

I Ensemble $\mathbb{R}$ et intervalles

a) Définitions

L'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée est appelé l'ensemble des **nombre réels**. On note $\mathbb{R}$ l'ensemble de tous ces nombres.

Remarques :

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres **entiers naturels** (positifs).
- On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres **entiers relatifs** (positifs ou négatifs).

Certaines parties de $\mathbb{R}$ sont appelées des **intervalles**; on les note en utilisant des crochets.

a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Le tableau ci-dessous résume les différents types d'intervalles.

L'intervalle noté ...	est l'ensemble des réels x tels que ...	Représentation de cet intervalle sur une droite graduée
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a; b[$	$a < x < b$	
$]a; b]$	$a < x \leq b$	
$[a; b[$	$a \leq x < b$	
$[a; +\infty[$	$a \leq x$	
$]a; +\infty[$	$a < x$	
$]-\infty; b]$	$x \leq b$	
$]-\infty; b[$	$x < b$	

Vocabulaire: $[a; b]$, $]a; b[$, $]a; b]$ et $[a; b[$ sont des intervalles d'**extrémités** a et b ($a < b$). Le **centre** de l'intervalle est le nombre $\frac{a+b}{2}$, et sa **longueur** est $b - a$.

Remarques : $-\infty$ (moins l'infini) et $+\infty$ (plus l'infini) ne sont pas des nombres, ce sont des symboles. Du côté de $-\infty$ et de $+\infty$, le crochet est toujours ouvert, par convention.

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ se note aussi $]-\infty; +\infty[$.

$$[a; a] = \{a\}$$

$$]a; a[= \emptyset \text{ (ensemble vide)}$$

b) Réunion et intersection d'intervalles

L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à la fois aux deux intervalles.

Le symbole utilisé pour l'intersection de deux intervalles est $\cap$.

L'intersection des intervalles A et B se note $A \cap B$ (on lit "A inter B").

La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à l'un ou l'autre de ces intervalles (les éléments de l'intersection appartiennent aussi à la réunion).

Le symbole utilisé pour la réunion de deux intervalles est $\cup$.

La réunion des intervalles A et B se note $A \cup B$ (on lit "A union B").

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Exemples :

$$\bullet [2 ; 5] \cap [4 ; 6] = [4 ; 5] \quad \text{et} \quad [2 ; 5] \cup [4 ; 6] = [2 ; 6].$$



$$\bullet]-\infty ; 2] \cap [-1 ; +\infty[= [-1 ; 2] \quad \text{et} \quad]-\infty ; 2] \cup [-1 ; +\infty[=]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$$



II Fonctions

a) Définition

$\mathcal{D}$ est une partie de l'ensemble des réels.

Lorsque, à chaque réel x de $\mathcal{D}$ on associe un seul réel y , on définit une **fonction** sur l'ensemble $\mathcal{D}$.

Vocabulaire et notation :

- o $\mathcal{D}$ est l'**ensemble de définition** de la fonction f .
- o x est la **variable**.
- o L'**image** d'un réel x de $\mathcal{D}$ est notée **$f(x)$** (lire « f de x »).
- o x est un **antécédent** de y

Exemple :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$

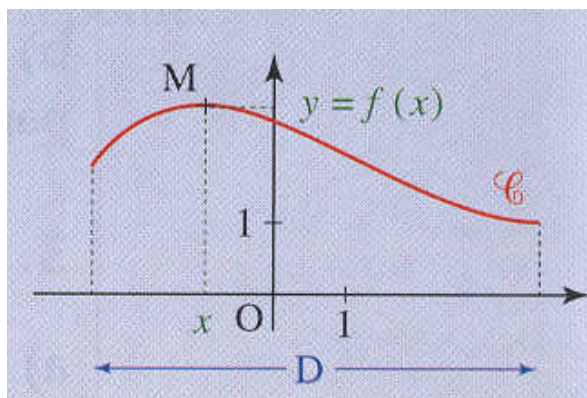
- o 5 a pour image $f(5) = 25 - 3 = 22$
- o -3 a pour image $f(-3) = 9 - 3 = 6$

b) Courbe représentative d'une fonction

Dans un repère, la courbe représentative de la fonction f est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que :

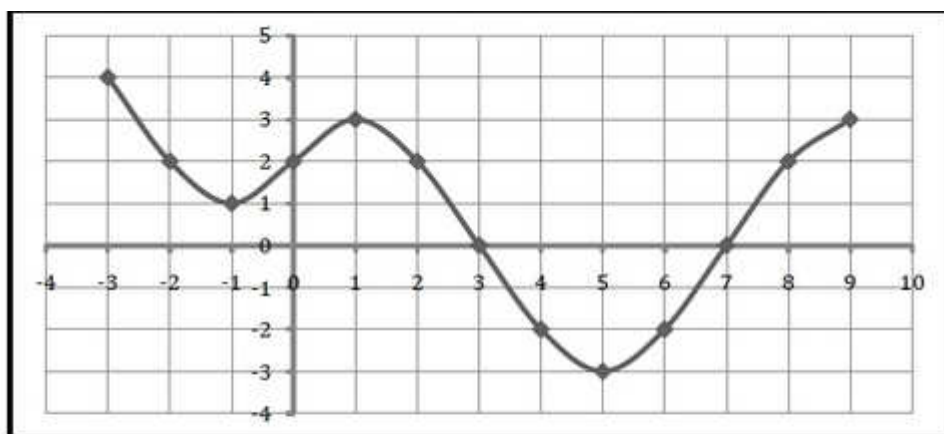
- o L'abscisse x décrit l'ensemble de définition D .
- o et l'ordonnée y est l'image de x par f .

Autrement dit, $x \in D$ et $y = f(x)$



c) Différentes manières pour définir une fonction

Exemple 1 : Une fonction f définie par un graphique



L'ensemble de définition de f est l'intervalle $[-3; 9]$.

Le nombre -3 a pour image 4 , donc $f(-3) = 4$.

Exemple 2 : Une fonction g définie par un tableau

Nombre x	-4	-1	0	2	3
Image $g(x)$	5	4	1	2	4

L'ensemble de définition de g est $D = \{-4; -1; 0; 2; 3\}$.

Le nombre 0 a une seule image : 1 .

$g(-1) = 4$ et $g(3) = 4$ donc les antécédents de 4 par g sont -1 et 3 .

Exemple 3 : Une fonction h définie par une formule

La fonction h associe à un nombre réel x quelconque, le nombre $h(x) = 2x^2 - 3$.

L'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$

On peut aussi écrire : $h : x \mapsto 2x^2 - 3$.

Pour calculer l'image de -5, on remplace x par -5 dans l'expression de $h(x)$:

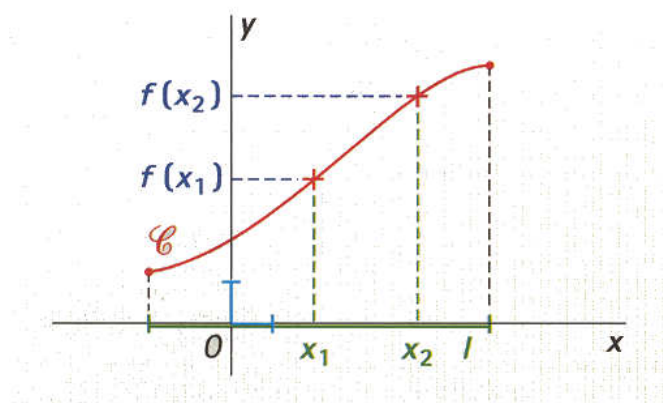
$$h(-5) = 2 \times (-5)^2 - 3 = 47.$$

III Variation - Extremum

a) Sens de variation

Fonction croissante

La fonction f est **croissante** sur l'intervalle I signifie que sur l'intervalle I , si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ augmentent aussi.



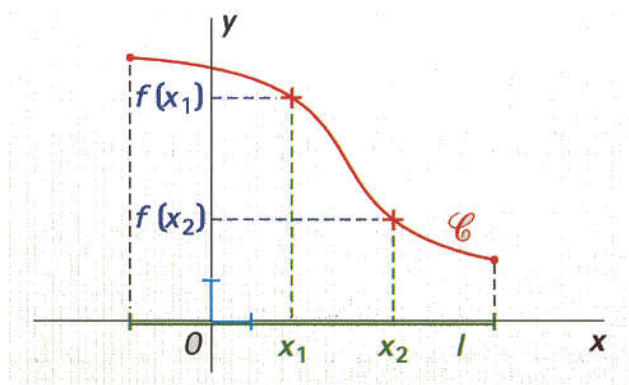
Pour tout $x_1 \leq x_2$

Alors $f(x_1) \leq f(x_2)$

Autrement dit, une fonction **croissante** conserve l'ordre

Fonction décroissante

La fonction f est **décroissante** sur l'intervalle I signifie que sur l'intervalle I , si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ diminuent.



Pour tout $x_1 \leq x_2$

Alors $f(x_1) \geq f(x_2)$

Autrement dit, une fonction **décroissante** change l'ordre.

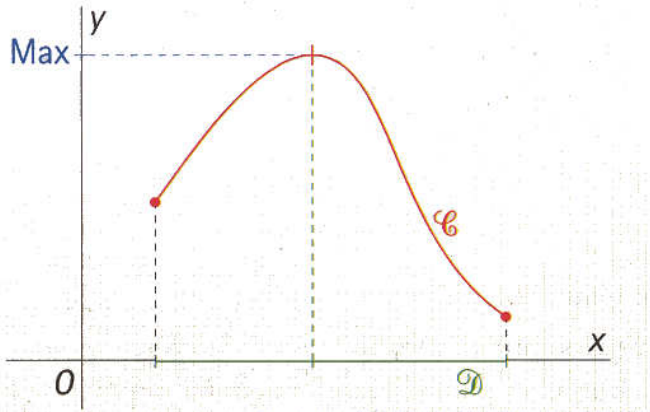
Remarque:

On dira d'une fonction qui prend toujours la même valeur qu'elle est constante.

b) Extremum

Maximum

Sur un ensemble $\mathcal{D}$, le maximum est l'image $f(x)$ la **plus grande** atteinte.

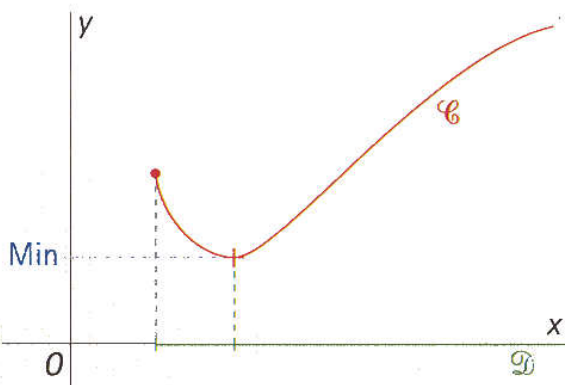


Pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(x) \leq \text{Max}$

Graphiquement : le maximum est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe $\mathcal{C}$.

Minimum

Sur un ensemble $\mathcal{D}$, le minimum est l'image $f(x)$ la **plus petite** atteinte.



Pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(x) \geq \text{Min}$

Graphiquement : le minimum est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe $\mathcal{C}$.

c) Tableau de variation

Etudier les variations d'une fonction, c'est indiquer les plus grands intervalles sur lesquels la fonction est croissante ou décroissante. On résume ces propriétés dans un tableau de variation.

Exemple

La fonction f représentée ci-contre est décroissante sur $[-3 ; -1]$, croissante sur $[-1 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; 5]$.

x	-3	-1	2	5
$f(x)$	3	-1	4	0

