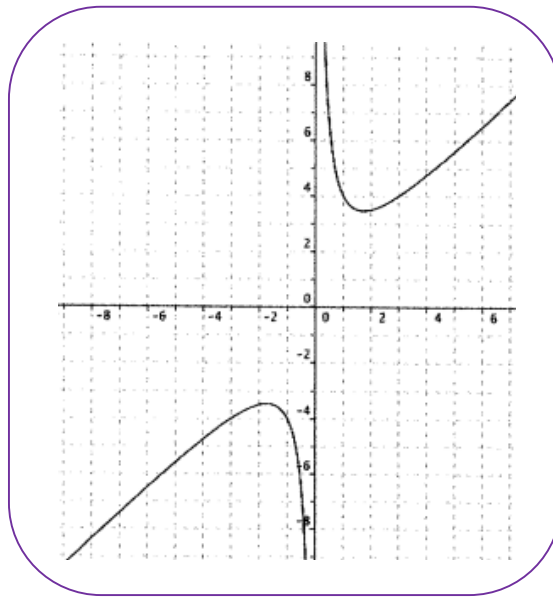
$= -f(x)$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$ par suite f est impaire.

b)Interprétation graphique :

Soit f une fonction numérique à variable réelle x et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $O \vec{i} \vec{j}$

Si f est **une fonction impaire** alors sa représentation graphique C **est symétrique par rapport au point O (origine du repère).**



Exercice d'application :

Sachant que f est une fonction paire définie sur l'intervalle $[-5, 5]$.

Compléter la courbe de f .

