

Polynômes

I) Généralités sur les polynômes

1) Notion de polynômes

a) Introduction

On considère la fonction numérique f de la variable x , définie réelle par :

$$f(x) = (1-2x)(x^2-3) - x^2(4-x) + 5$$

Développer, réduire et ordonner $f(x)$ suivant les puissances décroissantes de x .

Quel est le terme de degré 2 ? Quel est le constant ?

Quel est le coefficient du monôme de plus haut degré ?

On a pris en classe de troisième que $f(x)$ est un polynôme de degré 3 dont la forme réduite et ordonnée est : $-x^3 - 3x^2 + 6x + 2$

a) Définition et théorème fondamental :

α) Définitions :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$.

Toute fonction numérique de la variable x réelle, définie par $f(x) = ax^n$, est appelée monôme de coefficient a et de degré n .

On appelle polynôme toute somme algébrique de monômes.

Exemples :

$F(x) = x^5$ est un monôme de coefficient 1 et de degré 5.

Les fonctions ci-dessus définies respectivement sont des fonctions polynômes. Pourquoi ?

Remarques :

Toute fonction constante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme.

Toute fonction affine est une fonction polynôme.

Un monôme est un polynôme (par exemple

L'ensemble de définition d'un polynôme est

N'est pas une fonction polynôme car son ensemble de définition est

La fonction nulle est un polynome, appelé le polynôme nul (c'est par exemple la somme de

B) Théorème fondamental :

Tout polynôme non nul $P(x)$ peut s'écrire de façon unique sous forme :

Où n est un entier naturel et $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des nombres réels tels que $a_n \neq 0$

Définition :

Un polynôme s'écrit sous la forme : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) est dit réduit et ordonné suivant les puissances décroissantes de x .

n est appelé degré de P . On le note $\deg P$.

Pour tout nombre entier naturel k compris entre 0 et n , $a_k x^k$ est appelé terme de degré k

Propriété :

Deux polynômes sont égaux si et seulement si :

— Ils ont même degré .

Les coefficients des termes de même degré sont égaux.

C'est une conséquence du théorème fondamental puisqu'un polynôme admet une seule forme réduite et ordonnée suivant les puissances décroissantes.