

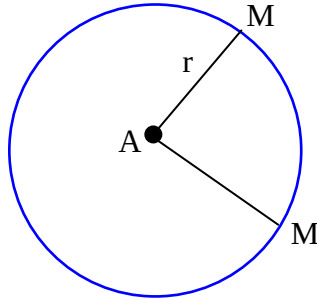
Équation d'un cercle

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Définition d'un cercle

Soit $A(a ; b)$ un point du plan et r un réel strictement positif. On appelle **cercle** de **centre A** et de **rayon r** l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que : $d(A ; M) = r$.

Notation : $\mathcal{C}(A ; r)$ désigne le cercle de **centre A** et de **rayon r**.



II – Équation du cercle

$M(x ; y) \in \mathcal{C}(A ; r) \Leftrightarrow d(A ; M) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. D'où l'équation d'un cercle de centre A et de rayon r est :

$$\mathcal{C}(A ; r) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

En développant l'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ on a :

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$. En posant $c = a^2 + b^2 - r^2$; l'équation du cercle de centre A et de rayon r devient : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Remarque :

Toute équation de cette forme n'est pas nécessairement l'équation d'un cercle.

III– Ensemble des points définis par : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

1- Exemple 1 :

Déterminer l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient la relation : $x^2 + y^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0$.

Solution

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \underline{x^2 - 2x} + \underline{y^2 + 3y} - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 - 1 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 4$$

L'ensemble des points M cherchés est le cercle de centre $A\left(1 ; -\frac{3}{2}\right)$ de rayon $r = 2$

2- Exemple 2 :

Déterminer l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient la relation : $x^2 + y^2 + 3x + 5y + 11 = 0$.

Solution

$$x^2 + y^2 + 3x + 5y + 11 = 0 \Leftrightarrow \underline{x^2 + 3x} + \underline{y^2 + 5y} + 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 11 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{10}{4} \text{ Im possible}$$

L'ensemble des points M cherchés est $S = \emptyset$.

3- Exemple 3 :

Donner une équation du cercle de centre $A(-3 ; 4)$ et de rayon $r = 5$.

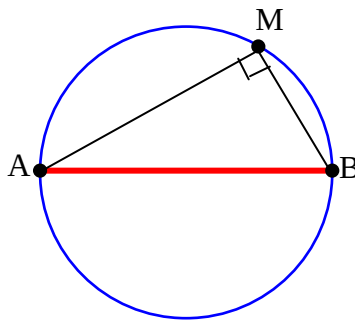
Solution

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0.$$

IV – Diverses déterminations d'un cercle

1- Cercle défini par son diamètre

Soit $A ; B$ deux points distincts du plan ; $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.



.Un point M du plan appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BM} = 0)$.

Cette relation nous permet de déterminer l'équation d'un cercle de diamètre $[AB]$.

Exemple :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J) on donne les points

A(0 ; -2) et B(2 ; 1). Donner une équation du cercle de diamètre [AB].

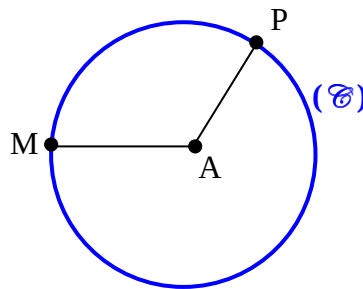
Solution

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-0)(x-2) + (y+2)(y-1) = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 + y + 2 = 0 \Leftrightarrow (C): x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0.$$

2- Cercle défini par son centre et son rayon

Soient A et P deux points distincts du plan.



. Un point $M \in \mathcal{C}(A ; AP)$ si, et seulement si $AM^2 = AP^2$.

Exemple :

Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre A(-3 ; 2) et passant par P(0 ; 1).

Solution

$$M(x ; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow AM^2 = AP^2 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = (0+3)^2 + (1-2)^2$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{C}: (x+3)^2 + (y-2)^2 = 10.$$