

I – Fonctions Polynômes de degré n :

1°) Définition : On appelle fonction polynôme toute application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à un élément x associe $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + t$ où $a ; b ; c ; \dots ; k ; t$ sont des constantes réels. ($a \neq 0$).

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + t.$$

f est appelée **fonction polynôme** de degré n et $f(x)$ est un **polynôme**.

2°) Développement – réduction – ordonnancement d'un polynôme :

Exemple :

développer , réduire et ordonner suivant les puissances décroissantes de x le polynôme $f(x) = (x^3 + 5x^2 - 4x + 1)(2x^2 - 3x + 7)$

II– Transformation de $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

1–Fonction polynôme du second degré :

Définition : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On dit que f une fonction polynôme du second degré s'il existe 3 réels $a ; b ; c$ ($a \neq 0$) tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

L'expression $ax^2 + bx + c$ est un polynôme du second degré.

Exemples : $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

g est une fonction polynôme de degré 2 ; on écrit : $d^\circ g = 2$

2– Forme canonique d'un polynôme du second degré :

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$) ;

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow$$

$$f(x) = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \Leftrightarrow$$

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \Leftrightarrow$$

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

Cette dernière écriture de $f(x)$ est appelée **forme canonique** du polynôme.

– Exemple1 : mettre sous forme canonique $f(t) = -2t^2 + 4t + 3$.

$$f(t) = -2t^2 + 4t + 3 \Leftrightarrow f(t) = -2(t-1)^2 + 5$$

– Exemple2 : mettre sous forme canonique $f(x) = x^2 + 3t + \frac{1}{2}$

$$f(x) = x^2 + 3t + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}.$$

III– Identification d'une fonction polynôme à un autre :

Soit deux fonctions polynômes f et g tels que pour tout réel x ,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ et}$$

$$g(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \text{ avec } a_n \neq 0 \text{ et } b_p \neq 0$$

$(f = g) \Leftrightarrow (d^\circ f = d^\circ g) \Leftrightarrow (n = p) \text{ et les coefficients de même rang sont identiques}$

1°) Méthode pratique de la division euclidienne :

a°) Soit $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3$ et $g(x) = x^2 + 2x + 1$

Trouver le polynôme $q(x)$ tel que : $f(x) = g(x) \times q(x)$.

$$\begin{array}{r|l}
 & - 0 - \\
 \begin{array}{r}
 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3 \\
 - 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 0 + x^3 + 5x^2 + 7x \\
 - x^3 - 2x^2 - x \\
 \hline
 0 + 3x^2 + 6x + 3 \\
 - 3x^2 - 6x - 3 \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array} &
 \begin{array}{l}
 x^2 + 2x + 1 \\
 \hline
 2x^2 + x + 3
 \end{array}
 \end{array}$$

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)(2x^2 + x + 3) \text{ d'où } q(x) = 2x^2 + x + 3.$$

b°) Soit $h(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$ et $p(x) = x^2 - 2x + 1$.

Trouver les polynômes $q(x)$ et $R(x)$ tels que $h(x) = p(x) \times q(x) + R(x)$.

Réponse : La division nous donne $h(x) = (x^2 - 2x + 1)(x - 2) + (3x - 2)$.

2°) Méthode des coefficients indéterminés :

Soit $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3$ et $g(x) = x^2 + 2x + 1$.

Trouver le polynôme $q(x)$ tel que : $f(x) = g(x) \times q(x)$.

$f(x) = g(x) \times q(x) \Rightarrow$ comme $d^\circ f = 4$ et $d^\circ g = 2$ alors $d^\circ q = 2$.

Posons $q(x) = ax^2 + bx + c$; $f(x) = g(x) \times q(x)$

$$\Leftrightarrow f(x) = (x^2 + 2x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = ax^4 + (2a + b)x^3 + (a + 2b + c)x^2 + (b + 2c)x + c.$$

Par identification à $f(x)$ on a :

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 5 \\ a + 2b + c = 7 \\ b + 2c = 7 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases} \quad d'où \quad q(x) = 2x^2 + x + 3.$$

III– Factorisation d'un polynôme par $(x - a)$:

1°) Zéros d'un polynôme :

Soit f une fonction polynôme et a un réel donné.

si $f(a) = 0$ alors on dit que a est un zéro du polynôme $f(x)$.

2°) Théorème : Soit f une fonction polynôme et a un réel donné.

Le polynôme $f(x)$ est divisible par $x - a$ si et seulement si $f(a) = 0$.

3°) Exemples :

Soit le polynôme $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$.

a) Calculer $f(1)$ et $f(2)$;

b) Trouver une factorisation de $f(x)$;

Réponse :

a) $f(1) = 1 - 5 + 9 - 7 + 2 = 0$ et $f(2) = 16 - 40 + 36 - 14 + 2 = 0$.

b) En faisant la division euclidienne de $f(x)$ par $x+1$ et son quotient par $x-2$, on obtient : $f(x) = (x-1)(x-2)(x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow f(x) = (x-1)^3(x-2)^1$.

4°) Méthode de Hörner :

Soit le polynôme $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$. Calculer $f(2)$ et en déduire que pour tout réel x $f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$, où a ; b ; c sont des réels à déterminer.

Réponse : $f(2) = 0$.

Coefficients	1	-7	16	-12
Zéro = 2		2	-10	+ 12
Coef Cherchés	1	-5	6	0

D'après la méthode de Hörner, $a = 1$; $b = -5$; $c = 6$.

D'où $f(x) = (x - 2)(x^2 - 5x + 6)$

IV – Fonctions Rationnelles :

1°) Définition :

Soient f ; g et h trois fonctions numériques. On appelle fonction rationnelle toute fonction numérique h telle que pour tout réel x , $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $g(x) \neq 0$.

2°) Exemples de décomposition en éléments simples :

a) Exemple 1: Soit $f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x + 3}$;

Trouver les réels a ; b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 3}$.

– 0 –

$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x + 2 \\ - 3x^2 - 9x \\ \hline 0 - 14x + 2 \\ 14x + 42 \\ \hline 0 + 44 \end{array}$	$\begin{array}{r} x + 3 \\ \hline 3x - 14 \end{array}$
--	--

$$f(x) = 3x - 14 + \frac{44}{x+3} \text{ d'où } a = 3 ; b = -14 ; c = 44$$

b) Exemple 2 : soit $g(x) = \frac{2x+1}{x(x-1)}$;

Trouver les réels a et b tels que : $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$

$$g(x) = \frac{a(x-1) + bx}{x(x-1)} = \frac{ax - a + bx}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x - a}{x(x-1)} ;$$

Par identification à $g(x)$ on a : $\begin{cases} a+b=2 \\ -a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$

$$\text{D'où } g(x) = \frac{-1}{x} + \frac{3}{x-1}$$