

# Fonctions numériques d'une variable réelle

**Classe** : 10<sup>ème</sup> CG

**Durée** : 12H

**Domaine** : Sciences, Mathématiques et Technologiques.

**Compétences** : Résoudre une situation problème, mettre à profit ses connaissances scientifiques et technologiques, Communiquer des messages utilisant le langage et le symbolisme Mathématiques.

**Composantes** : Diagnostiquer la situation problème, mettre à l'essai des pistes de solutions, partager les informations relatives à la démarche et formuler les résultats.

**Manifestations** : Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation, établir des relations entre les données retenues, inventorier des différentes pistes de solution, Choisir une piste et l'appliquer.

**Contenu** : Généralités sur les fonctions ; Image directe ; Image réciproque ; *Sens de variation* ; Etude de quelques fonctions usuelles ; Fonctions polynômes, Fonctions rationnelles.

**Ressources Educatives** :

**Ressources humaines** : Professeur, élèves,

**Ressources Matérielles** : Tableau, Livres, cahiers, Chiffon, craie, règle, équerre...

**Stratégies d'animation** : Travaux en groupe et à domicile.

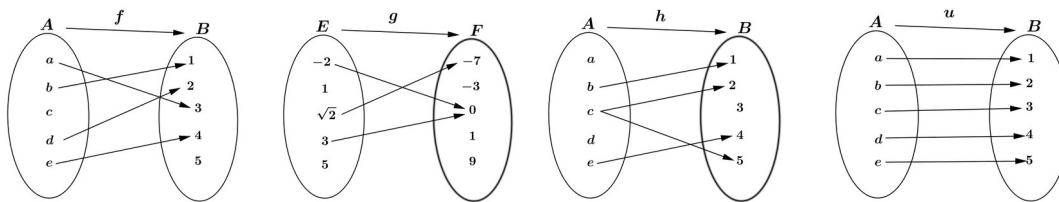
## Séquence 1 : Généralités sur les fonctions

### 1. Définition et vocabulaire :

Soit A et B deux ensembles non vides de  $\mathbb{R}$ . On appelle fonction de A vers B, toute relation de A vers B qui à chaque élément de A associe au plus un élément de B.

**Activité** :

Dites si oui ou non les relations ci-dessous sont des fonctions.



**Notation** :

Si  $f$  est une fonction de A vers B qui à un élément  $x$  de A associe un élément  $f(x)$  de B, on

note :  $f : A \rightarrow B$   
 $x \mapsto f(x)$

A est appelé ensemble de départ ;

B est appelé ensemble d'arrivée ;

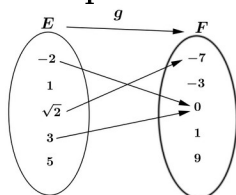
$f(x)$  est appelé l'image de  $x$  par  $f$  ;

$x$  est appelé l'antécédent de  $f(x)$ .

### 2. Détermination de l'ensemble de définition

Soit  $f : A \rightarrow B$  une fonction. On appelle ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ , l'ensemble des éléments  $x$  de A qui ont une image dans B.

**Exemple** : Soit la fonction  $g$  de E vers F définie par :

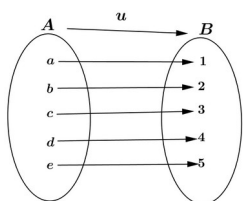


$$D_g = \{-2; \sqrt{2}; 3\} = E - \{1; 5\}$$

### 3. Détermination d'une fonction :

Une fonction peut être déterminée par :

### 3.1 un diagramme Sagittal :



L'image de  $a$  est 1 ; L'antécédent de 3 est  $c$ .

$$D_f = \{a; b; c; d; e\} = A$$

### 3.2 un tableau :

|        |    |    |    |   |   |   |    |    |
|--------|----|----|----|---|---|---|----|----|
| $x$    | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3  | 4  |
| $f(x)$ | -1 | 1  | 3  | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |

$f(0) = 5$  ; L'antécédent de 11 est 3.

### 3.3 un programme de calcul

Soit  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie comme suit :

Pour calculer l'image du réel  $x$  on procède de la façon suivante :

- On le multiplie par 2;
- On ajoute 3 au résultat ;
- On élève le dernier résultat au carré.

Calcule  $g(1)$  et  $g(-3)$ .

### 3.4 une formule explicite :

Soit  $f$  une fonction de  $A$  vers  $B$ . Si  $A$  et  $B$  sont des sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  alors on dit que

$f$  est une fonction numérique d'une variable réelle.

#### Activité :

Soient les fonctions :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & h: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 - 2x^2 + 3x - 1 & ; & x \mapsto \frac{2x+3}{x-2} & ; & x \mapsto \frac{2x+3}{x^2+1} \\ ; & u: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & & & \\ ; & x &\mapsto \sqrt{x-3} & & & \end{aligned}$$

a) Calculer  $f(1)$ ;  $g(3)$ ;  $u(7)$ ;  $h(-2)$  et  $f(-\sqrt{2})$ .

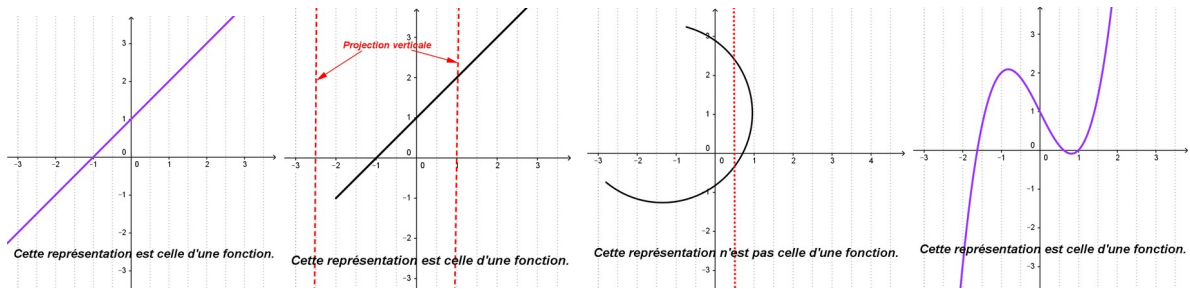
b) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions  $f$ ,  $g$ ;  $h$  et  $u$ .

### 3.5 une représentation graphique :

Pour vérifier qu'une représentation graphique est celle d'une fonction, on vérifie que toute projection (droite) verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) :

- soit ne coupe pas la courbe ;
- soit coupe une seule fois la courbe.

Exemples :



## ***Séquence 2 : Image directe ; Image réciproque***

### **1. Image directe :**

Soit  $f$  une fonction de  $E$  vers  $F$  d'ensemble de définition  $D_f$  et  $A$  une partie de  $E$ .

On appelle image directe ou image de  $A$  par  $f$  notée  $f(A)$  l'ensemble des images par  $f$  de tous les éléments de  $A \cap D_f$ .

$$f(A) = \{f(x), x \in A \cap D_f\}$$

#### **Activité :**

Soit la fonction :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto -2x + 5$$

- Trouver l'image par  $f$  de chacun des nombre suivants : -2 ; 0 ; 2.
- Trouver l'image par  $f$  de  $A = [-1 ; 3 ; 5]$  et  $B = ]-1; 3]$ .

### **2. Image réciproque :**

Soit  $f$  une fonction de  $E$  vers  $F$  d'ensemble de définition  $D_f$  et  $B$  une partie de  $F$ .

On appelle image réciproque de  $B$  par  $f$  notée  $f^{-1}(B)$ , l'ensemble des antécédents par  $f$  de tous les éléments de  $B$ .

$$f^{-1}(B) = \{x, f(x) \in B\}$$

#### **Activité 1 :**

$$\text{Soit } f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2x - 1$$

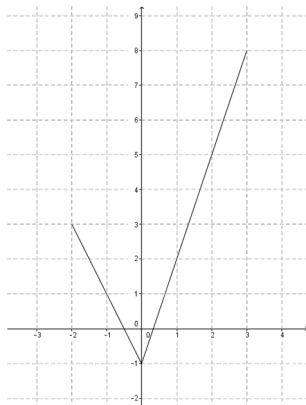
$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2 - x - 2$$

- Déterminer l'ensemble des antécédents par  $f$  de chacun des nombres suivants : -1 ; 0 ; 3.
- Soient  $A = [-1 ; 0 ; 3]$  et  $B = [0 ; -2]$   
Déterminer  $f^{-1}(A)$  et  $g^{-1}(B)$ .

#### **Activité 2 :**

Soit la fonction  $f$  définie par la représentation graphique ci-dessous :



- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- Déterminer graphiquement l'image de chacun des ensembles suivants :

$A = [-2; 0; 2]; B = ]1; 2[$  et  $C = [-1; 1]$ .

c) Déterminer graphiquement l'image réciproque de chacun des ensembles suivants :

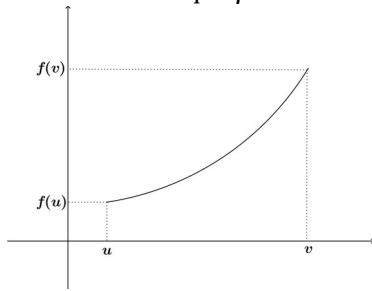
$D = [-1; 5; 8]; B = ]5; 8[$  et  $C = [-1; 5]$ .

### Séquence 3 : Sens de variation

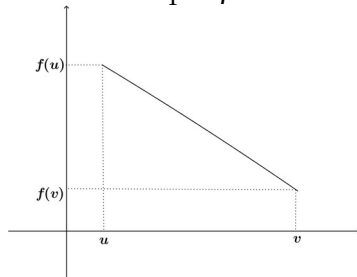
#### Définition :

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $I$  un intervalle inclus dans  $D_f$ .

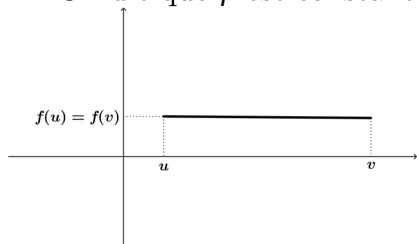
- On dit que  $f$  est croissante sur  $I$  si,  $\forall u, v \in I; u \leq v \implies f(u) \leq f(v)$ .



- On dit que  $f$  est décroissante sur  $I$  si,  $\forall u, v \in I; u \leq v \implies f(u) \geq f(v)$ .



- On dit que  $f$  est constante sur  $I$  si,  $\forall u, v \in I; f(u) = f(v)$ .



#### Activité 1 :

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 3x - 2$ .

Etudier le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Remarque :

Si  $f$  est une fonction affine, c'est-à-dire  $f(x) = ax + b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- $f$  est strictement croissante si  $a > 0$ .
- $f$  est strictement décroissante si  $a < 0$ .
- $f$  est constante si  $a = 0$ .

#### Activité 2 :

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f: [-5 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2x + |x+3| + |1-2x|$$

- Ecrire  $f(x)$  sans la valeur absolue.
- En déduire le sens de variation de  $f$ .
- Représenter graphiquement la fonction  $f$ .

#### Remarque :

On constate que  $f$  est une fonction affine par intervalle.

### ***Séquence 3 : Etude de quelques fonctions usuelles***

#### **1. La fonction carrée :**

##### **Activité :**

Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2$$

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- Etudier le sens de variation de  $f$ .
- Représenter graphiquement  $f$  après avoir rempli le tableau ci-dessous.

|        |    |      |    |                |   |   |   |
|--------|----|------|----|----------------|---|---|---|
| $x$    | -2 | -1,5 | -1 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | 1 | 3 |
| $f(x)$ |    |      |    |                |   |   |   |

#### **2. La fonction racine carrée**

##### **Activité :**

Soit la fonction  $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

- Quel est le domaine de définition de  $g$  ?
- Etudier le sens de variation de  $g$ .
- Représenter graphiquement  $g$  après avoir rempli le tableau ci-dessous.

|        |   |   |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $g(x)$ |   |   |   |   |   |   |   |   |

#### **3. La fonction inverse :**

##### **Activité :**

Soit la fonction  $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de  $h$ .
- Etudier le sens de variation de  $h$ .
- Représenter graphiquement la fonction  $h$  après avoir rempli le tableau ci-dessous.

|        |    |    |    |                |   |               |   |   |   |
|--------|----|----|----|----------------|---|---------------|---|---|---|
| $x$    | -3 | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ |    |    |    |                |   |               |   |   |   |

##### **Evaluation :**

Etudier les variations puis représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + 2; \quad g(x) = 3\sqrt{x} - 2; \quad h(x) = -\frac{5}{x}$$

## Séquence 4 : Fonctions polynômes, Fonctions rationnelles.

### 1. Fonctions polynômes :

#### 1.1 Définition :

On appelle fonction polynôme toute fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  où  $a_n; a_{n-1}; \dots; a_1$  et  $a_0$  appelés coefficients sont des constantes réelles telles que  $a_n \neq 0$ .

On dit que  $f$  est une fonction polynôme de degré  $n$  et on note  $d^\circ f = n$ .

#### Activité :

Développer, réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes de  $x$  les polynômes suivants :

a)  $f(x) = (2x-1)^2 + (3x-2)(x+1)$

b)  $g(x) = (x^3 + 3x^2 - x + 2)(2x-1)$

#### 1.2 Forme canonique :

Soit le polynôme du second degré  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b, c \in \mathbb{R}$ .

L'écriture  $f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$  avec  $\Delta = b^2 - 4ac$  est appelée la forme canonique de  $f(x)$ .

**Exemple :**  $f(x) = 3x^2 - x + 2 = 3 \left[ \left( x - \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{23}{36} \right]$

#### 1.3 Factorisation d'un polynôme du second degré :

Soit le polynôme du second degré  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b, c \in \mathbb{R}$ .

- Si  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ , alors  $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$  avec  $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si  $\Delta = 0$ , alors  $f(x) = a(x-x_0)^2$  avec  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ .
- Si  $\Delta < 0$ , alors on ne peut pas factoriser  $f(x)$ .

#### Activité :

Factoriser si possible les polynômes suivants :

a)  $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

b)  $f(x) = x^2 + 4x + 4$

c)  $f(x) = 3x^2 - x + 2$

#### 1.4 Factorisation d'un polynôme par $x-a$ :

##### Propriété 1 :

Soit  $P$  une fonction polynôme et  $a$  un nombre réel.

Si  $P(a) = 0$ , on dit que  $a$  est un zéro du polynôme  $P(x)$ .

Le polynôme  $P(x)$  est alors divisible par  $x-a$ , c'est-à-dire on peut écrire

$P(x) = (x-a)Q(x)$  où  $Q(x)$  est un polynôme tel que  $d^\circ Q = d^\circ P - 1$ .

##### Propriété 2 :

Deux polynômes  $f(x)$  et  $g(x)$  sont identiques si et seulement si  $d^\circ f = d^\circ g$  et les coefficients de même rang sont identiques.

#### Activité :

Soit le polynôme  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ .

a) Calculer  $f(1)$ .

b) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ .

#### Synthèse :

- la méthode des coefficients indéterminés ;
- la division euclidienne ;
- la méthode de Hörner

### 2. Fonctions rationnelles:

#### 2.1 Définition et ensemble de définition :

On appelle fonction rationnelle toute fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  où  $P(x)$  et  $Q(x)$

sont deux polynômes.

L'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$  est :  $D_f = \{x / x \in \mathbb{R}, Q(x) \neq 0\}$ .

## 2.2 Décomposition en éléments simples :

### Activité :

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 2}$ .

a) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

b) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$ .

### Evaluation :

#### Exercice 1 :

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  définie par :

a)  $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

b)  $f(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$

c)  $f(x) = \sqrt{-2x + 4}$

d)  $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 1}$

2) Soient les fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définies respectivement par :

$f(x) = |x - 2|$  et  $g(x) = 3x - |2x - 1| + |x + 3|$

a) Calculer  $f(0)$  et  $g(-1)$ .

b) Ecris  $f(x)$  et  $g(x)$  sans le symbole de la valeur absolue.

#### Exercice 2 :

Soit le polynôme  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 6$ .

c) Calculer  $f(2)$ .

d) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$  en utilisant :

- la division euclidienne ;
- la méthode des coefficients indéterminés ;
- la méthode de Hörner.

#### Exercice 3 :

1. On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 4}{x + 2}$ .

Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$ .

2. Déterminer le quotient  $q(x)$  et le reste  $r(x)$  de la division euclidienne de  $f(x)$  par  $g(x)$  dans chacun des cas suivants :

a)  $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - x + 3$  et  $g(x) = x + 2$

b)  $f(x) = 4x^2 - 6x + 3$  et  $g(x) = 2x - 1$

c)  $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x + 1$  et  $g(x) = x^2 - x + 1$

#### Exercice 4 :

1) Soit  $f$  la fonction polynôme définie par  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ .

a) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

b) Calculer  $f(1)$ . En déduire les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ .

c) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = 0$ .

d) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $f(x) < 0$

- 2) On considère la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$ .
- a) Déterminer de l'ensemble de définition  $D_g$  de la fonction  $g$ .
  - b) Simplifier  $g(x)$  pour tout réel  $x$  appartenant à  $D_g$ .
  - c) Résoudre l'équation  $g(x) = 6$ .