

Classe : 10ème Commune

Chapitre : 2 Durée : 12H

Fonctions Numériques d'une variable réelle

Domaine : Sciences, Mathématiques et Technologiques

Compétences : Résoudre une situation problème, Communiquer des messages utilisant le langage et le symbolisme Mathématiques.

Composantes : Diagnostiquer la situation problème, mettre à l'essai des pistes de solutions, partager les informations relatives à la démarche et formuler les résultats.

Manifestations : Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation, établir des relations entre les données retenues, inventorier des différentes pistes de solution, Choisir une piste et l'appliquer.

Contenu :

Ressources Educatives :

Ressources humaines : Professeur, élèves,

Ressources Matérielles : Tableau, Livres, cahier, Chiffon, craie, règle, équerre...

Stratégies d'animation : Travaux en groupe (pédagogie active).

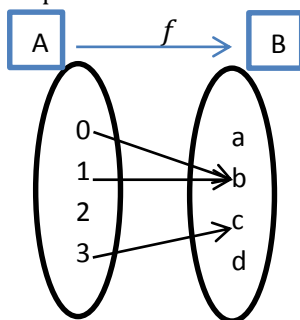
Séquence1 : Généralités

1-Rappels :

On appelle d'un ensemble A vers un ensemble B, toute relation de A vers B qui, à chaque de A associe 0 ou 1 éléments de B.

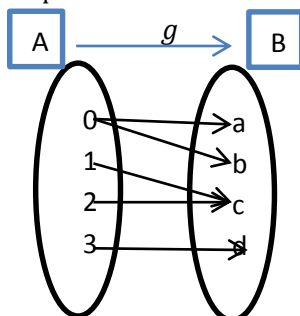
A est dit ensemble de départ et B ensemble d'arrivée.

Exemple 1 :



f est une fonction

Exemple2 :



g n'est pas une fonction car 1 a deux images.

Notation :

$$f: A \rightarrow B$$

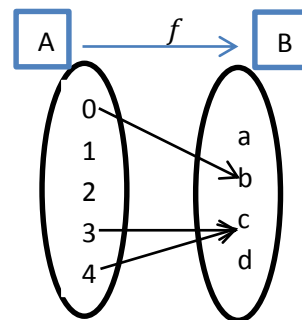
$$x \mapsto f(x)$$

On dit que f est une fonction de A vers B qui à x associe $f(x)$.

$f(x)$ est appelé l'image de x par f et x est l'antécédent de $f(x)$.

2) Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction :

Activité :



Quels sont les éléments de A qui ont un correspondant dans B.

L'ensemble de ces éléments est appelé domaine de définition de f .

Synthèse :

Définition :

Soit $f: A \rightarrow B$ une fonction.

On appelle domaine définition de f note D_f ,

l'ensemble des éléments de A qui ont une image dans B.

Evaluation :

Déterminer le domaine de définition de f dans chacun des cas suivants :

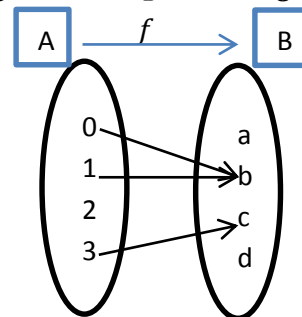
$$f(x) = x^2 + 4x - 5, \quad f(x) = \frac{1}{x-5},$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-7x+6}, \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2x-1}}$$

3) Détermination d'une fonction :

Il existe plusieurs façon de déterminer une fonction

a) Par un Diagramme sagittal :



$$f(0) = f(1) = b \text{ et } f(3) = c$$

b) Par un tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	1	3	5	7	9	11	13

$$f(0) = 5; f(3) = 11$$

c) Par un programme de calcul :

soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

Pour calculer l'image du réel a on procède de la façon suivante :

-on le multiplie par 2

-on ajoute 5 au résultat

-on divise le dernier résultat par 3

$$g(5) = \frac{5 \times 2 + 5}{3} = 5 ; g(2) = \frac{2 \times 2 + 5}{3} = 3$$

d) Par une formule explicite :

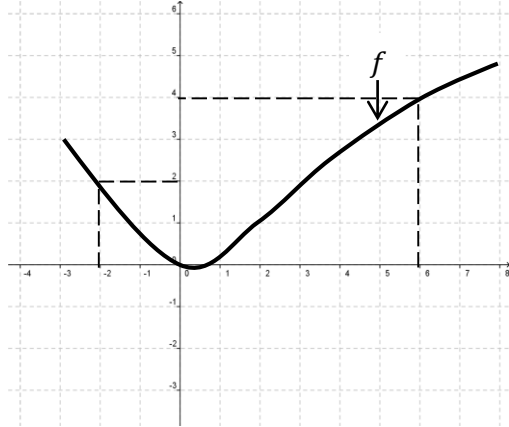
Soit f la fonction définie par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$$

$$f(0) = 3 ; f(-1) = \frac{1}{2}$$

e) Par une représentation graphique :



$$f(-2) = 2 \text{ et } f(6) = 4$$

Séquence 2 : Image directe ; Image réciproque (2heures)

1) Image directe :

Soit f une fonction de E vers F d'ensemble de définition D_f et A une partie de E .

On appelle image directe ou image de A par f notée $f(A)$ l'ensemble des images par f de tous les éléments de A .

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}.$$

Activité 1 :

Soit f une fonction définie par :

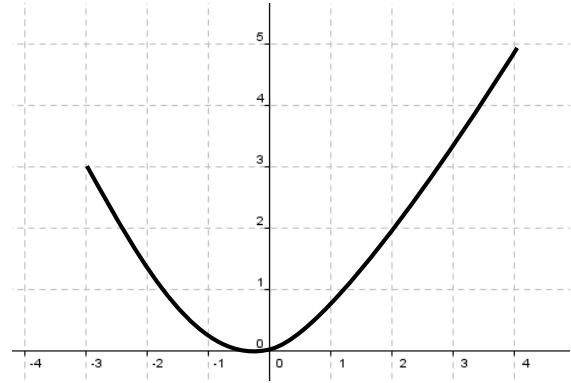
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -2x + 5$$

a) Trouver l'image par f de chacun des nombre suivant : -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2

b) Trouver l'image par f de $A = \{-1 ; 3 ; 5\}$.

Activité 2 : soit f la fonction de $[-3 ; 4]$ vers $\mathbb{R}$, déterminée par sa représentation (C) comme indiqué ci-après.



a) Trouver graphiquement l'image par f de chacun des nombre suivant : -2,5 ; -1 ; 1,5 ; 2 ; 4

b) Trouver graphiquement l'ensemble des images par f des intervalles suivant : $]-3 ; -2[$; $[-2 ; 1]$; $]3 ; 4]$.

2) Image réciproque :

Soit f une fonction de E vers F d'ensemble de définition D_f et B une partie de F .

On appelle image réciproque de B par f notée $f^{-1}(B)$, l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de B .

$$f^{-1}(B) = \{x, f(x) \in B\}$$

Activité 1 :

$$\text{Soit } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x - 1$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2 - x - 2$$

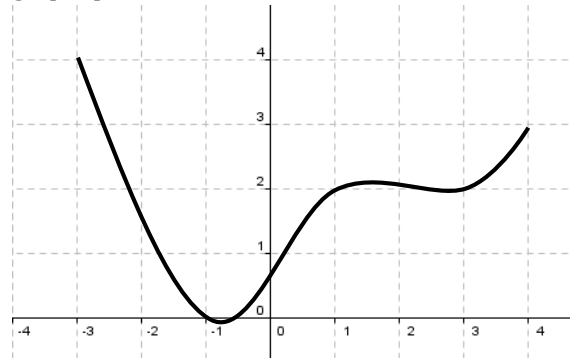
a) Déterminer l'ensemble des antécédents par f de chacun des nombres suivants : -3 ; -1 ; 0 ; 1 ; 3

b) Soient $A = \{-2 ; 4 ; 0\}$ et $B = \{0\}$

Déterminer $f^{-1}(A)$ et $g^{-1}(B)$.

Activité 2 :

Soit la fonction f définie par la représentation graphique ci-dessous :



a) Quel est l'ensemble de définition ?

b) Trouver l'ensemble des antécédents par f de : -1 ; 1 et 2.

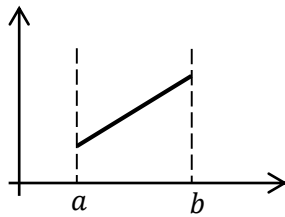
c) Déterminer l'image réciproque par f des intervalles: $[1 ; 2]$; $]0 ; 1[$ et $]3 ; 4]$.

Séquence 3 : Sens de Variation

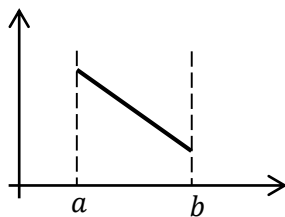
Définition :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, I un intervalle inclus dans D_f .

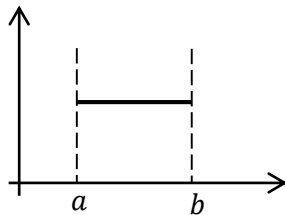
* On dit que f est croissante sur I si,
 $\forall u, v \in I; u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$.



* On dit que f est décroissante sur I si,
 $\forall u, v \in I; u > v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$.



* On dit que f est constante sur I si,
 $\forall u, v \in I; f(u) = f(v)$.



Evaluation :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par
 $f(x) = 3x - 2$.

Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Remarque :

Si f est une fonction affine, c'est-à-dire $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- * f est strictement croissante si $a > 0$.
- * f est strictement décroissante si $a < 0$.
- * f est constante si $a = 0$.

Evaluation :

Soit f la fonction définie par :

$$f: [-5; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x + |x + 3| + |1 - 2x|$$

- Ecrire $f(x)$ sans la valeur absolue.
- En déduire le sens de variation de f .
- Représenter graphiquement la fonction f .

Solution :

- Faire le tableau.
- f est croissante sur $[-5; -3]$ et décroissante sur $[-3; \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; 1]$.

On a le tableau suivant dit tableau de variation de f .

x	-5	-3	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	3	1	$\frac{9}{2}$	7

NB :

$$* f(-5) = 3; f(-3) = 1; f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{2}; f(1) = 7$$

* On constate que f est une fonction affine par intervalle.

c) Représentation

Séquence3 : Etude de quelques fonctions usuelles

1) La fonction carrée :

Activité :

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2$$

- Quel est domaine de définition de f ?
- Etudier le sens de variation de f .
- Représenter graphiquement f après avoir rempli le tableau ci-dessous.

x	-2	-1,5	-1	$-\frac{1}{3}$	0	1	3
$f(x)$							

2) La fonction racine carrée

Activité :

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{x}$

- Quel est domaine de définition de f ?
- Etudier le sens de variation de f .
- Représenter graphiquement f après avoir rempli le tableau ci-dessous.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$					

3) La fonction inverse :

Activité :

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

- Quel est domaine de définition de f ?
- Etudier le sens de variation de f .
- Représenter graphiquement f après avoir rempli le tableau ci-dessous.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$									

Evaluation :

Etudier les variations puis représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5; g(x) = \sqrt{1-x}; h(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

Séquence4 : Fonctions polynômes, Fonctions rationnelles :

1) Fonctions polynômes :

Définitions :

* Toute expression de la forme ax^n est appelée monôme avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : $-5x^7$; 2 ; $3x$ sont des monômes

* On appelle polynôme, toute somme de monômes.

Tout polynôme $P(x)$, admet une écriture de la forme : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

La fonction $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto P(x)$ est appelée une fonction polynôme.

On dit que $P(x)$ est un polynôme de degré n et on écrit $d^0 P = n$.

L'écriture $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ est appelée forme développée, réduite et ordonnée de $P(x)$ suivant les puissances décroissantes de x .

Exemple :

$P(x) = -2x^3 + 5x^2 - 8$ est un polynôme de degré 3 et de coefficients $a_3 = -2$; $a_2 = 5$; $a_1 = 0$ et $a_0 = -8$.

NB :

$P(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) est un polynôme de degré 1.

$P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est un polynôme de degré 2.

Forme canonique d'un polynôme de degré 2 :

Activité :

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un polynôme du second degré.

Vérifier que $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$

Synthèse :

L'écriture

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac$$

est la forme canonique de $P(x)$.

Δ est appelé le discriminant de $P(x)$.

Evaluation :

Mettre sous forme canonique :

$$P(x) = -2x^2 + 4x + 3 ; h(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$$

Factorisation d'un polynôme de degré 2 :

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

— Si $\Delta > 0$, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 =$

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$, $P(x) = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = \frac{-b}{2a}$

— Si $\Delta < 0$, on ne peut pas factoriser $P(x)$.

Exemple :

Factoriser, si possible :

$$2x^2 - 3x + 1 ; 4x^2 - 12x + 9 ; x^2 + x + 1$$

Méthode pratique de la division Euclidienne :

Activité :

a) Soit $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3$ et

$$g(x) = x^2 + 2x + 1$$

Trouver le polynôme $q(x)$, tel que :

$$f(x) = g(x) \times q(x)$$

b) Soit $h(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$ et $p(x) = x^2 - 2x + 1$

Trouver les polynômes $q(x)$ et $r(x)$ tels

$$\text{que } h(x) = p(x) \times q(x) + r(x)$$

Factorisation d'un polynôme par $(x - a)$:

Zéro d'un polynôme :

Soit $P(x)$ un polynôme et $a \in \mathbb{R}$.

Si $P(a) = 0$, on dit que a est un zéro de $P(x)$ et il est divisible par $(x - a)$.

Evaluation :

Soit $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$.

a) Calculer $f(1)$ et $f(2)$.

b) Trouver une factorisation de $f(x)$.

c) Quels sont les zéros de $f(x)$.

Méthode de Hörner :

Soit le polynôme $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$.

Calculer $f(2)$ et en déduire que pour tout réel x ,

$$f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c) \text{ Ou } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels à déterminer.}$$

2) Fonctions rationnelles :

Définition :

On appelle fonction rationnelle toute fonction f telle que $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes.

Exemple :

$$\text{Les fonctions } f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{2x - 7} ; h(x) = \frac{1}{2} + \frac{x - 3}{x^2 + 1}$$

sont des fonctions rationnelles.

Simplification :

Activité :

Soit la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{9 - x^2}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f .

b) Vérifier que 3 est un zéro commun au numérateur et au dénominateur.

c) Trouver une écriture simplifiée de $f(x)$.

Synthèse :

De façon générale si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fonction rationnelle et si α est un zéro commun à P et à Q , alors $f(x) = \frac{(x - \alpha)P_1(x)}{(x - \alpha)Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, pour tous $x \in D_f$ est une forme simplifiée de $f(x)$.

Evaluation :

a) Soit $f(x) = \frac{3x^2-5x+2}{x+3}$

Trouver les réels a, b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}.$$

b) Soit $g(x) = \frac{2x+1}{x(x-1)}$

Trouver les réels a et b tels que : $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$.