

FICHE DE SEQUENCE

Classe : 10ème commune

Durée : 3heures

Domaine : SMT

Dixipline : Mathématique

Compétences :

- Résoudre une situation problème ;
- Mettre à profit ces connaissances scientifiques et technologiques

Composantes ; Contenus : Droites et cercles dans le plan.

- Vecteur directeur et vecteur normal
- Equation d'une droite
- Droite parallèle-droite orthogonale
- Coefficient directeur(ou pente) d'une droite
- Représentation paramétrique analytique d'une droite
- Passage d'une représentation paramétrique d'une droite à une représentation cartésienne et vice-versa ;
- Intersection de deux droites ;

Manifestation :

- Prouver que trois points sont alignés
- Savoir montrer qu'un point appartient à un cercle
- Savoir montrer qu'un point appartient à une droite d'équation donnée ;
- Etant donné deux droites savoir prouver si elles sont parallèles, perpendiculaires ;
- Une droite et un cercle étant donné par leurs équations, savoir déterminer leurs positions relative ;
- Savoir trouver une équation (cartésienne ou paramétrique) d'une droite donnée et un cercle ;
- Savoir déterminer graphiquement le coefficient directeur d'une droite représenter dans un repère ;
- Connaissant l'équation cartésienne d'une droite, savoir en donner une représentation paramétrique et inversement ;
- Savoir reconnaître l'ensemble des points M du plan tels que : $AM = r$, A point donné, r réel positif donné. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$; A et B points donnés.

Ressources matérielles : matérielle didactique (règle, équerre, compas, rapporteur, tableau, craie, cahier de recherche)

Stratégie d'animation : travail en groupe (partager la classe en groupe de travail.

Déroulement des activités

R. L. P : Sur un cercle de centre O et de rayon 3cm, l'arc $\widehat{AB}$ a pour longueur π cm. Quelle est la mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$?

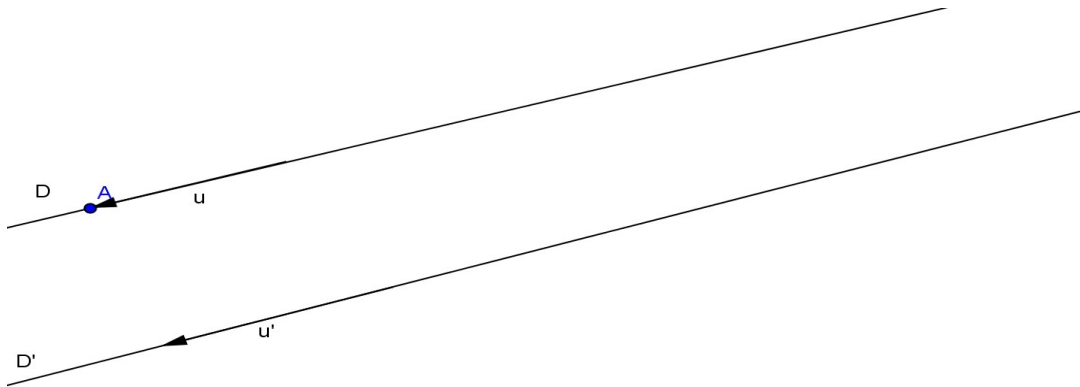
Situation d'apprentissage (méthode pédagogique active)

Droites

I-Vecteur directeur- Vecteur normal

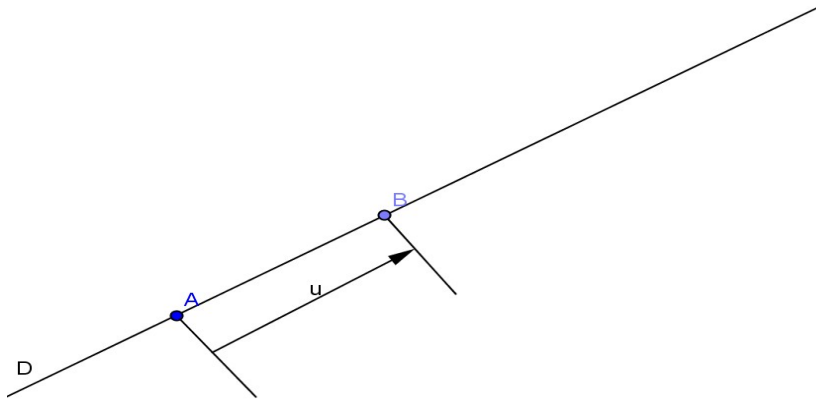
Activité1 : Soit (D) et (D') deux droites ayant respectivement $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ pour vecteur directeurs. Quand dit-on que (D) et (D') sont parallèles.

Synthèse partielle : $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ont même direction et même sens, donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires alors (D) et (D') sont parallèles

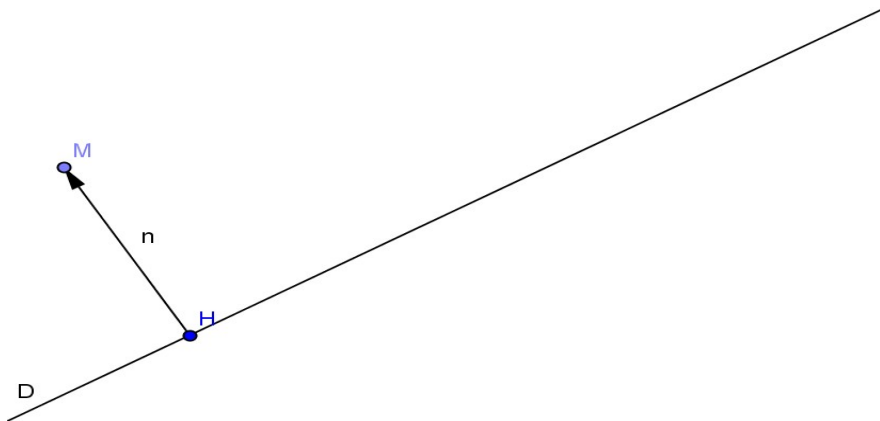


Synthèse générale :

Definition1 : On appelle vecteur directeur d'une droite (D) tout vecteur non nul $\vec{u}$ même direction que (D). On dira que (D) est dirigé par $\vec{u}$



Definition 2 : On appelle vecteur normale a une droite (D) tout vecteur non nul dont la direction est perpendiculaire à celle de (D) .



Notation : La droite (D) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est notée : $D(A ; \vec{u})$.

Remarque : Toute droite (D) admet une infinité de vecteurs normaux tous colinéaires entre eux. Il suffit de considérer tous les vecteurs directeurs d'une droite perpendiculaire à (D).

Propriété : Soit (D) et (D') deux droites ayant respectivement $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ pour vecteurs normaux on a les propriétés suivantes :

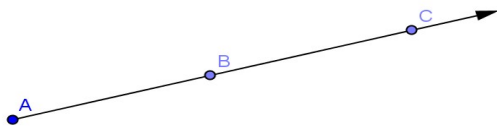
- 1) $(D) \parallel (D') \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n}'$ colinéaires ;
- 2) $(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}'$

II-Equation d'une droite

1) Condition d'alignement de trois points

Activité2 : Placer trois points sur une feuille. Dans quel cas de figure les deux vecteurs formés par ces trois points sont colinéaires.

Synthèse : Les vecteurs formés par ces trois points sont colinéaires, dans le cas où les trois points sont alignés.



Trois points A ; B ; C du plan sont alignés s'il existe un réel k tel que : $\vec{AC} = k \vec{AB}$

2) Equation cartésienne d'une droite : $ax + by + c = 0$

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'obtient en considérant un point M(x ; y) sur la droite (D). Le déterminant des vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ s'annule.

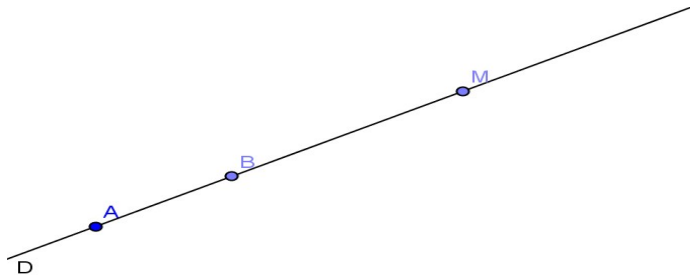
$$[M(x; y) \in D(A; \vec{u})] \quad [\det(\vec{AM}; \vec{u}) = 0]$$

Activité3 : En considérant les informations précédentes, écrire une équation de la droite

$D(A; \vec{u})$ sachant que $A(3/2; 2)$ $\vec{u}(1; 2)$

Synthèse : $\det(\vec{AM}; \vec{u}) = 0 \quad \begin{vmatrix} x-3/2 & 1 \\ y-2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad 2x - y - 1 = 0 \quad (D): 2x - y - 1 = 0$

On peut également déterminer l'équation d'une droite connaissant deux points A et B distincts de cette droite.



$$[M(x; y) \in D(A; B)] \Leftrightarrow [\det(\vec{AM}; \vec{AB}) = 0]$$

Exemple : Soit (D) une droite passant par $A(-1; 3)$ et $B(2; 5)$. Soit $M(x; y)$ un point du plan. Une équation de la droite (D) s'obtient en annulant le déterminant des vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$.

$$\det(\vec{AM}; \vec{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ y-3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 11 = 0 \Leftrightarrow (D): 2x - 3y + 11 = 0$$

Le plan étant muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble des points M du plan P dont les coordonnées x et y sont telles que : $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$; $b \neq 0$) est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$; et de vecteur normal $\vec{v}(a; b)$

Activité4 : trouver un vecteur et un point A de la droite (D) : $5x + 2y - 8 = 0$

Synthèse : Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(-2; 5)$. $A(0; 4)$ est un point de (D)

III-Droites parallèles- droites orthogonales

1) Droite parallèle :

Soient (D) et (D') deux droites d'équations respectives (D) : $3x + 2y - 6 = 0$; (D') : $x + 2/3y - 6 = 0$.

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(-2 ; 3)$; un vecteur de (D') est $\vec{v}(-2/3 ; 1)$. $\text{Dét}(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & -2/3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$

De façon générale : $D(A ; \vec{u}) \parallel D'(B ; \vec{v}) \Leftrightarrow \text{dét}(\vec{u} ; \vec{v}) = 0$

2) Droite orthogonale

Deux droites (D) et (D') d'équations respectives :

(D) : $px + qy + r = 0$ et (D') : $p'x + q'y + r' = 0$ sont perpendiculaires si et seulement si ; $pp' + qq' = 0$

De façon générale : $D(A ; \vec{u}) \perp D'(B ; \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

IV-Coefficient directeur (ou pente) d'une droite

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; soit (D) la droite dont une équation cartésienne est $ax + by + c = 0$. Lorsque $b \neq 0$ c'est-à-dire la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées on peut écrire l'équation sous la forme : $by = -ax - c \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$; en posant $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$ on aura $y = mx + p$

- Le réel m est appelé coefficient directeur de (D)
- Le réel p est appelé l'ordonnée à l'origine de (D)
- On remarque que $\vec{u}(1 ; m)$ est un vecteur directeur de (D)

Exemple : Soit (D) la droite dont une équation cartésienne est $4x + 2y - 5 = 0$. Déterminer son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine

Synthèse : $4x + 2y - 5 = 0 \quad 2y = -4x + 5 \quad y = -2x + \frac{5}{2}$

Le coefficient directeur est $m = -2$ et l'ordonnée à l'origine est $p = \frac{5}{2}$.

$\vec{u}(1 ; -2)$ est un vecteur directeur de (D).

V- Représentation paramétrique analytique d'une droite

a) Exemple : Soit (D) la droite passant par $A(x_0 ; y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha ; \beta)$.

$$[M(x ; y) \in D(A ; \vec{u}) \mid t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\vec{u}]$$

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}; u \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha t \\ y - y_0 = \beta t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ est l'expression paramétrique analytique de (D)}$$

On dit que l'application

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (x_0 + \alpha t; y_0 + \beta t)$$

Est appelée la représentation paramétrique de (D)

Exemple : Soit A (-4 ; 3) et B (2 ; 5) deux points du plan rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). Déterminer la représentation paramétrique analytique de la droite passant par A et B.

$$\text{Synthèse : } M(x; y) \in D(A; \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = 6t \\ y - 3 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 6t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

b) Savoir utiliser une représentation paramétrique

Dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) la droite (D) ayant pour représentation paramétrique

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (4t - 1; -3t + 3)$$

Quelle est l'abscisse du point P d'ordonnée 1 de la droite (D) ?

Synthèse : la droite (D) passe par A (-1 ; 3) et a pour vecteur directeur $\vec{u}(4; -3)$.

$$\text{Soit } P(x; 1) \in D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t - 1 \\ 1 = -3t + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t - 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x = 5/3 \text{ donc } P(5/3; 1)$$

VI-Passage d'une représentation paramétrique d'une droite à une représentation cartésienne et vice-versa

1-Exemple1 : Soit (D) la droite dont une représentation analytique est :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (x; y) \text{ telle que } \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -7 - 2t \end{cases}$$

Déterminer une équation cartésienne de (D)

$$\text{Synthèse : } \begin{cases} x=5+2t \\ y=-7-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{x-5}{2} \\ t=\frac{-y-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-5}{2}=\frac{-y-7}{2} \Leftrightarrow x-5=-y-7 \Leftrightarrow x+y+2=0$$

(D) : $x + y + 2 = 0$ est l'équation cartésienne de (D).

Exemple2 : Soit la droite (D) d'équation cartésienne $3x + 2y - 4 = 0$.

Déterminer une représentation paramétrique analytique de (D).

Synthèse : Soit A (2 ; -1) un point de (D) et $\vec{u}(-2 ; 3)$ un vecteur directeur de (D).

$$M(x ; y) \in (D) \Leftrightarrow \exists ! t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -2t \\ y+1 = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(représentation paramétrique analytique de (D)).

VII-Intersection de deux droites

Soit le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exemple : On donne deux droites (D): $2x + y - 1 = 0$; (D'): $\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+3t \end{cases}$

(D) et (D') sont-elles sécantes ? Si oui, déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (D) et (D')

Synthèse : Soit $\vec{u}(-1 ; 2)$ un vecteur directeur de (D) et $\vec{v}(-1 ; 3)$ un vecteur directeur de (D')

$$\text{Dét}(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même direction d'où on déduit que (D) et (D') sont sécantes au

$$\text{point } I(x ; y) \text{ tels que } \begin{cases} x=2-t \\ y=-3+3t \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$$

En remplaçant x et y par leurs valeurs dans la troisième équation on a :

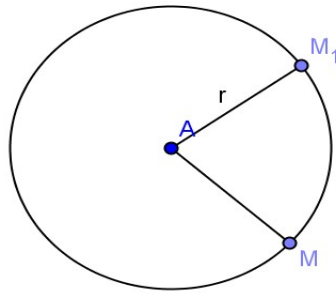
$$2(2-t) + (-3+3t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0, x = 2 \text{ et } y = -3 \Leftrightarrow I(2 ; -3)$$

CERCLES

I-Définition d'un cercle

Activité1 : Construis, puis nommer correctement les différents points d'un cercle.

Synthèse :



Définition : Soit $A(a ; b)$ un point du plan et r un réel strictement positif.

On appelle cercle de centre A et de rayon r l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que :

$$d(a ; M) = r$$

Notation : $C(A ; r)$ désigne le cercle de centre A et de rayon r .

II-Equation du cercle

$$M(x ; y) \in C(A ; r) \Leftrightarrow d(A ; M) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

D'où l'équation d'un cercle de centre A et de rayon r est :

$$C(A ; r) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

En développant l'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ on a :

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$. En posant $c = a^2 + b^2 - r^2$; l'équation du cercle de centre A et de rayon devient : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Remarque : Toute équation de cette forme n'est pas nécessairement l'équation d'un cercle.

III-Ensemble des points définies par : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

Activité2 : Déterminer l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient la relation : $x^2 + y^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0$

Synthèse : $x^2 + y^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 3y - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = 4$

L'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre $A(1 ; -\frac{3}{2})$ de rayon $r = 2$

Activité3 : Déterminer l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient la relation : $x^2 + y^2 + 3x + 5y + 11 = 0$

Synthèse :

$x^2 + y^2 + 3x + 5y + 11 = 0 \quad x^2 + y^2 + 3x + 5y + 11 = 0 \quad (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + (y + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 11 = 0$
impossible

L'ensemble des points M cherchés est $S = \emptyset$

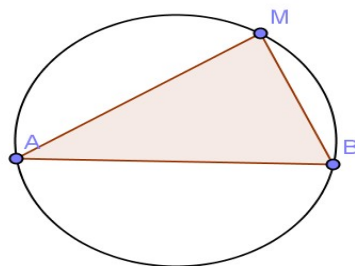
Activité4 : Donner une équation du cercle de centre $A(-3 ; 4)$ et de rayon $r = 5$

Synthèse : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

IV-Divers détermination d'un cercle

1-Cercle défini par son diamètre

Soit $A ; B$ deux points distincts du plan ; C le cercle de diamètre $[AB]$.



Un point M du plan appartient au cercle C de diamètre [AB] $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0)$.

Cette relation nous permet de déterminer l'équation d'un cercle de diamètre [AB]

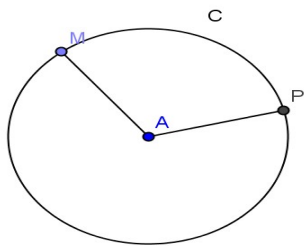
Exemple : Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J) on donne les points A(0; -2) et B(2 ; 1). Donner une équation du cercle de diamètre [AB]

Synthèse : $M(x ; y) \in C \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-0)(x-2) + (y+2)(y-1) = 0$

$x^2 - 2x + y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow (C) : x^2 + y^2 - 2x + y - 2 = 0$

2) Cercle défini par son centre et son rayon

Soient A et P deux points distincts du plan.



Un point $M \in C$ (A ; AP) si, et seulement si $AM^2 = AP^2$

Exemple : Donner une équation du cercle C de centre A (-3 ; 2) et passant par P (0 ; 1)

Synthèse : $M(x ; y) \in C \Leftrightarrow AM^2 = AP^2 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = (0 + 3)^2 + (1 - 2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C : (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 10.$

